მართვის განაწილებულპარამეტრებიან ობიექტთა პარამეტრების შეფასება ხარისხოვანი მწკრივების მეთოდით

დავით ნარიმანაშვილი, ნოდარ ნარიმანაშვილი
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

დამუშავებულია მართვის განაწილებულპარამეტრებიანი ობიექტების პარამეტრების იდენტიფიკაციის თეორიულ-პრაქტიკული მეთოდი, რომელიც არაერთგვაროვანი კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის ხარისხოვან მწკრივად წარმოდგენას ემყარება.

საკვანძო სიტყვები: განაწილებულპარამეტრებიანი ობიექტები. ხარისხოვანი მწკრივები. იდენტიფიკაცია. პარამეტრების შეფასება. კერძოწარმოებულიანი განტოლებები.

1. შესავალი

მართვის თანამედროვე მრავალფუნქციური სისტემის ასაგებად უაღრესად მნიშვნელოვანია მართვის ობიექტის ადექვატური მათემატიკური აღწერა, რისთვისაც აუცილებელია ობიექტში მიმდინარე პროცესების დროსა და სივრცეში განაწილების გათვალისწინება. შედეგად ვღებულობთ კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებებს უცნობი კოეფიციენტებით. არსებობს კოეფიციენტების შეფასების სხვადასხვა მეთოდი [1,2], მაგრამ დასმული ამოცანა აქტუალური რჩება იმ შემთხვევაში, როდესაც ობიექტზე დაკვირვების დრო შეზღუდულია. ასეთ შემთხვევაში პირველადი შეფასებები შეიძლება მივიღოთ ხარისხოვანი მწკრივების მეთოდის გამოყენებით. კოეფიციენტების შეფასების სიზუსტე შესაძლებელია ამაღლდეს როგორც მწკრივის წევრების რაოდენობის გაზრდით, ასევე ექსპერიმენტული მონაცემების რაოდენობის გაზრდითაც. გამოთვლითი პროცედურების ფორმალიზაციის შემდეგ, მეთოდის ეფექტური რეალიზაციისთვის მიზანშეწონილია კომპიუტერული ტექნიკის გამოყენება.

2. ძირითადი ნაწილი

მართვის თეორიასა და პრაქტიკაში მრავლადაა ისეთი ობიექტები, რომლებშიც მიმდინარეობენ სითბური, დიფუზიური, რხევითი და სხვა სახის დროსა და სივრცეში განაწილებული პროცესები (თბომცვლელები, ქიმიური და ატომური რეაქტორები, კონდენცირების სისტემები, სითხისა და აირის გადამქაჩი მოწყობილობები და სხვა). მათი აღწერისათვის გამოიყენება მათემატიკური ფიზიკის განტოლებები, რომელთა ტიპიური წარმომადგენელია სითბოგადაცემის განტოლება [2,3]:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \\ &t \ge 0, \quad 0 \le x \le \ell; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

სადაც $u(x,t)$ ობიექტში ტემპერატურული ველის განაწილების ფუნქციაა, t-დროითი პარამეტრია, x-სივრცული კოორდინატია, ხოლო $f(x,t)$ –ობიექტზე მოქმედი გარეგანი ზემოქმედებაა. დავუშვათ, რომ (1) ამოცანაზე დადებული სასაზღვრო პირობები მუდმივი A ამპლიტუდითა და ω კუთხური სიხშირით : $f(x,t)=A\sin\omega t$. მაშინ (1) განტოლების ამოხსნა შეიძლება ვეძებოთ შემდეგი ხარისხოვანი მწკრივის სახით [4,5] :

$$u(x,t) = a_0(x) + a_1(x)t + a_2(x)t^2 + a_3(x)t^3 + \ldots \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} a_0(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots \\ a_1(x) &= a_{10} + a_{11}x + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 + \ldots \\ a_2(x) &= a_{20} + a_{21}x + a_{22}x^2 + a_{23}x^3 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ვიპოვოთ (2) გამოსახულების კერძო წარმოებულები:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a_1x + 2a_2(x)t + 3a_3(x)t^2 + \ldots \\ \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} &= \dot{a}_0\,x + \dot{a}_1(x)t + \dot{a}_2(x)t^2 + \ldots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x} &= \ddot{a}_0\,x + \ddot{a}_1(x)t + \ddot{a}_2(x)t^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ობიექტის შემავალი ზემოქმედება შეიძლება წარმოვადგინოთ ტეილორის მწკრივის სახით:

$$A\sin\omega t = A\omega t - A\frac{(\omega t)3}{3!} + A\frac{(\omega t)^5}{5!} - \ldots \tag{5}$$

თუ (4) და (5) დაშლებს ჩავსვავთ (1) განტოლებაში და გავუტოლებთ მარჯვენა და მარცხენა ნაწილების t-ს ერთიდაიგივე ხარისხის კოეფიციენტებს, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} a_1(x) &= a^2\ddot{a}_0(x)\\ 2a_2(x) &= a^2\ddot{a}_1(x) + a\omega\\ 3a_3(x) &= a^2\ddot{a}_2(x)\\ 4a_4(x) &= a^2\ddot{a}_3(x) - \frac{A\omega}{3!}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

