ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ D- И A-ОПТИМАЛЬНОСТИ БЛИЗКИХ К РОТАТАБЕЛЬНЫМ ДВЕНАДЦАТИТОЧЕЧНЫХ ПЛАНОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ДЛЯ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ НАЛИЧИИ ОШИБОК ЭКСПЕРИМЕНТА

Зедгинидзе И.Г., Берая Н.О.
Грузинский Технический Университет

Резюме

Рассматриваются вопросы, связанные с изучением свойств близких к ротатабельным двенадцатиточечных планов третьего порядка для двух переменных в условиях ошибок эксперимента. Исследования проводились для различных диапазонов погрешностей, наиболее характерных для измерительных приборов. Детально изучены такие широко известные свойства планов, связанные с точностью оценки коэффициентов регрессионной модели как D- и A-оптимальность. По каждому из исследованных свойств для двух размеров квадратов получены минимальные и максимальные значения критериев, а также средние арифметические и средние квадратические отклонения, характеризующие разброс. Проанализирована степень ухудшения свойств рассматриваемых экономичных планов третьего порядка при увеличении погрешностей.

Ключевые слова: Планирование эксперимента. Ротатабельные планы.

1. Введение

Разработка оптимальных методов математического планирования экспериментов является неотъемлемой частью эффективного решения задач оптимизации сложных систем управления. Наибольшее практическое применение при этом находят композиционные планы, где при построении планов более высокого порядка используются точки планов низшего порядка [1].

Так, в композиционных ротатабельных планах третьего порядка вначале реализуется та часть плана $\mathbf{D}_1$, по экспериментальным данным которой исследуемый процесс может быть описан полиномом второй степени – например, следующий ротатабельный план второго порядка

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 \end{array} \\ \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & +1 \\ +1 & -1 \\ +1 & +1 \\ -\sqrt{2} & 0 \\ +\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & +\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{array} \qquad (1)$$

и, лишь в случае его неадекватности добавляется вторая часть плана, дополняющая первую часть симметрично расположенными точками для оценки всех коэффициентов полинома третьей степени

$$\hat{y} = b_0 + b_1\tilde{x}_1 + b_2\tilde{x}_2 + b_{11}\tilde{x}_1^2 + b_{22}\tilde{x}_2^2 + b_{12}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + b_{111}\tilde{x}_1^3 + b_{222}\tilde{x}_2^3 + b_{122}\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2 + b_{112}\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2 . \quad (2)$$

Обычно на практике применяют симметричные близкие к ротатабельным планы, получаемые путем достройки ротатабельных планов второго порядка восмью точками, расположенными на другой окружности ненулевого радиуса. Так как в модели (2) третьего порядка для двух переменных число оцениваемых коэффициентов (k=10) существенно меньше числа опытов (N=16), план оказывается ненасыщенным и напрасно затрачивается большое число опытов.

Поэтому в некоторых случаях является целесообразным использование более экономичных композиционных близких к ротатабельным планов третьего порядка для двух переменных.

В таких экономичных планах к восьми точкам ротатабельного плана Бокса второго порядка, расположенным на одной окружности, добавляется четыре точки, расположенные в вершинах квадрата с координатами $\pm a$ (рис.1), а сам план имеет следующий вид

$$\mathbf{D} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & +1 \\ +1 & -1 \\ +1 & +1 \\ -\sqrt{2} & 0 \\ +\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & +\sqrt{2} \\ -a & -a \\ -a & +a \\ +a & -a \\ +a & +a \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (3)$$

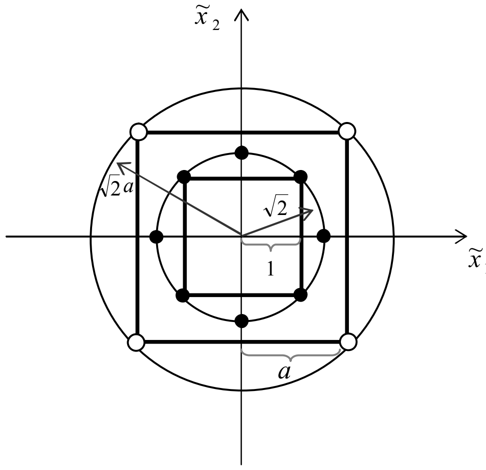

Рис.1. Геометрическая иллюстрация двенадцатиточечного композиционного плана третьего порядка

