შტოებისა და საზღვრების მეთოდისათვის ევრისტიკული ალგორითმის შემუშავების ერთი ხერხი

გელა ღვინეფაძე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

დისკრეტული მათემატიკის ამოცანების გადასაწყვეტად შემოთავაზებულია შტოების და საზღვრების მეთოდზე დაფუძნებული ისეთი ალგორითმი, რომელშიც გამოთვლების დროის შესამცირებლად შეტანილია ევრისტიკის ელემენტები. ვარიანტების ხეზე ხდება ქვედა დონეებზე ძიებათა გაგრძელების პერსპექტიულობის შეფასება და იგი მოცემულ ეტაპზე ამონახსნის რეკორდული მაჩვენებელისაგან წინასწარ დათქმული სიდიდით არ განსხვავდება, ქვეხე მოიჭრება.

საკვანძო სიტყვები: შტოების და საზღვრების მეთოდი. ევრისტიკა.

1. შესავალი

პრაქტიკაში არცთუ იშვიათად საჭირო ხდება ისეთი ამოცანების გადაჭრა, როდესაც ამონახსნი განისაზღვრება n რაოდენობის ობიექტების ურთიერთგანლაგების ყველა შესაძლო ვარიანტიდან ერთის - ოპტიმალურის არჩევანით. საქმე გვაქვს დისკრეტული მათემატიკის ტიპურ - დანიშვნების ამოცანასთან.

ამგვარი და საერთოდ, დისკრეტული მათემატიკის მრავალი სხვა სახის ამოცანის გადასაწყვეტად ხშირად იყენებენ შტოებისა და საზღვრების მეთოდს [1]. აღნიშნული მეთოდისადმი მიმართვა ვარიანტების პირდაპირი გადარჩევის მეთოდთან შედარებით გაცილებით ამცირებს ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნის მისაღებად საჭირო დროის დანახარჯს, მაგრამ ისიც უნდა აღინიშნოს, რომ ობიექტების ჯერ კიდევ არცთუ დიდი რიცხვისათვის (n=30–50) მაინც იმავე პრობლემას ვაწყდებით – თანამედროვე კომპიუტერების მძლავრი შესაძლებლობებიც კი არ არის საკმარისი ასეთი ამოცანების ამოსახსნელად მისაღებ დროში. შედეგად, სპეციალისტები იძულებულნი არიან, ამოცანის ამოსახსნელად მიმართონ ევრისტიკულ ალგორითმებს. ასეთ შემთხვევებში კი, არამცთუ ოპტიმალურ ამონახსნებს ვერ ვღებულობთ, უმეტეს შემთხვევაში ვერ ხერხდება გაკეთდეს შეფასება – რამდენად არის დაცილებული ევრისტიკული ალგორითმით მიღებული შედეგი ოპტიმალურისაგან.

ჩვენ მიერ შემუშავებული ევრისტიკული ალგორითმი გამოთვლების დროის შემცირებასთან ერთად გვინარჩუნებს შტოების და საზღვრების მეთოდის მთავარ ღირსებას: გათვლების სხვადასხვა ეტაპზე, ქვედა შეფასებებზე დაყრდნობით, ალგორითმი იღებს გადაწყვეტილებას - აქვს აზრი მოცემულ ქვეხეზე ძიებების გაგრძელებას, თუ იგი უნდა მოიჭრას. რაც მთავარია, ძიებების ქვედა დონეებზე გაგრძელებაზე უარი ითქმის არა მხოლოდ მაშინ, როდესაც ქვედა შეფასება მოცემულ ეტაპზე რეკორდულ მაჩვენებელზე უარესია (და ნათელია, რომ საუკეთესო ვარიანტის ძიებას აზრი აღარ აქვს), არამედ – იმ შემთხვევაშიც, როცა ქვედა შეფასება რეკორდულ მაჩვენებელთან საკმაოდ ახლოა – ხვდება პროგრამისტის მიერ შერჩეულ დიაპაზონში. ტერმინი ‘‘საკმაოდ’’ ევრისტიკის სფეროდანაა. შესაბამისად, გამორიცხული არ არის ამონახსნი ოპტიმალური არ გახლდეთ, სამაგიეროდ ალგორითმი უზრუნველყოფს მისაღებ დროში ჩვენ მიერ შერჩეული დამაკმაყოფილებელი სიზუსტით შედეგის მიღებას.

