

К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ МОНОТОННОЙ СИСТЕМЫ НА МНОЖЕСТВЕ ПАРНЫХ СВЯЗЕЙ

Мгеладзе А.П.

Грузинский Технический Университет

Резюме

В статье показана тождественность, с одной стороны, формулировки величины близости π графа и, с другой стороны, силы связи монотонной системы на множестве параллельно построенных парных связей.

Ключевые слова: Граф близости. Упорядоченный граф. Монотонная система.

1. Основная часть

Приступая к основной части статьи, приведем некоторые определения из теории графов, что поможет нам в определении графа π близости. Пусть V – непустое множество, $V^{(2)}$ – множество всех его двухэлементных подмножеств. Пара (V, E) , где E произвольное подмножество множества $V^{(2)}$ называется графом. Множество $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, именуемое как множество вершин, а $E = \{e_{12}, e_{13}, e_{ij}, \dots, e_{nn-1}\}$ – как множество ребер. Если мощность $|E| = m$, то $m \leq n(n-1)/2$. Каждое ребро e_{ij} есть определенная пара вершин $v_i, v_j \in V$, что выражается равенством: $e_{ij} = v_i v_j$. Пусть $m = n(n-1)/2$, тогда граф $P = (V, E)$ является полным, и если кроме этого E обладает отношением порядка:

$$e_{12} \leq e_{13} \leq \dots \leq e_{ij} \leq \dots \leq e_{nn-1},$$

то граф P становится упорядоченным графом.

Определение. Графом π близости называется упорядоченный граф $P = (V, E)$, у которого $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ – множество объектов (вершин), подвергаемых кластерингу, и $E = \{e_{12}, e_{13}, e_{ij}, \dots, e_{nn-1}\}$ – множество пар объектов (ребер), называемых связями, величина которых определяется данными о π близости между объектами v_i и v_j следующей формулой:

$$e_{ij}^{\pi} = \sum_{\substack{(i, \alpha) \in E_{index} \\ \alpha \neq j}} \rho_{i\alpha} + (n+k) \rho_{ij} + \sum_{\substack{(\beta, j) \in E_{index} \\ \beta \neq i}} \rho_{\beta j}, \quad (9)$$

где ρ_{ij} – расстояние между объектами v_i и v_j ($v_i, v_j \in V$) из метрического пространства, k – положительное (неотрицательное) целое число ($k \geq 0$), E_{index} – совокупность указателей (индексов) всех пар объектов из множества E .

Что касается упорядоченности графа, то под этим словом подразумевается следующая реберная цепь (линейный порядок):

$$e_{12}^{\pi} \leq e_{13}^{\pi} \leq \dots \leq e_{ij}^{\pi} \leq \dots \leq e_{nn-1}^{\pi}$$

Отношение порядка определяется данными о π близости для пар объектов. Отношение $e_{ij}^{\pi} \leq e_{2s}^{\pi}$ означает, что объекты v_i и v_j не менее сходны, чем v_r и v_s .

$(e_{ij}^\pi = v_i v_s, e_{rs}^\pi = v_r v_s)$. Тождественная запись $e_{ij}^\pi \equiv e_{rs}^\pi$ означает, что могущие быть различными связи e_{ij}^π и e_{rs}^π имеют тот же порядок, что и в равенстве $e_{ij}^\pi = e_{rs}^\pi$, означающем, что e_{ij}^π и e_{rs}^π одинаковые связи, т.е. $ij = rs$.

Уровнем стягивания¹ графа π близости $P=(V, E)$ называются уровни $S=0, S=m=|E^n|$, а также все $S, 1 \leq S \leq m-1$, для которых $(e_{ij}^\pi)_s < (e_{rs}^\pi)_{s+1}$. Для каждого уровня стягивания $m \geq S \geq 0$ с $E_s^\pi = \{(e_{ij}^\pi)_k\}_{k=m,S}$, упорядоченный граф $P=(V, E_s^\pi)$, где E_s^π обладает тем же отношением порядка, что и E^π , но и в пределах E_s^π , является подграфом π близости S -го порядка для P . Граф $T_S=(V, E_s^\pi)$, где E_s^π не предполагается упорядоченным, называется пороговым подграфом S -го порядка для P .

Обратимся теперь к теории монотонных систем. Обозначим через W множество парных связей объектов из конечного множества X . Пусть H подмножества $W(H \subseteq W, W = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_n, j_n)\})$. Сравнивая мощности множества W и её подмножества H , если $|E|=h$, то

$$h \leq n(n-1)/2.$$

Введем скалярную функцию π ; каждой паре $((i, j), H)$, где $(i, j) \in H$, а H произвольное подмножество $W(H \subseteq W)$ поставлено в соответствие число $\pi((i, j), H)$. Семантически это число означает близость парного элемента (i, j) к подмножеству H , или важность, вес элемента (i, j) в подмножестве H .

