УСЛОВНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА ПОВЕРХНОСТЯХ КАТАЛАНА

Чкуасели К., Алиханашвили М., Гогаладзе Р.,
Гоголадзе Л.
Грузинский Технический Университет

Резюме

В работе приводится условная классификация поверхностей, производится общий обзор и рассматриваются критерии отнесения поверхностей к определенным классическим группам. Основная часть работы отводится характеристике и описанию так называемых поверхностей Каталана, ввиду их широкого применения в практической деятельности. Рассмотрен ряд позиционных задач на поверхностях Каталана, не имеющих описания в технической литературе.

Ключевые слова: поверхности Каталана; цилиндроид; коноид; гиперболический параболоид (косая плоскость); плоскость параллелизма; образующая; направляющая; позиционные задачи.

1. Введение

В начертательной геометрии поверхности определяются как непрерывное множество всех положений перемещающейся в пространстве линии.

Наибольшее применение в инженерной практике получил кинематический способ образования поверхности, который удобен при ее графическом отображении (рис.1). Линию l, перемещающуюся в пространстве назовем образующей. Множество всех ее положений образует однопараметрическое множество линий или семейство линий: ($l_1, l_2, \ldots, l_n$).

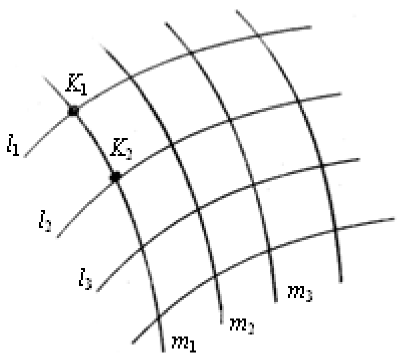

Рис. 1

Каждая точка k образующей во время движения опишет m кривую, которую назовем направляющей. Каждая точка кривой l опишет (m_1, m_2, …, m_n) непрерывное множество кривых, семейство направляющих.

Кривая одного семейства пересекает все кривые второго семейства. Поверхность не изменится, если m линию m представим образующей, а линию l направляющей.

Отметим, что существуют различные возможности выбора направляющих и образующих одной и той же поверхности, но способ образования поверхности должен быть простейшим с точки зрения ее отображения.

Учитывая многообразие форм поверхностей целесообразно осуществить их систематизаию. При кинематическом способе образования поверхности в основу систематизации положены вид образующей и закон ее перемещения в пространстве. Исходя из этих параметров поверхности делятся на различные группы.

По виду образующей поверхности разделяются на линейчатые(образующая- прямая) и нелинейчатые(образующая- кривая линия) поверхности.

По закону перемещения образующей в пространстве выделяются:поверхности параллельного переноса, поверхности вращения,винтовые поверхности и т.д.

Условная классификация поверхностей показана в таблице 1.

Поверхность однозначно определена на эпюре если:

- Можно построить любую ее образующую;
- По одной проекции точки, принадлежащей данной поверхности, можно построить ее вторую проекцию;
- Относительно любой точки, заданной на том же чертеже, можно однозначно решить, принадлежит ли она поверхности или нет.

Таб. 1

Множество точек, определяющих поверхность, называется ее точечным каркасом. Множество линий, определяющих поверхность, называется ее линейным каркасом. Если множество элементов (точек, линий), определяющих поверхность непрерывно, то каркас называется непрерывным, в противном случае он называется дискретным.

Построение проекций каркаса возможно, если задано определение поверхности - единство геометрических фигур и условий передвижения их в пространстве.

Необходимо отметить, что у одной и той же поверхности есть несколько определяющих. Выбирают ту определяющую, которая удобна в конкретном случае. Геометрические фигуры, которые определяют поверхность, во многих случаях являются образующими и направляющими поверхности, а условие их движения в пространстве дает возможность построения каркаса поверхности.

Таким образом, поверхность на эпюре однозначно отображена проекциями отображающих ее элементов и условием движения образующей.

Определяющая поверхности состоит из двух частей: геометрической части которая объемлет единство геометрических фигур этих поверхностей и алгоритмической части, где определяется порядок взаимозависимости геометрических фигур.

2. Основная часть
2.1. Линейчатые поверхности

Линейчатой называется поверхность, которая образуется при определенном движении прямой (образующей) в пространстве. В общем случае линейчатая поверхность определяется тремя направляющими линиями. Образующая в процессе движения пересекает все три направляющие. В таких условиях в каждой точке одной направляющей проходит одна образующая.

