გეომეტრიული დაპროგრამების ამოცანების გადაწყვეტა სიმძიმის ცენტრების მეთოდით

ნოდარ ჯიბლაძე, თეიმურაზ იმედაძე, მიხეილ დონაძე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი,
ბათუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

რეზიუმე

გეომეტრიული დაპროგრამება არაწრფივი დაპროგრამების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი შემადგენელი ნაწილია და იგი შეისწავლის გარკვეული კლასის საოპტიმიზაციო ამოცანებს, რომლებიც ფორმულირებულია სპეციალური სახის ფუნქციების - პოზინომების ტერმინებში. აღნიშნული ამოცანების გადასაწყვეტად ნაშრომში შემოთავაზებულია სიმძიმის ცენტრების მეთოდი, რომელიც მრავალი ცვლადის მულტიმოდალური ფუნქციის აბსოლუტური ექსტრემუმის განსაზღვრის საშუალებას იძლევა საინჟინრო პრაქტიკაში მისაღები სიზუსტით. სიმძიმის ცენტრების მეთოდით გადაწყვეტილია ატომური ელექტროსადგურების თბოგადამცემი აპარატების ოპტიმალური დაპროექტების ამოცანა, რომელშიც საოპტიმიზაციო კრიტერიუმი პოზინომიალურ მიზნის ფუნქციას წარმოადგენს.

საკვანძო სიტყვები: პოზინომი. გეომეტრიული დაპროგრამება. სიმძიმის ცენტრების მეთოდი. აბსოლუტური ექსტრემუმი. ატომური ელექტროსადგური. თბოგადამცემი აპარატი. ოპტიმალური დაპროექტება.

1. შესავალი

გეომეტრიული დაპროგრამება არაწრფივი დაპროგრამების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი შემადგენელი ნაწილია და იგი შეისწავლის გარკვეული კლასის საოპტიმიზაციო ამოცანებს, რომლებიც ფორმულირებულია სპეციალური სახის ფუნქციების - პოზინომების ტერმინებში.

როგორც ცნობილია, პოზინომი ეწოდება შემდეგი სახის ფუნქციას: $u_i(x) = A_i x_1^{\alpha_{i1}} x_2^{\alpha_{i2}} \cdots x_n^{\alpha_{in}}$, სადაც $A_i > 0$, $x_j \ge 0$, $j = 1, 2, ..., m$. აღნიშნულის გათვალისწინებით, გეომეტრიული დაპროგრამების ამოცანა, უმარტივეს შემთხვევაში, შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\min\left\{ f\left(x\right) = \sum_{i=1}^{m} A_i x_1^{\alpha_{i1}} x_2^{\alpha_{i2}} \cdots x_n^{\alpha_{in}} \,\middle|\, a_j \le x_j \le b_j,\ j = 1, 2, ..., n \right\} \tag{1}$$

და იგი შემდეგნაირად ჩამოვაყალიბოთ: საჭიროა მოიძებნოს დამოუკიდებელი ცვლადების ისეთი მნიშვნელობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ პოზინომიალური მიზნის ფუნქციის მინიმალურ მნიშვნელობას უტოლობებით მოცემული შეზღუდვების დაკმაყოფილების დროს. ზოგად შემთხვევაში, გეომეტრიული დაპროგრამების (1) ამოცანაში შესაძლებელია უტოლობათა სისტემაც წარმოდგენილ იქნეს პოზინომიალური ფუნქციებით.

აღნიშნული კლასის საოპტიმიზაციო ამოცანები უმთავრესად გვხვდება საინჟინრო დაპროექტების ამოცანებში, ეკონომიკურ გათვლებსა და სხვადასხვა სახის გამოყენებითი ამოცანების გადაწყვეტის პროცესში.

გეომეტრიული დაპროგრამების ამოცანების გადასაწყვეტად შემუშავებულია სპეციალური სახის მეთოდები [1]. ნაშრომში აღნიშნული ამოცანების ოპტიმალური ამონახსნების მოსაძებნად შემოთავაზებულია სიმძიმის ცენტრების მეთოდი [2], რომელიც სინჟინრო პრაქტიკაში დასაშვები სიზუსტით უზრუნველყოფს არაწრფივი დაპროგრამების და, საზოგადოდ, ოპტიმიზაციის ამოცანების მარტივად დასწრაფად გადაწყვეტას..

