რამდენიმე სახეობის პროდუქციის მინიმალური დანახარჯებით წარმოების ამოცანა შეზღუდული რესურსების პირობებში

ია გიაშვილი
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

განხილულია რამოდენიმე სახეობის პროდუქციის მინიმალური დანახარჯებით წარმოების ამოცანა შეზღუდული რესურსების და საბაზრო ფასების პირობებში. შემოთავაზებულია ოპტიმიზაციის მოცემული ამოცანის გადაჭრის ზოგად პრინციპებზე აგებული მოდელი.

საკვანძო სიტყვები: ოპტიმიზაციის მოდელი. დანახარჯების მინიმიზაცია. შეზღუდული რესურსები. წრფივი პროგრამირება.

1. შესავალი

მიუხედავად იმისა, რომ პროდუქციის წარმოების დაგეგმვის მრავალი სიტუაცია არსებობს და პროდუქციის ხასიათის მიხედვით პრაქტიკაში წარმოიშვება მრავალფეროვანი ამოცანები, შესაძლოა საწარმოო პროცესები დაჯგუფდეს ისე, რომ შემუშავდეს საერთო პრინციპებზე აგებული მოდელი, რომელიც უზრუნველყოფს ინფორმაციულად მომავალ საქმიანობასთან დაკავშირებული გადაწყვეტილებების მიღების პროცესს.

2. ძირითადი ნაწილი

მმართველობითი გადაწყვეტილების მიღებისას ერთ-ერთი ამოცანაა რამოდენიმე სახეობის პროდუქციის მინიმალური დანახარჯებით წარმოება შეზღუდული რესურსების და მოცემული ფასების პირობებში.

წარმოდგენილი მოდელი აგებულია შემდეგ წინამძღვრებზე:

- n სახეობის პროდუქციის წარმოება ხდება ერთ საწარმოო უბანზე;
- დაგეგმვის ინტერვალი შედგება m პერიოდისაგან და თითოეულ მათგანში შეიძლება იქნას წარმოებული თითოეული სახეობის პროდუქციის გარკვეული რაოდენობა;
- არ არის დაუმთავრებელი წარმოება, ანუ პროდუქციის გარკვეული პარტიის წარმოება სრულდება დაგეგმვის ინტერვალის ერთ პერიოდში;
- თითოეული პერიოდისათვის განსაზღვრულია მოთხოვნა ყველა სახეობის პროდუქციაზე.

განხილული წარმეობის დაგეგმვის ამოცანის ფორმულირება შეიძლება შემდეგნაირად. ინტერვალის თითოეული m პერიოდისთვის განსაზღვრულია მოთხოვნა თითოეულ n სახეობის პროდუქციაზე

$$r_{ik} \geq 0, \text{ სადაც } i=1,2,...,n;\ k=1,2,...,m$$

და თითოეული სახეობის პროდუქციის მთლიანი მოთხოვნა დადებითია:

$$\sum_{k=1}^{m} r_{ik} > 0$$

დაგეგმვის ინტერვალის თითოეულ პერიოდში შეიძლება იქნას წარმოებული ნებისმიერი ასორტიმენტის პროდუქცია, თუმცა ერთი საწარმოო უბნის პირობებში გამოშვებული პროდუქციის მოცულობა განსაზღვრულია, რაც განპირობებულია საწარმოო საიმძლავრეების, სამუშაო დროის და ა.შ. შეზღუდვებით.

აქედან გამომდინარე, მიზანია ისეთი საწარმოო გეგმის განსაზღვრა, რომლის დროსაც ხდება ყველა სახეობის პროდუქციაზე მოთხოვნის დაკმაყოფილება საწარმოო სამძლავრეების შეზღუდვების პირობებში.

ავღნიშნოთ x_{ik} i-ური სახეობის პროდუქციის რაოდენობა, რომელიც გამოშვებულია დაგეგმვის პერიოდის k-ურ ინტერვალში. დავუშვათ, რომ საწყისი მარაგი $y_{i0}=0$, $i=1,2,...,n$. მაშინ

მოთხოვნის დაკმაყოფილების თვალსაზრისით პროდუქციის წარმოების გეგმა დასაშვებია, თუ y_{ik} - i-ური სახეობის პროდუქციის მარაგს k ინტერვალის ბოლოს არაუარყოფითი მნიშვნელობა ექნება, ანუ

$$y_{ik} = \sum_{k=1}^{m} (x_{ik} - r_{ik}) \ \geq 0 \ , \ \ i = 1,2,\ldots,n \, ; \ k = 1,2,\ldots,m$$

დავუშვათ ასევე, რომ მოცემულია R სახეობის რესურსი და k-ურ ინტერვალში i-ური სახეობის პროდუქციის x_{ik} რაოდენობის წარმეობისას იხარჯება რესურსი რაოდენობით $a_{ir}^{k}(x_{ik}) \geq 0$, r=1,2,...,R.