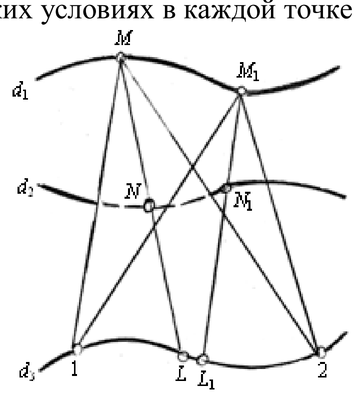

Рис. 2

Допустим заданы три направляющие d_1, d_2 и d_3 (рис.2).

На направляющей d_1 возьмем точку M. Точкой M и направляющей d_3 определяется конусная поверхность, которую в некоторой точке N пересекает образующая d_2. В точке N проходит единственная образующая MN конуса (Md_3), которая пересекает направляющую d_3 в точке L.

Таким образом, MNL образующая конуса является секущей прямой для всех трех направляющих. Она является образующей поверхности. Образующая (MNL) построена как общая образующая конусов (Md_2) и (Md_3).

Если провести аналогичные построения для каждой точки кривой d_1, получим бесконечное множество образующих, которые образуют одну единственную линейчатую поверхность.

Образующими не могут быть приняты три кривые любой формы и положения. Можно выбрать только две кривые (d_1, d_3), форма и положение третьей кривой d_2 должны быть такими, чтобы она всегда в одной точке пересекала конусы, направляющая которых одна кривая (d_3), а вершины лежат на другой кривой (d_1).

Линейчатые поверхности могут быть определены:

1. Тремя направляющими кривыми.
2. Двумя направляющими кривыми и плоскостью параллелизма (в этом случае одна направляющая поверхности несобственная точка)
3. Одной направляющей кривой и определенным условием движения образующей..

2.2. Поверхности Каталана

Пусть одна из трех направляющих несобственная прямая. Собственной представляющей несобственной прямой будем считать плоскость α, которой принадлежит эта несобственная прямая. Тогда каждая образующая такой поверхности должна пересекать две собственные направляющие и быть параллельной α плоскости, т.е. пересекать и третью несобственную направляющую. Исходя из этого плоскость α называется плоскостью параллелизма. А поверхности производимые по таким законам называются поверхностями с двумя направляющими и плоскостью параллелизма:

$$\beta\ (p, r, q^{\infty} = \alpha).$$

В исследование этих поверхностей большой вклад внес бельгийский ученый Каталан, поэтому поверхности с двумя направляющими и плоскостью параллелизма называют поверхностями Каталана.

Поверхности Каталана, как все другие поверхности отображаются проекциями своей образующей, направляющих p и r и плоскости параллелизма $\alpha - q^{\infty}$. Для облегчения графических построений, плоскость параллелизма занимает частное положение.

К поверхностям этой группы относятся:

1. Гиперболический параболоид (косая плоскость);
2. Коноид;
3. Цилиндроид.

Эти поверхности отличаются формой направляющих.

Если обе направляющие прямые, полученная поверхность называется гиперболическим параболоидом или косой плоскостью. Поверхность названа таким образом, потому что в общем случае при ее пересечении с плоскостью получают два вида кривых – параболу и гиперболу. В частном случае плоскость с этой поверхностью может пересекаться по вырожденной гиперболе (две пересекающиеся прямые) или вырожденной параболе (образующей).

Гиперболический параболоид производится при таком передвижении образующей l в пространстве, когда постоянно пересекаются две секущиеся направляющие p и r и при этом образующая остается параллельной одной плоскости (рис.3).

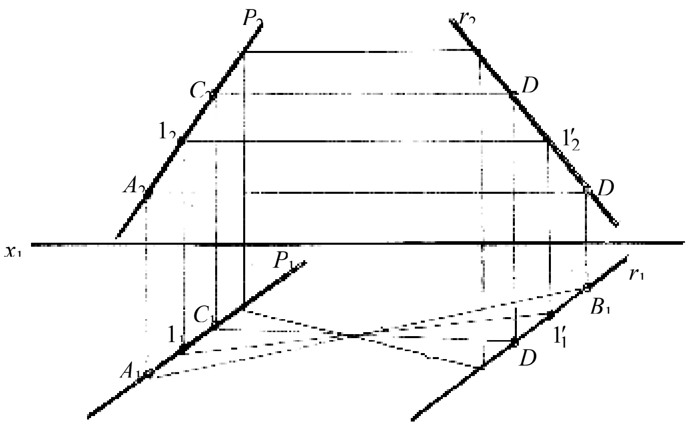

Рис.3

Отметим несколько свойств такой поверхности:

a) у гиперболического параболоида существуют две серии образующих;
b) образующие одной серии являются взаимносекущимися;
c) все образующие одной серии пересекают все образующие второй серии;
d) у каждой серии имеется своя плоскость параллелизма;