Свойства D- и A-оптимальности планов, рассматриваемых в данной статье, связаны с точностью оценки коэффициентов регрессии, которые определяются согласно следующему уравнению, записанному в матричной форме

$$\mathbf{B}=(\tilde{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{X}})^{-1}\tilde{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}, \qquad (4)$$

где $\tilde{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{X}}$ – информационная матрица Фишера, а $(\tilde{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{X}})^{-1}$– ковариационная матрица. $\tilde{\mathbf{X}}$ – матрица планирования, получаемая расширением плана (3) столбцами $\tilde{x}_0 \equiv 1, \tilde{x}_1^2, \tilde{x}_2^2, \tilde{x}_1\tilde{x}_2, \tilde{x}_1^3, \tilde{x}_1\tilde{x}_2^2, \tilde{x}_2^3, \tilde{x}_1^2\tilde{x}_2$, необходимыми для оценки соответствующих коэффициентов b_0, b_{11}, b_{22}, b_{12}, b_{111}, b_{122}, b_{222}, b_{112} уравнения (2).

Однако на практике оптимальные свойства планов нарушаются. Это обусловлено в том числе и тем, что реализация оптимальных планов требует точной установки уровней исследуемых факторов. Установка же производится с применением средств измерений, которые характеризуются определенными погрешностями. Чем больше погрешности средств измерений, применяемых при установке уровней исследуемых факторов, тем более искажаются планы и нарушаются оптимальные свойства.

2. Основная часть

Для исследования свойств экономичных двенадцатиточечных композиционных планов третьего порядка для двух переменных при наличии ошибок эксперимента производилась имитация влияния погрешностей средств измерения путем наложения на координаты точек плана случайных чисел, распределенных по нормальному закону [2]. Формирование этих чисел осуществлялось генерацией при помощи стандартной программы случайных чисел ε с нулевым средним арифметическим и средним квадратическим отклонением σ=0.33. Разделив их на 100, получали эквивалент однопроцентной погрешности, а для имитации различных погрешностей ψ средств измерений эквивалент однопроцентной погрешности умножался на ψ : $\xi=\psi \dfrac{\varepsilon}{100}$.

В результате многократного генерирования планов вокруг каждой точки недеформированного плана получали облака точек (рис.2), из которых могла быть образована любая конфигурация деформированного плана. Из-за наличия погрешностей средств измерений координаты исследуемого плана третьего порядка изменяются следующим образом

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 \end{array} \\
D= & \begin{bmatrix}
-1+\xi & -1+\xi \\
-1+\xi & +1+\xi \\
+1+\xi & -1+\xi \\
+1+\xi & +1+\xi \\
-\sqrt{2}+\xi & 0+\xi \\
+\sqrt{2}+\xi & 0+\xi \\
0+\xi & -\sqrt{2}+\xi \\
0+\xi & +\sqrt{2}+\xi \\
-a+\xi & -a+\xi \\
-a+\xi & +a+\xi \\
+a+\xi & -a+\xi \\
+a+\xi & +a+\xi
\end{bmatrix}.
\end{array}
\qquad (5)
$$

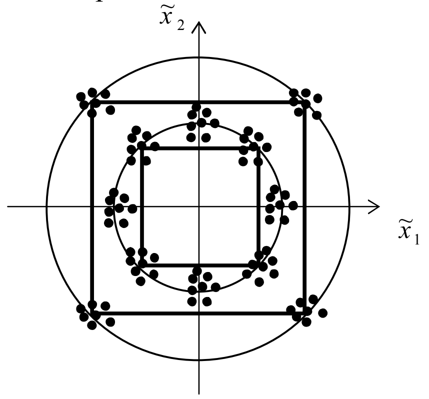

Рис.2. Графическая иллюстрация множеств деформированных симметричных композиционных планов третьего порядка для двух переменных

Соответственно изменяются и матрица планирования, и свойства планов.

