განაწილების ფუნქციათა აპროქსიმაცია ოპერაციათა კვლევისა და მართვის ამოცანებში

რევაზ კაკუბავა, გიორგი ჭყოიძე, ლუიზა სიხარულიძე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზუმე

განხილულია შემთხვევითი სიდიდის ზოგადი განაწილების ფუნქციის აპროქსიმაციის საკითხები. სახელდობრ, რეალური განაწილების ფუნქცია ჩანაცვლებულია შედარებით მარტივი სახის (ექსპონენციალური ერლანგის, კოქსის და სხვ.) განაწილების ფუნქციით ისე, რომ მათი ძირითადი რიცხვითი მახასიათებლები – მათემატიკური მოლოდინი და დისპერსია – ერთმანეთს ემთხვეოდეს. ჩატარებულია ასეთი აპროქსიმაციის პრაქტიკული გამოყენების შესაძლებლობათა ანალიზი.

საკვანძო სიტყვები: შემთხვევითი სიდიდე. განაწილების ფუნქცია. ლაპლასის გარდაქმნა. აპროქსიმაცია.

1. შესავალი

ტექნიკური სისტემების ფუნქციონირება, როგორც წესი, მიმდინარეობს ,,მიზეზობრივ იმპულსთა'' ერთი ან რამდენიმე ნაკადის ზემოქმედების პირობებში, ამასთან სისტემის მდგომარეობები იცვლება ნახტომისებურად (მყისიერად) შესაბამისი ნაკადიდან სისტემაში მიზეზობრივი იმპულსების შემოსვლის შემთხვევით მომენტებში. მიზეზობრივი იმპულსების ნაკადი შეიძლება წარმოადგენდეს: ტექნიკური და ფუნქციონალური დანიშნულების ცალკეული ელემენტების მტყუნებათა ნაკადს (უეცარი, თანდათანობითი); კონტროლის, დიაგნოსტიკის და მართვის ორგანოებიდან ჩარევათა ნაკადს; აღდგენების და საკონტროლო პროფილაქტიკების ნაკადს; ტექნოლოგიური პროცესების გადამწოდებიდან საინფორმაციო სიგნალების ნაკადს და ა.შ. [1-3].

მიზეზობრივ იმპულსთა ნაკადები შეიძლება დავახასიათოთ შემოსვლის თანმიმდევრულ მომენტთა შორის დროის ხანგრძლივობით. ყველაზე მარტივ ნაკადს წარმოადგენს პუასონის ნაკადი, რომლისთვისაც დროის ეს ხანგრძლივობები ექსპონენციალურად არის განაწილებული. პუასონის ნაკადს აქვს რამდენიმე შესანიშნავი თვისება, მათ შორის, მერმექმედების უქონლობა, რაც არსებითად ამარტივებს სისტემების მათემატიკურ მოდელირებას. კერძოდ, თუ სისტემაში მხოლოდ პუასონის ნაკადები მოქმედებს, მაშინ მისი მათემატიკური აღწერა შესაძლებელია მარკოვის შემთხვევითი პროცსების ჩარჩოებში დისკრეტული მდგომარეობით და უწყვეტი დროით (მარკოვის ჯაჭვები), რაც საშუალებას იძლევა მივიღოთ მარტივი გამოსახულებები ძირითადი ალბათობებისათვის, მათ შორის საიმედოობის მახასიათებლებისათვის.

ამის გამო პუასონის და ექსპონენციალური განაწილება ფრიად მიმზიდველია მკვლევარებისათვის. ამის გარდა, ასეთი მიდგომა გარკვეულწილად ტრადიციულად ითვლება, თუმცა სამწუხაროდ, ძალზე ხშირად პუასონის მოდელს ღებულობენ საკმარისი თეორიული და ექსპერიმენტული დასაბუთების გარეშე, რაც არსებით შეცდომებს იწვევს.

ნახევარმარკოვულ პროცესებზე გადასვლა საშუალებას იძლევა უარი ვთქვათ პუასონის მოდელზე სისტემაში მიმდინარე ყველა ნაკადებისათვის. პრინციპში, შეიძლება ითქვას, ზოგიერთი სისტემები ,,ემორჩილება'' ეფექტიან ნახევარმარკოვულ აღწერას იმ შემხთვევაში, თუ დროის ყველა მომენტში მასში მოქმედებს რამდენიმე დამოუკიდებელი შემთვხევითი ნაკადი მიზეზობრივი იმპულსებისა, რომელიც იწვევს სისტემის მდგომარეობის შეცვლას. ამასთან, ყველა ნაკადი, ერთის გარდა, პუასონის ნაკადებია (მარკოვის შემთხვევაც დასაშვებია, როდესაც ეს ნაკადიც წარმოადგენს პუასონის ნაკადს). უნდა აღინიშნოს, რომ იმპულსების შემოსვლის მომენტებში პუასონის ნაკადებში შეიძლება ხდებოდეს მხოლოდ ამ ნაკადების გადართვა (ამ მომენტებში შეიძლება იცვლებოდეს ნაკადთა რაოდენობა და მათი მახასიათებლები და ხდებოდეს ,,წარსულის'' მთლიანად დავიწყება), ხოლო იმპულსების შემოსვლის მომენტში არაპუასონის ნაკადში სისტემაში ხდება ყველა ნაკადის გადართვა [3-5].