2. სიმძიმის ცენტრების მეთოდი

განვიხილოთ მინიმიზაციის შემდეგი სახის ამოცანა:

$$\min\left\{ f(x) \middle| x \in \Omega \subset R^n \right\}, \tag{2}$$

სადაც $f(x)$ მიზნის პოზინომიალური ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია შემოსაზღვრულ და ჩაკეტილ სიმრავლეზე $\Omega \subset R^n$. დავუშვათ, რომ $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right) \in \Omega$ ოპტიმუმის ერთადერთი წერტილია, ე.ი. ადგილი აქვს შემდეგ პირობას $f\left(x^*\right) < f(x) \quad \forall x \in \Omega$.

სიმძიმის ცენტრების მეთოდი შემუშავებულია იმ ფაქტის მტკიცების საფუძველზე, რომლის თანახმად $f(x)$ ფუნქციის ლებეგის დაყოფის შედეგად წარმოქმნილი ერთმანეთში ჩალაგებული შემოსაზღვრული და ჩაკეტილი Ω_p, $p = 1,2,\ldots,\Re$, სიმრავლეების სიმძიმის ცენტრების $\{x_p\}$ მიმდევრობა კრებადია აბსოლუტური ექსტრემუმის x^* წერტილში.

$f(x)$ ფუნქციის ლებეგის დაყოფით ფუნქციის მნიშვნელობათა ცვლილების [$\sup f(x)$, $\inf f(x)$] ინტერვალი დავანაწილოთ ტოლი სიდიდის შუალედებად ისე, რომ შესრულდეს პირობა:

$$\sup f(x) = \zeta_1 > \zeta_2 > \ldots > \zeta_p > \ldots > \zeta_\Re = \inf f(x), \qquad \zeta_p - \zeta_{p+1} = \Delta\zeta,$$

სადაც $\Re$ ლებეგის დონეების რიცხვია. აღნიშნული დაყოფის შედეგად წარმოიქმნება სიმრავლეების $\{\Omega_p\}$ მიმდევრობა, სადაც

$$\Omega_p = \left\{ x \middle| f(x) \le \zeta_p \right\} \subset \Omega, \qquad p = 1,2,\ldots,\Re.$$

მტკიცდება, რომ როცა $\varsigma \to \varsigma_\Re$, სადაც $\varsigma_\Re = \inf f(x)$, მიიღება უწყვეტი მიმდევრობა ერთმანეთში ჩალაგებული შემოსაზღვრული და ჩაკეტილი Ω_p, $p = 1,2,\ldots,\Re$, სიმრავლეებისა, რომელთა ზომა ნულისკენ მიისწრაფვის. მაშინ, ფუნქციონალური ანალიზის ცნობილი თეორემის თანახმად, აღნიშნულ სიმრავლეებს ერთადერთი საერთო წერტილი გააჩნია. რადგან $x^* \in \Omega^* = \left\{ x \middle| f(x) \le \zeta_\Re = \inf f(x) \right\}$, ამიტომ ამ ერთადერთ წერტილს წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის აბსოლუტური მინიმუმის x^* წერტილი

$$\bigcap_p \Omega_p = x^*.$$

ვინაიდან Ω_p სიმრავლის ნებისმიერი წერტილიც მიისწრაფვის x^*-სკენ, ამიტომ ეს უკანასკნელი შეიძლება განისაზღვროს როგორც Ω_p, $p = 1,2,...,\Re$, სიმრავლეების სიმძიმის ცენტრების $\{x_p\}$ მიმდევრობის ზღვარი, როცა $\zeta \to \zeta_\Re$, ე.ი.

$$x^* = \lim_{\zeta \to \zeta_\Re} \{x_p\} \quad ,$$

სადაც

$$x_p = \frac{\int\limits_{\Omega_p}\cdots\int x[f(x)-\zeta_p]^2 dx}{\int\limits_{\Omega_p}\cdots\int[f(x)-\zeta_p]^2 dx}.$$

სიმძიმის ცენტრების კოორდინატების გამოსათვლელად ალგორითმით გათვალისწინებულია მონტე-კარლოს მეთოდის გამოყენება, რომელიც საშუალებას გვაძლევს დასმული ამოცანა შემთხვევითი სიდიდეების მოდელირების საფუძველზე გადავწყვიტოთ.

