ორი ინტეგრატორის მქონე ობიექტის ოპტიმალური მართვა (სისტემის გადაყვანა ნებისმიერი საწყისი მდგომარეობიდან კოორდინატთა სათავეში)

ნინო მჭედლიშვილი, ია მოსაშვილი
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

განხილულია ორმაგი ინტეგრირების მქონე ინერციული ობიექტის ოპტიმალური მართვის ამოცანა, რომლის გადასაწყვეტად ხდება ოპტიმალური მართვის განსაზღვრა, მოძრაობის ტრაექტორიების აგება ფაზურ სიბრტყეზე, მართვის კანონის პოვნა და მისი რეალიზაციის სტრუქტურული სქემის შედგენა. მოდელების და შედეგების შემოწმება ხდება Matlab/Simulink სისტემაში.

1. ამოცანის დასმა და გადაწყვეტა

გადავწყვიტოთ ორმაგი ინტეგრირების მქონე ინერციული ობიექტის ოპტიმალური მართვის ამოცანა. ავღნიშნოთ ობიექტის მასა m-ით, მდგომარეობა - $y(t)$, ობიექტზე მოქმედი ძალა (ან მომენტი) - $v(t)$. ხახუნის და გრავიტაციული ძალების არ არსებობის დროს ობიექტი აღიწერება მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებით:

$$m\ddot{y}(t) = v(t) \tag{1}$$

ასეთ ობიექტის გადაცემის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{1}{ms^2} \tag{2}$$

სადაც $V(s) = L[\mathbf{v}(t)]$ და $Y(s) = L[y(t)]$ – შესაბამისად შესავალი და გამოსავალი სიგნალების ლაპლასის გამოსახულებებია.

დავუშვათ, რომ $u(t) = \dfrac{v(t)}{m}$, მაშინ (1) ჩაიწერება ასე:

$$\ddot{y} = u(t). \tag{3}$$

შემოვიტანოთ მდგომარეობის ცვლადები (ფაზური კოორდინატები):

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t), \end{cases} \tag{4}$$

სადაც $x_1(t)$ არის გამოსავალი სიგნალი, $x_2(t)$ - გამოსავალის სიჩქარე. ამ აღნიშვნების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t). \end{cases} \tag{5}$$

დავუშვათ, რომ მართვაზე დადებულია შემდეგი შეზღუდვა:

$$|u(t)| \le 1, \text{ ყველა } t\text{-სათვის.} \qquad (6)$$

ეს შეზღუდვა გამომდინარეობს ობიექტზე მოდებული ძალის ან მომენტის სიდიდეზე ფიზიკური შეზღუდვიდან, რომელიც არსებობს რეალურ მოწყობილობებზე.

აუცილებელია განისაზღვროს დასაშვები მართვა, რომელსაც (5) სისტემა გადაყავს ნებისმიერი საწყისი (x_{10}, x_{20}) მდგომარეობიდან კოორდინატთა $(0,0)$ სათავეში მინიმალურ შესაძლო T დროში.

ამ ამოცანის გადაწყვეტა შეიძლება შესდგებოდეს შემდეგი ეტაპებისგან:

1. ოპტიმალური მართვის განსაზღვრა, ანუ მართვა, რომელიც უზრუნველყოფს ჰამილტონიანის მაქსიმუმს;
2. დამხმარე ψ ცვლადების მიმართ განტოლებების შედგენა უცნობი საწყისი $\psi(0)$ მნიშვნელობებისათვის;
3. მართვის $u(t)$ მიმდევრობის განსაზღვრა, რომელიც შესაძლებელია იყოს ოპტიმალური.
4. ფაზურ სიბრტყეზე მოძრაობის ტრაექტორიების აგება $u = +1$ და $u = -1$ -სთვის;
5. გადართვის ხაზის განსაზღვრა;
6. მართვის კანონის პოვნა, რომელიც მოცემული ამოცანის ამოხსნას წარმოადგენს;
7. მართვის მიღებული კანონის რეალიზაციის სტრუქტურული სქემის შედგენა;
8. იმიტაციური მოდელირება Matlab/Simulink სისტემაში, მოდელების და შედეგების შესამოწმებლად.