2. ძირითადი ნაწილი

დისკრეტული მათემატიკის ამოცანების გადასაწყვეტად შტოებისა და საზღვრების მეთოდის ევრისტიკულ ალგორითმად რეალიზების შემოთავაზებული ხერხის არსი მარტივად ასე შეიძლება განვმარტოთ - ამოცანის ამოხსნის შუალედურ ეტაპებზე ალგორითმი პერიოდულად თავის თავს უსვამს და პასუხს იძლევა შემდეგ შეკითხვაზე:

ღირს კი მოცემულ ეტაპზე უკეთესი შედეგების მისაღებად ძიებათა გაგრძელება (და შესაბამისად მეტი დროის დახარჯვა), თუ უფრო მიზანშეწონილია, ეს დრო გამოყენებული იქნეს მორიგი უბნის პერსპექტიულობის შესამოწმებლად?

შესაბამისად, საჭირო ხდება ამოხსნის შუალედურ ეტაპებზე შემდეგი ქვეამოცანის დასმა-გადაწყვეტა – მაქსიმუმ, რა გაუმჯობესებას შეიძლება ველოდოთ მოცემულ ქვეხეზე ძიებების გაგრძელებისაგან, ანუ, ასე ვთქვათ, პასუხი გაეცეს შეკითხვას - ‘‘ღირს ჩიტი ბდღვნად’’?

აქვე აღვნიშნავთ, რომ მხედველობაში მისაღებია კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი გარემოებაც – პრაქტიკული სახის ამოცანებისათვის ამოსავალი მონაცემების მნიშვნელობათა დადგენა მხოლოდ გარკვეული სიზუსტით ხდება: გაზომვების პროცესი ძვირადღირებულია, სცოდავს გაზომვების მეთოდიკა, ინსტრუმენტარიუმი, არცთუ იშვიათად ადგილი აქვს შესასწავლი პროცესების არასტაციონალურობასაც. შესაბამისად, იშვიათად ხერხდება, რომ პარამეტრების გაზომვის ცდომილებამ 1-2%-ს არ გადააჭარბოს.

ყოველივე ზემოთ თქმულის გათვალისწინებით, აპრიორი არცთუ ისე ზუსტი საწყისი მონაცემების არსებობის შემთხვევაში, ბუნებრივია, უარი ვთქვათ, დავუშვათ, 0.5%-ით უკეთესი შედეგის მოძიების მცდელობაზე, თუკი ეს გადაწყვეტილება გათვლების დროს რამდენჯერმე შეამცირებს. ამასთან, თუკი ამის შესაძლებლობა არსებობს, უპრიანია „გამოთავისუფლებული’’ დროის მონაკვეთი უფრო პერსპექტიული

ვარიანტების გადარჩევაზე დაიხარჯოს.

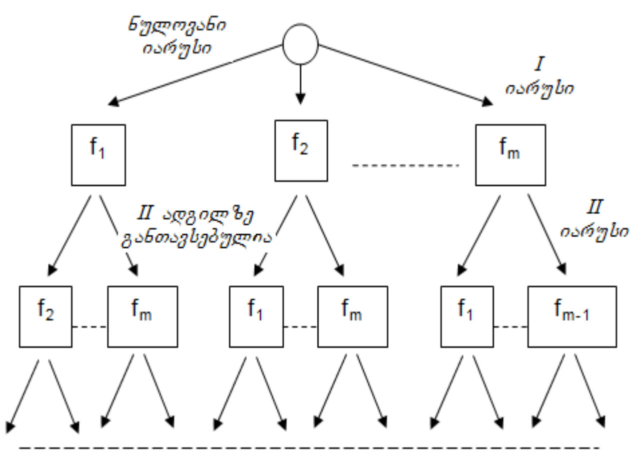
შემოთავაზებული მეთოდის არსის უფრო დეტალურად ასახსნელად განვიხილოთ შტოებისა და საზღვრების მეთოდის გამოყენებით ერთ მწკრივად განლაგებული ერთგანზომილებიანი ობიექტების გადანაცვლებების სიმრავლიდან ოპტიმალური გადანაცვლების ამორჩევის მაგალითი [1]. შემდეგ კი აღვწერთ, გამოთვლების დროის შემცირების მიზნით, შტოებისა და საზღვრების მეთოდის ოპტიმალურიდან ევრისტიკულად გარდაქმნისათვის ჩვენ მიერ შემოთავაზებულ ხერხს.