Для сгенерированных таким образом планов при различных размерах квадрата a=0.5 и 1.5 определялось соответствующее множество значений исследуемых критериев и для каждого из них при различных значениях погрешностей выделялись минимальные и максимальные значения, образующие коридоры. Все исследования проводились для погрешностей средств измерений от 0.01% до 10%.

Так, на рис.3 и 4 показаны коридоры ошибок, полученные для минимального определителя ковариационной матрицы для квадратов размером a=0.5 и a=1.5 при наличии различных погрешностей от 0.01% до 10%.

Численные данные, полученные в результате двадцати обращений к случайным числам для имитации влияния погрешностей на свойство D-оптимальности сведены в табл.1 и 2, соответственно для размеров квадратов a=0.5 и a=1.5.

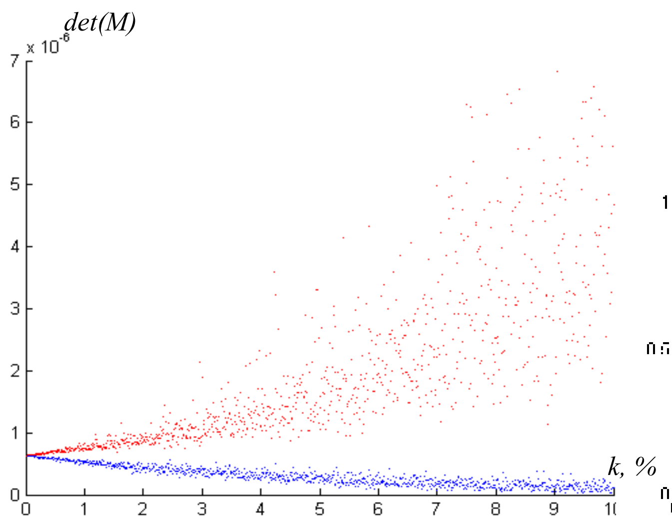

Рис.3. D-оптимальность двенадцатиточечного плана третьего порядка при a=0.5

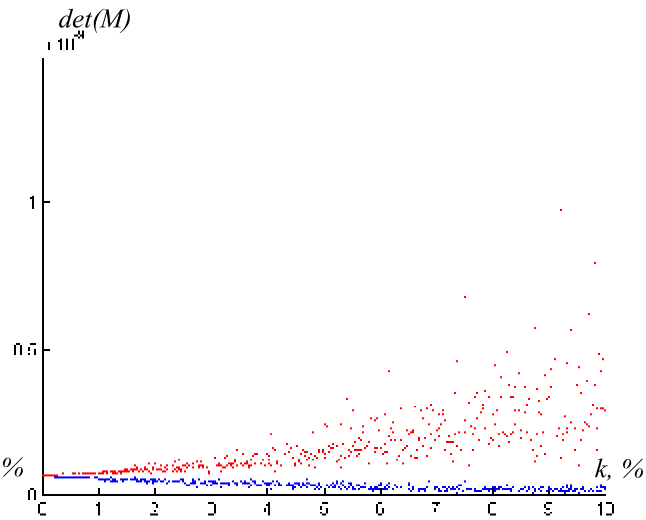

Рис.4. D-оптимальность двенадцатиточечного плана третьего порядка при a=1.5

Таблица 1

Изменение минимального определителя ковариационной матрицы при наложении различных погрешностей (a=0.5)