ამგვარად, თუ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა არედან რაღაც კონკრეტულ მნიშვნელობებს მივანიჭებთ ζ_p-ს, სადაც $p = 1,2,...,\Re$, და თითოეულის შემთხვევაში მონტე-კარლოს მეთოდით გამოვითვლით შემთხვევითი წესით განსაზღვრული Ω_p, $p = 1,2,...,\Re$ სიმრავლეების სიმძიმის ცენტრების მნიშვნელობებს, მაშინ მივიღებთ წერტილთა მიმდევრობების სისტემას

$$\begin{array}{ll} \{x_{1p}\}, & p = 1,2,...,\Re, \\ \{x_{2p}\}, & p = 1,2,...,\Re, \\ \vdots & \vdots \\ \{x_{np}\}, & p = 1,2,...,\Re, \end{array}$$

რომელთა აპროქსიმაცია და ექსტრაპოლაცია საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ აბსოლუტური ექსტრემუმის წერტილის კოორდინატები $\overset{*}{x_1}, \overset{*}{x_2}, ..., \overset{*}{x_n}$.

$x_j(p)$ ფუნქციების აპროქსიმაცია უშუალოდ არის დაკავშირებული ამ ფუნქციების შესაბამისი ემპირიული წერტილების მოგლუვების ამოცანასთან და იგი უმცირეს კვადრატთა მეთოდით გადაწყდება. რადგან მოგლუვების ამოცანაში საჭიროა, ერთი მხრივ, რაც შეიძლება ზუსტად აისახოს (x_j, p) დამოკიდებულების საერთო ტენდენციები და, მეორე მხრივ, შეძლებისდაგვარად "გასწორდეს" მონტე-კარლოს მეთოდით სიმძიმის ცენტრების გამოთვლის შედეგად გამოწვეული შემთხვევითი გადახრები, ამიტომ აპროქსიმაციისათვის მიზანშეწონილია მეორე რიგის პოლინომების

გამოყენება. ეს გამართლებულია იმ მოსაზრებითაც, რომ, მაღალი რიგის პოლინომებისგან განსხვავებით, მათ უკეთესი ექსტრაპოლაციური თვისებები გააჩნია.

სიმძიმის ცენტრების მეთოდის საფუძველზე შემუშავებულია ალგორითმი და პროგრამული უზრუნველყოფა [3], რომლის საშუალებით შესაძლებელია გადაწყვეტილ იქნეს გეომეტრიული დაპროგრამების მრავალგანზომილებიანი ამოცანები. ქვემოთ წარმოდგენილია ოპტიმიზაციის ერთ-ერთი პრაქტიკული ამოცანა - ატომური ელექტროსადგურების თბოგადამცემი აპარატების ოპტიმალური დაპროექტების ამოცანა [4], რომელშიც საოპტიმიზაციო მიზნის ფუნქცია წარმოდგენილია პოზინომებით და რომლის ოპტიმალური ამონახსნიც მოძებნილია სიმძიმის ცენტრების მეთოდით.

3. ატომური ელექტროსადგურების თბოგადამცემი აპარატების ოპტიმალური დაპროექტების მათემატიკური მოდელი

ატომურ ენერგეტიკაში ელექტროსადგურების შექმნა რეაქტორებზე, რომლებიც სწრაფ ნეიტრონებზე მუშაობენ, პერსპექტიულ მიმართულებად ითვლება, რადგან ასეთი ელექტროსადგურების დამახასიათებელი თავისებურებაა სათბობის ღირებულების ძალიან დაბალი ხვედრითი წილი, რაც გამომუშავებული ელექტროენერგიის ღირებულების 0.1 ნაწილით განისაზღვრება.

ატომური ელექტროსადგურების ერთ-ერთ ძირითად მოწყობილობას თბოგადამცემი აპარატი წარმოადგენს. აღნიშნული მოწყობილობის ზედაპირი ათობით ათას კვადრატულ მეტრ ფართს შეადგენს და მის დამზადებაზე ათასობით ტონა ფოლადი იხარჯება. ამიტომ ატომური ელექტროსადგურების ტექნიკურ-ეკონომიკური მახასიათებლების გაუმჯობესებაში თბოგადამცემი აპარატის კონსტრუქციული პარამეტრების ოპტიმიზაციას მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია.