<u>ამოცანის დასმა.</u> მოცემულია l_i სიგრძის მქონე ობიექტების სიმრავლე, რომლებიც განლაგებულია რაიმე წრფის (საკოორდინატო ღერძის, მაგისტრალის) გასწვრივ. (პრაქტიკაში ობიექტების როლში შეიძლება მოგვევლინოს ფაილები, შენობები, ელექტრონული ელემენტები): $F = \{f_j\}$, $j = 1, 2, \dots, m$.

ობიექტებს შორის ურთიერთმიმართვების სიხშირეები წარმოდგენილია კვადრატული მატრიცის სახით, რომლის თითოეული a_{ij} ელემენტი აღნიშნავს f_i ობიექტიდან f_j-ზე გადასვლების რიცხვს.

მოითხოვება, ობიექტების $m!$ რაოდენობის ყველა შესაძლო ურთიერთგანლაგებიდან ამორჩეული იქნეს ისეთი კომბინაცია, რომლისათვისაც გადასვლებზე დახარჯული ჯამური დრო მინიმალურ მნიშვნელობას მიიღებს (იგულისხმება, რომ ობიექტიდან ობიექტისადმი მიმართვაზე დახარჯული დრო მათ შორის მანძილის პირდაპირპროპორციულია). ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარე, ობიექტების ურთიერთგანლაგების განსახილველი ვარიანტების რიცხვი ორჯერ შეიძლება შევამციროთ, რადგანაც, ცხადია, რომ სარკული განლაგებაც იგივე შედეგს იძლევა, რასაც – პირდაპირი. დასაშვებია აგრეთვე ორ ობიექტს შორის a_{ij} და a_{ji} მიმართვების წარმოდგენა ჯამური r_i სახით. მსგავსი სახის დისკრეტული ამოცანების გადასაწყვეტად ლიტერატურაში შემოთავაზებული იქნა შტოების და საზღვრების მეთოდის გამოყენება. ამასთან, სპეციალური მეთოდიკის გამოყენებით ახდენენ ობიექტების სიმრავლის დეკომპოზიციას – ქვესიმრავლეები აქ წარმოადგენენ ე.წ. კომპლექსებს, რომელთა მეშვეობითაც ხდება ვარიანტების ქვეკლასის პერსპექტიულობის შეფასება. ობიექტების სპეციალური სახის ქვესიმრავლეებად – კომპლექსებად – დაყოფაზე დაფუძნებულ მიდგომას თავდაპირველად რეკომენდაცია გაეწია ნაშრომში [2]. შემდგომ კი ამ მიდგომამ განვითარება იპოვა სხვა შრომებშიც [3]. კერძოდ, შემუშავებული იქნა არა მარტო კომპლექსის ორგანიზების ახალი გზები, არამედ ახალი მიდგომისათვის მისადაგებული ვარიანტების განშტოებების სტრატეგიაც

დავიწყოთ შტოების და საზღვრების მეთოდისათვის გამიზნული აღნიშნული სტრატეგიის წარმოდგენით და შემდეგ განვმარტოთ კომპლექსის არსიც (ნახ.1).



ნახ.1

ნახაზიდან ჩანს, რომ პირველი ადგილიდან დაწყებული მომდევნოებზე ხდება წინა ეტაპებზე (იარუსებზე) დაუმაგრებელი ობიექტების თანმიმდევრულად მიბმა.

ვხედავთ, რომ თავდაპირველი $F = \{f_j\}$, $j = 1, 2, \dots, m$ სიმრავლე ამოცანის ამოხსნის თითოეული ეტაპისათვის იყოფა ორ – დამაგრებული და დაუმაგრებელი ობიექტების ქვესიმრავლედ.

