Transactions. Georgian Technical University. AUTOMATED CONTROL SYSTEMS - No 2(3), 2007

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН

Чилачава Т.И.
Сухумский Государственный Университет

Резюме

В данной работе нами ранее предложенным асимптотическим методом малого параметра, характеризующего отклонение показателя преломления среды от единицы, найдено звуковое поле, создаваемое гармоническими точечными источниками в трёхмерно-неоднородном волноводе со взволнованной поверхностью и неровным жидким дном. Предполагается, что отношение вертикального размера неровности дна и взволнованной поверхности к глубине волновода, а также отношение плотности водного слоя к плотности жидкого дна является порядка малого параметра. Найдено условие, обеспечивающее равномерность регулярного асимптотического разложения (низкочастотное или длинноволновое приближение). Доказано, что возмущение звукового поля имеет вид континуальной суммы расходящихся вторичных волн, ”источниками” которых являются пространственная неоднородность среды и неровности границ. При этом амплитуды волн пропорциональны малому параметру и зависят от параметров всех мод (нормальная волна).

Ключевые слова: Математическая модель. Асимптотический метод. Звуковые волны. Волновод.

1. Введение

С этой точки зрения процесс рассеяния можно представить себе как переход энергии звуковой волны от моды данного номера (падающая волна) к модам других номеров (рассеянные волны). Таким образом показано, что неоднородность среды и неровности границ осуществляют связь между модами разных номеров, которые были бы вполне независимыми в волноводе, не содержащем никаких неоднородностей.

Проблема существования и единственности решения уравнения Гельмгольца в пространственно-неоднородных волноводах имеет важное применение в задачах распространения звуковых волн [1 - 5].

Однако, на практике необходимы конкретные расчеты звуковых полей, создаваемых гармоническими точечными источниками.

С этой точки зрения сравнительно хорошо исследованной является задача о распространении звука в среде с показателем преломления, зависящим только от глубины [6,7]. Это естественно, так как предположение о слоистости среды (показатель преломления среды или скорость звука постоянны на плоскостях параллельных поверхности) позволяет использовать при решении задачи метод разделения переменных с последующим получением формул, удобных как для численных расчетов, так и для выявления различных физических закономерностей. При расчетах звуковых полей в слоисто-неоднородных подводных волноводах на высоких частотах, когда число распространяющихся мод велико и расчет их на основе различных численных методов неэффективен, широко применяются асимптотические методы (лучевой метод и асимптотические варианты метода нормальных волн) [8,9].

Значительно меньше изучено распространение звуковых волн в трехмерно-неоднородной среде. По существу единственным общим подходом к исследованию высокочастотных колебаний в таких средах является лучевой метод. Однако лучевому подходу свойственны хорошо известные трудности, связанные с дифракционными эффектами: образование каустик, полутеневых и теневых зон. В ряде случаев допустимо предположение о слабой зависимости параметров среды от горизонтальных координат. Такое допущение позволяет развить для решения задачи метод, имеющий много общих черт с техникой разделения переменных (в акустике этот метод известен под названием схемы Барриджа-Вейнберга) [10].

В большинстве теоретических исследований распространения звука в волноводах пренебрегают возвышением поверхности и поглощением в жидком неоднородном дне [11].

Однако звуковые сигналы, падающие на дно под достаточно малыми углами, могут проникать в осадочные слои и распространяться в них. Во всяком случае, волны, проникающие в дно на достаточно большую глубину, уже не возвращаются в воду настолько сильными, чтобы давать существенный вклад в распространение на большие дистанции, поэтому потери (поглощение) в жидком неоднородном дне необходимо учитывать [12].

2. Основная часть

В настоящей работе автором ранее предложенным асимптотическим методом малого параметра [13], характеризующего отклонение показателя преломления среды от единицы, найдено звуковое поле, создаваемое гармоническими точечными источниками в пространственно-неоднородном волноводе со взволнованной поверхностью и неровным жидким дном.

1. В качестве математической модели рассмотрим задачу об определении звукового поля, создаваемого конечным числом точечных гармонических источников в пространственно-неоднородном волноводе со взволнованной поверхностью и неровным жидким дном.