განვიხილოთ დაწვრილებით თითოეული ეტაპი:

პირველი ეტაპი: შევადგინოთ ჰამილტონიანი:

$$H = \sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha f_\alpha(x,u),$$

სადაც $n = 2,\ \psi_\alpha = (\psi_1, \psi_2),\ f_1(x,u) = x_2,\ f_2(x,u) = u.$

ψ_α და f_α ვექტორების სკალარული ნამრავლი იძლევა შედეგს:

$$H = \Psi_1 x_2 + \Psi_2 u. \qquad (7)$$

ოპტიმალური მართვა, რომელიც უზრუნველყოფს H ჰამილტონიანის მაქსიმუმს, იქნება:

$$u(t) = \mathbf{sign}\, \psi_2(t) = \pm 1, \qquad (8)$$

სადაც „+“ იწერება, თუ $\psi_2 > 0$, და „-“, თუ $\psi_2 < 0$.

მეორე ეტაპი: დამხმარე ψ_i ცვლადები აკმაყოფილებს შემდეგი სისტემის მეორე განტოლებას:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \psi_i} \\ \dfrac{d\psi_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 0,1,\dots,n. \end{cases} \tag{9}$$

ჩავსვათ (7), მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1 \end{aligned} \tag{10}$$

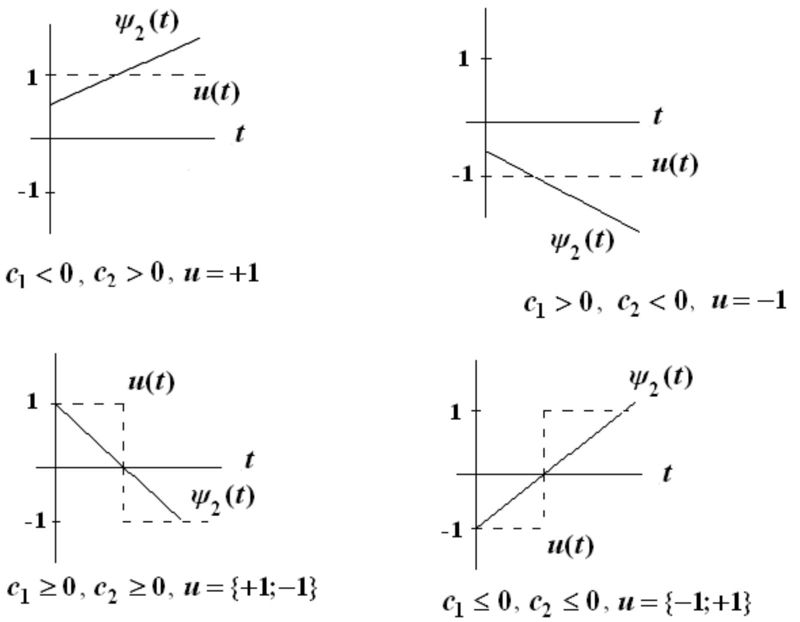
მესამე ეტაპი: მმართველ მიმდევრობას განვსაზღვრავთ შემდეგნაირად. დავუშვათ $c_1 = \psi_1(0)$ და $c_2 = \psi_2(0)$ - დამხმარე ცვლადების საწყისი მნიშვნელობებია, მაშინ (10)-ის ინტეგრირებით, ვპოულობთ:

$$\Psi_1(t) = c_1 = \mathbf{const}, \tag{11}$$

$$\Psi_2(t) = c_2 - \int c_1 dt = c_2 - c_1 t. \tag{12}$$

(12) გამოსახულებიდან ჩანს, რომ $\psi_2(t)$ არის წრფივი ფუნქცია დროის მიმართ. მისი მდგომარეობა დამოკიდებულია საწყის პირობებზე. (8) ასე ჩაიწერება:

$$u(t) = \mathbf{sign}\,\psi_2(t) = \mathbf{sign}(c_2 - c_1 t).$$



ნახ.1. $\psi_2(t) = c_2 - c_1 t$ **- ს ოთხი შესაძლო სახე და მათი შესაბამისი** $u(t) = \mathbf{sign}(c_2 - c_1 t)$ **მართვა**