Таким образом, мы получаем систему $\langle W, \pi \rangle$, составленную из конечного множества парных элементов W , с заданной на произвольном подмножестве $H(H \subseteq W)$ функцией $\pi((i, j), H)((i, j) \in H)$.

Если система $\langle W, \pi \rangle$ удовлетворяет условиям:

$$\pi((i, j), H | (r, s)) \leq \pi((i, j), H), \quad \forall (i, j), (r, s) \in H, (i..i) \neq (r, s), \quad \forall H \in W$$

или

$$\pi((i, j), H | (r, s)) \geq \pi((i, j), H), \quad \forall (i, j), (r, s) \in H, (i..i) \neq (r, s), \quad \forall H \in W,$$

то система $\langle W, \pi \rangle$ называется монотонной, соответственно $(-)$ или $(+)$ типа. В дальнейшем мы будем иметь дело с монотонной системой $(-)$ типа.

Функцию $\pi((i, j), H)$ можно задать аналитическим способом следующей формулой:

$$\pi((i, j), H) = \sum_{\substack{(i, j) \in H \\ \alpha \neq j}} \rho_{i\alpha} + (n+k)\rho_{ij} + \sum_{\substack{(\beta, j) \in H \\ \beta \neq i}} \rho_{\beta j}, \quad (10)$$

где ρ - расстояние между элементами i и j , а k неотрицательное целое число ($k \geq 0$).

¹ Стягивание ребра uv означает отождествление вершин u и v . Двойственной к операции стягивания является операция расщепления (см. [1]).

Докажем, что система $\langle W, \pi \rangle$, где функция π определяется равенством (2), является монотонной.

Действительно:

$$\begin{aligned} \pi((i, j), H) &= \sum_{\substack{(i, j) \in H \\ \alpha \neq j}} \rho_{i\alpha} + (n+k)\rho_{ij} + \sum_{\substack{(\beta, j) \in H \\ \beta \neq i}} \rho_{\beta j} \geq \\ &\geq \sum_{\substack{(i, \alpha) \in H \setminus (r, s) \\ \alpha \neq j}} \rho_{i\alpha} + (n+k)\rho_{ij} + \sum_{\substack{(\beta, j) \in H \setminus (r, s) \\ \beta \neq i}} \rho_{\beta j} = \pi((i, j), H \setminus (r, s)). \end{aligned} \quad (11)$$

В каждом метрическом пространстве вместе с множеством элементов задается также расстояние. По определению расстояние – это однозначная, неотрицательная действительная функция ρ , определенная для любых x, y из заданного непустого множества и подчиненная следующим трем аксиомам:

- 1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ - аксиоме симметрии.;
- 3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ - аксиоме треугольника.;

Учитывая свойство неотрицательности функции ρ , становится ясным, что удалением парного элемента (r, s) из подмножества H , сумма в выражении (3)-м становится не меньше, чем в начале.

В результате получим:

$$\pi((i, j), H \setminus (r, s)) \leq \pi((i, j), H).$$

Монотонность системы доказана.

Наблюдение за вышеуказанными построениями по теории графов и по теории монотонных систем наводит на мысль некоторых ассоциаций, в частности, в определении монотонных систем фигурирует множество W - всех пар элементов из $X (X \neq \emptyset)$. По содержанию значение множества $E(\cdot)$ в определении графа совпадает со значением W в определении монотонных систем. Сопоставляя правые части (1) и (2), сразу можно заметить тождественность формулировки с одной стороны величины π близости в графах близости, а с другой - аналитическим заданием весовой функции в теории монотонных систем. Исходя из этих смысловых сравнений, можно записать:

$$e_{ij}^\pi = \pi((i, j), W), (i, j) \in W, e_{ij}^\pi \in E^\pi. \quad (12)$$

2. Заключение

Графическое преобразование монотонных систем, как будет показано в дальнейшем, является весьма весовым в разработке алгоритма кластеринга, представляя тем самым интересный пример использованная теории графов в области науки управления. В работе вводится понятие графов близости; строится весовая функция элементов монотонных систем парных связей;

Литература

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов О.И., Тишкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Наука, Физматлит. 1990 г.
2. Муллат Н.Э. Экстремальные подсистемы монотонных систем. М., Автоматика и телемеханика, №5, 1976.

FOR THE POIN OF CONSTRUCTIONS OF MONOTONOUS SYSTEM ON THE SET OF A PAIRS OF CONNECTIONS

Mgeladze A.P
Georgian Technical University

Summary

In the article is shown the identity of the formulation value of connections π nearing graph on the one hand and constructed in parallel the power of connections of monotonous systems on the set of a pairs of connections on the other.

წყვილების კავშირების სიმრავლეზე მონოტონური სისტემის აგების საკითხისათვის

ანტონ მგელაძე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

სტასიაში ნაჩვენებია ერთი მხრივ სიხლოვის π გრაფის სიდიდის ფორმულირების და მეორე მხრივ პარალელურად აგებული წყვილების კავშირების სიმრავლეზე მონოტონური სისტემის კავშირის ძალის იგივეობა.