ჰოპფის ბიფურკაცია სამგენერატორიანი სისტემისათვის

გოჩა დალაქიშვილი
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

განხილულია ენერგოსისტემებში ჰოპფის ბიფურკაცია მრავალგენერატორიანი, კონკრეტულ შემთხვევაში კი, სამგენერატორიანი სისტემისთვის. მოცემული მათემატიკური მოდელის განხილვის საფუძველზე შეიძლება განისაზღვროს პარამეტრების მნიშვნელობათა ჯგუფები, რომლებიც შეესაბამება ბიფურკაციის წერტილებს და მიიღება ჰოპფის ბიფურკაციის ინდიკატორი. მიღებულია ექსპერიმენტის გარდამავალი პროცესის გრაფიკი და ფაზურ სიბრტყეზე მისი სახე, საბოლოოდ კი – შედეგი, n – განზომილებიანი ფაზური ტორი.

საკვანძო სიტყვები : ენერგოსისტემა. ბიფურკაცია. ტორი. ფაზური სიბრტყე. გარდამავალი პროცესი.

1. შესავალი

ბიფურკაცია – ეს არის გადასვლები, რომლებიც შეიძლება მოხდეს დინამიკური ქცევიდან სხვადასხვა სახეებს შორის პარამეტრების ცვლილებისას.

ბიფურკაციის მოვლენა ზოგადი ცნებაა, რომელსაც შეესაბამება შესაძლო ტოპოლოგიურ ცვლილებათა ქვესიმრავლე და ახასიათებს სისტემის ამონახსნს. ზოგად შემთხვევაში განსახილველ X ამონახსნთა სივრცე შეიძლება დახასიათდეს გარკვეული ტოპოლოგიით. კერძოდ, რომელიღაც მეტრიკული სივრცე შეიძლება შევუსაბამოთ n-განზომილების E^n ევკლიდურ სივრცეს. თეორიულ ასპექტში შეიძლება განვიხილოთ E^n-ზე უფრო ზოგადი სივრცე.

ბიფურკაციულ ანალიზში გადამწყვეტ როლს თამაშობს განსაკუთრებული ამონახსნები:

1. $x_0 = \| X \mid f : x_0 \to x_0 \|$ - სტაციონალური ამონახსნები;
2. $X = \| X \mid f : x(0) \to x(0+T) \|$ - პერიოდული ამონახსნები.

დინამიკური სისტემებისათვის, რომლებიც აღიწერება შემდეგი დიფერენციალური განტოლებით

$$\frac{dx}{dt} = f(x, p),$$

ამონახსნთა სიმრავლის პირველი შემთხვევა შეესაბამება განტოლებათა სისტემის

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

ამონახსნს, რომელიც წარმოადგენს $f(x, p) = 0$ განტოლებათა სიმრავლის ამონახსნს.

მეორე შემთხვევაში ამონახსნი წარმოადგენს ან მარტივ, ან საკმაოდ რთულ ზღვრულ ციკლებს.

ზემოთ ჩამოთვლილ ორ ამონახსნთან შედარებით უფრო რთული ხასიათი გააჩნია ან პირობით-პერიოდულ ამონახსნებს ან ატრაქტორებს, რომელთა საზღვრებს გარეთ ტრაექტორიები არ გადის. ე. ი. $X_a \subset X$,

3. $X_a = \| X \mid f : X_a \to X \|$

განსაკუთრებული ამონახსნები (1,2,3) იმით ხასიათდება, რომ მათკენ მიისწრაფვის ყველა რეგულარული ამონახსნი $t \to +\infty$ ან $t \to -\infty$.

