სტოჰასტური პროგრამირების მეთოდების გამოყენება ოპტიმალურ გადაწყვეტილებათა მიღების პროცესში

გელა ჭიკაძე, ვალიდა სესაძე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

განხილულია მარაგების ოპტიმალური განაწილების ამოცანები განუსაზღვრელობების გათვალისწინებით. მოცემულია მარაგების ოპტიმალური განაწილების ამოცანების მათემატიკური მოდელები M და P წარმოდგენებში. განხილულია კონკრეტული მაგალითი. შემუშავებულია კომპიუტერული პროგრამები.

საკვანძო სიტყვები: დაგეგმარება. ოპტიმალური გადაწყვეტილება. სტოჰასტური დაპროგრამება.

1. შესავალი

გადაწყვეტილების მიღების ამოცანათა უმრავლესობა, როგორც წესი, დაიყვანება მარაგების განაწილების სტანდარტულ ამოცანებამდე, მაგრამ რეალურ პირობებში სიდიდეები $a_{ij,}b_i c_j$ მათემატიკურ მოდელში წარმოადგენენ შემთხვევით სიდიდეებს, ამიტომაც ტრადიციული წრფივი პროგრამირების ამოცანების მაგივრად გვიხდება სტოჰასტური პროგრამირების ამოცანების გადაწყვეტა. მათემატიკური მოდელის შედგენის პროცესი იწყება მიზნის ფუნქციის განხილვით. თუ c_j სიდიდე, რომელიც შედის მიზნის ფუნქციის გამოსახულებაში, არის შემთხვევითი სიდიდე, მაშინ სტოჰასტური პროგრამირების ამოცანები შეიძლება წარმოდგენილ იქნან შესაბამისად M ან P წარმოდგენაში.

2. ძირითადი ნაწილი

M წარმოდგენაში მიზნის ფუნქციას, რომელიც ახორციელებს მათემატიკური მოლოდინის სიდიდის მაქსიმიზება(მინიმიზება)-ს, ექნება შემდეგი სახე:

$$F = M\left[\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right] \to \max(min)$$

თუ ფორმულაში მთლიანად მიზნის ფუნქციის მათემატიკური მოლოდინიდან გადავალთ c_j შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკურ მოლოდინზე მაშინ მივიღებთ:

$$F = \sum_{j=1}^{n} M[c_j]x_j \to max(min) \qquad (1)$$

მაშასადამე, M წარმოდგენაში გვიხდება იმ x_j უცნობი სიდიდეების მოძებნა, რომლისათვისაც მიზნის ფუნქციას აქვს ოპტიმალური (მაქსიმალური ან მინიმალური) მნიშვნელობა.

P წარმოდგენაში მიზნის ფუნქციას ფორმირდება სხვანაირად. კერძოდ მითითებულ უნდა იქნას მიზნის ფუნქციის ზღვრულად დასაშვები მინიმუმი ან მაქსიმუმი

F_{min}, $F \geq F_{min}$, F_{max}, $F \leq F_{max}$

P წარმოდგენაში ამოცანის არსი მდგომარებს იმაში ,რომ მოვძებნოთ ისეთი x_j უცნობი სიდიდეები, რომელთათვისაც მაქსიმიზდება ალბათობა იმისა ,რომ მიზნის ფუნქციის მიღებული მნიშვნელობა არ იქნება ზღვრულ დასაშვებ მინიმუმზე უარესი.

P წარმოდგენაში მიზნის ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს შემდეგი სახე:

1. მაქსიმიზების ამოცანა

$$F = P\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq F_{min}\right) \to \max \qquad (2)$$

2. მინიმიზების ამოცანა

$$F = P\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq F_{max}\right) \to \min \qquad (3)$$

ორივე შემთხვევაში უნდა მივისწრაფოდეთ ალბათობის მაქსიმიზებისაკენ, მაგრამ როგირც მიზნის ფუნქციების ჩამოყალიბებიდან ჩანს ეს ორი ამოცანა პრინციპულად განსხვავებული ამოცანებია.

ახლა დანვიხილოთ თუ როგორი სახე ექნება შეზღუდვებს ამ შემთხვევაში.