მეოთხე ეტაპი: ფაზურ სიბრტყეზე (x_1, x_2) წერტილის მოძრაობის ტრაექტორიების ასაგებად საჭიროა (4) სისტემის ამოხსნა და დროის t ცვლადის გამორიცხვა ამონახსნიდან, ვინაიდან დროის სასრულ ინტერვალში ოპტიმალური მართვა მუდმივია, ანუ $u(t) = \pm 1$. (4) სისტემის ამოხსნა შეიძლება შემდეგი დაშვებით: $u(t) = const$. საწყისი პირობების გათვალისწინებით მიიღება გამოსახულებები:

$$x_2(t) = x_2(0) + ut \tag{13}$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0) + \int x_2(t)dt = x_1(0) + \int [x_2(0) + ut)]dt = \\ &= x_1(0) + x_2(0)t + \frac{ut^2}{2}. \end{aligned} \tag{14}$$

დროის იმ მონაკვეთში, როდესაც $u(t) = +1$, გვაქვს:

$$x_2(t) = t + x_2(0) \tag{15}$$

$$x_1(t) = \frac{t^2}{2} + x_2(0)t + x_1(0) = \frac{1}{2}[t + x_2(0)]^2 + [x_1(0) - \frac{1}{2}x_2^2(0)]. \tag{16}$$

ჩავსვათ (15) გამოსახულება (16)-ში, რითაც გამოვრიცხავთ დროის ცვლადს:

$$x_1(t) = \frac{1}{2}x_2^2(t) + \xi_1 \tag{17}$$

სადაც $\xi_1 = x_1(0) - \frac{1}{2}x_2^2(0)$ - მუდმივაა.

(17) განტოლება არის იმ ტრაექტორიის განტოლება, რომელიც იწყება $[x_1(0), x_2(0)]$ წერტილიდან x_1x_2 სიბრტყეში, $u = +1$ მართვისათვის. ეს ტრაექტორიები წარმოადგენს პარაბოლებს, რომლებიც მე-2 ნახაზზეა ნაჩვენები უწყვეტი წირებით.

ანალოგიურად გვექნება $u = -1$:

$$x_2(t) = -t + x_2(0) \tag{18}$$

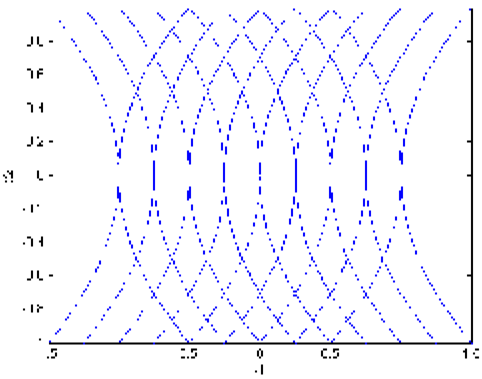
$$x_1(t) = -\frac{t^2}{2} + x_2(0)t + x_1(0) = -\frac{1}{2}[-t + x_2(0)]^2 + [x_1(0) + \frac{1}{2}x_2^2(0)], \tag{19}$$

საიდანაც ჩავწერთ:

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2^2(t) + \xi_2, \tag{20}$$

სადაც $\xi_2 = x_1(0) + \frac{1}{2}x_2^2(0)$ – მუდმივაა.

(20) განტოლების შესაბამისი ტრაექტორიები წარმოადგენს პარაბოლებს, რომლებიც მე-2 ნახაზზე ნაჩვენებია პუნქტირით.



ნახ.2. ფაზური ტრაექტორიები

ამ ფაზური ტრაექტორიების მიღება შეიძლება Matlab სისტემის საშუალებით შემდეგი პროგრამით:

Matlab-პროგრამა:

```
%
u =[ 1   -1];
x10=[-1.0  -0.75  -0.5  -0.25  0  0.25  0.5  0.75  1.0];
x20=0;
for i=1:2
for k=1:9
ksi=x10(k)-u(i)*x20.^2/2;
x2=[-1:0.01:1];
x1=u(i)*x2.^2/2+ksi;
plot(x1,x2,'-')
xlabel('x1')
ylabel('x2')
hold on
end
end
```