Звуковое давление, создаваемое гармоническими точечными источниками в точке $x=(x_1,x_2,z)$ водного слоя описывается выражением

$$p(x,t)=\mathrm{Re}\left[\mathrm{U}_\varepsilon(x)e^{-i\omega t}\right],$$

где комплексная амплитуда поля $U_\varepsilon(x)$ (искомая функция в области $\Omega_1=\overline{\Omega}_0\times(-1+\varepsilon f(x'),\varepsilon g(x'))$ является решением следующей сопряженной задачи

$$\left(\Delta+k^2n^2(x)\right)U_\varepsilon(x)=-\sum_{j=1}^{m}\delta\left(x-x_j^0\right),\quad -1+\varepsilon f(x')<z<\varepsilon g(x')$$

(1.1)

$$U_\varepsilon(x)\Big|_{z=\varepsilon g(x')}=0\,,\qquad (U_\varepsilon(x)-u(x))\Big|_{z=-1+\varepsilon f(x')}=0,$$

$$\left(\frac{\partial U_\varepsilon(x)}{\partial\upsilon_\varepsilon}-\Re^{-1}\frac{\partial u(x)}{\partial\upsilon_\varepsilon}\right)\Bigg|_{z=-1+\varepsilon f(x')}=0$$

(1.2)

$$(\Delta+k^2n_1^{\,2})u(x)=0, z<-1+\varepsilon f(x'),$$

(1.3)

$$U_\varepsilon(x)\to 0,\ u(x)\to 0,\qquad \left|x-x_j^0\right|\to\infty,\qquad j\in\overline{1,m},\quad \mathrm{Im}\,\omega>0,$$

(1.4)

где $n^2(x)$ - квадрат показателя преломления водного слоя, $n_1^{\,2}$ - квадрат показателя преломления жидкого дна, $z=\varepsilon g(x')$, $x'=(x_1,x_2)$ - уравнение водной поверхности (верхняя граница), $g(x')\geq 0$ - некоторая гладкая функция, заданная на $\overline{\Omega}_0$, $z=-1+\varepsilon f(x')$ - уравнение жидкого дна (нижняя граница), k - безразмерное волновое число, причём в качестве размерного физического параметра взята глубина волновода H, $x_j^0=(0,0,z_j)$, $j\in\overline{1,m}$, $m\in N$ - точки, расположения источников, $f(x')\geq 0$ - гладкая функция, отличная от нуля только на некотором ограниченном множестве Ω

$$\Omega=\bigcup_{j=1}^{l}\Lambda_j$$

$$l>1\qquad \bigcap_{j=1}^{l}\Lambda_j=\varnothing,\ l\in N,$$

где l - число неровностей дна, υ_ε - единичная нормаль к нижней границе, которая вычисляется по формуле:

$$\upsilon_\varepsilon(x', \ -1+\varepsilon f(x')) = \left(1+\varepsilon^2 \left|\nabla' f(x')\right|^2\right)^{-1/2} \left(-\varepsilon\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ -\varepsilon\frac{\partial f}{\partial x_2}, \ 1\right) =$$

(1.5)

$$= (0,0,1) - \varepsilon\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ 0\right) + \underline{\underline{O}}(\varepsilon^2)$$

$\Re^{-1} = \rho_1 / \rho_2$ – отношение плотности водного слоя к плотности жидкого дна.

Ясно, что сопряженная задача (1.1) - (1.4) аналитически точно не решается.

2. Из многочисленных экспериментальных данных следует, что в реальных ситуациях квадрат показателя преломления водного слоя очень близок к единице [6]. Отклонение является порядка 10^{-2},

Учитывая это, нами ранее был введён малый параметр [13]

$$n^2(x) = 1 + \varepsilon\eta(x),$$

$$\eta(x) \in C(\Omega_1), \qquad \max_{x\in\Omega_1} \operatorname{mod} \eta(x) \le \underline{\underline{O}}(1), \ \ \varepsilon = \underline{\underline{O}}(10^{-2})\cdot$$

Мы предполагаем, что отношение вертикального размера неровности дна и взволнованной поверхности к глубине волновода мало и является порядка малого параметра ε, что учтено в уравнении жидкого дна

$$z = -1 + \varepsilon f(x')$$

и взволнованной поверхности

$$z = \varepsilon g(x')$$

В реальных ситуациях плотность водного слоя намного меньше плотности дна. Например, для математической модели твердого дна это отношение

$$\Re^{-1} = \rho_1 / \rho_2$$

считается равным нулю.