Погрешность k, %	min	max	Среднее арифм.	СКО
0.01	$0.62899254 \cdot 10^{-6}$	$0.63139866 \cdot 10^{-6}$	$0.63043791 \cdot 10^{-6}$	$0.05403532 \cdot 10^{-8}$
0.03	$0.62690372 \cdot 10^{-6}$	$0.63438860 \cdot 10^{-6}$	$0.63025936 \cdot 10^{-6}$	$0.16857322 \cdot 10^{-8}$
0.05	$0.62703559 \cdot 10^{-6}$	$0.63734424 \cdot 10^{-6}$	$0.63142268 \cdot 10^{-6}$	$0.28638820 \cdot 10^{-8}$
0.07	$0.62367742 \cdot 10^{-6}$	$0.63721017 \cdot 10^{-6}$	$0.63100819 \cdot 10^{-6}$	$0.33916043 \cdot 10^{-8}$
0.09	$0.61718823 \cdot 10^{-6}$	$0.63692087 \cdot 10^{-6}$	$0.63013808 \cdot 10^{-6}$	$0.42506223 \cdot 10^{-8}$
0.1	$0.61616241 \cdot 10^{-6}$	$0.64028292 \cdot 10^{-6}$	$0.63166581 \cdot 10^{-6}$	$0.05759232 \cdot 10^{-8}$
0.3	$0.58704076 \cdot 10^{-6}$	$0.68663923 \cdot 10^{-6}$	$0.62984310 \cdot 10^{-6}$	$0.22023486 \cdot 10^{-8}$
0.5	$0.56767169 \cdot 10^{-6}$	$0.69600016 \cdot 10^{-6}$	$0.63441085 \cdot 10^{-6}$	$0.30032211 \cdot 10^{-8}$
0.7	$0.55949506 \cdot 10^{-6}$	$0.72926572 \cdot 10^{-6}$	$0.61335939 \cdot 10^{-6}$	$0.45676080 \cdot 10^{-8}$
0.9	$0.55357586 \cdot 10^{-6}$	$0.70303379 \cdot 10^{-6}$	$0.64479620 \cdot 10^{-6}$	$0.42499545 \cdot 10^{-8}$
1.0	$0.50301763 \cdot 10^{-6}$	$0.07738672 \cdot 10^{-5}$	$0.63672590 \cdot 10^{-6}$	$0.05615954 \cdot 10^{-6}$
2.0	$0.44359380 \cdot 10^{-6}$	$0.08432271 \cdot 10^{-5}$	$0.66338979 \cdot 10^{-6}$	$0.12451105 \cdot 10^{-6}$
3.0	$0.31315562 \cdot 10^{-6}$	$0.14659461 \cdot 10^{-5}$	$0.71452875 \cdot 10^{-6}$	$0.28309315 \cdot 10^{-6}$
4.0	$0.30857528 \cdot 10^{-6}$	$0.09865083 \cdot 10^{-5}$	$0.60275790 \cdot 10^{-6}$	$0.17697545 \cdot 10^{-6}$
5.0	$0.31388717 \cdot 10^{-6}$	$0.18857464 \cdot 10^{-5}$	$0.73098250 \cdot 10^{-6}$	$0.35710809 \cdot 10^{-6}$
10	$1.22757277 \cdot 10^{-7}$	$1.80494912 \cdot 10^{-6}$	$6.60522356 \cdot 10^{-7}$	$4.85349162 \cdot 10^{-7}$

Как показал анализ, в случае исследования экономичных близких к ротатабельным планов при размере квадрата a=0.5 наложение ошибок начиная с 0.01% до 0.1% вызывает ухудшение рассматриваемого свойства на 0.20%. Дальнейшее увеличение погрешностей до 1% ухудшает свойство плана на 1%, а увеличение до 5%-ной погрешности – уже 15.95%.

Как видно из табл.2 в квадрате другого размера коридор ошибок с увеличением погрешностей, а соответственно и разброс, также увеличиваются. Так, например, при наложении 0.01%-ной погрешности разброс составляет $0.06549091 \cdot 10^{-12}$, при 0.1%-ной погрешности возрастает до $0.04078691 \cdot 10^{-11}$, уже при 1%-ной погрешности достигает величины $0.06817441 \cdot 10^{-10}$, а при 10%-ной погрешности составляет $1.82085101 \cdot 10^{-10}$.