მეხუთე ეტაპი: მართვის მიზანს წარმოადგენს სისტემის გადაყვანა ფაზური სიბრტყის ნებისმიერი წერტილიდან კოორდინატთა სათავეში. ვინაიდან, მართვა უნდა იყოს უბან-უბან მუდმივი, შეიძლება მოიძებნოს ისეთი წერტილების გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც გადაყვანილი იქნება $(0,0)$ წერტილში $u(t)=\pm 1$ მართვის საშუალებით. ორი ასეთი ტრაექტორია ნაჩვენებია მე-2 ნახაზზე. γ_+ მრუდი არის (x_1, x_2) წერტილების გეომეტრიული ადგილი, რომლებიც შეიძლება გადაყვანილ იქნას $(0,0)$ წერტილში $u=+1$ მართვის საშუალებით, ხოლო γ_- – იმ წერტილების ერთობლიობაა, რომლებიც გადადის $(0,0)$ წერტილში $u=-1$ მართვის საშუალებით.

$$\gamma_+ = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = \frac{1}{2} x_2^{\ 2} ; x_2 \le 0 \right\}. \tag{21}$$

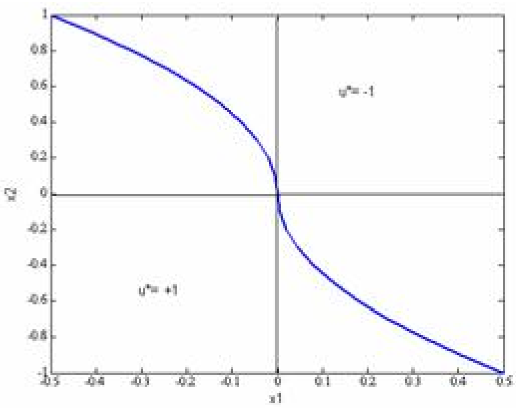
$$\gamma_- = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -\frac{1}{2} x_2^{\ 2} ; x_2 \ge 0 \right\}. \tag{22}$$

ამ ორი მრუდის გაერთიანებით ვიღებთ გადართვის წირს:

$$\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_- = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -\frac{1}{2} x_2 |x_2| \right\} \tag{23}$$

ტრაექტორია $\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_-$ აგებულია (23) განტოლებისთვის (ნახ.3), შემდეგი პროგრამის საშუალებით:

```
%
x2 = [-1: 0.1: 1];
x1 = - 0.5*x2.*abs(x2);
plot(x1,x2,'-')
xlabel('x1')
ylabel('x2')
```



ნახ.3. გადართვის მრუდი ორმაგი ინტეგრირების მქონე ობიექტისათვის

მეექვსე ეტაპი: u^* წარმოადგენს ოპტიმალური მართვის კანონს სწრაფქმედების მიმართ, ფაზური სიბრტყის ნებისმიერი მდგომარეობისათვის:

$$
\begin{aligned}
u^* &= u^*(x_1, x_2) = +1, \qquad (x_1, x_2) \in \gamma_+ \cup R_+; \\
u^* &= u^*(x_1, x_2) = -1, \qquad (x_1, x_2) \in \gamma_- \cup R_-.
\end{aligned} \tag{24}
$$

მეშვიდე ეტაპი: ვაჩვენოთ, როგორ შეიძლება მართვის (24) კანონის რეალიზება. შეიძლება შეიქმნას მართვის არაწრფივი სისტემა უკუკავშირით, რომელიც x_1 და x_2 ფაზურ კოორდინატებს გარდაქმნის და აფორმებს u^* ოპტიმალურ მართვას. ფაზური კოორდინატები $x_1(t)$ (გამოსასვლელი) და $x_2(t)$ (გამოსასვლელის სიჩქარე) იცვლებიან დროის ყოველ მომენტში.

