

## АНАЛИЗ МАКРО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ГРУЗИИ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРАНГИШВИЛИ-ОБГАДЗЕ

Обгадзе Т.А., Тушишвили Н.З., Ияшвили Л.

Грузинский Технический Университет

### Резюме

На основе математической модели Прангишвили-Обгадзе для равновесной экономики Кейнса изучается динамика макроэкономических показателей Грузии. Для исследования используется агрегированная величина национального дохода. Величина коэффициента Самуельсона-Хикса для Грузии вычисляется на основе данных Министерства Финансов Грузии на период 2003-2009 гг. На основе полиномиальной регрессии имеющихся данных также строится функция потребления. На основе этих результатов с помощью решения соответствующего уравнения экономической динамики Прангишвили-Обгадзе изучается динамика национального дохода, что, со своей стороны, позволяет рассчитать динамику: средней зарплаты и коэффициента безработицы на ближайшие годы.

**Ключевые слова:** Безработица. Экономическая динамика. Национальный доход.

### 1. Введение

Для современной экономики характерно периоды депрессии и оживления, т.е. периодическое изменение объема производства. Циклическое развитие экономики сопровождается высоким уровнем экономической активности в течение длительного времени, а затем его спадом. Существует много видов циклов. Волнообразное развитие присуще не только всей экономике в целом, но и ее отдельным составляющим. Например, циклы выпуска продукции, циклы эксплуатации оборудования и т.д. По концепции Кейнса – производство, распределение и расходы в национальном хозяйстве, определяются одним агрегированным фактором – национальным доходом. Национальный доход определяется эффективным спросом. Макроэкономическую теорию часто называют теорией доходов. Для моделирования экономических циклов Самуэльсоном и Хиксом была построена соответствующая математическая модель [1], далее, этот подход был развит в работах Гудвина [2], Прангишвили-Обгадзе [3-6],[8] Тушишвили [7],[9] и т.д. В настоящей работе, математическая модель экономической динамики Прангишвили-Обгадзе применяется для изучения макроэкономических показателей экономики Грузии за период 2003г. - 2010г.

### 2. Построение обобщенной математической модели экономической динамики Прангишвили-Обгадзе

Рассмотрим экономическую динамику в случае равновесной экономики, тогда следуя принципу акселерации Самуэльсона – Хикса[1] и представления инвестиций в форме Гудвина[2], полагаем, что экономическая динамика описывается уравнением равновесия

$$X(t) = C(t) + I(t), \quad (1)$$

где

$C(t)$  - функция потребления,

$I(t)$  - инвестиционная политика.

Функцию потребления записываем в виде

$$C(t) = \int_0^t F[X(\tau), \tau] d\tau, \quad (2)$$

где зависимость  $F[X(\tau), \tau]$  определяется на основе регрессионного анализа данных.

Инвестиционная политика основывается на принципе акселерации Самуэльсона – Хикса, которую записываем в форме Гудвина[2],

$$I(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t), \quad (3)$$

где

$\beta(t)$  - функция акселерации.

Подставляя соотношения (2) и (3) в уравнение (1), получаем интегро – дифференциальное уравнение экономической динамики Прангишвили-Обгадзе

$$\dot{X}(t) = \int_0^t F[X(\tau), \tau] d\tau + \beta(t) \cdot \dot{X}(t), \quad (4)$$

Чтобы избавиться от интеграла в правой части уравнения (4), дифференцируем ее по параметру времени  $t$ , тогда получаем обыкновенную математическую модель экономической динамики в виде

$$\beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + [\dot{\beta}(t) - 1] \cdot \dot{X}(t) + F[X(t), t] = 0. \quad (5)$$

Если  $\beta(t) = 0$ , тогда из (3) получаем  $I(t) = 0$ , что из (1) дает  $\dot{X}(t) = C(t)$ , т.е. соответствует случаю простого воспроизводства.

Если же, нас интересует более весомый случай, чем простое воспроизводство, то допускаем что  $\beta(t) \neq 0$  и из (5) получаем обобщенную обыкновенную математическую модель экономической динамики в виде

$$\ddot{X}(t) + \frac{\dot{\beta}(t) - 1}{\beta(t)} \cdot \dot{X}(t) + \frac{F[X(t), t]}{\beta(t)} = 0. \quad (6)$$

К уравнению (6) присоединяем начальные условия

$$X(0) = X_0, \quad \dot{X}(0) = P_0, \quad (7)$$

и получаем задачу Коши для обобщенной обыкновенной математической модели экономической динамики (6).