მცირე ბირთვული ენერგეტიკის განვითარებასთან დაკავშირებით აქტუალურობა შეიძინა ისეთი კომპაქტური თბოგადამცემი აპარატების შემუშავებამ, რომელთა გაცივების სისტემის ფუნქციონირება ჰაერის საშუალებით ხორციელდება. კონსტრუქციულად ასეთი აპარატები წარმოადგენს ჭადრაკულად განლაგებული შეწიბოებული მილების კონას, რომელშიც სითბოს მატარებელი (აზოტის ტეტრაქსიდი) კონდენსაციას განიცდის, მილებს შორის სივრცეში კი მოძრაობს გამაცივებელი ჰაერის ნაკადი. აღნიშნულ აპარატებს კორპუსი არ გააჩნია და ამიტომ მათ ღირებულებას, მასას და მოცულობას შესაბამისად განსაზღვრავს შეწიბოებული მილების კონის ღირებულება, მასა და მოცულობა, ხოლო მათი თბოგადაცემის ეფექტურობა დამოკიდებულია ისეთ ფაქტორებზე, როგორიცაა მილების შეწიბოების პარამეტრები, მილების კონსტრუქცია, მათი გეომეტრიული ზომები, ჰაერის ნაკადების ჰიდროდინამიკა და სხვ.

აღნიშნული თბოგადამცემი აპარატების საოპტიმიზაციო მათემატიკური მოდელი შემუშავებულ იქნა თბოგადაცემის განტოლებების საფუძველზე [4]. საოპტიმიზაციო ცვლადებად შერჩეულ იქნა შემდეგი პარამეტრები: x_1 - მილებში სითბოს მატარებლის საწყისი სიჩქარე, მ/წმ, x_2 - გამაცივებელი ჰაერის ნაკადის სიჩქარე ვიწრო კვეთში, მ/წმ, x_3 - მილების დიამეტრი, მ, x_4 - მილის წიბოების სიმაღლე, მ, x_5 - წიბოებს შორის მანძილი, მ. თბოგადამცემი აპარატის დანარ-

ჩენი გეომეტრიული ზომები და მახასიათებლები ცალსახად განისაზღვრება აღნიშნული პარამეტრების საფუძველზე.

საოპტიმიზაციო ცვლადი პარამეტრების გათვალისწინებით, მიზნის ფუნქცია, რომელიც 10 მეგავატი სიმძლავრის ატომური ელექტროსადგურის თბოგადამცემი აპარატის საერთო წონას შეესაბამება, გამოისახება შემდეგი პოზინომიალური ფუნქციით:

$$f(x) = 10^7 \Bigg[0.4x_1^{-0.8}x_3^{1.2}x_4x_5^{-1} + 0.4x_1^{-0.8}x_3^{0.2}x_4^2x_5^{-1} + 13x_3^2 + 5x_3^2x_4x_5^{-1} + 5x_3x_4^2x_5^{-1} + x_1^{-0.8}x_3^{1.2} + \tag{3}$$

$$+ \frac{10^2\left(1.4x_3 + 0.5x_3x_4x_5^{-1} + 0.5x_4^2x_5^{-1}\right)}{7.25x_2^{0.65}x_3^{-0.54}x_4^{-0.14}x_5^{0.33} - 0.22x_2^{0.65}x_3^{0.46}x_4^{-0.14}x_5^{-0.67} + 13.5x_2^{0.65}x_3^{-0.54}x_4^{0.86}x_5^{-0.67} + 13.5x_2^{0.65}x_3^{-1.54}x_4^{-1.86}x_5^{-0.67}}\Bigg]$$

საოპტიმიზაციო ცვლადებზე გათვალისწინებულია შემდეგი სახის შეზღუდვები:

$$a_j \le x_j \le b_j, \quad j = 1,2,3,4,5, \tag{4}$$

სადაც a_j და b_j მოცემული სიდიდეებია.

ოპტიმიზაციის (3)-(4) ამოცანა, რომელშიც საჭიროა მიზნის ფუნქციის მინიმიზაცია, წარმოადგენს გეომეტრიული დაპროგრამების ამოცანას.