Если плоскости параллелизма взаимно перпендикулярны, гиперболический параболоид называется прямым, в противном случае –наклонным.

У гиперболического параболоида две плоскости симметрии, прямая их пересечения является осью симметрии поверхности. Если эту поверхность пересечем плоскостью параллельной оси симметрии, получим параболу, в остальных случаях гиперболы. Косая плоскость может быть получена путем плоскопараллельного перемещения одной из парабол как образующей по второй как направляющей рис.4. На рисунке так же показан пример гиперболического сечения рассматриваемой поверхности и его вырожденный случай – две прямые, проходящие через седловую точку.

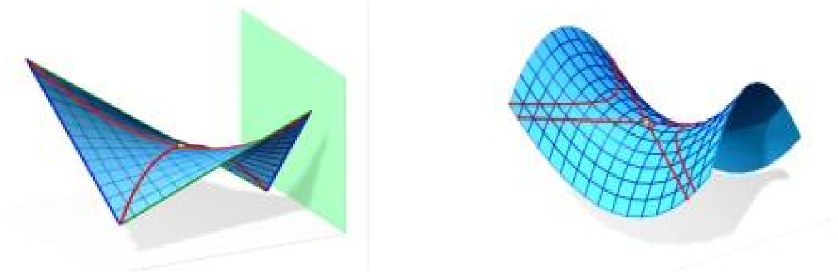

Рис.4

Косая плоскость имеет широкое применение в инженерно-строительном деле, при конструировании перекрытий зданий.

Если одна из выбранных направляющих является прямой, а вторая кривой, то получим поверхность, которая называется коноидом (рис.5).

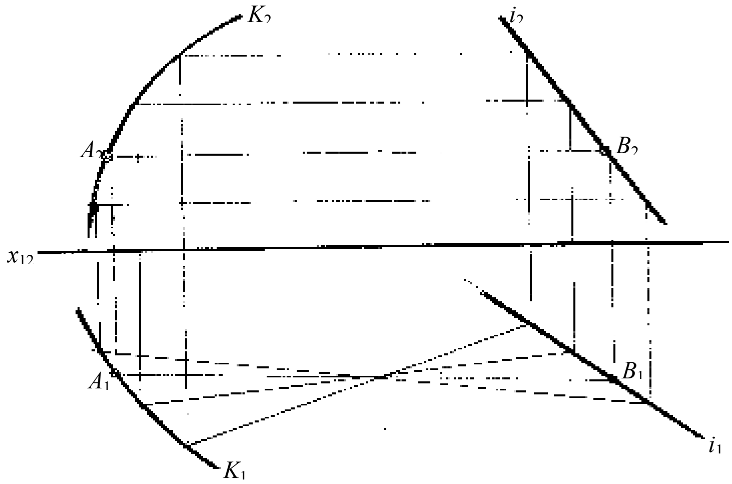

Рис.5

Коноид образуется при таком перемещении прямой l в пространстве, когда она постоянно пересекает линейчатую i и криволинейную k направляющие и, в то же время остается параллельной какой-либо одной плоскости.

Пучок плоскостей, параллельных плоскости α, определяет бесконечное множество параллельных прямых, задающих поверхность.

Коноиды широко применяются в строительстве, кораблестроении, машиностроении. Если обе направляющие криволинейные, то получим поверхность, называемую цилиндроидом. Цилиндроид образуется при таком движении направляющей l в пространстве, когда она постоянно пересекает криволинейные направляющие q и r, и, в то же время, остается параллельной какой-либо одной плоскости (рис.6).