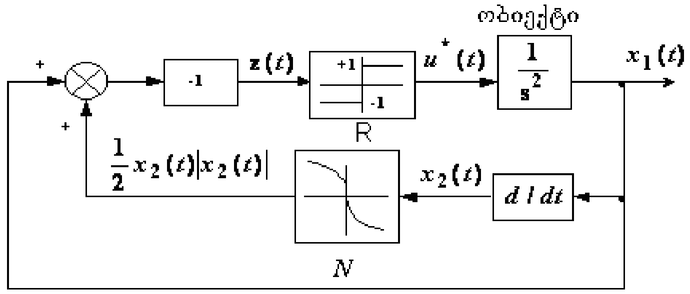
(23) განტოლების შესაბამისად $x_2(t)$ სიგნალი არ ემთხვევა N არაწრფივობას, რომლის გამოსასვლელზე გვექნება: $\frac{1}{2}x_2(t)|x_2(t)|$. $\mathbf{z}(t)$ სიგნალი, რომელიც განსაზღვრავს გადართვის მრუდს, შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$
\mathbf{z}(t) = -x_1(t) - \frac{1}{2}x_2(t)\,|x_2(t)\,| \tag{25}
$$

ეს სიგნალი მართავს R რელეს, რომელიც წარმოადგენს **sign** ოპერაციის ტექნიკურ (ან პროგრამულ) რეალიზაციას. სიგნალი რელეს გამოსასვლელზე უზრუნველყოფს ოპტიმალურ მართვას სწრაფქმედებაზე, ვინაიდან

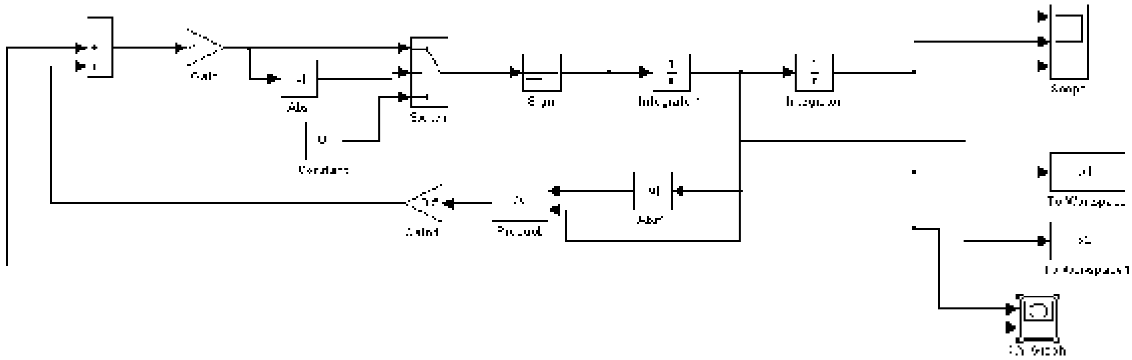
$$
\begin{aligned}
&\text{თუ}, \ (x_1(t), x_2(t) \in R_-, \ \text{მაშინ} \ \ \mathrm{z}(t) > 0, \\
&\text{თუ}, \ (x_1(t), x_2(t) \in R_+, \ \text{მაშინ} \ \ \mathrm{z}(t) < 0.
\end{aligned} \tag{26}
$$

ძირითადი სირთულე წარმოიშვება მაშინ, როდესაც სისტემის მდგომარეობა აღმოჩნდება გადართვის მრუდზე. (25) და (23) განტოლებებიდან ჩანს, რომ, როდესაც $(x_1(t), x_2(t))$, მაშინ $\mathbf{z}(t) = 0$. ამ შემთხვევაში იდეალური რელეს გამოსასვლელი უნდა იყოს ნულის ტოლი. მაგრამ, ვინაიდან რელე ფიზიკურად არის იდეალური, მას ყოველთვის აქვს უგრძნობელობის არე, იგი გადაერთვება არა ამ γ მრუდზე, არამედ ცოტა გვიან. ამიტომ რეალური სისტემები „თითქმის ოპტიმალურებია“.



ნახ.4. სწრაფქმედების მიმართ ოპტიმალური მართვის სისტემის რეალიზაციის სქემა

მერვე ეტაპი: მოვახდინოთ ოპტიმალური მართვის სისტემის მოდელირება Matlab სისტემის და მისი გაფართოების Simulink-ის საშუალებით. მოდელირების სქემა წარმოდგენილია მე-5 ნახაზზე.