Инвестиционную политику определяет функция акселерации  $\beta(t)$ , которая является параметром управления. Целью управления является стабильное развитие экономики, что отражается в законе изменения национального дохода  $X(t)$ , без разрушающих систему резонансных колебаний.

Для изучения адекватности, математической модели Прангишвили-Обгадзе, рассмотрим некоторые ее частные случаи, при различных функциях потребления и функции акселерации:

а) рассматриваем случай, когда

$$\beta(t) = t, \quad \wedge t > 0, \quad (8)$$

$$F[X(t), t] = t \cdot (\omega^2 + \varepsilon \cdot \cos 2t) \cdot X(t) - 0.9t. \quad (9)$$

Тогда из уравнения (6) получается уравнение **Матье**

$$\ddot{X}(t) + (\omega^2 + \varepsilon \cdot \cos 2t) \cdot X(t) = 0.9, \quad (10)$$

Присоединяем начальные условия

$$X(0) = 1, \dot{X}(0) = 1. \quad (11)$$

При  $\omega = 0.5$  и  $\varepsilon = 0.2$ , на основе MATHCAD 2001 Professional получаем решение  $S^{(0)} = t, S^{(1)} = X(t)$  и соответствующую картину на фазовой плоскости  $(X(t), \dot{X}(t))$ , где  $S^{(2)} = \dot{X}(t)$ , (Рис.1, 2).

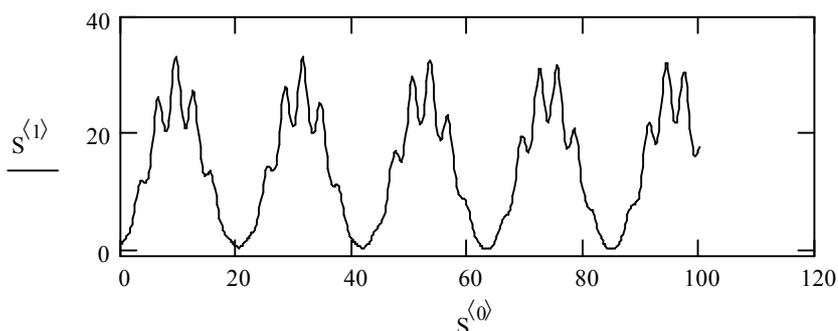


Рис.1. Динамика национальной экономики Матве

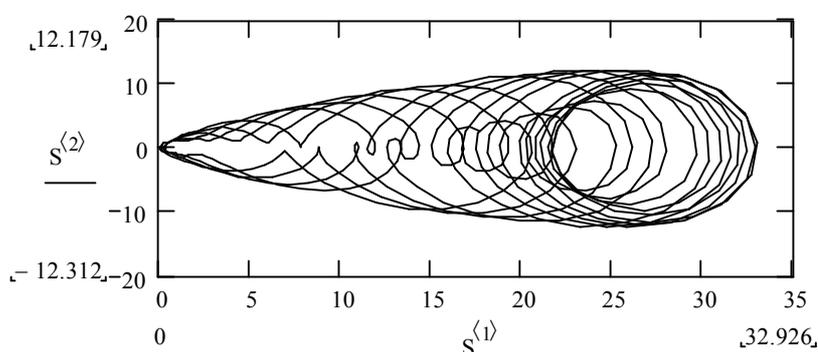


Рис.2. Картина динамики Матве на фазовой плоскости

б) рассматриваем случай, когда

$$\beta(t) = \frac{p \cdot e^{p \cdot t} - 1}{p}, \quad \wedge \quad p = \text{const}, \quad (12)$$

$$F[X(t), t] = \beta(t) \cdot [X(t)^3 - X(t) - A \cdot \cos \omega t - 0.3] \quad (13)$$

где

$$\omega = \text{const}, \quad A = \text{const}. \quad (14)$$

Тогда из уравнения (6) получаем уравнение **Дюффинга**

$$\ddot{X}(t) + p \cdot \dot{X}(t) + X(t)^3 - X(t) - A \cdot \cos \omega t - 0.3 = 0. \quad (15)$$

Присоединяем начальные условия

$$X(0) = 1, \quad \dot{X}(0) = 1 \quad (16)$$

При  $p = 0.2$ ,  $A = 0.25$  и  $\omega = 1$ , на основе MATHCAD 2001 Professional, получаем решение для национального дохода  $S^{(0)} = t, S^{(1)} = X(t)$ , и соответствующую картину на фазовой плоскости  $(X(t), \dot{X}(t))$ , где  $S^{(2)} = \dot{X}(t)$ , (Рис. 3, 4).