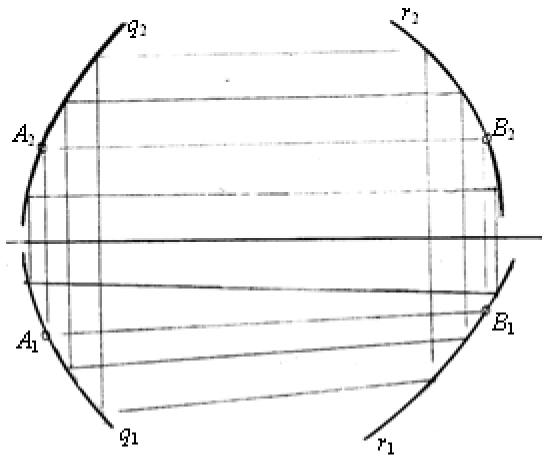

Рис.6

Цилиндроиды широко применяются при построении трубопроводов большого диаметра.При помощи показанного на чертеже цилиндроида происходит соединение двух цилиндрических труб.

2.3. Позиционные задачи на поверхностях Каталана

Отображение точек принадлежащих поверхности Каталана выполняется обычным способом. Необходимо отобразить прямую (или кривую) принадлежащую поверхности и, затем, точку принадлежащую этой кривой (рис.7).

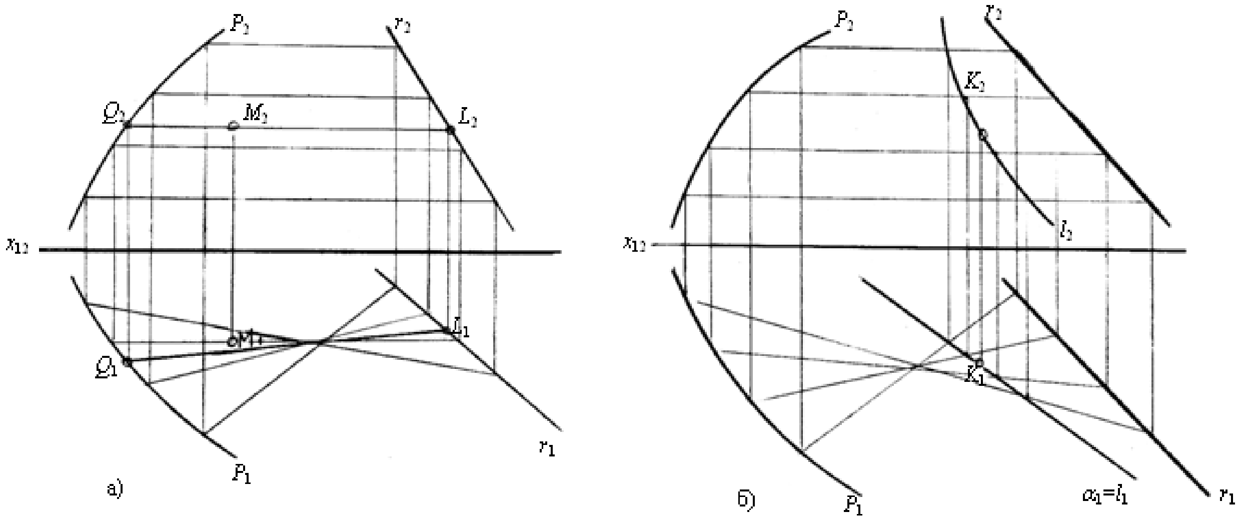

Рис.7

Если задана фронтальная проекция точки M, принадлежащей поверхности, для построения ее горизонтальной проекции через M_2 надо провести фронтальную проекцию образующей, построить горизонтальную проекцию этой образующей, на которой с помощью линии связи построим горизонтальную проекцию точки M_1.

Если же задана горизонтальная проекция точки K, то для построения ее фронтальной проекции через точку проведем горизонтально прецирующую плоскость α_1. Построим линию пересечения заданной поверхности и плоскости α. Если точка K принадлежит заданной поверхности, тогда она будет принадлежать и полученной линии.

Количество (множество) общих точек поверхности и прямой зависит от геометрической формы поверхности и положения прямой. Так как плоскость также является поверхностью (первого уровня), построение точки пересечения прямой и поверхности проведем аналогично точке пересечения прямой и плоскости (рис.8).

Проведем проецирующую плоскость β через прямую l, построим линию пересечения этой плоскости и поверхности m, в пересечении которой с заданной прямой получим искомую точку.