გამოთვლების თითოეულ ბიჯზე ერთ-ერთი ობიექტი ფიქსირდება, როგორც წამყვანი და ხდება სხვა ობიექტებთან მისი ურთიერთგადასვლების შედეგად მიზნობრივ ფუნქციაში შეტანილი წილის გამოანგარიშება. ამასთან, დამაგრებული ობიექტებისათვის ეს წილი ზუსტად განისაზღვრება, ხოლო დაუმაგრებლებისათვის კი ხდება წილის ქვედა შეფასების გამოთვლა.

სწორედ, დამაგრების ნიშნის მიხედვით ობიექტების $F = \{f_j\}$ სიმრავლის ორ ქვესიმრავლედ დაყოფა და მთლიანი F სიმრავლიდან ერთ-ერთი ობიექტის წამყვანად გამოცხადება გახლავთ **კომპლექსის ცნების** შემოღების მიზანი. აღნიშნული მიდგომის კონკრეტული რეალიზაციები, ცხადია, ერთმანეთისაგან მნიშვნელოვნად განსხვავებული შეიძლება იყოს. კერძოდ, ზემოთ მოყვანილი განშტოების სტრატეგიის ნაცვლად, ქვედა შეფასებათა უფრო ეფექტურად გამოთვლის მიზნით, [3] ნაშრომში შემოთავაზებულია ამგვარი მიდგომა – ობიექტების დამაგრება ხდება არა ერთმანეთის მიყოლებით, არამედ კიდურა ადგილებზე რიგ-რიგობით და თანმიმდევრულად, ანუ შემდეგი წესით: 1, m, 2, m-1, 3, m-2, . . .

ასეთი გადაწყვეტილება, თავისთავად ცხადია, გავლენას ახდენს კომპლექსებში დამაგრებული და დაუმაგრებელი ობიექტების ურთიერთგანლაგებასა და შესაბამისად, გამოთვლების ალგორითმის სტრუქტურაზეც. ამრიგად, მოცემულია: ობიექტების კომპლექსი $K = \{f_j\}$, $j = 1, 2, \dots, m$, რომელშიც ერთ-ერთი ობიექტი ფიქსირდება, როგორც წამყვანი და აღინიშნება f_0-თი; თითოეული ობიექტისათვის განსაზღვრულია სიგრძე l_i და წამყვანი ობიექტისადმი მიმართვის სიხშირე r_i. მოითხოვება ეს ობიექტები იმგვარად განვალაგოთ რაიმე წრფის გასწვრივ, რომ თითოეული f_j ობიექტიდან წამყვან f_0-მდე

გადარბენების ჯამურმა სიგრძემ მინიმალური მნიშვნელობა მიიღოს: $\sum r(f_j, f_0) = \min$.

გამოთვლების სხვადასხვა ეტაპზე f_0 წამყვანი ობიექტი შესაძლებელია იმყოფებოდეს, როგორც დამაგრებული, ასევე ჯერ კიდევ დაუმაგრებელი ობიექტებისაგნ შედგენილ კომპლექსში. ცხადია, პირველ შემთხვევაში მისი პოზიცია დაფიქსირებულია, ხოლო მეორე შემთხვევაში კი – არა.

ზემოთქმულიდან გამომდინარე, პირველ შემთხვევაში მიზნობრივ ფუნქციაში კომპლექსის მიერ შეტანილი წვლილი შესაძლებელია ზუსტად გამოითვალოს. ამასთან, რადგანაც დასაშვებია დაუმაგრებელი ობიექტების კომპლექსში შესაბამისი გადაადგილებანიც მოვახდინოთ, შეგვიძლია შევირჩიოთ და გამოვთვალოთ ოპტიმალური ვარიანტის მიერ შეტანილი წვლილი. რაც შეეხება მეორე შემთხვევას, აქ მიზნობრივ ფუნქციაში კომპლექსის წვლილის გამოსათვლელად მიზანშეწონილია მივმართოთ ქვედა შეფასების გამოთვლის ხერხს. აღვნიშნოთ, რომ ვარიანტების განშტოებების ჩვენ მიერ არჩეული სტრატეგია შესაძლებელს ხდის, კომპლექსის წვლილის ქვედა შეფასება დაზუსტდეს ორი ხერხით:

1. დაუმაგრებელი ელემენტების კომპლექსში მოხდეს წამყვანთან კავშირის არმქონე ობიექტების გათვალისწინებაც;

2. კომპლექსებში გათვალისწინებული იქნეს წამყვანი ობიექტისადმი მიმართვის შემდეგ უშუალოდ რიგში მყოფი ობიექტიც. (აქ გასათვალისწინებელია ის მომენტი, რომ ასეთ შემთხვევაში მიზნობრივ ფუნქციაში თითოეული ობიექტის წვლილი ორჯერ შევა).