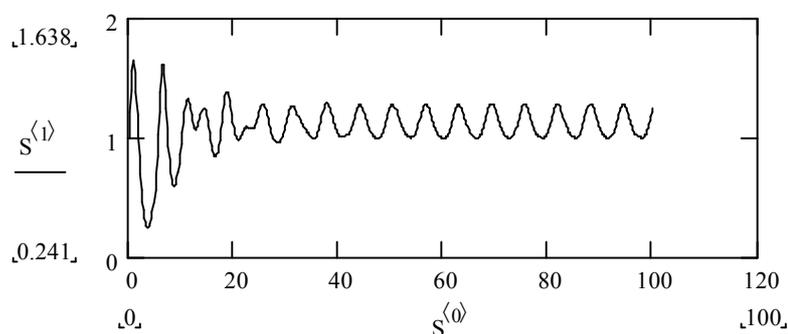


Рис.3. Динамика национальной экономики Дюффинга

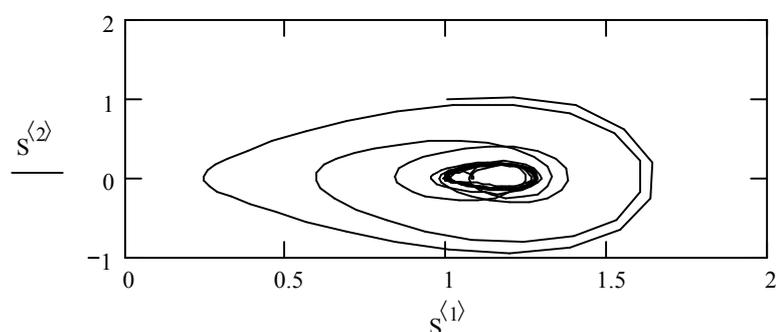


Рис.4. Картина динамики Дюффинга на фазовой плоскости

в) если рассмотреть случай, когда

$$\beta(t) = \text{const}, \quad (17)$$

$$\dot{X}(t) \approx \frac{X(t-h) - X(t-2h)}{h}, \quad h=1, \quad (18)$$

$$F[X(t), t] = \alpha \cdot X(t-h), \quad \alpha \cdot X(-h) = A, \quad (19)$$

где

$A$  = (прожиточный минимум)  $\times$  (число жителей),

тогда из уравнения (4) получаем рекуррентную модель **Самуэльсона – Хикса**.

$$X(t) = (\alpha + \beta) \cdot X(t-1) - \beta \cdot X(t-2) + A \quad (20)$$

Таким образом, мы проверили, что обобщенная обыкновенная математическая модель экономической динамики Прангишвили-Обгадзе, в частных случаях, может превращаться в модель Самуэльсона – Хикса, модель Матье, модель Дюффинга и т.д. Что, несомненно, говорит об адекватности рассмотренной математической модели.

А, что самое главное, модель Прангишвили-Обгадзе дает возможность, в случае нахождения **соответствующей функции потребления и функции акселерации**, изучить экономическую динамику страны или региона, изучить соответствующие макроэкономические показатели и выработать оптимальную инвестиционную политику.

Найдем теперь коэффициент акселерации и функцию потребления для описания экономической динамики Грузии за 2003г.-2010г. Для этого воспользуемся соответствующими данными статистического управления и Министерства финансов Грузии[10-11].

Рассмотрим динамику данных национального дохода и потребления за годы от 2003г. По 2009г. Таблица 1.

Таб. 1

Млн. Лари	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
t	0	1	2	3	4	5	6
Национальный доход	8631,3	10004,9	11791,7	14102,5	17060,5	18818,0	17682,8
Потребление	5442,1	6044,1	7159,0	8478,9	10625,8	11796,9	10752,7

На основе принципа Самуэлсона-Хикса (3), запишем приближенное соотношение

$$I(t) \approx \beta(t) \cdot \frac{I(t + \Delta t) - I(t)}{\Delta t}. \quad (21)$$

Если допустить, что  $\Delta t = 1$ , из (21) легко найти, что

$$I(t) \approx \beta(t) \cdot [I(t + 1) - I(t)]. \quad (22)$$

Из равенства (22) находим динамику коэффициента акселерации

$$\beta(t) = \frac{I(t)}{I(t + 1) - I(t)}. \quad (23)$$

Исходя из формулы (23) и пользуясь данными таблицы 1, легко составит таблицу 2, для изучения динамики величины  $\beta(t)$