სტრუქტურული მდგრადობა: იქნება თუ არა მეზობელი რეგულარული ამონახსნები ერთმანეთთან საკმარისად ახლოს პარამეტრების ცვლილებისას. ბიფურკაციული მოვლენის აღწერა შეიცავს ცნებებს განსაკუთრებულ ამონახსნებისა და მათი მდგრადობის შესახებ. ბიფურკაციის კარგი მაგალითია შემთხვევა, როდესაც სისტემის განსაკუთრებული ამონახსნების წერტილი დაიყოფა ჯერად განსაკუთრებულ ამონახსნებად. დაკვირვებადი მოვლენები – ეს არ არის უბრალოდ მდგრადობის შეცვლა, ეს უფრო ბიფურკაციის მაგალითია. უნდა აღინიშნოს შემდეგი: განსაკუთრებული წერტილის მდგრადობის ქვეშ გვესმის მდგრადობა ლიაპუნოვის მიხედვით. უნდა განვიხილოთ სტრუქტურული მდგრადობა, რომელიც ბიფურკაციული ანალიზის კვლევის საგანია.

ჰოპფის თეორიის საფუძველზე შემოგვაქვს ცნება ჰოპფის ბიფურკაციისა და ზღვრული ციკლების შესახებ.

ზღვრული ციკლების შესახებ კონცეპცია ჩამოაყალიბა ა. პუანკარემ დიფერენციალურ განტოლებათა კვლევიდან. ასეთ სისტემებში შეიძლება მივიღოთ რხევები, რომლებიც უბრუნდება საწყის მდგომარეობას მცირე შეშფოთების შემდეგ, რხევების ნებისმიერი ფაზის დროს. პუანკარემ ასეთ რხევებს მდგრადი ზღვრული ციკლები უწოდა. სისტემები კი - პუანკარეს ოსცილატორებია.

თუ ჩავთვლით, რომ სისტემა იძლევა ზღვრული ციკლის ტიპის რხევებს, მაშინ შეიძლება გავაკეთოთ წინასწარი დასკვნები ასეთი სისტემების მდრადობის შესახებ, მიუხედავად იმისა, ვიცით, თუ არა სისტემის აღმწერი განტოლებები.

იმისათვის, რომ ვიმსჯელოთ სისტემის მდგრადობის ან არამდგრადობის შესახებ ზღვრული ციკლის მდგრადობის მიხედვით, უნდა დავადგინოთ ერთგენერატორიან, ორგენერატორიან და სამგენერატორიან სისტემებში ზღვრული ციკლების არსებობის ფაქტი. თუ მცირე შეშფოთებისას ზღვრული ციკლი უბრუნდება საწყის მდგომარეობას, სისტემა მდგრადია, თუ არა – არამდგრადი.

თუ დინამიკური სისტემა დამოკიდებულია პარამეტრზე, ეს პარამეტრი შეიძლება იყოს ტემპერატურა, წნევა, ძაბვა და სხვა ფიზიკური სიდიდეები, მაშინ მათი ცვლილებისას სისტემის დინამიკა იცვლება. დინამიკური სისტემების პარამეტრების ცვლილებისას შეიძლება შეიცვალოს მდგრადობის წერტილების რიცხვი და მათი მდგრადობა. ასეთი ცვლილებები არაწრფივ სისტემებში, რომლებიც დამოკიდებულია სისტემის პარამეტრის ცვლილებაზე, წარმოადგენს ბიფურკაციის თეორიის საგანს.

2. ძირითადი ნაწილი

იმისათვის, რომ ვაჩვენოთ სიხშირული არეების ჰოპფის ბიფურკაციის თეორემა მძლავრი ელექტროსისტემიბისათვის. გამოვიყენოთ იგი სამგენერატორიანი სისტემისათვის. განტოლებები ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\ddot{Q}_1 + 2D_{12}\sin(\theta_1) + D_{23}\sin(\theta_1-\theta_2) + D_{13}\sin(\theta_2) +$$
$$C_{23}\cos(\theta_1-\theta_2) - C_{13}\cos(\theta_2) = \Delta P_1 \qquad (1)$$
$$\ddot{Q}_1 + 2D_{13}\sin(\theta_2) + D_{23}\sin(\theta_2-\theta_1) + D_{12}\sin(\theta_1) +$$
$$C_{23}\cos(\theta_2-\theta_1) - C_{12}\cos(\theta_1) = \Delta P_2 \qquad (2)$$

სადაც $\theta_1 = \delta_2 - \delta_1; \theta_2 = \delta_3 - \delta_1; \Delta P_1 = P_2 - P_1; \Delta P_2 = P_3 - P_1;$

δ_1 და P_1 შესაბამისად აღნიშნავს მანქანურ კუთხეს და სიმძლავრეს.

