განაწილებულპარამეტრებიანი ობიექტების იდენტიფიკაციის ზოგიერთი კერძო ამოცანის ინვარიანტულ-ჯგუფური ასპექტები

ნოდარ ნარიმანაშვილი
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

განხილულია მათემატიკური ფიზიკის განტოლებების ინვარიანტულ-ჯგუფური თვისებების გამოყენება მართვის განაწილებულპარამეტრებიანი ობიექტების იდენტიფიკაციის ზოგიერთი კერძო ამოცანისათვის. ნაჩვენებია კერძოწარმოებულიანი დეფერენციალური განტოლებების ინვარიანტული ამოხსნების მიღების შესაძლებლობა მათი ჯგუფური თვისებების გამოყენების საფუძველზე.

საკვანძო სიტყვები: იდენტიფიკაცია. განაწილებულპარამეტრებიანი ობიექტები. ინვარიანტ-ტულობა. ჯგუფური თვისებები. კერძო ამოხსნები.

1. შესავალი

ცნობილია, რომ მართვის ობიექტებში მიმდინარე ფიზიკური პროცესები, როგორც წესი, დროსა და სივრცეში ერთდროულადაა განაწილებული. ასეთი ობიექტებისა და პროცესების მათემა-ტიკური მოდელების ფორმულირება კერძოწარმოებულიანი ანუ მათემატიკური ფიზიკის განტოლე-ბების სახით ხდება. განაწილებულპარამეტრებიანი მოდელების გამოყენების ერთ-ერთი ძირითადი პრობლემა მათი ამონახსნების მოძებნის სირთულეა. ეს პრობლემა განსაკუთრებით აქტუალურია არაწრფივი მოდელებისათვის. მათემატიკური ფიზიკის განტოლებების ერთ-ერთი ძირითადი თვისე-ბაა მათი სიმეტრიულობა, რაც გულისხმობს ამონახსნების ინვარიანტულობას გარდაქმნათა გარკვე-ული ჯგუფის მიმართ. ეს თვისება საშუალებას იძლევა კერძო ამონახსნებიდან მივიღოთ განტოლე-ბათა ზოგადი ამონახსნები და მარტივი ფორმით მოვახდინოთ სასურველი ამონახსნების მიზანდასა-ხული კონსტრუირება.

2. ძირითადი ნაწილი

ინვარიანტულ-ჯგუფური თვისებების მატარებელია კარგად ცნობილი ფურიეს, ლაპლასის, დალამბერის, ნავიე-სტოქსის, შრედინგერის და სხვა განტოლებები [1,2], ამ განტოლებებით წარ-მატებით შეიძლება აღვწეროთ მართვის ობიექტებში მიმდინარე ისეთი პროცესები, როგორიცაა სითბოს გავრცელება, ელექტრომაგნიტური და მექანიკური რხევები, დიფუზიური პროცესები, ჰიდ-რო და გაზოდინამიკის კერძო ამოცანები და სხვა [1,2].

ამ განტოლებათა სიმეტრიულობა საშუალებას იძლევა რთული მათემატიკური მოდელე-ბისათვის ვიპოვოთ კერძო ანუ ინვარიანტული ამონახსნები, რომლებიც შეიცავენ მნიშვნელოვან ინფორმაციას ზოგადი ამონახსნის სტრუქტურის შესახებ. მათ შეიძლება განსაზღვრონ აგრეთვე ევოლუციური პროცესების ფინალური ფორმები. მნიშვნელოვანია, რომ დიფერენციალური განტო-ლებების ინვარიანტულობა გარდაქმნათა გარკვეული Gz ჯგუფის მიმართ იძლევა საშუალებას კერ-ძო ამონახსნების საფუძველზე ავაგოთ განტოლების ახალი ამონახსნები.

ზემოაღნიშნული იდეის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ სითბოგადაცემის ერთგვაროვანი წრფივი განტოლება:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{1}$$

სადაც $U(x,t)$ ერთგვაროვან გარემოში ტემპერატურული ველის განაწილების ფუნქციაა, t დროითი კოორდინატა, ხოლო x სითბოს სივრცული (გრძივი) გავრცელების პარამეტრია.