Таб. 2

Млн. Лари	2003	2004	2005	2006	2007	2008
t	0	1	2	3	4	5
$I(t)$	8 631,3	10 004,9	11 791,7	14 102,5	17 060,5	18818,0
$I(t+1) - I(t)$	1 373,6	1 786,8	2 310,8	2 958	1 757,5	-1 135,2
$\beta(t)$	6,284	5,599	5,103	4,768	9,707	-16,577

Построим соответствующий график

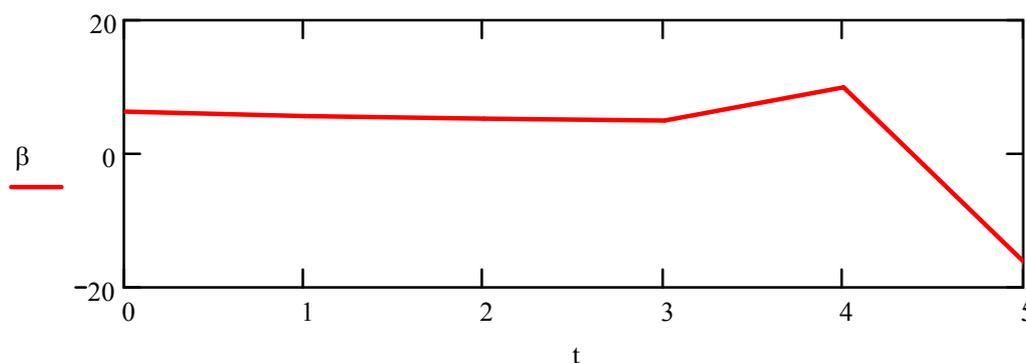


Рис.5. Динамика коэффициента акселерации Самуэльсона-Хикса для Грузии за 2003-2008 г.

Из рис.5, явствует что инвестиции в Грузии поступали стабильно за 2003-2005г. Начиная с 2006г. Наблюдался некий падем инвестирования, вплоть до 2007г. А в 2008г., инвестирование начало резко сокращаться, что видимо, результат войны августа 2008г.

Для составления модели Прангишвили-Обгадзе, нужно найти коэффициент акселерации. Найдем её эффективное значение, т.е. найдем среднее, постоянное значение  $\beta_0(t)$ . Легко вычислить её среднее значение на основе таблицы 2.

$$\beta_0(t) = \frac{6.284 + 5.599 + 5.103 + 4.768 + 9.707 - 16.577}{6} \approx 2.5$$

Для сравнения среднего значения и данных таблицы 2, рассмотрим Рис.6.

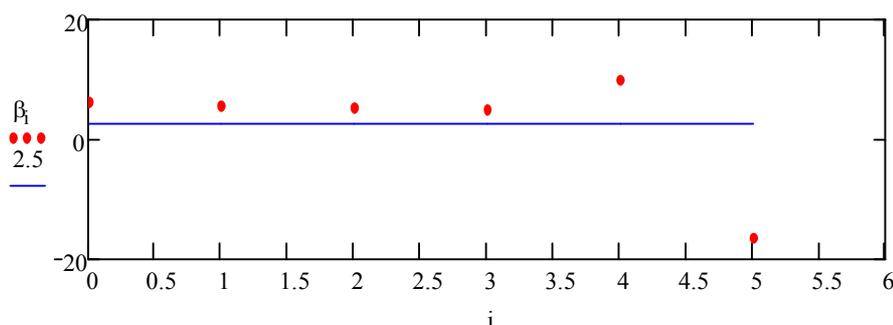


Рис.6. Сравнение табличных значений коэффициента акселерации с её средним, эффективным значением

С рис.6 мы видим, что среднее значение хорошо приближает стабильную часть коэффициента акселерации, поэтому наши дальнейшие исследования будут исходить именно из этой предпосылки. Таким образом мы будем рассматривать принцип акселерации Самуэльсона-Хикса для Грузии в виде

$$I(t) = 2.5 \cdot X(t). \quad (24)$$

Будем теперь изучать функцию потребления для Грузии, за тот же промежуток времени. На основе данных таблицы 1, построим график рис.7, изменения потребления за данные годы