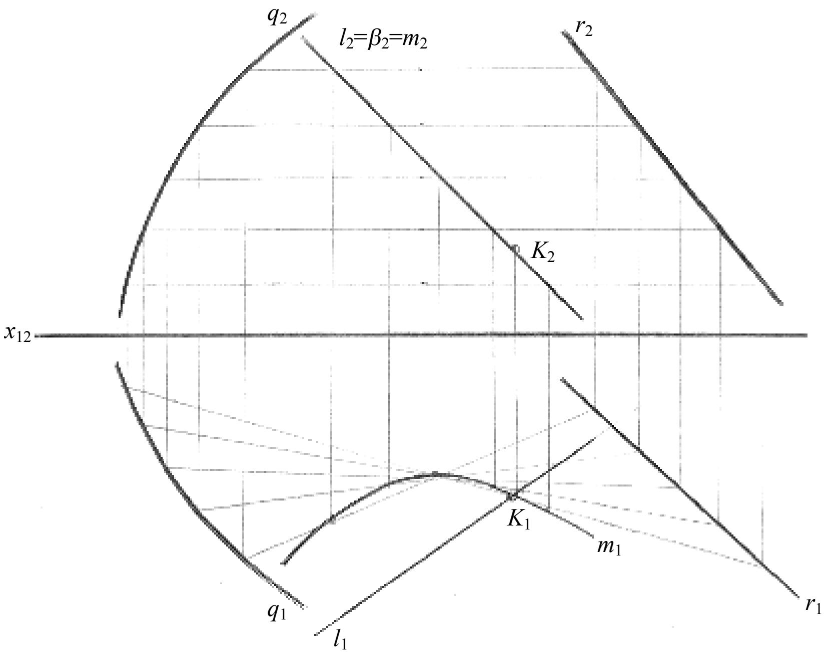

Рис.8

Разберем на эпюре пересечение коноида с прямой l. Для решения задачи, на прямой l зафиксируем проецирующую плоскость $\beta(\beta_2)$. Построим линию пересечения плоскости β и заданной поверхности, которая определяется пересечением образующих поверхности и плоскости β. Пересечение полученной кривой m с прямой l, является общей точкой прямой l и поверхности.

Если продолжим аналогию поверхности с плоскостью и учтем, что пересечение двух плоскостей определяется двумя общими точками этих плоскостей, то линия пересечения плоскости и поверхности определяется двумя общими точками этих плоскостей, тогда линия пересечения плоскости и поверхности задается определенным количеством их общих точек. Общие точки плоскости и поверхности представляют точки пересечения определенного количества линии, принадлежащих поверхности с плоскостью (рис.9).

На эпюре задано пересечение гиперболического параболоида с плоскостью $\alpha(ABC)$. Для решения задачи достаточно определить точки пересечения плоскости α и образующих поверхности. Так как для заданной поверхности плоскостью параллелизма является горизонтальная плоскость проекций, ее линейчатые образующие параллельны $П_1$. Проведем дополнительные горизонтальные плоскости. Плоскость β имеет с гиперболическим параболоидом две общие точки M и N. Та же плоскость пересечет плоскость α в точках K и L. Пересечение этих двух прямых задает точку 1 искомой кривой. Аналогично строятся остальные точки.