(3) განტოლებათა სისტემიდან ვღებულობთ:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{a}_0(x) &= 2c_2\\ \ddot{a}_1(x) &= 2a_2 + 3a_{13}x + \ldots + n(n-2)a_{1n}x^{n-2}\\ \ddot{a}_2(x) &= 2a_{22} + a_{23}x + \ldots + n(n-2)a_{2n}x^{n-2}\\ \ddot{a}_3(x) &= 2a32 + a_{33}x + \ldots + n(n-2)a_{3n}x^{n-2}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

(7) განტოლებების გათვალისწინებით (6) განტოლებათა სისტემიდან მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} a_1(x) &= a^2 2c_2\\ 2a_2(x) &= a^2(2a_{12} + 3a_{13}x + \ldots + n(n-2)a_{1n}x^{n-2}\\ 3a_3(x) &= a^2(2a_{22} + 3a_{23}x + \ldots + n(n-2)a_{2n}x^{n-2}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

ხოლო (3) და (8) განტოლებათა სისტემების საფუძველზე ვღებულობთ შემდეგ თანაფარდობებს:

$$\left.\begin{aligned} & a_{10} - a_{11}x + a_{12}x^2 + \ldots + a_{1n}x^n = 2a^2c\\ & 2(a_{20} + a_{21}x + a_{22}x^2 + \ldots + a_{2n}x^n) = a^2(2a_{12} + \ldots + n(n-2)a_{1n}x^{n-2} + A\omega\\ & 2a_{20} = 2a^2a_{10} + A\omega\\ & 3(a_{30} + a_{31}x + a_{32}x^2 + \ldots + a_{3n}x^n) = a^2(2a_{22} + \ldots + n(n-2)a_{2n}x^{n-2}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(9) სისტემაში შემავალი განტოლებების მარცხენა და მარჯვენა ნაწილების x ცვლადის ერთნაირი კოეფიციენტების განტოლებით მიიღება:

$$\left.\begin{aligned} & a_{11} = a_{12} = \ldots = a_{1n} = 0\\ & a_{10} = 2a^2c_2\\ & a_{21} = a_{22} = \ldots = a_{2n} = 0\\ & a_{30} = a_{31} = \ldots = a_{3n} = 0\\ & a_{20} = \frac{A\omega}{2};\quad a_{40} = -\frac{a\omega^3}{4\cdot 3!}a^2\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

მაშინ (1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$u(t,x) = c_0 + c_1 x + 2a^2 c_2 t + \frac{A\omega}{2} a^2 t^2 - \frac{A\omega^3}{4 \cdot 3!} a^3 t^3 + \ldots \qquad (11)$$

c_0, c_1, c_2 და a კოეფიციენტების შეფასებებს მისაღებად საჭიროა $u(x,t)$ ფუნქციის მნიშვნელობების გაზომვა x კოორდინატის ფიქსირებული x_k წერტილებში:

$0 < x_k < \ell$; $k=1,2,3,\ldots,n$; გაზომვის შედეგების საფუძველზე (11)-დან მიიღება ალგებრულ განტოლებათა სისტემა უცნობი კოეფიციენტების მიმართ, რომელიც შიძლება ამოიხსნას უმცირეს კვადრატთა მეთოდით. შეფასების სიზუსტის გაზრდა შესაძლებელია მწკრივის წევრების რაოდენობის და ექსპერიმენტული მონაცემების ერთდროული გაზრდით.

3. დასკვნა

ნაჩვენების კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლების ხარისხოვან მწკრივებად წარმოდგენის შესაძლებლობა უცნობი კოეფიციენტების შეფასების მიზნით. დამუშავებულია კოეფიციენტების შეფასებების მიღების მეთოდიკა თეორიული დასკვნებისა და ექსპერიმენტული შედეგების შეჯერების გზით.

ლიტერატურა:

1. Салуквадзе М., Шашиашвили В., параметрическая идентификация и потверждение модели линейных нестационарных многотерных систем. საერთ.სამეც.კონფ.: „ინფორმაციული ტექნოლოგიები მართვაში". თბილისი, 10.10.2007, ტ.I. გვ. 191-197
2. Мчедлишвили Н., Нариманишвили Н.-Идентификация нелинейных динамических систем управления. «Технический университет», Тбилиси, 2009
3. Тихонов А. Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва. Наука, 1987
4. Воробъев Н. Н. Теория рядов. Москва, Наука, 1975
5. ნაცვლიშვილი ზ. მწკრივები. თბილისი, განათლება, 1980.

ESTIMATION OF THE COEFFICIENTS OF CONTROL OBJECTS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS BY THE POWER SERIES METHOD

Narimanashvili D., Narimanashvili N.
Georgian Technical University

Summary

The teoretiko-practical method of parametrical identification of objects with the distributed parametres on the basis of representation of the decision of the equation in private derivatives in the form of sedate numbers is developed.

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ МЕТОДОМ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Нариманашвили Д., Нариманашвили Н.
Грузинский Техничиский Университет

Резюме

Разработан теоретико-практический метод параметрической идентификации объектов с распределенными параметрами на основе представления решения неоднородного дифференциального уравнения с частными производными в виде степенных рядов.

.