მათემატიკა – MATHEMATICS – МАТЕМАТИКА

სხვაობიანი სქემები ერთი არაწრფივი პარაბოლური ტიპის განტოლებისათვის

ომარ ქომურჯიშვილი[1], ნოდარ ხომერიკი[2]
1-თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი,
2-საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

ნაშრომში წარმოადგენილია მრავალგანზომილებიანი ერთი არაწრფივი პარაბოლური ტიპის განტოლებისათვის სიმეტრიული აბსოლუტურად მდგრადი $(O(r^2+|h|^2)$ აპროქსიმაციის მქონე სხვაობაინი სქემები. აღსანიშნავია, რომ თითეული ექვივალენტური სხვაობიანი განტოლებები სრულად აპროქსიმირებს მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებას. სწორედ ეს გარემოება განასხვავებს ამ სქემებს სხვა უმრავლეს ეკონომიურ სქემებისგან.

საკვანძო სიტყვები: არაწრფივი პარაბოლური განტოლება. სხვაობიანი სქემა. მდგრადობა. აპროქსიმაცია. კვანძი.

1. შესავალი

მათემატიკური ფიზიკის მრავალი ამოცანა დაკავშირებულია მრავალგანზმოლებიან, როგორც წრფივ ასევე არაწრფივ პარაბოლური პიტის განტოლებების რიცხვით ამონახსნებთან. რიცხვითი რეალიზაცია ასეთი ტიპის ამოცანებისათვის, როცა განტოლების მარჯვენა მხარე f(u) დამოკიდებულია u - ტემპერატურაზე, საკმაოდ რთულ ამოცანად ითვლება. სწორედ ასეთ შემთხვევაში ზუსტი ამონახსნი წარმოადგენს კარგ ტესტს მიღებული სხვაობიანი სქემების შემოწმებისათვის. ამ მიზნით ნაშრომში წარმოდგენილი სხვაობაინი სქემები აპრობირებულია მრავალ ტესტურ ამოცანებზე.

ამჟამად ცნობილია ასეთი ტიპის განტოლებებისათვის რამდენიმე ეფექტური რიცხვითი ალგორითმები ანუ როგორც მათ უწოდებენ ეკონომიური სქემები. ეკონომიური სქემების მიღების ალგორითმული იდეა ეფუძნება მრავალ განზომილებიანი ამოცანების დაყვანას მარტივ ერთგანზომილებიან სამდიაგონალურ სხვაობაინ ამოცანამდე, რომელთა რიცხვითი რეალიზაცია ხორციელდება გადადენის მეთოდით.

2. ამოცანის დასმა და სხვაობიანი სქემები

1. განვიხილოთ პირველი საწყისი - სასაზღვრო ამოცანა Q_T ცილინდრში:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(u), (x,t) \in Q_T = Gx(0 \le t \le T) \qquad (1.1)$$

U(x,0)=U_0(x), U(x,t)$|_\Gamma$=0, x=(x_1,x_2,…,x_n)∈G $\overline{G} = G + \Gamma - n$ განზომილებიანი მართკუთხა პარალელეპიპედია 0≤xi≤1, i=1,2,…,n; U_0, f მოცემული ფუნქიცებია. L ელიფსური ოპერატორია

$Lu = \sum_{i=1}^{n} L_i u, L_i u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, ხოლო f(u) ასე მოიცემა f(u)=$|u|^\rho \cdot$u (იხ.[1])

2) (1.1) ამოცანისათვის სხვაობიანი სქემების აგება ანალოგიურია [2]-ში წარმოადგენილი სხვაობაინი სქემების აგების იდეისა. ამიტომ თუ გავიმეორებთ [2]-ში მოყვანილ მსჯელობას, სადაც დაწვრილებით არის მოყვანილი სხვაობიანი სქემის მიღება, მაშინ ამ შემთხვევაში მივიღებთ:

$$y_{\overset{0}{t}} + \sigma \cdot r^2 R_k y_{t\bar{t}} = \sum_{i=1}^{n} y_{x_i \bar{x}_i} + f_0, k = \overline{1,n} \tag{1.2}$$

$$y_{\overset{0}{t}} + \sigma \cdot r^2 (\sum_{k=1}^{n} R_k) y_{t\bar{t}} = \sum_{i=1}^{n} y_{x_i \bar{x}_i} + f_0 \tag{1.3}$$

f_0 არის f(u)=$|u|^\rho$ u-ის მნიშვნელობა ძირითად კვანძში, $R_k = \frac{1}{2} A_k$, A_k= Δ_{kk}, $\Delta_{kk} y = y_{x_k \bar{x}_k}$.

შენიშვნა. სქემები (1.2) და (1.3) წრფივია y^{j+1} ფუნქციის მნიშვნელობის მიმართ j+1 ფენაზე, იგივე ითქმის მარჯვენა მხარის მიმართ. f_0 არის f(u) მნიშვნელობა ცნობილ i-ურ ფენაზე.