გამოთვლების თვალსაზრისით, აღნიშნული მათემატიკური მოდელის ოპტიმალური პარამეტრების განსაზღვრის ამოცანა მეტად რთული ამოცანების კატეგორიას მიეკუთვნება, ვინაიდან, როგორც გამოკვლევებმა გვიჩვენა, მიზნის ფუნქციის აბსოლუტური მინიმუმი მეტად ვიწრო "ხევის" ფსკერზე მდებარეობს და ამიტომ ასეთი ტიპის ამოცანების გადასაწყვეტად ლოკალური მეთოდების გამოყენება არ არის მიზანშეწონილი.

4. გამოთვლების შედეგები

დასმული ამოცანის გადასაწყვეტად ჩვენ მიერ გამოყენებულ იქნა სიმძიმის ცენტრების მეთოდის საფუძველზე შემუშავებული პროგრამული უზრუნველყოფა შემდეგი პროგრამული პარამეტრებით: ლებეგის დონეების რაოდენობა $\Re = 10$, სტატისტიკური ცდების რაოდენობა $S = 100$.

გამოთვლების პირველ ეტაპზე, $0.1S = 10$ რაოდენობის წინასწარი სტატისტიკური ცდების ჩატარების შედეგად, დაფიქსირებულ იქნა ლებეგის საწყისი დონე $\zeta_0 = 316\,790.5$ და დონეებს შორის ნაზრდი $\Delta\zeta = -29\,245.65$, რომლის საფუძველზეც განისაზღვრა მოცემული საოპტიმიზაციო ფუნქციის მნიშვნელობათა არის ლებეგის ფიქსირებული სიდიდეები: $\zeta_1 = 287\,544.84$, $\zeta_2 = 258\,299.19$, $\zeta_3 = 229\,053.55$, … , $\zeta_{10} = 24\,333.98$. ხოლო გამოთვლების მეორე ეტაპზე, S რაოდენობის ძირითადი

სტატისტიკური ცდების ჩატარების შედეგად, სიმძიმის ცენტრების მეთოდის საფუძველზე განისაზღვრა მოცემული ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი:

$x_1^* = 10$ მ/წმ**7** $x_2^* = 21.22$ მ/წმ**7** $x_3^* = 0.008$ მ**7** $x_4^* = 0.002$ მ**7** $x_5^* = 0.02$ მ;

$f^* = 13\,788.71$ კგ

ლიტერატურა - REFERENCES - ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Даффин, Э.Питерсон, К.Зенер. Геометрическое программирование. М.: Мир, 1972
2. ნ.ჯიბლაძე. ოპტიმიზაციის სტატიკური ამოცანების გადაწყვეტა სიმძიმის ცენტრების მეთოდით. სამეცნიერო ჟურნალი "ინტელექტი", 3, 1998. გვ. 106-109.
3. ნ.ჯიბლაძე, ა.თოფჩიშვილი. სტატიკური ოპტიმიზაციის რიცხვითი მეთოდები (მონოგრაფია). თბილისი: მართვის სისტემების ინსტიტუტი. -2001.
4. А.Н.Иоселиани, А.А.Михалевич, В.Б.Нестеренко, М.Е.Салуквадзе. Методы оптимизации параметров теплообменных аппаратов. Минск: Наука и техника, 1981.

SOLUTION OF GEOMETRICAL PROGRAMMING PROBLEMS BY THE GRAVITATION CENTERS METHOD

Jibladze Nodar, Imedadze Teimuraz, Donadze Mikheil
Georgian Technical University,
Batumi State University

Summary

In the article the method of centres of gravity for solving complex optimization problems of geometrical programming is offered. The method allows to determine a global extremum for a multimodal multivariable function with the exactness acceptable in the engineering practice. The problem of optimal design of a heat-exchange apparatus of an atomic power station is solved.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ МЕТОДОМ ЦЕНТРОВ ТЯЖЕСТИ

Джибладзе Н., Имедадзе Т., Донадзе М.
Грузинский технический университет
Батумский Государственный университет

Резюме

Для решения сложных задач геометрического программирования в работе предлагается метод центров тяжести, который позволяет определить глобальный экстремум мультимодальной функции многих переменных с приемлемой в инженерной практике точностью. Методом центров тяжести решена задача оптимального проектирования теплообменного аппарата атомной электростанции.