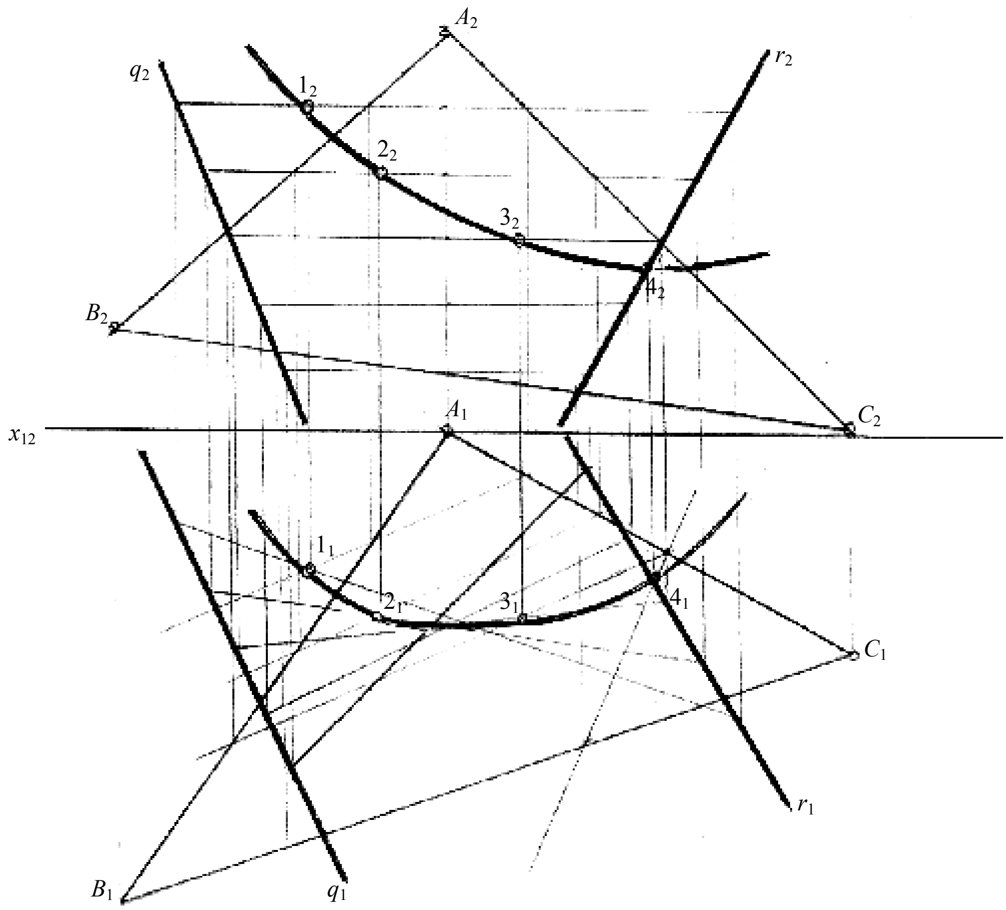

Рис.9

Таким образом при пересечении гиперболического параболоида с плоскостью α(ABC) получим кривую m(1,2,3,4...).

3. Заключение

Линейчатое строение поверхностей с плоскостью параллелизма широко используется в технике. Цилиндроиды находят применение в гидротехнических сооружениях, воздуховодах, сельскохозяйственном машиностроении. Форма коноидов используется в покрытии общественных и промышленных зданий, элементах мостов, в кораблестроении и машиностроении. Косые плоскости находят наибольшее применение в архитектурных соору жениях.

Особую эффективность практическому применению поверхностей Каталана придает использование современных технологий проектирования в виде компьютерных графических систем таких как AutoCAD Architecture 2009, AutoCAD Civil 3D 2009 и AutoCAD Mechanical 2009.

Литература:

1. Фролов С.А. Начертательная геометрия, Москва, 1983.
2. ხატისკაცი ი. წირები და ზედაპირები. სტუ. თბილისი. 1983.
3. Тозик В. Т. Электронный учебник по начертательной геометрии, Ст-Петербург, 2006.
4. Salomon D. Curves and Surfaces for Computer Graphics, Springer, 2006.

ზედაპირების პირობითი კლასიფიკაცია. პოზიციური ამოცანები კატალანის ზედაპირებზე

ქეთევან ჭკუასელი, მარინა ალიხანაშვილი, რომეო გოგალაძე,
ლიანა გოგოლაძე
საქრთველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

ნაშრომში განიხილება ზედაპირების პირობითი კლასიფიკაცია, მოცემულია ზოგადი მიმოხილვა და ჩამოყალიბებულია კრიტერიუმები ზედაპირების მიკუთვნებისა განსაზღვრული კლასიკური ჯგუფებისადმი. ნაშრომის ძირითადი ნაწილი მიძღვნილია ე.წ. კატალანის ზედაპირების მახასიათებლებისა და აღწერისადმი, გამომდინარე მათი ფართო გამოყენებიდან წარმოებაში. განიხილება პოზიციურ ამოცანათა სიმრავლე კატალანის ზედაპირებზე, რომლებსაც არ გააჩნიათ აღწერა ტექნიკურ ლიტერატურაში.

CONDITIONAL CLASSIFICATION OF SURFACES. POSITIONAL PROBLEMS OF THE CATALAN SURFACES

Chkuasel Ketevan, Alikhanashvili Marina, Gogaladze Romeo,
Gogoladze Liana
Georgian Technical University

Summary

A conditional classification of surfaces is considered in this article, common review is realized and criteria of surfaces pretence to defined classical groups are expressed. The main part of the article is dedicated to description of so called Catalan surfaces and to their disc raping, because of their extensive use in production. The multitude of positional problems on the Catalan surfaces are considered, that don't have a description in the technical literature.