შეიძლება განისაზღვროს პარამეტრთა მნიშვნელობების ჯგუფი, რომლებიც შეესაბამება ბიფურკაციის წერტილებს კონსერვატიულ სისტემაში და მიიღება ჰოპფის ბიფურკაციის ინდიკატორი. ბიფურკაციის ამ წერტილისათვის პარამეტრების მნიშვნელობები მოცემულია ცხრილში:

C_{12}	C_{13}	C	D_{12}	D_{23}	D_{13}	ΔP_1	ΔP_2	P1	θ_1	θ_2
0	**0**	**2**	**1**	**0,577**	**0,577**	**4,042**	**2,887**	**-1,155**	**1,047**	**0,523**

დემპფირების დამატების შემდეგ (1-2) დაიყვანება I რიგის განტოლებაზე, სადაც

$$X = \begin{bmatrix}\theta \\ \dot{\theta}\end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix}0 & I \\ 0 & -\lambda I\end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix}0 \\ I\end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix}I & 0\end{bmatrix},$$

$$g(x,\eta) = \begin{bmatrix} P_2 - \eta - 2D_{12}\sin(\theta_1) - D_{23}\sin(\theta_1-\theta_2) - D_{13}\sin(\theta_2) - C_{23}\cos(\theta_1-\theta_2) + C_{13}\sin(\theta_2) \\ P_3 - \eta - 2D_{13}\sin(\theta_2) - D_{23}\sin(\theta_2-\theta_1) - D_{23}\sin(\theta_1) - C_{23}\cos(\theta_2-\theta_1) + C_{13}\sin(\theta_1) \end{bmatrix}$$
$$\eta = P_1$$

(1), (2) უნდა გარდავქმნათ უკუგადაცემის ეკვივალენტურ სისტემად:

$$X = AX + BRY + B[(g,\eta) - RY]; \quad \mathrm{Y{=}CX}$$

სადაც

$$L(e) = G(S,\eta)\cdot L(U)$$

$$G(S,\eta) = C[SI - (A + BRC)]^{-1}\beta$$

$$u = f(e,\eta) = g(-e,\eta) - RY$$

თუ R=1, რათა არ იყოს ნაიკვისტის კონტურზე ერთგვაროვნება, მაშინ

$$G(S) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{S^2 + YS - 1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{S^2 + YS - 1} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$$f(e,\eta) = g(-e,\eta) + e$$

იაკობიანი J=Det$f$ იქნება:

$$Detf = \begin{bmatrix} \gamma + z & \beta + Y \\ \beta - Y & \gamma - z \end{bmatrix} \qquad (4)$$

$$\gamma = D_{12}\cos(e_1) + D_{13}\cos(e_2) + D_{23}\cos(e_1 - e_2) + 1,$$

$$Z = D_{12}\cos(e_1) + D_{13}\cos(e_2) + D_{23}\sin(e_1 - e_2),$$

$$\beta = -D_{23}\cos(e_1 - e_2) + \left[D_{12}\cos(e_1) + D_{12}\cos(e_2)\right]/2 + \left[C_{12}\sin(e_1) + C_{13}(e_2)\right]/2$$

$$Y = \left[D_{13}\cos(e_2) - D_{12}\cos(e_1)\right]/2 + C_{13}\sin(e_1 - e_2) + \left[-C_{12}\sin(e_1) + C_{13}(e_2)\right]/2 \quad (14.67)$$

ამგვარად,

$$G(S)\cdot J = \frac{1}{S^2 + YS - 1}\begin{bmatrix} \alpha + z & \beta + Y \\ \beta - Y & \alpha - z \end{bmatrix} \qquad (5)$$