M წარმოდგენაში შეზღუდვებს აქვთ სახე:

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_j \le \overline{b_i}$$

სადაც $\bar{a}_{ij}, \overline{b_i}$ - შესაბამისად a_{ij}, b_j სიდიდეების მათემატიკური მოლოდინებია.

P წარმოდგენაში შეზღუდვებს აქვთ სახე:

$$P\left[\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_j \le b_i\right] \ge g_i \qquad (4)$$

ეს ჩანაწერი ნიშნავს, რომ თითოეული შეზღუდვის შესრულების ალბათობა

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$$

არ უნდა იყოს ნაკლები წინასწარ მოცემულ g_i სიდიდეზე. საბოლოოდ კი სტოჰასტური პროგრამირების ამოცანას M წარმოდგენაში ექნება სახე:

$$\begin{cases} F = M\left[\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right] \to max(min); \\ P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\right] \ge g_i; \\ d_j \le x_j \le D_j; \quad j = \overline{1,n}; \quad i = \overline{1,m}; \end{cases} \qquad (5)$$

სტოჰასტური პროგრამირების **მაქსიმიზების** ამოცანას P წარმოდგენაში ექნება სახე:

$$\begin{cases} F = P\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge F_{min}\right) \to max; \\ P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\right] \ge g_i; \\ d_j \le x_j \le D_j; \quad j = \overline{1,n}; \quad i = \overline{1,m}; \end{cases} \qquad (6)$$

სტოჰასტური პროგრამირების **მინიმიზების** ამოცანას P წარმოდგენაში ექნება სახე:

$$\begin{cases} F = P\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge F_{max}\right) \to min; \\ P\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\right] \ge g_i; \\ d_j \le x_j \le D_j; \quad j = \overline{1,n}; \quad i = \overline{1,m}; \end{cases} \qquad (7)$$

თუ a_{ij}, b_i, c_j სიდიდეები ემორჩილება ნორმალური განაწილების კანონს, მაშინ ამ ამოცანის დასმის დეტერმინირებულ ექვივალენტს შეიძლება მიეცეს შემდეგი სახე:

ა) მიზნის ფუნქციის მაქსიმიზების შემთხვევაში:

$$F = \left(\sum_{j-1}^{n} \bar{c}_j x_j - F_{max}\right) \Big/ \sqrt{\sum_{j-1}^{n} G_j^2 x_j^2} \quad \to max;$$

ბ) მიზნის ფუნქციის მინიმიზების შემთხვევაში:

$$F = \left(F_{max} - \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j\right) \Big/ \sqrt{\sum_{j=1}^{n} G_j^2 x_j^2} \quad \to max;$$

სადაც $\bar{c}_j, G_j$- ეს არის შესაბამისად c_j შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური მოლოდინის და დისპერსიის სიდიდეები. ხოლო საბოლოდ M წარმოდგენაში ამოცანის დეტერმინირებულ ექვივალენტს ექნება (8) გამოსახულებით ნაჩვენები სახე, სადაც $\bar{c}_j$ - არის c_j შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური მოლოდინი, $\bar{a}_{ij}, \bar{b}_i, G_{ij}^2$ –შესაბამისად მათემატიკური მოლოდინის და დისპერსიის სიდიდეები a_{ij}, b_i სიდიდეებისა; t_{gi}- t სიდიდის მნიშვნელობა განაწილების ნორმალური კანონის შემთხვევაში, რომელშიც ვითვალისწინებთ g_i შეზღუდვის შესრულების ალბათობას.

$$\begin{cases} F = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j \to \max(\min); \\ \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_j \le \bar{b}_i - t_{gi} \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} G_{ij}^2 x_j^2 + V_i^2} \right) \\ d_j \le x_j \le D_j; \quad j = \overline{1,n}; \quad i = \overline{1,m}; \end{cases} \qquad (8)$$

განვიხილოთ აღნიშნული მეთოდი შედარებით მარტივ მაგალითზე:

მაგალითი. ვთქვათ გვაქვს ამოცანა ორი სახის მარაგის განაწილებაზე ორი სახის საქონლის გამოშვების პირობებში. შევადგინოთ ამ ამოცანის მოდელი ჩვეულებრივი, M წარმოდგენაში, დეტერმინირებული ექვივალენტის ფორმაში.