Таблица 2

Изменение минимального определителя ковариационной матрицы при наложении различных погрешностей (a=1.5)

Погрешность k, %	min	max	Среднее арифм.	СКО
0.01	$0.63492779\cdot10^{-10}$	$0.63748997\cdot10^{-10}$	$0.63625506\cdot10^{-10}$	$0.06549091\cdot10^{-12}$
0.03	$0.63229690\cdot10^{-10}$	$0.63901841\cdot10^{-10}$	$0.63648380\cdot10^{-10}$	$0.14618715\cdot10^{-12}$
0.05	$0.63125374\cdot10^{-10}$	$0.64053068\cdot10^{-10}$	$0.63603575\cdot10^{-10}$	$0.25948259\cdot10^{-12}$
0.07	$0.62779645\cdot10^{-10}$	$0.64096458\cdot10^{-10}$	$0.63567624\cdot10^{-10}$	$0.35520386\cdot10^{-12}$
0.09	$0.62952948\cdot10^{-10}$	$0.64601903\cdot10^{-10}$	$0.63631744\cdot10^{-10}$	$0.42730463\cdot10^{-12}$
0.1	$0.62801689\cdot10^{-10}$	$0.64244805\cdot10^{-10}$	$0.63660103\cdot10^{-10}$	$0.04078691\cdot10^{-11}$
0.3	$0.59647752\cdot10^{-10}$	$0.66459542\cdot10^{-10}$	$0.63378046\cdot10^{-10}$	$0.17971908\cdot10^{-11}$
0.5	$0.58055527\cdot10^{-10}$	$0.67571989\cdot10^{-10}$	$0.62886488\cdot10^{-10}$	$0.28444141\cdot10^{-11}$
0.7	$0.56478816\cdot10^{-10}$	$0.71402082\cdot10^{-10}$	$0.63763246\cdot10^{-10}$	$0.38747967\cdot10^{-11}$
0.9	$0.49070957\cdot10^{-10}$	$0.76804955\cdot10^{-10}$	$0.64385627\cdot10^{-10}$	$0.61303542\cdot10^{-11}$
1.0	$0.52619753\cdot10^{-10}$	$0.08081474\cdot10^{-9}$	$0.65285784\cdot10^{-10}$	$0.06817441\cdot10^{-10}$
2.0	$0.40618858\cdot10^{-10}$	$0.08987011\cdot10^{-9}$	$0.63464078\cdot10^{-10}$	$0.12589355\cdot10^{-10}$
3.0	$0.40326931\cdot10^{-10}$	$0.08281994\cdot10^{-9}$	$0.63913051\cdot10^{-10}$	$0.10839951\cdot10^{-10}$
4.0	$0.35928563\cdot10^{-10}$	$0.15190639\cdot10^{-9}$	$0.75832918\cdot10^{-10}$	$0.27323770\cdot10^{-10}$
5.0	$0.27712038\cdot10^{-10}$	$0.12483175\cdot10^{-9}$	$0.59828297\cdot10^{-10}$	$0.24569301\cdot10^{-10}$
10	$1.50635721\cdot10^{-11}$	$7.65475201\cdot10^{-10}$	$1.45021986\cdot10^{-10}$	$1.82085101\cdot10^{-10}$

Характер изменения следа ковариационной матрицы двенадцатиточечных близких к ротатабельным планов при наложении различных погрешностей для размера квадрата a=0.5 и a=1.5 продемонстрирован на рис.5 и 6 соответственно.

В табл.3 и 4 представлены данные, полученные для наиболее близких к А-оптимальным ротатабельных планов при наложении различных ошибок.

В обоих случаях коридор ошибок с увеличением погрешностей увеличивается, так же как и разброс – среднее квадратическое отклонение.