შეზვღუდვები, რომელიც ეხება რესურსების გამოყენებას ინტერვალის თითოეულ პერიოდში, განისაზღვრება როგორც

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^{k}(x_{ik}) \leq b_{1}^{k}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{iR}^{k}(x_{ik}) \leq b_{R}^{k} \quad , \qquad k = 1,2,\ldots,m$$

სადაც $B^{k} = (b_{1}^{k}, \ b_{2}^{k}, \ldots, b_{R}^{k})$ - რესურსების ვექტორია, რომელიც შეესაბამება დაგეგმვის ინტერვალის k-იურ პერიოდს.

i-ური სახეობის პროდუქციის წარმოების გეგმას (x_{i1}, x_{i2}, …, x_{im}) შეესაბამება წარმოების დანახარჯები:

$$C(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im}) = \sum_{k=1}^{m} C_{ik}(x_{ik})$$

სადაც $C_i(x_{ik})$ არის k-იურ ინტერვალში წარმოებული x_{ik} რაოდენობის i-ური სახეობის პროდუქციის წარმოების დანახარჯები. წარმოების დანახარჯების ფუნქცია $C_{i}^{k}(x_{ik})$ შეზნექილია, რაც ასახავს პროდუქციის ერთეულის წარმოების დანახარჯების დამოკიდებულებას პარტიის მოცულობაზე.

ამგვარად, საწარმოო გეგმის ოპტიმიზაციის ამოცანა (I) მთლიანი დანახარჯების მინიმიზაციის კრიტერიუმით, შეზღუდული რესურსების პირობებში, მთლიანობაში შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} C_{ik}(x_{ik}) + h_{ik}(y_{ik}) \tag{1}$$

როდესაც

$$x_{ik} = r_{ik} + y_{ik} - y_{i,k-1} \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^{k}(x_{ik}) \leq b_{1}^{k} \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{iR}^{k}(x_{ik}) \leq b_{R}^{k} \quad , \tag{4}$$

$$i = 1,2,\ldots,n; \ x_{ik} \ \geq 0; \ \ y_{ik} \geq 0; \ \ y_{i0} = 0$$

მიზნობრივი ფუნქცია (1) როგორც შეზნექილი ფუნქციის ჯამი, არის შეზნექილი და მისი მინიმუმი მიიღწევა დასაშვები მნიშვნელობების არის უკიდურეს წერტილზე, ტოლობა (2) ნიშნავს, რომ დაგეგმვის პერიოდის k-ურ ინტერვალში მოთხოვნის დაკმაყოფილება ხდება წინა ინტერვალიდან გადმოსული მარაგის და ამ ინტერვალში წარმოებული პროდუქციით, ხოლო ნაშთი გადადის მომდევნო ინტერვალის მარაგად. (3) შეზღუდვების მარცხენა მხარე შეესაბამება პროდუქციის ერთეულზე დახარჯული რესურსების პარტიის მოცულობაზე დამოკიდებულების

ზოგად შემთხვევას.

ამოცანის ცალკეული კომპონენტების ინტერპრეტირება შეიძლება შემდეგნაირად.

ვთქვათ k_{ik} მოსამზადებელ-დამამთავრებელი სამუშაოების დანახარჯებია, რაც დაკავშირებულია k-ურ ინტერვალში i-ურ სახეობის პროდუქციის წარმოებაში ჩაშვებსთან ან წარმოების შეწყვეტასთან. თუ მომდევნო ინტერვალის დანახარჯები თავდაპირველი ინტერვალის დანახარჯებთან დაკავშირებულია დისკონტის კოეფიციენტით, მაშინ

$$k_{ik}=\gamma^{k-1}\cdot k_{i1}, \text{ სადაც } 0<\gamma\leq 1, k=1,2,\ldots,m$$

x_{ik} რაოდენობის i-ური სახეობის პროდუქციის წარმოების დანახარჯი შეიძლება იქნას გამოსახული შემდეგი შეზნექილი ფუნქციით

$$C_{ik}(x_{ik})=\begin{cases} C_{ik}x_{ik}^{\mu}+k_{ik}, & \text{თუ } x_{ik}>0 \\ 0, & \text{თუ } x_{ik}=0, \end{cases}$$

მოცემული დანახარჯების გათვალისწინებით

$$C_{ik}(x_{ik})=(C_{i1}\cdot x_{ik}^{\mu}+k_{i1})\gamma^{k-1}, \quad \text{სადაც } x_{ik>}0,\ 0<\mu\leq 1{,}0<\gamma\leq 1.$$