2. ძირითადი ნაწილი

აღნიშნული საკითხი ავხსნათ შემთვხევითი სიდიდეების და მათი განაწილების ტერმინებში. ჩვენ აღვნიშნეთ, რომ მიზეზობრივი იმპულსების ნაკადები შეიძლება დავახასიათოთ მომდევნო იმპულსებს შორის დროის შემთხვევივი ხანგრძლივობის განაწილებით. მაგალითად, ელემენტის ან მოწყობილობათა უმტყუნო მუშაობის დრო წარმოადგენს სწორედ ასეთ შემხთვევით სიდიდეს.

შეიძლება ითქვას, რომ დროის ნებისმიერ მომენტში სისტემაში სრულდება ერთი ან რამდენიმე რეალური ან ფიქტიური ოპერაცია. რეალური ოპერაციები ნამდვილად სრულდება და მოითხოვს შრომის გარკვეულ დანახარჯებს. ასეთ ოპერაციას წარმოადგენს, მაგალითად, მტყუნებული მოწყობილობის აღდგენა. ფიქტიური ოპერაციები სინამდვილეში არ ასრებობს და ისინი შემოაქვთ სისტემის მათემატიკურ მოდელში, რათა უფრო მოხერხებული იყოს მისი აგება და გამოკვლევა.

ფაქტიური ოპერაციების ერთ-ერთ მაგალითს წარმოადგენს „მოწყობილობის მტყუნების მოლოდინის ოპერაცია“, რომლის დასრულება ნიშნავს მოწყობილობის მტყუნებას (სისტემაში მტყუნების იმპულსის შემოსვლას). შემდეგში ჩვენ მას ვუწოდებთ მტყუნების ოპერაციას. მტყუნებათა ოპერაციების ხანგრძლივობების განაწილება იძლევა მტყუნებათა ნაკადების აღწერას. იგივე შეიძლება ითქვას სხვა ნაკადებზეც. თუ ოპერაციათა ხანგრძლივობას, როგორც შემხთვევით სიდიდეს, აქვს ექსპონენციალური განაწილება, ჩვენ ვუწოდებთ მას ექსპონენციალურ ოპერაციას. ანალოგიურად, სხვა ოპერაციებს ვუწოდებთ ამ ოპერაციის ხანგრძლივობის განაწილების კანონის სახელს, მაგალითად, ერლანგის ოპერაცია, ნორმალური (გაუსის) ოპერაცია, დეტერმინირებული ოპერაცია და სხვ.

ახლა ტექნიკური სისტემის ნახევარმარკოვული აღწერის შესახებ შემოტანილი ცნებების დახმარებით, შეიძლება ასე ვილაპარაკოთ: სისტემა „ემორჩილება“ ეფექტიან ნახევარმარკოვის აღწერას, თუ მასში ერთდროულად სრულდება არა უმეტეს ერთი არაექსპონენციალური ოპერაციისა (რეალური ან ფიქტიური).

ამასთან ერთად, ძნელია წარმატებას მივაღწიოთ, თუ ვეცდებით ტექნიკური სისტემების ნახევარმარკოვული აღწერის ჩარჩოებიდან გამოსვლას მათი ანალიზის და დაპროექტების მიზნით. ამიტომაც იმ შემხთვევაში, როდესაც სისტემაში ერთდროულად სრულდება ორი ან ორზე მეტი არაექსპონენციალური ოპერაცია, უპირველეს ყოვლისა, ცდილობენ მოახდინონ ნებისმიერი განაწილების აპროქსიმაცია უფრო მარტივი განაწილებით სისტემის ნახევარმარკოვული აღწერის შესაძლებლობის შენარჩუნების მიზნით. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ეს ნიშნავს, რომ რაიმე შემთვხევითი სიდიდის (ოპერაციის ხანგრძლივობის) ნებისმიერი განაწილების მაგივრად განხილული იქნას სხვა განაწილება, გარკვეული თვალსაზრისით, საწყის განაწილებასთან მიახლოებული.