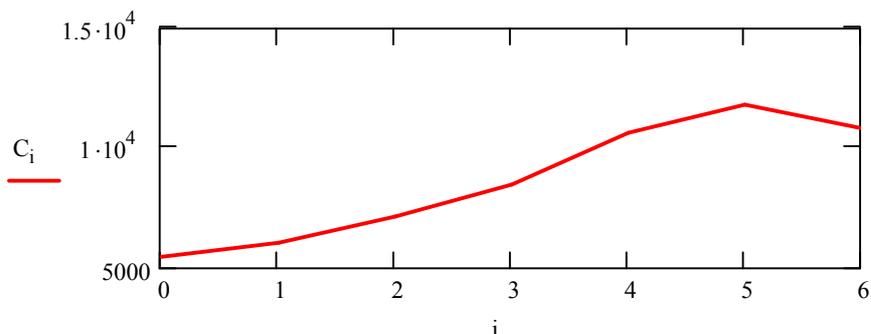


Рис. 7. Зависимость потребление-годы (2003-2009)

Для аппроксимации ядра функции потребления  $F[X(t), t]$  в зависимости от национального дохода, воспользуемся методом нелинейной регрессии. В качестве класса функций приближения рассматриваются функции содержащие полиномы и тригонометрические функции

$$\dot{C}(t) = F[X(t), t] = a \cdot \sin \varpi \cdot t + b \cdot X^4(t) + c \cdot X^3(t) + d \cdot X^2(t) + e \cdot X(t) + f, \quad (25)$$

где

$a, b, c, d, e, f, \omega$  -неизвестные параметры, которые определяются на основе таблицы 3.

Таб. 3

Млн. Лари	2003	2004	2005	2006	2007	2008
t	0	1	2	3	4	5
Национальный доход $X(t)$	8631,3	10004,9	11791,7	14102,5	17060,5	18818,0
Потребление $C(t)$	5442,1	6044,1	7159,0	8478,9	10625,8	11796,9
Скорость потребления $\dot{C}(t)$	602	1115	1320	2147	1171	-1044

Для начала составляем соответствующую целевую функцию

$$f(\alpha, \omega, A) = \sum_{j=0}^6 \left( \dot{C}_j - \sum_{i=0}^4 \alpha_i \cdot X_j^i - A \cdot \sin(\omega \cdot j) \right)^2, \quad (26)$$

которую предстоит минимизировать. Из условий минимума целевой функции находятся коэффициенты разложения в формуле (25).

Составляем программу на Mathcad для решения поставленной задачи

$$C := \begin{pmatrix} 5442.1 \\ 6044.1 \\ 7159.0 \\ 8478.9 \\ 10625.8 \\ 11796.9 \\ 10752.7 \end{pmatrix} \quad X := \begin{pmatrix} 8631.3 \\ 10004.9 \\ 11791.7 \\ 14102.5 \\ 17060.5 \\ 18818.0 \\ 17682.8 \end{pmatrix} \quad k := 0..5 \quad c1_k := C_{k+1} - C_k \quad c1 = \begin{pmatrix} 602 \\ 1114.9 \\ 1319.9 \\ 2146.9 \\ 1171.1 \\ -1044.2 \end{pmatrix}$$

$$f(\alpha, \omega, A) := \sum_{j=0}^5 \left[ c1_j - A \cdot \sin(\omega \cdot j) + \sum_{i=0}^4 (-\alpha)_i \cdot (X_j)^i \right]^2$$

$$A := 0.1 \quad \omega := 1 \quad \alpha := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

Given

$$S := \text{Minimize}(f, \alpha, \omega, A) \quad \alpha := S_0 \quad \omega := S_1 \quad A := S_2 \quad S = \begin{pmatrix} 0.025 \\ 0.05 \\ 0.025 \\ 0.05 \\ -0 \\ 0.5 \\ 0.025 \end{pmatrix}$$

Таким образом, мы получили оптимальные значения коэффициентов приближения для аппроксимационной функции (25). Запишем ядро, полученной функции потребления

$$\dot{C}(t) = F[X(t), t] = 0.025 \cdot \sin 0.5 \cdot t + 0 \cdot X^4(t) + 0.05 \cdot X^3(t) + 0.025 \cdot X^2(t) + 0.05 \cdot X(t) + 0.02 \quad (27)$$

Подставляя, значения эффективного коэффициента акселерации (24) и ядра функции потребления (27) в уравнение экономической динамики (6), получаем уравнение экономической динамики Прангишвили-Обгадзе (28), для реалит современной Грузии с точностью данных, на сайтах Министерства финансов и Статистического управления [10-11].