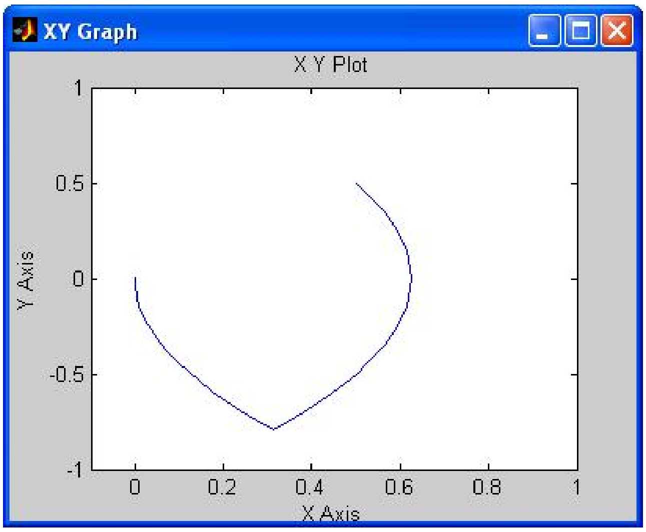


ნახ.5. სწრაფქმედების მიმართ ოპტიმალური მართვის სისტემის მოდელირების სქემა

სქემაზე გამოყენებულია Switch ბლოკი, გადართვის ზღვარი უდრის 10^{-6}. შუა შესასვლელზე მიეწოდება $|\mathbf{z}(t)|$ მოდული Abs1 ბლოკის გამოსასვლელიდან. პირველ შესასვლელზე (ზედაზე) მიეწოდება $\mathbf{z}(t)$ სიგნალი, ხოლო მეორე შესასვლელზე (ქვედაზე) – 0, Constant ბლოკიდან. თუ $\mathbf{z}(t)$ სიგნალის დონე აღემატება ამ ზღვარს, მაშინ შწიტცჰ ბლოკის გამოსასვლელზე მიეწოდება სიგნალი ზედა შესასვლელიდან, ანუ $\mathbf{z}(t)$. თუ პირიქით, ანუ ქვედა შესასვლელიდან, მაშინ – 0.

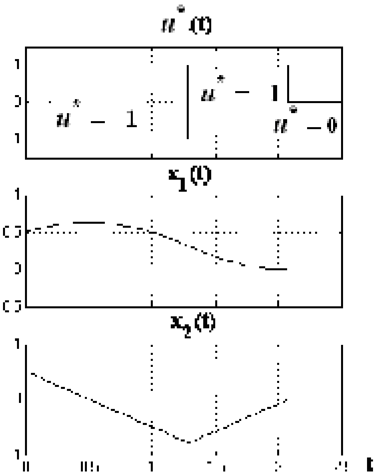
ავაგოთ ფაზური ტრაექტორია მოცემული საწყისი პირობებით:

I ხერხი: გამოვიყენოთ XY Graph ბლოკი, რომლის ერთ შესასვლელზე (აბსცისათა ღერძზე) მივაწოდებთ x_1-ს, ხოლო მეორე შესასვლელზე - x_2-ს.



ნახ.6. ფაზური ტრაექტორია

II ხერხი: გამოვიყენოთ To Workspace რეგისტრატორები, რომლებიც ნახაზზეა ნაჩვენები.