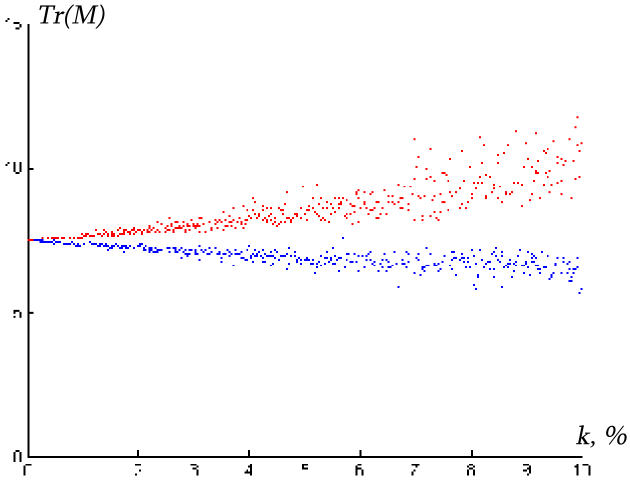

Рис.5. А-оптимальность двенадцатиточечного плана третьего порядка при a=0.5

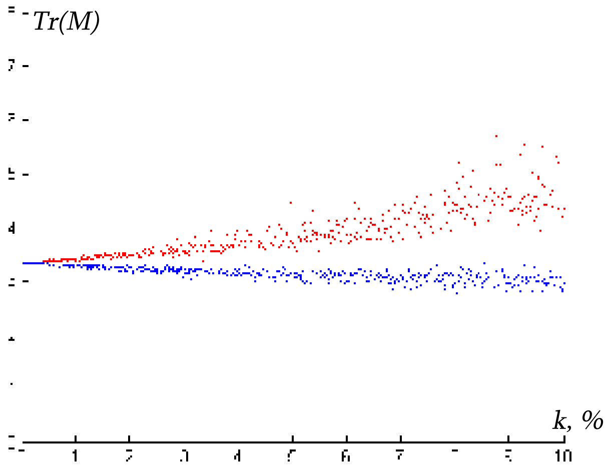

Рис.6. А-оптимальность двенадцатиточечного плана третьего порядка при a=1.5

Так, например, при размере квадрата a=0.5 разброс при наложении 0.01%-ной ошибки составляет 0.00099577, при наложении 0.1%-ной погрешности – 0.00962940, а при 1%-ной погрешности – 0.09522807.

При размере квадрата a=1.5 наложение аналогичных погрешностей вызывает разброс, равный по величине 0.00030836, 0.00374241 и 0.04169880 соответственно.

Таблица 3

Изменение следа ковариационной матрицы при наложении различных погрешностей (a=0.5)

Погрешность k, %	min	max	Среднее арифм.	СКО
0.01	7.48381000	7.48703867	7.48540955	0.00099577
0.03	7.48123311	7.49121159	7.48532133	0.00268253
0.05	7.47549165	7.49132143	7.48404276	0.00413977
0.07	7.47792896	7.49940222	7.48772411	0.00644336
0.09	7.46794902	7.49996355	7.48631697	0.00833471
0.1	7.46360783	7.49958290	7.48341174	0.00962940
0.3	7.44180407	7.54931749	7.48920679	0.02350866
0.5	7.39501429	7.58745917	7.50030759	0.04033015
0.7	7.40447752	7.62732216	7.50796940	0.05759495
0.9	7.31789643	7.67724025	7.47772792	0.08814197
1.0	7.32318441	7.65900377	7.50466723	0.09522807
2.0	7.22192740	7.67040794	7.46792383	0.13931525
3.0	7.07903203	8.01338207	7.54712953	0.26270184
4.0	6.97080137	8.26977058	7.61052994	0.34377547
5.0	6.99446042	8.25783563	7.64275543	0.37030338
10	5.93584285	10.16149741	7.97312923	0.97395102

Таблица 4

Изменение следа ковариационной матрицы при наложении различных погрешностей (a=0.5)