(1) განტოლების ფუნდამეტალური ამონახსნი შემდეგი სახისაა [1]:

$$U(x,t)=e^{-\frac{x^2}{4t}}t^{-\frac{1}{2}} \tag{2}$$

ამავე დროს ცნობილია [3; 4], რომ (1) კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებისათ-ვის სამართლიანი ინვარიანტული გარდაქმნები, რომლებიც შემდეგი სახის ოპერატორებით მოიცემა:

$$D_1=\frac{\partial}{\partial x};\ D_2=\frac{\partial}{\partial t};\ D_3=U\frac{\partial}{\partial U};\ D_4=x\frac{\partial}{\partial t}+2t\frac{\partial}{\partial t} \tag{3}$$

თუ D_1 და D_2 ოპერატორებით ვიმოქმედებთ ამ ამონახსნზე მივიღებთ სითბოგამტარობის განტო-ლების შემდეგი სახის ახალ ამონახსნებს:

$$U(x,t)=e^{\frac{-(x+a)^2}{4t}}t^{-\frac{1}{2}} \tag{4}$$

$$U(x,t)=e^{\frac{-x^2}{4(t+a)}}(t+a)^{-\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

სადაც $\alpha=const.$

ამონახსნების ,,გამრავლება‘‘ შეიძლება ზემოთმოცემული ოპერატორების წრფივი კომბინა-ციით, მაგალითად (4) და (5)-დან მიიღება შემდეგი სახის ახალი ამონახსნი:

$$U(x,t)=e^{\frac{-(x+a)^2}{4(t+a)}}(t+a)^{-\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

ოპერატორთა კომბინაციების გამოყენების ტექნიკის სრულყოფით შესაძლებელია მივიღოთ სასურველი სტრუქტურის სხვადასხვა ამონახსნები.

პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით საინტერესოა შედარებით რთული დიფერენცი-ალური განტოლების ამონახსნების მიღება უფრო მარტივი სტრუქტურის მქონე დიფერენციალური განტოლებებისგან, კერძოდ ჯგუფურ-ინვარიანტული თვისების გამოყენებით შეიძლება მაღალი რი-გის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი მივიღოთ უფრო დაბალი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნიდან. ასეთი შესაძლებლობის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი სახის არაწრფივი დიფერენციალური განტოლება კერძო წარმოებულებში [4]:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\lambda(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial\lambda}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2. \tag{7}$$

ამ განტოლებისთვისაც დასაშვებია ინვარიანტული გარდაქმნები, რომლებიც შემდეგი ოპე-რატორებით მოიცემა:

$$D_1=\frac{\partial}{\partial x};\qquad D_2=\frac{\partial}{\partial t}. \tag{8}$$

დავუშვათ, რომ $u=\theta(x,t)$ (7) განტოლების რომელიღაც ამონახსნია.

მაშინ (8) ოპერატორების ზემოქმედების საფუძველზე მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}(\theta(x,t))\\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial t}(\theta(x,t))\\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\theta(x,t))\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(9)-ს ჩასმით (7)-ში მივიღებთ:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(u)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right). \qquad (10)$$

მივიღეთ არაწრფივი თბოგამტარობის ტიპიური დიფერენციალური განტოლება, რომელის სტრუქტურა საკმაოდ კარგადაა შესწავლილი [1]. ამრიგად (10) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ერთდროულად არის (7) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი, მაშინ როდესაც (7)-ის სტრუქტურა მნიშვნელოვნად რთულია, ვიდრე (10) განტოლების.

3. დასკვნა

ზემოთმოყვანილი საილუსტრაციო მაგალითები საშუალებას იძლევა დავასკვნათ, რომ განაწილებული პარამეტრებიანი ობიექტის იდენტიფიკაციის ზოგიერთ კერძო ამოცანაში წარმატებით შეიძლება გამოვიყენოთ ამ ობიექტების აღმწერი მათემატიკური ფიზიკის განტოლებების ინვარიანტულ-ჯგუფური თვისებები. კერძოდ, გვეძლევა შესაძლებლობა შედარებით მარტივი ფორმებით მოვახდინოთ სხვადასხვა ინფორმაციული სტრუქტურის მქონე ამონახსნების მიზანდასახული კონსტრუირება.

ლიტერატურა

1. Тихонов А.Н; Самарский А.А. Уравнения математической физики, - М, Наука, 1977
2. Лаврентьев М.А, Шабой Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели,-М; Наука, 1978
3. Овсянников Л.В. - Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. Новосибирск. ИГУ. 1966
4. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М, Наука, 1983.

INVARIANT-GROUP ASPECTS FOR THE SOME PARTICULAR SUMS OF IDENTIFICATION OF THE DISTRIBUTED PARAMETERS

Narimanashvili Nodar
Georgian Technical University

Summary

Using of invariant-group properties of the mathematic-physic equations for some particular sums of identification of identification of the control objects with distributed parameters is discussed. The possibility of getting of invariant solutions for differential equations with the particular derivatives on the basis of using its group properties is shown.

ИНВАРИАНТНО-ГРУППОВЫЕ АСПЕКТЫ НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Нариманашвили Н.
Грузинский Технический Университет

Резюме

Рассмотрена возможность применения инвариантно-групповых свойств уравнений математической физики для решения некоторых частных задач идентификации объектов управления с распределенными параметрами. Показан способ получения инвариантных решений для дифференциальных уравнений в частных производных на основе применения их групповых свойств.