ძირითადი ანალიზური შედეგები ტექნიკური სისტემების ნახევარმარკოვული აღწერისას შეიძლება მივიღოთ ნებისმიერი ოპერაციების ხანგრძლივობების განაწილების ასეთი ფუნქციებით აპროქსიმაციის შემთვხევაში, რომლებსაც აქვთ ლაპლასის (ან ლაპლას-სტილისტიესის) გარდაქმნა რაციონალური ფუნქციების სახით.

$$F(s) = \frac{E(s)}{B(s)};$$

სადაც E(s) და B(s), შესაბამისად m და n ($n \geq m$) ხარისხების პოლინომია.

ლაპლასის რაციონალური გარდაქმნის მქონე განაწილების ფუნქციათა კლასი საკმაოდ ფართოა და შეიცავს ექსპონენციალურ განაწილებას, ერლანგის განაწილებას, ჰიპერექპონენციალურ განაწილებას, კოქსის განაწილებას და სხვ.

k რიგის ერლანგის განაწილება წარმოადგენს ექსპონენეციალური განაწილების k-ჯერად ნახვევს, ამიტომაც შესაძლებელია მისი ინტერპრეტირება, როგორც ისეთი ოპერაციის განაწილება,

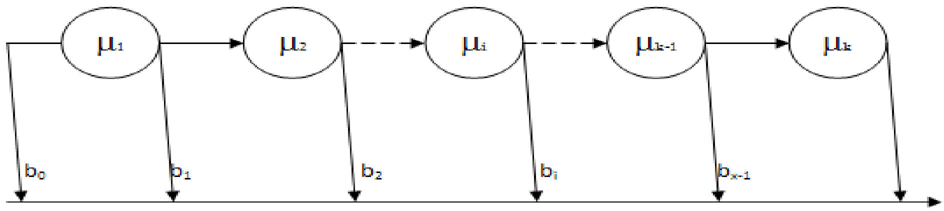
რომელიც შედგება ექსპონენციალურად განაწილებულ მიმდევრობით შეერთებულ ქვეოპერაციებისაგან.

ანალოგიურად ჰიპერესქპონენციალური განაწილება შეიძლება წარმოავადგინოთ პარალელური ოპერაციების დახმარებით. ასეთი წარმოადგენის საფუძველზე რეალიზებულია სისტემების ზუსტი და მიახლოებითი ანალიზის ერთ-ერთი ყველაზე ცნობილი მეთოდი – ეტაპების მეთოდი.

ექსპონენციალური განაწილების მერმექმედების უქონლობის გამო ეტაპების მეთოდით აღწერილი სტოქასტური პროცესი წარმოადგენს მარკოვის ტიპის პროცესს. ასე, რომ შეიძლება გამოვიყენოთ ანალიზის კარგად ცნობილი მეთოდები. ეტაპების მეთოდის გამოყენება საშუალებას იძლევა მივიღოთ ლაპლასის რაციონალური გარდაქმნის მქონე განაწილების ფუნქციათა ფართო კლასი.

1-ელი ნახაზი ილუსტრირებს ფიქტიური ეტაპების დახმარებით კოქსის განზოგადებული ფუნქციის წარმოადგენას. a_0 ალბათობით სრულდება პირველი ქვეოპერაცია, ხოლო $b_0=1-a_0$ ალბათობით ეტაპის ხანგრძლივობა ნულს უდრის, i-ურ ეტაპზე (i=1,2,…, k-1) ქვეოპერაციის დასრულების შემდეგ a_i ალბათობით გრძელდება (i+1) ქვეოპერაცია და $b_i=1-a_1$ ალბათობით ოპერაცია მთავრდება i-ის ეტაპზე, კოქსის განაწილების ლაპლასის გარდაქმნას აქვს შემდეგი სახე:

$$F(s) = b_0 + \sum_{i=1}^{k} a_0 ... a_{i-1} b_i \prod_{j=1}^{i} \frac{\mu_j}{s+\mu_j}$$



ნახ.1

ნებისმიერი განაწილების ექსპონენციალური განაწილების კომბინაციებით აპროქსიმაციის შესაბძლებლობის მკაცრ დასაბუთებას იძლევა შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა: ვთქვათ, Q(x)-განაწილების ნებისმიერი ფუნქციაა, რომელიც ემორჩილება პირობას Q(0)=0 და E -ერლანგის განაწილებათა უსასრულო ნარევების კლასი, მაშინ ნებისმიერი a და ε>0 რიცხვებისთვის მოიძებნება ისეთი განაწილება $F(x)\in E$, რომ

$$\int_0^\infty [F(x) - Q(x)] e^{-ax} dx < \varepsilon$$

აღნიშნული თეორემა მართებულია ერლანგის განაწილებათა სასრული ნარევების შემთვხევაშიც [3].