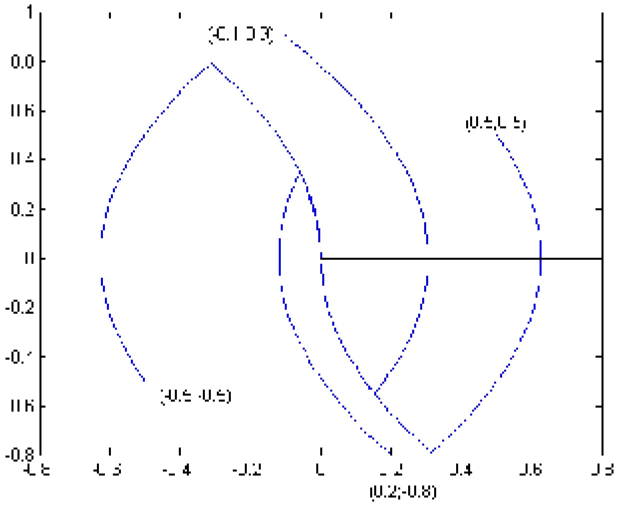


ნახ.7. სწრაფქმედების მიმართ ოპტიმალური მართვის სისტემის მოდელირების შედეგები

ამ რეგისტრატორების საშუალებით მიღებული სიგნალები ჩაიწერება Workspace–ში. შემდეგ Matlab-ის საბრძანებო ფანჯრიდან ვაგებთ ფაზურ ტრაექტორიას:

```
%
 x10=[0.5; 0.2; -0.5; -0.3; -0.2; -0.1];
x20=[0.5; -0.3; -0.5; 0.2; -0.8; 0.9];
%Start simulation
%
 plot(x1.signals.values,x2.signals.values)
xlabel('x1'), ylabel('x2')
```

ვცვალოთ საწყისი პირობები და შესაბამისი ფაზური ტრაექტორიები დავამატოთ იგივე გრაფიკულ ფანჯარაში. ამისათვის ვიყენებით hold on–ს. შედეგად ვიღებთ ფაზურ პორტრეტს:



ნახ.8. ფაზური ტრაექტორიების პორტრეტი

2. დასკვნა

ამრიგად, ოპტიმალური მართვის სისტემების პროექტირებაში, გაცილებით ადვილი და ეფექტურია თანამედროვე კომპიუტერული ტექნოლოგიების გამოყენება ზუსტი შედეგების მისაღებად.

ლიტერატურა

1. Соколов Ю.Н. Анализ и синтез непрерывных линейных систем управления : Учеб. пособие (на английском и русском языках). – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т “Харьк. авиац. ин-т”, 2002
2. Соколов Ю.Н. Компьютерный анализ и проектирование систем управления. Харьк. авиац. ин-т. 2005. – ч. 1: Непрерывные системы
3. Бутковский А. Г. Принцип максимума для оптимальных систем с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика. – 1961. – Т. 22, №10. – С. 1288 – 1301.
4. Фельдбаум А.А. О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства. Автоматика и телемеханика. – 1955. – Т.10. – № 2. – С. 120 – 149.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБЪЕКТОМ С ДВУМЯ ИНТЕГРАТОРАМИ (ПЕРЕВОД СИСТЕМЫ ИЗ ЛЮБОГО НАЧАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ В НАЧАЛО КООРДИНАТ)

Мчедлишвили Н., Мосашвили И.
Грузинский Технический Университет

Резюме

Рассматривается задача нахождения оптимального по быстродействию управления инерционным объектом с двумя интеграторами, обеспечивающего перевод системы из любого начального состояния в начало координат за минимальное время. Решение задачи осуществляется методом максимума Понтрягина. Приведены результаты имитационного моделирования в Matlab/Simulink.

OPTIMUM CONTROL OF THE OBJECT WITH TWO INTEGRATORS (TRANSITION OF THE SYSTEM FROM ANY INITIAL STATE TO THE ORIGIN OF COORDINATES)

Mchedlishvili Nino, Mosashvili Irine
Georgian Technical University

Summary

The problem of optimum control of inertial object with double integration is considered. For the solution of this problem optimum control is determined, motion trajectories are plotted on phase plane, law of control is found and structural diagram of its realization is drawn. The object is described with the second order differential equation. The function of transmission is given. Control is limited. The allowable control is determined which transfers the system from any initial state to the origin of coordinates in possible minimum time. In order to plot motion trajectories on phase plane the trajectory equations are solved with initial conditions taken into account. These trajectories represent parabolas. The work presents phase trajectories received with Matlab system and the corresponding program. The switch curve for objects with double integrations is obtained.

The realization of the law of control is done by creation of nonlinear system (feedback) of control which transforms phase coordinates and establishes optimum control. Phase coordinates change in every moment of time. The scheme of optimum control system realization relative to quick action is drawn, its modelling also realized by means of Matlab system and its expansion Simulink. Phase trajectory is plotted with the given initial conditions. The initial conditions are changed and the respective phase trajectories are introduced into the same graphical window. As a result a very interesting phase portrait is obtained. Thus, when designing optimum control systems it is much simpler and more effective to use modern computer technologies in order to get precise results.