არაწრფივი ამოცანის (I) ამოხსნა იმის გათვალისწინებით, რომ ცალკეულ საწარმოო უბანზე შეიძლება ხდებოდეს დიდი რაოდენობით სხვადასხვა პროდუქციის დამუშავება, დაკავშირებულია მნიშვნელოვან მათემატიკურ და გამოთვლით სირთულეებთან. თუმცა, რადგან ამოცანაში ხდება შეზნექილი ფუნქციის მინიმიზაცია, შეიძლება შემოვიფარგლოთ დასაშვებ მნიშვნელობათა არის წვეროების განხილვით. გაანალიზებული ვარიანტების სიმრავლის ეფექტური შემცირება შეიძლება უპირატესობის თეორიის გამოყენებით, რომლის თანახმადაც საკმარისია განხილულ იქნას პროდუქციის წარმოების გეგმები, რომლებიც აკმაყოფილებს ტოლობას:

$$y_{i,k-1}\cdot x_{ik}=0\,, k=1,2,\ldots,m,\ \ i=1,2,\ldots,n$$

i-ური სახეობის პროდუქციის (r_{i1}, r_{i2}, …, r_{im}) მოთხოვნის თითოეული ნაკრებს შეესაბამება შესაძლო გეგმების განსაზღვრული სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებს (5) პირობას, მაგრამ ზოგიერთი კომბინაცია შეიძლება დაუშვებელი იყოს (I) შეზღუდვების გათვალისწინებით.

ავღნიშნოთ V_i i-ური სახეობის პროდუქციის წარმოების გეგმების სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს (5) პირობას, ხოლო J_i - V_i სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა.

V_i-ის თითოეული ელემენტისთვის შეიძლება იქნას გამოთვლილი წარმოების დანახარჯები. ავღნიშნოთ V_i-ს სიმრავლის j-ური ელემენტი $x_{ij}=(x_{i1}^{j},x_{i2}^{j},\ldots,x_{im}^{j}), j=1,2,\ldots,J_i$. მაშინ x_{ij} წარმოების დანახარჯებია

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{m}C_{ij}(x_{ik}^{j})$$

მოთხოვნის დაკმაყოფილების პირობა V_i–დან ერთ-ერთი წარმოების გეგმის მიხედვით განისაზღვრება როგორც

$$\sum_{j=1}^{J_i}\theta_{ij}=1,\theta_{ij}=0{,}1$$

სადაც θ_{ij}- ბინარული ცვლადია და $\theta_{ij}=1$ შეესაბამაბა i-ური სახეობის პროდუქციაზე მოთხოვნის დაკმაყოფილებას V_i სიმრავლიდან j-ური გეგმის მიხედვით.

დაშვებით, რომ i-ური სახეობის პროდუქციის მოთხოვნის დაკმაყოფილება ხდება V_i-დან ერთ-ერთი გეგმის მიხედვით, ამოცანას (I) შეესაბამება მთელრიცხვა პროგრამირების ამოცანა:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i}C_{ij}\cdot\theta_{ij}-\text{ის მინიმიზაცია,}$$

როდესაც

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i} a_{ijr}^{k} \cdot \theta_{ij} \le b_1^k$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{J_i} a_{ijr}^{k} \cdot \theta_{ij} \le b_r^k\,;\;\; k = 1,2,\dots,m;\; r = 1,2,\dots,R$$

$$\sum_{j=1}^{J_i} \theta_{ij} = 1, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

$\theta_{ij} = 0{,}1$ყველა i.j -თვის

a_{ijr} არის k ინტერვალში j-ური გეგმის მიხედვით i-ური სახეობის პროდუქციის წარმოების R სახეობის რესურსების დანახარჯი.

მთელრიცხვა ამოცანის ამოხსნა დაკავშირებულია მნიშვნელოვან სირთულეებთან, თუმცა ამ ამოცანის აპროქსიმირება შეიძლება წრფივი პროგრამირების ამოცანით.

3. დასკვნა

ამრიგად, განხილულია რამდენიმე სახეობის პროდუქციის მინიმალური დანახარჯებით წარმოების ამოცანა შეზღუდული რესურსების და მოცემული საბაზრო ფასების პირობებში. შემოთავაზებულია მოცემული ოპტიმიზაციის ამოცანის გადაჭრის ზოგად პრინციპებზე აგებული მოდელი.

ლიტერატურა:

1. Lower. Optimal sequencing single machint subject to precedence constraints. Management scince, v19, #5, 1973.
2. Baumol N. Economic Theory and Operations Analysis, 3d adit., Englewood Clitts, N,J,: Prentice Hall, 1972.

THE TASK OF PRODUCING OF VARIOUS TYPES PRODUCTION BY MINIMUM EXPENSES IN THE CONDITIONS OF RESTRICTED RESOURCES

Giashvili Ia
Georgian Technical University

Summary

It is considered the task of production of various types products with minimum costs in the case of restricted resources and market prices. It is given the solution model built on the general principles for optimization task.

ЗАДАЧА ПРОИЗВОДСТВА РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ПРОДУКЦИИ С МИНИМАЛЬНЫМИ ЗАТРАТАМИ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕСУРСОВ

Гияшвили И.
Грузинский Технический Университет

Резюме

Рассмотрена задача производства различных видов продукции с минимальными затратами в условиях ограниченных ресурсов и заданных цен. Предложено решение данной задачи оптимизации построением модели, основанной на обших принципах.