ოპერაციათა კვლევისა და მართვის ამოცანებში განსაკუთრებული მნივშნელობა აქვს ნორმალური (გაუსის), ასევე ლოგარითმულ - ნორმალური განაწილების გამოყენებას. ამასთან, რადგან ოპერაციის ხანგრძლივობა არ შეიძლება უარყოფითი იყოს ამ დროის თეორიული განაწილება პრაქტიკულად კონცენტრირებული იქნება დადებით ნახევარღერძზე, ამიტომაც შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ მოცემული თეორემის პირობები სრულდება. იგივე შეიძლება ვამტკიცოთ ლოგარითმულ-ნორმალური განაწილების შესახებ. ამ პირობებში ნორმალური და ლოგარითმულ-ნორმალური განაწილების აპროქსიმაციის პერსპექტივები ფრიად მიმზიდველია [2-3].

პრაქტიკულ შემთხვევებში, ჩვეულებრივ, განხილავენ განაწილების ფუნქციათა ორ ძირითად მახასიათებელს: მათემატიკურ მოლოდინს τ და დისპერსიას D (ან ω ვარიაციის კოეფიციენტს). განაწილების ფუნქციის ასეთი მოცემა მტკიცდება იმით, რომ მრავალი სისიტემის მახასიათებლები

განისაზღვრება მიმდინარე ოპერაციის ხანგრძლივობის განაწილების ფუნქციის პირველი ორი მომენტით. დასაბუთებულია, რომ τ და ω მოცემული მნიშვნელობებით განაწილების ფუნქციის აპროქსიმაცია შეიძლება ეფექტიანად ჩატარდეს განზოგადებული ერლანგის განაწილებით თუ $\omega<1$, და მეორე რიგის ჰიპერექსპონენციალური განაწილებით, თუ $\omega>1$[1-2].

თუ უფრო მაღალი სიზუსტის მისაღწევად საჭიროა არა მხოლოდ პირველი ორი მომენტის, არამედ სხვა რიცხვითი მახასიათებლების დამთხვევა, მაშინ საჭირო იქნება უფრო რთული - ჰიპერერლანგის განაწილების გამოყენება. მაგრამ ეს იწვევს აგებული შემთხვევითი პროცესის მდგმარეობის სივრცის განზომილების გადიდებას და მაშასადამე გამოანგარიშებების დიდ მოცულობას, რაც პრაქტიკული მიზნებისათვის არასასურველია.

3. დასკვნა

ჩატარებული ანალიზის საფუძველზე დასაბუთებულია რომ რეალურ სისტემაში განაწილების ისეთი ფუნქციების გამოყენების მაღალი ეფექტურობა, რომლებსაც აქვთ ლაპლასის (ან ლაპლას-სტილტიესის) გარდაქმნა რაციონალური ფუნქციების სახით. ზოგად შემთხვევაში ესენია ერლანგის განაწილებათა სასრული ან უსასრულო ნარევები.

ლიტერატურა:

1. Kleinrock L. Queuing Systems: Volume 1 – Theory. Wiley Interscience, New York, 1975
2. Beichelt F., Franken P. Zuverlässigkeit und Instandhaltung. Mathematische Methoden. VEB Verlag Technik, Berlin, 1983
3. Ushakov I.A.,Harrison R.A.Handbook of Reliability Engineering, J. Wiley & sons, NewYork'94
4. Korolyuk V.S., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space. World Scientific, Imperial Coledge Press, 2005
5. Kakubava R. Multi-line Markov closed queuing system for two maintenance operations. El.J. Reliability & Risk Analysis: Theory & Applications. Vol.1 No. 1, issue of March, 2010

APPROXIMATION FOR DISTRIBUTION FUNCTIONS IN THE PROBLEMS OF OPERATIONS RESEARCH AND CONTROL

Kakubava Revaz, Chkoidze Georg, Sikharulidze Luiza

Georgian Technical University

Summary

In this article the problem of approximation for arbitrary distribution functions is considered. Namely, the real distribution function is replaced by the function of more simple form (exponential, Erlang, Coks, etc.). For all that the main numerical characteristics – mathematical expectation and standard deviation coincide. The analysis for possibility of practical application of such approximation is carried out.

АПРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДИЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ИСЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ И УПРАВЛЕНИЯ

Какубава Р., Чкоидзе Г., Сихарулидзе Л.

Грузинский Технический Университет

Резюме

Рассматриваются вопросы апроксимации произвольных функции распределения. В часности реалъная функция распределения заменяется функцией более простого вида (Экспоненциалное, Эрланга, Кокса и др.) таким образом, что основные числовые характеристики – математическое ожидание и дисперсия совпадают. Проводится анализ возможности практического применения такой апроксимации.