$$\ddot{X}(t) - 0.4 \cdot \dot{X}(t) + 0.01 \cdot \sin 0.5t + 0.02 \cdot X^3(t) + 0.01 \cdot X^2(t) + 0.02 \cdot X(t) + 0.008 = 0. \quad (28)$$

Решая задачу Коши для уравнения (28) методом Рунге-Кутта, получаем результаты в виде графиков рис.8, рис.9, где  $S^{(1)} = 0.001 \cdot (X(t) - X_{sr}(t))$ ,

$$S^{(2)} = 0.001 \cdot (\dot{X}(t) - \dot{X}_{sr}(t)), \quad S^{(0)} = t - 2003 \text{ г.}, \quad t - \text{соответствующий год.}$$

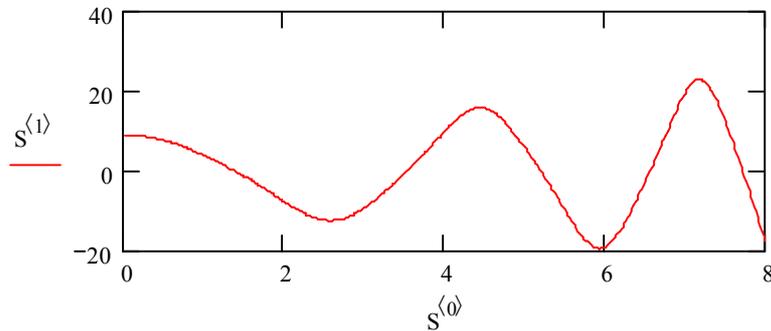


Рис.8. Динамика национального дохода Грузии в масштабе 1: 1000 для периода с 2003г, по 2011г.

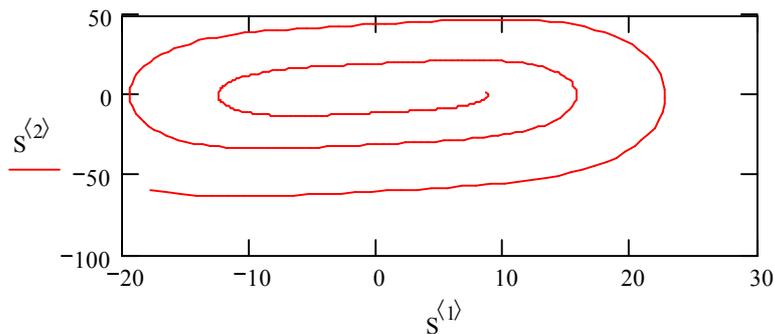


Рис. 9. Картина на фазовой плоскости

Из этих результатов, можно заключит что экономика современной Грузии находится в неустойчивом состоянии и ближайший провал ожидается к концу 2010г, если не будут дополнительных инвестиций, то в 2011г ожидается резкое уменьшение национального дохода.

На основе полученной динамики национального дохода и известного соотношения Обгадзе-Тушишвили[12], легко вычислить динамику количества безработных, рис. 10.

$$P(t) = N(t) - \frac{\mu_0(t) \cdot X(t)}{\alpha_{sr}(t)}, \quad (29)$$

где  $P(t)$  – количество безработных,  $N(t)$  – количество трудоспособного населения,  $\mu_0(t)$  – к.п.д. Национального дохода  $X(t)$ , а  $\alpha_{sr}(t)$  – средняя зарплата.

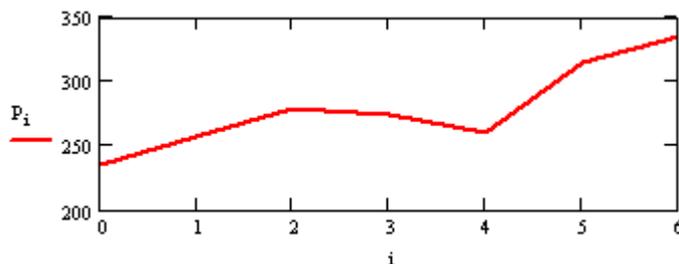


Рис. 10. Динамика числа безработных Грузии за 2003-2009г.

