ПРОБЛЕМА СИНХРОНИЗАЦИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Сесадзе В., Кекенадзе В., Маглакелидзе Н.
Грузинский Технический Университет

Резюме

Рассмотрена задача синхронизации на основе принципов симметрии. Для решения этой задачи используется известная теорема Э.Нетер, согласно которой определенным симметриям системы соответствуют определенные законы сохранения. Задача сводится к решению принципа Максимума принципами симметрии.

Ключевые слова: Задача синхронизации. Закон сохранения . Принцип симметрии. Принцип Максимума.

1. Введение

Проблема синхронизации состоит в том, что несколько динамических процессов $y_i(t)(t=1,...,n)$ имели одинаковую структуру развития. Аналитически эти совпадения выражены условиями типа $y_1 = y_2 = ... = y_n$, или более общими линейными и нелинейными выражениями $\varphi(y_1, y_2,..., y_n) = 0$. В зависимости от моделей системы разработаны различные методы синхронизации, главная идея которых заключается в том, что для всех $y \in Y$ необходимо найти такое управление $u = U(y)$, чтобы выполнялись условия синхронизации. Исследования показали, что существуют синхронизация, самосинхронизация и управляющая синхронизация. Примерами являются паралельная работа генераторов, в сложных системах согласованная работа нескольких двигателей, телекомуникации и др.[1,2]. Так как разные эксперты синхронизацию понимают своеобразно, то для решения этой проблемы необходимо унифицированное определеление синхронизации, самосинхронизации и управляющей синхронизации [1,2].

В статье рассмотрена задача синхронизации на основе принципов симметрии. Для решения этой задачи используется известная теорема Э.Нетер, согласно которой определенным симметриям системы соответствуют определенные законы сохранения [3,4,5,6]. Задача сводится к решению принципа Максимума принципами симметрии [7,8,10,11]. Использование принципа максимума позволяет использовать интегральные критерии. Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса являются фундаментальными законами природы и эти законы успешно используются для исследования различных явлений. Нами проблема синхронизации отождествлена с проблемами идентификации, с задачей синтеза оптимального входного воздействия: в частности, необходимо нахождение такого оптимального входного сигнала, для которой чувчтвительность переменных состояния к параметрам объекта должна быть максимальным. Эти методы рассмотрены в работах [7,9]. После определении законов сохранения можно определить координаты x и параметры (частоты и разные коэффициенты) объекта. Можно рассмотреть как Лагранжевые, так и Гамильтоновые системы.

2. Синхронизация и теория оптимального управления

Пусть задан функционал

$$I=\int_{t_0}^{t_1} f\left(x_i(t),u_a(t),w_k,t\right)dt \qquad (i=1,...,n,a=1,...,m,k=1,...,l),$$

здесь w_k -параметры системы. В общем объект описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i=\Phi_i\left[x_i(t),u_a(t),\mathrm{w}_k,t\right], \qquad (i,j=1,...,n,a=1,...,m,k=1,...,l),$$

где x_i -фазовые координаты, u - управление.

Необходимо найти такое управление, чтобы выполнялись условия синхронизации.

Пусть X_A является вектором состояния

$$X_A=\begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix}, \quad X_a=\frac{\partial x}{\partial w_k},$$

тогда

$$\dot{X}_{Ai}=\Phi\left[x_{Aj}(t),u_a(t),w_k,t\right],$$

где

$$\Phi_A=\begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ \Phi_A & \Phi \end{bmatrix}, \qquad F_A=\begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}.$$

Учитывая вышесказанное, функционал можно записать в виде:

$$I=\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial w_k}\right)^2-gu^2(t)\right]dt, \qquad g>0.$$

Используя принцип Максимума функционал можно записать в виде:

$$I=\int_{t_0}^{t_1}\left[H\left(x_{Ai},u_a,p_i,w_k,t\right)-p_i\dot{x}_{Ai}(t)\right]dt,$$

$$H\left[x_{Ai}(t),u_a(t),p_i(t),w_k,(t)\right]=F_A\left\lfloor x_{Aj}(t),u_a(t),w_k,t\right\rfloor+p_i(t)\Phi_{Ai}\left\lfloor x_{Aj}(t),u_a(t),w_k,t\right\rfloor. \tag{1}$$

Здесь H- Гамильтониан системы, p_i- неопределенные множители Лагранжа. Используя канонические уравнения Эйлера-Гамильтона

$$X_{Ai}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad p_i=-\frac{\partial H}{\partial x_{Aj}}, \qquad \frac{\partial H}{\partial w_k}=\frac{\partial H}{\partial u_a}=0,$$