Погрешность k, %	min	max	Среднее арифм.	СКО
0.01	3.34384645	3.34510288	3.34454989	0.00030836
0.03	3.34269347 3.34127826	3.34654863	3.34461827	0.00110391
0.05	3.33762440	3.34688311	3.34479479	0.00188795
0.07	3.33865278	3.34831179	3.34436948	0.00245751
0.09		3.35071502	3.34439981	0.00344605
0.1	3.33761542	3.35196009	3.34430816	0.00374241
0.3	3.31770654	3.36259780	3.34395747	0.01194438
0.5	3.31874225	3.38023191	3.34539128	0.01909360
0.7	3.27159821	3.38905546	3.34522919	0.02541217
0.9	3.31212871	3.38409923	3.34493554	0.02325455
1.0	3.22642590	3.42317962	3.34803516	0.04169880
2.0	3.27195690	3.48137785	3.36336044	0.05092210
3.0	3.18655079	3.53690533	3.34020463	0.09742297
4.0	3.07454163	3.65573983	3.41239085	0.15336172
5.0	3.10276168	3.75738767	3.41375810	0.18246670
10	3.02935899	4.40582261	3.70950525	0.39048420

3. Заключение

Таким образом, установлено, что для всех исследованных критериев близких к ротатабельным двенадцатиточечных планов третьего порядка для двух переменных наблюдается тенденция расширения коридора ошибок, а следовательно, ухудшения рассматриваемых свойств с увеличением погрешностей средств измерений. Полученные данные помогут экспериментатору, в зависимости от требуемой точности, с которой могут быть определены оценки коэффициентов уравнения регрессии, в правильном подборе средств измерения, применяемых для установки уровней факторов.

Литература

1. Зедгинидзе И.Г., Планирование эксперимента для исследования многокомпонентных систем. М.: Наука, 1976, 390 с.

2. Берая Н.О. Исследование планов второго порядка при наличии ошибок эксперимента. Тбилиси: Технический университет, 2005, 338 с.

ორფაქტორიანი როტატაბელურთან მიახლოებული თორმეტწერტილიანი მესამე რიგის გეგმების D- და A-ოპტიმალურობის თვისებების კვლევა ექსპერიმენტის შეცდომების პირობებში

ირაკლი ზედგინიძე, ნინო ბერაია

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

სტატიაში შესწავლილია ორფაქტორიანი როტატაბელურთან მიახლოებული თორმეტწერტილიანი მესამე რიგის გეგმების ოპტიმალურობის თვისებები ექსპერიმენტის შეცდომების პირობებში. კვლევა წარმოებდა საზომი ხელსაწყოებისათვის დამახასიათებელი ცდომილებების სხვადასხვა დიაპაზონებისათვის. დეტალურადაა გამოკვლეული გეგმების D- და A- ოპტიმალურობის თვისებები, რომლებიც დაკავშირებულია რეგრესიული განტოლების კოეფიციენტების შეფასების სიზუსტესთან. ყოველი გამოკვლეული თვისებისათვის კვადრატების ორი სხვადასხვა ზომისათვის მიღებულია კრიტერიუმების მინიმალური და მაქსიმალური მნიშვნელობები, აგრეთვე მათი საშუალო არითმეტიკულები და საშუალო კვადრატული გადახრები. გაანალიზებულია შემოთავაზებული ეკონომიური მესამე რიგის გეგმების თვისებების გაუარესების ხარისხი ცდომილებათა გაზრდის შემთხვევაში.

RESEARCH OF PROPERTIES D-AND A-OPTIMALITY CLOSE TO ROTATABLE TWELVPOINT DESIGNS OF THE THIRD ORDER FOR TWO VARIABLES AT PRESENCE OF ERRORS OF EXPERIMENT

Zedginidze Irakli, Beraya Nino

Georgian Technical University

Summary

In the given article the questions connected with studying of properties close to rotatable twelvpoint of designs of the third order for two variable in conditions of errors of experiment are considered. Researches were spent for various ranges of the errors most typical for measuring devices. Such widely known properties of designs connected with accuracy of an estimation of factors regression of model as D-and A-optimality are studied. In details on each of the investigated properties for two sizes of squares the minimal and maximal values of criteria, and also averages the arithmetic and standard deviations describing disorder are received. The degree of deterioration of properties of considered economic designs in errors of the third order is analysed at increase.