Динамика количества средней зарплаты дано на рис.11

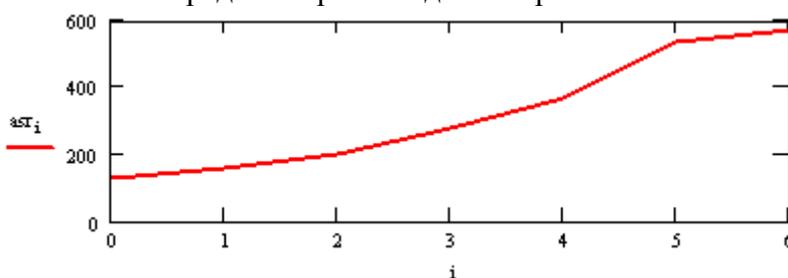


Рис. 11. Динамика средней зарплаты Грузии

Тенденции увеличения числа безработных Грузии очевидны. Хотя, растет средняя зарплата. Но, это вызывает недовольство массы людей и увеличивается социальная напряженность. При продолжении таких тенденции, возможны социальные потрясения уже к концу 2010г.

В случае продолжения инвестирования в экономику Грузии, ситуация может резко измениться к позитивному. Для выяснения подробностей, воспользуемся начальным приближением значения коэффициента аксклерации  $\beta_0 = 2.5$ ; а точное значение будем находить из условия минимума функции

$$T(\beta) = \sum_{k=0}^5 |X(t_k) - X_k|; \quad (30)$$

где  $X(t)$  – решение уравнения Прангшвили-Обгадзе с вычисленным ядром потребления  $F[X(t), t]$  по вейвлет базису Маара [12],

$$\ddot{X}(t) - \frac{1}{\beta} \cdot \dot{X}(t) + \frac{F[X(t), t]}{\beta} = 0; \quad (31)$$

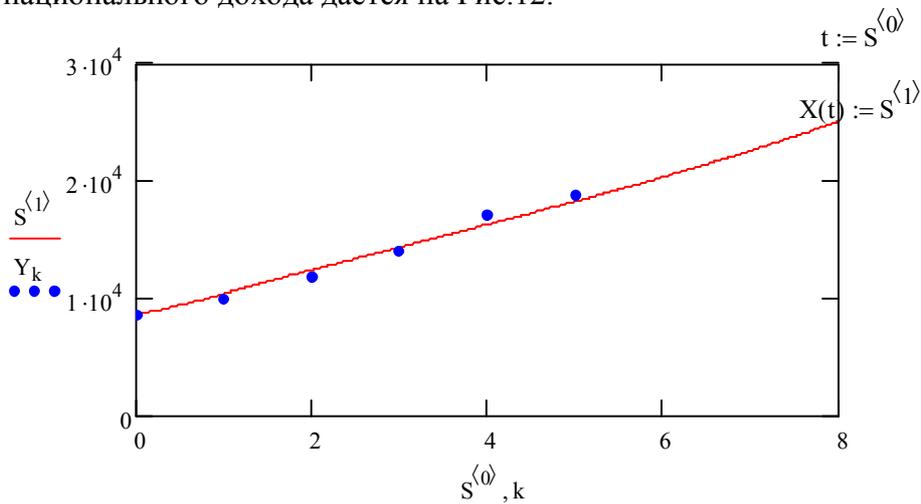
$$F[X(t), t] = g(t); \quad N = 2;$$

$$g(t) = \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N \left( R_{i,j} \cdot 2^{\frac{j}{2}} \cdot \Psi \left( 2^{\frac{j}{2}} \cdot t - i \right) \right) + \sum_{j=N+1}^{2N} \sum_{i=N+1}^{2N} \left( R_{i,j} \cdot 2^{\frac{-j}{2}} \cdot \Psi \left( 2^{\frac{-j}{2}} \cdot t - i \right) \right)$$

$$R := \begin{pmatrix} -3141.843 & -433.266 & 3923.458 & 0.5 & 0.25 \\ -5368.566 & -106.047 & -14393.149 & 0.25 & 0.5 \\ -1231.798 & 2367.824 & 3588.749 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 & 0.5 & -8935.345 & -1614.443 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 & 17796.057 & 1405.609 \end{pmatrix} \quad \Psi(t) := (1 - t^2) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$

а  $X_k$  - данные значения национального дохода.

Решение этой задачи дает коэффициент акселерации равный 29. Соответствующая динамика национального дохода дается на Рис.12.



**Рис.12. Динамика национального дохода  $X(t)$  в зависимости от времени. Точками изображены известные значения за предыдущие годы**

Как явствует из рис.12, в случае, наличия дополнительных инвестиций, экономический рост будет продолжаться.