ზემოთ განხილული ამოცანების გადაწყვეტის დროის შესამცირებლად შემდგომი ნაბიჯი შესაძლებელია გადაიდგეს შემდეგი პრინციპული გადაწყვეტილების მიღებით – უარი ითქვას ოპტიმალური ამოხსნის მიღების ალგორითმების შემუშავებაზე და მიზნობრივი ფუნქციის შესაძლო ოპტიმალური მნიშვნელობიდან გადახრის წინასწარ დაშვებულ დიაპაზონში ვეძებოთ კვაზი-ოპტიმალური შედეგი. ამასთან, ფაქტობრივად, ძალაში რჩება ყველა ის მიდგომა და ღირსება, რომელიც გააჩნია საზღვრების და შტოების მეთოდს. კერძოდ, შესაძლებელია შევინარჩუნოთ განშტოების ზემოთ განხილული სტრატეგია და ქვედა შეფასებების გამოთვლის მეთოდის ძირითადი მონახაზი. განსხვავება შეეხება მხოლოდ იმ პუნქტებს, რომლებშიც წყდება საკითხი, გაგრძელდეს თუ არა მოცემულ ეტაპზე ვარიანტების ხის არჩეული მწვერვალის ქვემოთ ვარიანტების განხილვა, თუ ეს ქვეხე მოიჭრას.

3. დასკვნა

დისკრეტული მათემატიკის ამოცანების გადასაწყვეტად შემოთავაზებულია შტოების და საზღვრების მეთოდზე დაფუძნებული ალგორითმის გამოყენება, რომელშიც, გამოთვლების დროის მინიმიზების მიზნით, შეტანილია ევრისტიკის ელემენტები. შენარჩუნებულია შტოებისა და საზღვრების მეთოდის მთავარ ღირსება – განშტოებების ვარიანტების აგებისა და ქვედა შეფასებების გამოთვლის მეთოდის სტრატეგია. განსხვავება ეხება მხოლოდ იმ პუნქტებს, რომლებშიც წყდება საკითხი, გაგრძელდეს თუ არა მოცემულ ეტაპზე ვარიანტების ხის არჩეული მწვერვალის ქვემოთ ქვევარიანტების გადარჩევა, თუ ეს ქვეხე მოიჭრას.

ლიტერატურა:

1. http://www.math.nsc.ru/AP/benchmarks/UFLP/uflp_bb.html

2. Гендель Е.Г., Левин Н.А. Оптимизация технологии обработки информации для задач АСУ. Москва, «Статистика», 1977

3. Гвинепадзе Г.Ш. Методы повышения эффективности размещения информации в запоминающих устройствах прямого доступа для задач АСУ. Автореф.к дисс. Киев, Институт Автоматики. 1982.

ON THE DEVELOPMENT OF HEURISTIC FOR THE BRANCH AND BOUND

Gvinepadze Gela
Georgian Technical University

Summary

In order to save time required to solve problems of discrete optimization in mathematics there is offered to implement elements of heuristics in the method of “Branch and Boundaries”. Moving along a decision tree the prospective alternatives in the given direction are evaluated, and if they don’t guarantee winning comparing to the pre-defined value at this stage, the given sub-tree is cut off and we proceed to the subsequent options.

К ВОПРОСУ РАЗРАБОТКИ ЭВРИСТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ МЕТОДА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Гвинепадзе Г.Ш.
Грузинский Технический Университет

Резюме

С целью экономии времени решения задач дискретной математики предлагается в метод ветвей и границ ввести элементы эвристики. На дереве вариантов происходит оценка перспективности продолжения поиска в данном направлении, и если она не обещает выйгрыша на заранее установленное для данного этапа значение, поддерево обрезается – происходит переход к рассмотрению следующих вариантов.