1. ამოცანის ჩვეულებრივი მოდელი იქნება ასეთი სახის:

$$\begin{cases} F = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max; \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le b_1; \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \le b_2; \\ d_1 \le x_1 \le D_1; \; d_2 \le x_2 \le D_2, \end{cases} \qquad (9)$$

2. ამოცანის მოდელი M წარმოდგენაში იქნება ასეთი სახის:

$$\begin{cases} F = M[c_1 x_1 + c_2 x_2] \to \max; \\ P(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le b_1) \ge \Delta_1; \\ P(a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \le b_2) \ge \Delta_2; \\ d_1 \le x_1 \le D_1; \; d_2 \le x_2 \le D_2, \end{cases} \qquad (10)$$

3. ამოცანის მოდელი დეტერმინირებულ წარმოდგენაში იქნება ასეთი სახის:

$$\begin{cases} F = \bar{c}_1 x_1 + \bar{c}_2 x_2 \to \max; \\ \bar{a}_{11} x_1 + \bar{a}_{12} x_2 \le \bar{b}_1 - t_{gi} \sqrt{G_{11}^2 x_1^2 + G_{12}^2 x_2^2 + V_1^2}; \\ \bar{a}_{21} x_1 + \bar{a}_{22} x_2 \le \bar{b}_2 - t_{gi} \sqrt{G_{11}^2 x_1^2 + G_{12}^2 x_2^2 + V_1^2} \\ d_1 \le x_1 \le D_1; \; d_2 \le x_2 \le D_2, \end{cases} \qquad (11)$$

3. დასკვნა

ამოცანის მოდელში მოცემული სიდიდეების შემთხვევითი სახე (ხასიათი) მნიშვნელოვნად ზემოქმედებს შედეგზე და ამ ფაქტორების გაუთვალისწინებლობამ შეიძლება მიგვიყვანოს დასმული ამოცანის არარეალურობამდე, რომელთა გადაწყვეტა შეუძლებელი იქნება. ჩვენ მიერ განხილული ამოცანები გვაჩვენებს, რომ პრაქტიკაში სერიოზული გადაწყვეტილებების მიღების დროს დინამიური სტოჰასტური პირობების გაუთვალისწინებლობა არაა მიზანშეწონილი. შესასრულებელი ამოცანების საიმედოობის გაზრდის მიზნით მიზანშეწონილია: 1. მოვახდინოთ დაგეგმარება იმ განუსაზღვრელობის გათვალისწინებით, რომელიც მოდელში გამოყენებულ შემთხვევით სიდიდეების განაწილების კანონების გათვალისწინებას გულისხმობს. 2. მოვახდინოთ შემთხვევითი სიდიდეების მნიშვნელობათა პერიოდულ დაზუსტება, გეგმების კორექტირების გარეშე და რაც უფრო ხშირად განვახორციელებთ ამ დაზუსტებით პროცედურებს, მით უფრო რეალური და შესრულებადი იქნებიან ამოცანები.

ლიტერატურა:

1. Жданов С.А. Экономические Модели и методы в управлениию – М.: Дело и сервис, 2007.
2. Alfred Maubner, Burkhard Heer . Dynamic general Equilibrium modelling. Springer – Verlag 2005.

USE OF METHODS OF STOCHASTIC PROGRAMMING AT ACCEPTANCE OPTIMUM THE DECISION

Chikadze Gela, Sesadze Valida
Georgian Technical University

Summary

In the represented article there are considered the problems of optimum distribution of resources under the conditions of uncertainty. There are constructed M and P mathematical statements for the problems of optimal distribution of resources. In the paper there are discussed case-studies and are demonstrated corresponding software packages.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ ПРИНЯТИИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Чикадзе Г., Сесадзе В.
Грузинский Технический Университет

Резюме

Рассмотрены задачи оптимального распределения ресурсов в условиях неопределенности. Составленны математические М и Р постановки задач оптимального распределения ресурсов. Рассмотрены конкретные примеры. Разработаны компьютерные программы.