### Литература:

1. ობგაძე თ., ობგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad-ისა და Matlab-ის ბაზაზე), ტ.2, თბილისი, სტუ, 2007
2. Gudvin R.M. The non – linear accelerator and the persistence of business cycls. Econ., 19, 1951
3. Обгдзе Т.А. Высшая математика для экономистов, ИГУМО. Москва. 2002
4. Обгдзе Т.А., Цвераидзе З.Н. Математическое моделирование в экономике. Лабораторные работы, учеб. пос., ГТУ, Тбилиси, 2006
5. Прангишвили А.И., Обгдзе Л.Т. Обобщенная математическая модель экономической динамики. Грузинский Электронный Научный Журнал: Компьютерные науки и телекоммуникация, №3(7), 2005
6. Прангишвили А.И., Обгдзе Л.Т. Математическое моделирование экономических циклов и оптимальное управление капитальными вложениями. Грузинский Электронный Научный Журнал: Компьютерные науки и телекоммуникация, №3(7), 2005

7. Прангишвили А.И., Обгадзе Л.Т., Тушишвили Н.З. Математическое моделирование и расчет потребительской корзины. Грузинский Электронный Научный Журнал: Компьютерные науки и телекоммуникация, №1(8), 2006

8. Джибладзе Н., Обгадзе Т.А., Обгадзе Л.Т. Моделирование экономических циклов. Сб.науч. тр. Института систем управления им. А.И. Элиашвили АН Грузии, №9, Тбилиси, 2005

9. Тушишвили Н.З. Определение совокупного спроса на продукты питания на основе уравнения Прангишвили-Обгадзе. Грузинский Электронный Научный Журнал: Компьютерные науки и телекоммуникация, № 8(9), Тбилиси, 2006

10. [http://www.geostat.ge/?action=page&p\\_id=313&lang=geo](http://www.geostat.ge/?action=page&p_id=313&lang=geo)

11. <http://www.mof.ge/3991>

12. Обгадзе Т.А., Тушишвили Н.З. Вейвлет-анализ макро-экономических показателей социально-экономической системы Грузии. Сб.науч.тр. Института систем управления им. А.И. Элиашвили АН Грузии, №20, Тбилиси, 2010

### **საქართველოს მაკრო-ეკონომიკური მაჩვენებლების ანალიზი ფრანგიშვილი-ობგაძის მათემატიკური მოდელის ბაზაზე**

თამაზ ობგაძე, ნატო თუშიშვილი, ლაშა იაშვილი  
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

#### **რეზიუმე**

ფრანგიშვილი-ობგაძის მოდელზე დაყრდნობით, კეინსის წონასწორული ეკონომიკისათვის, შეისწავლება საქართველოს მაკროეკონომიკური მაჩვენებლების დინამიკა. კვლევებისათვის გამოიყენება ეროვნული შემოსავლის აგრეგირებული სიდიდე. საქართველოსათვის სამუელსონ-ჰიკის კოეფიციენტის სიდიდე გამოითვლება საქართველოს ფინანსთა სამინისტროს 2003-2009 წლების მონაცემებზე დაყრდნობით. ასევე, არსებული მონაცემების პოლინომიალურ რეგრესიის გათვალისწინებით აგებულია მოხმარების ფუნქცია. ამ შედეგების მიხედვით, ფრანგიშვილი-ობგაძის ეკონომიკური დინამიკის შესაბამისი განტოლების ამოხსნით შეისწავლება ეროვნული შემოსავლის დინამიკა. რაც თავის მხრივ, საშუალებას იძლევა გამოვთვალოთ საშუალო ხელფასისა და უმუშევრობის კოეფიციენტის დინამიკა უახლოეს წლებში.

### **THE ANALYSIS OF MACROECONOMIC PARAMETERS OF GEORGIA ON THE BASIS OF PRANGISHVILI-OBGADZE MATHEMATICAL MODEL**

Obgadze Tamaz, Tushishvili Nato, Iashvili Lasha  
Georgian Technical University

#### **Summary**

On the basis of mathematical model Prangishvili-Obgadze, for Keynes's equilibrium economy, this article studies the dynamics of macroeconomic parameters of Georgia. The aggregated size of the national income is used for our research. The size of factor Samuelson-Hicks for Georgia is being calculated on the basis of the data of 2003-2009 presented by the Ministry of Finance of Georgia. Function of consumption is also being developed on the basis of polynomial regresses of the available data. Through these results along with solving the corresponding equation of economic dynamics Prangishvili-Obgadze, dynamics of the national income is calculated that allows calculation of dynamics of the average salary and factor of unemployment in the nearest years.