можно найти преобразования, которые оставляют инвариантным выражения (1). Осуществим варьирование переменных и рассмотрим воздействия возмущений. Разложим функцию Гамильтона H в ряд и осуществим интегрирование по частям. Получим,

$$\bar{I}=\int_{t_0}^{t_1}\left[H\left(\bar{x}_{Ai},\bar{u}_a,\bar{p}_i,\bar{w}_k,\bar{t}\right)-\bar{p}_i\dot{\bar{x}}_{Ai}(t)\right]d\bar{t}.$$

Используя условия инвариантности можно записать в виде:

$$H\left[\bar{x}_{Ai}(t),\bar{u}_a(t),\bar{p}_i(t),\bar{w}_k,t\right]=\left\lfloor H\left(x_{Aj},u_a,p_i,w_k,t\right)-p_i\dot{x}_{Ai}\right\rfloor+\varepsilon_{(s)}d\wedge_{(s)}\left(x_{AJ},u_a,p_i,w_k,t\right),$$

где $\wedge_{(s)}\left(x_{Aj},u_a,p_i,w_k,t\right)$ - известная функция переменных.

Рассмотрим разность функционалов $\bar{I}-I$, после несложных преобразований получиим:

$$H\xi_{(s)}-p_i\xi_{i(s)}-w_k\xi_{i(s)}-\wedge_{(s)}=const.$$

$\xi_{(s)}$ и $\xi_{i(s)}$-инфинитезимальные переменные определяются решением уравнений Киллинга. В смысле практического использования рассмотрим два случая:

1. Функция Гамильтона H не зависит от времени. В этом случае справедливы условия:

$$\xi_{i(s)} = 0, \qquad \xi_{(s)} = A_{(s)} = const.$$

Тогда управление является оптимальной и выполняется закон сохранения энергии.

2. Функция Гамильтона H не зависит от состояний, т.е.

$$\frac{\partial H}{\partial x_{Ai}} = 0, \qquad \xi_{i(s)} = \delta_{i(s)}, \qquad \xi_{(s)} = 0,$$

где $\delta_{i(s)}$ - символы кронекера, выполняются следующие условия:

$$\bar{x}_{Ai} = x_{Ai} + \varepsilon, \quad \bar{t} = t, \quad \bar{u}_a = u_a, \quad \bar{w}_k = w_k, \quad p_i = const.$$

Эти условия соответствуют законам сохранения импульса.

Можно рассмотреть более сложный случай, когда выполняются условия:

$$\bar{w}_k = w_k + \varepsilon, \quad \bar{t} = t, \bar{u}_a = u_a, \bar{p}_i = p_i$$

и для получения удовлетворительных результатов необходимо использовать адиабатические инварианты.

И так, для координатной синхроизации $y_1 = y_2 = ... = y_n$ необходимо определить значение импульса.

Для разомкнутых систем законы сохранения в общем не выполняются. Когда система движется во внешнем поле, которое имеет определенные симметрии, могут быть справедливы только часть законов сохранения. Например, если поле не зависит от времени, то в ней движущая система и само внешнее поле могут иметь определенные симметрии и могут быть выполнятся только часть законов сохранения.

Осуществим канонические преобразования уравнений Гамильтона, т.е. перейдем на переменных действие-угол. Найдем для гармонического осцилятора $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ переменую действия

$$I = \frac{2\pi h}{\omega}, \tag{2}$$

которая вычисляется как отношение энергии к частоте. Фаза колебания φ можно определить из вырожения

$$\dot{\varphi} = \frac{2\pi}{T}, \tag{3}$$

где T -период колебания. Значения φ и ω определяются из эксперимента. Для этого используются формулы (2) и (3).

3. Синхронизация и адиабатические инварианты

Пусть задана система

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \ \dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial p}, \quad H = H(p, q, \varepsilon t), \tag{4}$$

где $\lambda = \varepsilon t$ параметр системы.

Величина $I(p, q, \lambda)$ называется адиабатическим инвариантом системы (4), если для произволной æ >0 существует $\varepsilon > 0$, и если $0 < \varepsilon < \varepsilon_0, 0 < t < 1/\varepsilon$, то

$$\left| I(p(t), q(t); \varepsilon t) - I(p(0), q(0); 0) \right| < æ.$$

Очевидно, что первый интеграл является адиабатическим инвариантом. Для гармонического осциллятора адиабатический инвариант это отношение энергии к частоте. h и w могут изменятся, но их отношение остается постоянной. В многочастотных Гамильтоновых системах переменные воздействия $(I_1 ... I_n)$ являются адиабатическими инвариантами.