3. სხვაობიანი სქემები n=2,3 შემთხვევისათვის

მაგალითის სახით გამოვწეროთ ერთმანეთის ექვივალენტური α წონიანი სქემები n=2 და n=3 შემთხვევაში

1. n=2

$$\frac{y^{j+1} - y^{j-1}}{2\tau} - \sigma\tau^2 \Delta_{11} y_{t\bar{t}} = \Delta_{11}(\alpha y^{j+1} + (1-\alpha) y^j) + \Delta_{22} y^{j-1} + f_0^j \tag{2.1}$$

$$\frac{y^{j+2} - y^{j}}{2\tau} - \sigma\tau^2 \Delta_{22} y_{t\bar{t}} = \Delta_{22}(\alpha y^{j+2} + (1-\alpha) y^{j+1}) + \Delta_{11} y^{j} + f_0^{j+1} \tag{2.2}$$

2. n=3 და $\sigma = \frac{1-\alpha}{2}$

$$\frac{y^{j+1} - y^{j-1}}{2\tau} - \frac{1-\alpha}{2} \Delta_{11}(y^{j+1} - y^{j-1}) = \alpha \Delta_{11} y^{j-1} + \Delta_{33} y^{j-1} f_0^j \tag{2.3}$$

$$\frac{y^{j+2}-y^{j}}{2\tau}-\frac{1-\alpha}{2}\Delta_{22}(y^{j+2}-y^{j})=\alpha\Delta_{22}y^{j+2}+\Delta_{11}y^{j}+\Delta_{33}y^{j}+f_0^{j+1} \quad (2.4)$$

$$\frac{y^{j+3}-y^{j+1}}{2\tau}-\frac{1-\alpha}{2}\Delta_{33}(y^{j+3}-y^{j+1})=\alpha\Delta_{33}y^{j+3}+\Delta_{11}y^{j+1}+\Delta_{22}y^{j+1}+f_0^{j+2} \quad (2.5)$$

4. ზოგადი სქემა (1.1) განტოლებისთვის

თუ α წონიან სქემაში ავიღებთ α=n-1, მაშინ მივიღებთ (1.1) ამოცანისათვის ზოგად სქემას

$$\frac{y^{j+k}-y^{j+k-2}}{2\tau}=\Delta_{kk}\left(\frac{n}{2}y^{j+k}+\left(1-\frac{n}{2}\right)y^{j+k-2}\right)+\sum_{i=1 i\neq k}^{n}\Delta_{ii}y^{j+k-2}+f_0^{j+k-1}, k=\overline{1,n} \quad (3.1)$$

ანუ წილად-ბიჯიან სქემაში:

$$\frac{y^{j+\frac{k}{n}}-y^{j+\frac{k-1}{n}}}{\frac{1}{n}\tau}=0{,}5n\Delta_{kk}\left(y^{j+\frac{k}{n}}-y^{j-\frac{k-1}{n}}\right)+\sum_{i=1}^{n}\Delta_{ii}y^{j+\frac{k-1}{n}}+f_0^{j+\frac{2k-1}{2n}}, k=\overline{1,n} \quad (3.2)$$

თუ (3.1)-ში დავუშვებთ n=1 და f=0, მაშინ

მივიღებთ კრანკ-ნიკოლსონის სქემას:

$$\frac{y^{j+1}-y^{j-1}}{2\tau}=\Delta_{11}\frac{y^{j+1}+y^{j-1}}{2}$$

ხოლო თუ (3.1)-ში n=2 მივიღებთ

$$\frac{y^{j+1}-y^{j-1}}{2\tau}=\Delta_{11}y^{j+1}+\Delta_{22}y^{j-1}+f_0^{j}$$

$$\frac{y^{j+2}-y^{j}}{2\tau}=\Delta_{22}y^{j+2}+\Delta_{11}y^{j}+f_0^{j+1} \quad (3.3)$$

თუ (3.2)-ში n=2, მაშინ მივიღებთ

$$\frac{y^{j+\frac{1}{2}}-y^{j}}{0{,}5\tau}=\Delta_{11}y^{j+\frac{1}{2}}+\Delta_{22}y^{j}+f_0^{j+\frac{1}{4}}$$

$$\frac{y^{j+1}-y^{j+\frac{1}{2}}}{0{,}5\tau}=\Delta_{22}y^{j+1}+\Delta_{11}y^{j+\frac{1}{2}}+f^{j+\frac{3}{4}} \quad (3.4)$$

(3.3) და (3.4) წარმოადგენს პისმენ-რექფორდის სქემებს [3,4].

5. დასკვნა

ექვივალენტური სხვაობიანი განტოლებები სრულად აპროქსიმირებს მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებას. ამ გარემოებით განასხვავებს იგი ამ სქემებს სხვა უმრავლეს ეკონომიურ სქემებისგან.

ლიტერტურა:

1. Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Изд. Мир, М., 1972
2. Комуджишвили О. Разностные схемы для решения многомерных уравнений второго порядка и систем гиперболических типов. ЖВМ и ФМ, 2007, Т. 47. №6
3. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Изд. Наука, Новосибирск, 1967
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. Изд. Наука, М, 1977.

MATHEMATICS

DIFFERENCE SCHEMES FOR SEVERAL NONLINEAR PARABOLIE TYPE EQUATION

Komurjishvili Omar[1], Khomeriki Nodar[2]

1-Tbilisi State University
2-Georgian Technical University

Summary

Symmetric, absolutely stable schemes for some multidimensional nonlinear parabolic equation having approximation $O(r^2+|h|^2)$ are presented. It is remarkable that every equivalent difference equation approximates the given differential equation completely, thus distinguishing such schemes from the majority of other economic schemes.

МАТЕМАТИКА

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ОДНОГО МНОГОМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Комурджишвили О.[1], Хомерики Н.[2]
1-Тбилисский Государственный Университет,
2-Грузинский Технический Университет

Резюме

Рассматривается алгоритм построения симметричных абсолютно устойчивых разностных схем с аппроксимацией $O(r^2+|h|^2)$ для одного многомерного нелинейного уравнения параболического типа. Нужно отметить, что каждое эквивалентное разностное уравнение полностью аппроксимирует данное дифференциальное уровнение, что и является отличием этих схем от большинства других экономических схем.