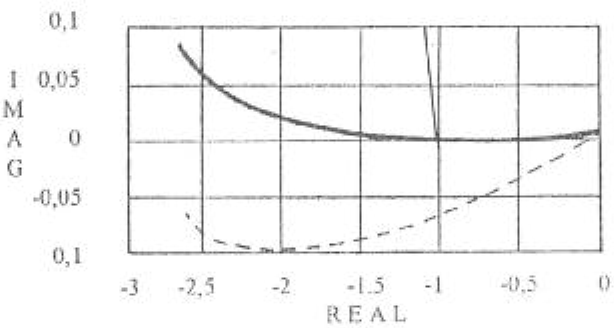
$G(j\varpi)\cdot J$ ფუნქციის მახასიათებელი განტოლება იქნება:

$$\lambda(j\varpi) = -\left[\alpha \pm \sqrt{z + \beta - y}\right]\frac{(\varpi^2 + 1) + J\varpi Y}{\varpi^4(2+Y)\varpi^2 + 1} \qquad (6)$$

ნათელია, რომ ნახევარნორმალური პოლუსი განსაზღვრული სმიტ-მაკმილანის [S] ფორმით, არის გახსნილ მარყუჟზე გადაადგილების ფუნქცია. $G(S)\cdot J$ მატრიცა იქნება:

$$P(S) = (S^2 + TS - 1) \qquad (7)$$

თუ ჩავსვავთ პარამეტრების მნიშვნელობებს ცხრილიდან, როცა Y=0,05, ეს საკმარისი იქნება საანგარიშოდ და კომპიუტერზე მოდელირებისათვის, რადგან ბიფურკაციის პარამეტრი P_1 იცვლიბა მისი კრიტიკული მნიშვნელობისას. როცა დემპფირების მნიშვნელობაა Y=0,05, P_1-ის კრიტიკული მნიშვნელობა დაძრულია – 1,1551-დან დაახლოებით – 1,146-მდე. P_1<-1,146 – თვის მახასიათებელი შემოწერს (-1,50) წერტილს და (ორჯერ) აღწევს მდგრად მდგომარეობას. თავიდან კი გრაფიკი მიისწრაფვის ამ წერტილისკენ, ე.ი. სისტემა კონვერგირებს წონასწორობისკენ, რხევებთან სიხშირით 1,2 რად/წმ. (ნახ.1)

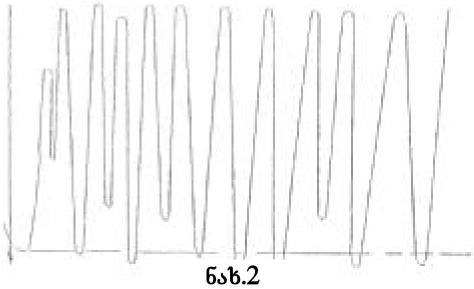


ნახ.1

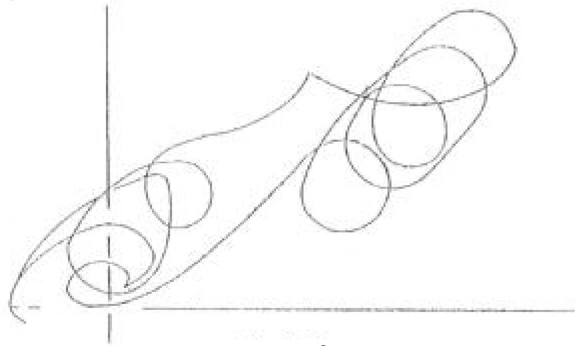
თუ P_1 გადის კრიტიკულ მნიშვნელობას, ტრაექტორია გაივლის (-1,50) წერტილზე, მაგრამ არ ემთხვევა მას, ე.ი. აღწერს არამდგრად სისტემას. ეს არის ის შემთხვევა, როცა ფესვები კვეთს წარმოსახვით ღერძებს. სისტემაში ადგილი აქვს ჰოპფის ბიფურკაციას.