Теперь перейдем к формализме задачи Лагранжа. Рассмотрим уравнение вида:

$$\ddot{z} + w(t)z = 0 . \tag{5}$$

Если на коэфициентах $w(t)$ не наложены ограничения, то оно инвариантно к группам преобразования [4,5]:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_2 = z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Если учесть, что уравнение (5) является уравнением Эйлера-Лагранжа, то Лагранжиан можно записать в виде:

$$I = \tfrac{1}{2}\dot{z}^2 + \tfrac{1}{2}wz^2 \quad ,$$

т.е. для оператора X_1 получим

$$A = z^2 .$$

И так выполняется закон сохранение энергии.

Известно,что для сложной волны один период пропорционален к $\int_0^T z^2(t)dt$ и его можно связать с коэффициентам Фурье

$$\int_0^T z^2(t)dt = Ta_0^2 + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right),$$

и для оператора X_2

$$A = z\frac{\partial z}{\partial z}$$

выполняется закон сохранения момента импульса.

Литература:

1. Управление механотронными выбрационными установками. Под.ред.И.И.Блехмана.-СПБ.:Наука, 2001.
2. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем.-М.:Наука, 1971.
3. Арнольд В.И. Математические методы классической механики.-М.:Наука, 1989.
4. Ибрагимов Н.Х. Группы Ли в некоторых вопросах математической физики.-Новосибирск.:НГУ.1972.
5. Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям.-М.:Мир,1989.
6. Симметрия и законы сохранения уравнений математической физики. Под ред. А.Ш.Виноградова и И.С.Красильщика.-М.:Факториал,1997.
7. Принцип симметрии в идентификации нелинейных объектов управления. Под ред.А.Ш.Гугушвили-Тбилиси.:Грузинский технический университет.Изд-во «цисарткела»,1998.
8. Gugushvili A., Sesadze V., Khutsishvili O., Gugutishvili E/ Symmetry and conservation laws in variational principles of optimal control. 5 th IFAC Symposium Nonlinear Control Systems/ Saint-Petersburg. Russia, July 4-6, Vol.2of5. 2001.
9. Круг Г.К., Круглов В.В., Саванов В.Л. Определение оптимального тестирующаго сигнала для идентификации линейных динамических объектов при ненулевых начальных условиях.-Труды МЭИ, выпуск 399. 1979.
10. Djukic D.S. Noethers theorem for optimal control systems.Int.J.Control, 18, N3. 1973.

11. Sussmann H.j. Symmetryes and Integrals of Motion in Optimal Control. In: Geometry in Nonlinear Control and Differential Inclusions. Banach Center Publications, vol 32. Mathematics Institute of the Polish Academy of Seiences, Warsava, Poland, 1995. Preprint.

ᲡᲘᲜᲥᲠᲝᲜᲘᲖᲐᲪᲘᲘᲡ ᲞᲠᲝᲑᲚᲔᲛᲐ ᲓᲐ ᲨᲔᲜᲐᲮᲕᲘᲡ ᲙᲐᲜᲝᲜᲔᲑᲘ

ვალიდა სესაძე, ვლადიმერ კეკენაძე, გელა ჭიკაძე,
ნანა მაღლაკელიძე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

სტატიაში განხილულია სინქრონიზაციის პრობლემა სიმეტრიის პრინციპების თვალსაზრისით. ამ ამოცანის ამოხსნისათვის გამოყენებულია ე. ნეტერის ცნობილი თეორემა, რომლის მიხედვითაც სისტემის განსაზღვრულ სიმეტრიებს შეესაბამება შესაბამისი შენახვის კანონი. ამოცანა დაყვანილია მაქსიმუმის პრინციპის ამოხსნაზე სიმეტრიის მეთოდებით.

PROBLEM OF SYNCHRONIZATION AND PRESERVATION LAWS

Sesadze Valida, Kekenadze Vladimer, Tshikadze Gela,
Maglakelidze Nana
Georgian Technical University

Summary

There is considered the problem of synchronisation on the basis of symmetry principles in the article. For the decision of this problem E.Neter's known theorem according to which defined Symmetry systems correspond certain laws of preservation is used. The Problem is reduced to the decision of a principle of the Maximum by symmetry principles.