როცა P_1=-1,144, მაშინ სისტემა მიისწრაფვის წონასწორობისკენ. თუ P_1=-1,145, მაშინ სისტემა აღწევს წონასწორობას და საბოლოოდ, როცა P_1=-1,146, სისტემაში აქაც ადგილი აქვს ჰოპფის ბიფურკაციას.

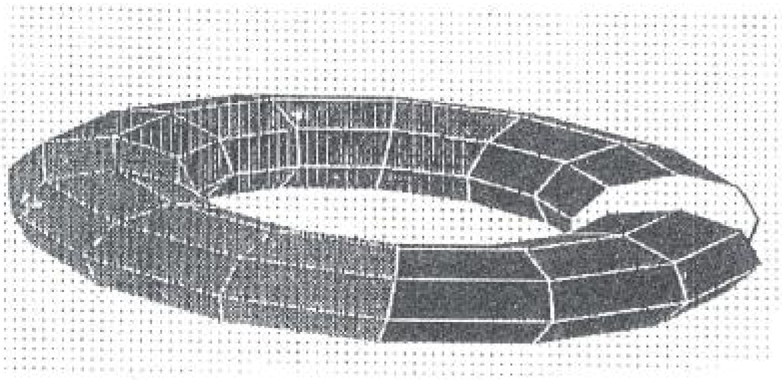
ამ ექსპერიმენტის გარდამავალი პროცესის გრაფიკი და ფაზურ სიბრტყეზე მისი სახე მოცემულია მე-2 და მე-3 ნახაზებზე, ხოლო მე-4 ნახაზზე - კი ექსპერიმენტის საბოლოო შედეგები: n-განზომილებიანი ტორი.



ნახ.2



ნახ.3



ნახ.4

3. დასკვნა

ენერგოსისტემაში ბიფურკაციის წერტილების გარკვეული მნიშვნელობების შერჩევისას მიმდინარე გარდამავალი პროცესი შეიძლება მივიყვანოთ სასურველ შედეგამდე, რაც თვალნათლივ ჩანს ექსპერიმენტის შედეგებიდან. მიღებულია ექსპერიმენტის გარდამავალი პროცესის გრაფიკი და ფაზურ სიბრტყეზე მისი სახე, საბოლოოდ კი n განზომილებიანი ფაზური ტორი.

ლიტერატურა

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. -М.: Наука, 1989.

2. Ибрагимов Н. Х. Группы Ли в некоторых вопросах математической физики. - Новосибирск.: НГУ, 1972.

3. Круг Г. К., Круглов В. В., Саванов В. Л. Определение оптимального тестирующего сигнала для идентификации линейных динамических объектов при ненулевых начальных условиях. - Труды МЭИ, выпуск 399. 1979. -58-63с.

4. Djukic D. S. Noethers theorem for optimum Control systems. Int. J. Control, 1973, 18, № 3, 667-672p.

BIFURKATION OF KHOPF FOR THREE-GENERATING SYSTEMS

Dalakishvili Gocha
Georgian Technical University

Summary

It is considered bifurkation of Khopf for multigenerating systems, in this case for three-generating systems. On the basis of the given mathematical model it is possible to define values of groups of parameters which correspond to points bifurkation and the indicator bifurkation of Khopf turns out. The schedule of transient of experiment, kind on a phase plane, and at last a result of experiment n-dimensional tor are received.

БИФУРКАЦИЯ ХОПФА ДЛЯ ТРЕХГЕНЕРАТОРНЫХ СИСТЕМ

Далакишвили Г.
Грузинский Технический Университет

Резюме

Рассмотрена бифуркация Хопфа для многогенераторных систем, в данном случае для трехгенераторных систем. На основе данной математической модели можно определить значения групп параметров, которые соответствуют точкам бифуркации и получается индикатор бифуркации Хопфа. Получены график переходного процесса эксперимента, вид на фазовой плоскости и, наконец, итог эксперимента n - мерный тор