Здесь мы рассмотрим вполне реальную математическую модель жидкого дна, когда

$$\Re^{-1} = \rho_1 / \rho_2 = \alpha\varepsilon, \alpha = \underline{\underline{O}}(1),$$

что позволяет, хотя бы в первом приближении, учитывать рассеяние звука в дне.

Для решения сопряженной задачи (1.1) - (1.4) используем асимптотический метод малого параметра [13].

При этом малый параметр ε входит в уравнение (1.1) и в граничные условия (1.2) регулярным образом, поэтому решение задачи (1.1), (1.2) можно искать в виде регулярного асимптотического разложения по малому параметру

$$U_\varepsilon(x)=\sum_{j\ge 0}U_j(x)\varepsilon^j$$

(2.1)

где коэффициенты ряда $U_j(x), j\ge 0$ ищутся как решения некоторых краевых сопряженных задач для неоднородного уравнения Гельмгольца в невозмущённом волноводе.

Коэффициенты разложения (2.1) вычисляются рекурентным образом. Практически достаточно вычислить нулевое $U_0(x)$ и первое $U_1(x)$ приближения.

Таким образом, для главного члена асимптотики (2.1) $U_0(x)$ получим следующую сопряженную задачу

$$(\Delta+k^2)U_0(x)=-\sum_{j=1}^{m}\delta(x-x_j^0), \qquad -1<z<0$$

(2.2)

$$U_0(x)\big|_{z=0}=0, \qquad U_0(x)\big|_{z=-1}=u(x)\big|_{z=-1}$$

$$\frac{\partial \mathrm{U}_0(\mathrm{x})}{\partial \mathrm{z}}\bigg|_{\mathrm{z}=-1}=0,$$

$$(\Delta+k^2n_1^{\,2})u(x)=0, z<-1$$

(2.3)

Решение (2.2) имеет вид:

$$U_0(x)=U_0(\mathrm{r},\mathrm{z})=\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}\sin(\beta_n z_j)\cdot\sin(\beta_n z)H_0^{(1)}(k\lambda_n r)$$

(2.4)

$$r=|x'|=\sqrt{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}}, \qquad \beta_n=(0{,}5+n)\pi, \qquad n\in Z_0^+=N\cup\{0\},$$

$$\lambda_n=\left(1-\beta_n^2/k^2\right)^{1/2}.$$

Тогда учитывая условие сопряжения

$$U_0(x)\big|_{z=-1}=u(x)\big|_{z=-1}$$

из (2.4) легко получить решение уравнения (2.3)

$$u(x)=\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{n+1}\sin(\beta_n z_j)e^{k\sqrt{\lambda_n^{\,2}-n_1^{\,2}}\,(z+1)}H_0^{(1)}(k\lambda_n r)$$

(2.5)

Условие излучения (1.4), соответствующее затуханию звуковой волны на бесконечности $(r\to\infty)$ приводит к ограничению на λ_n, так как ветвь квадратного корня в (2.4) выбирается из условия

$$\operatorname{Im}\lambda_n\ge 0$$

В случае распространяющихся мод λ_n вещественны и положительны, поэтому для затухания на бесконечности ($z\to-\infty$) решения в дне необходимо выполнение условия

$$\lambda_n^{\ 2} > n_1^{\ 2}$$

3. Для первого приближения $U_1(x)$ получим следующую краевую задачу

$$\left(\Delta + k^2\right)U_1(x) = -k^2\eta(x)U_0(x), \quad -1 < z < 0$$

(3.1)

$$U_1(x)\Big|_{z=0} \equiv \varphi(x'), \qquad \frac{\partial U_1(x)}{\partial z}\Bigg|_{z=-1} = \psi(x') + \mu(r),$$

$$\varphi(x') \equiv -\frac{\partial U_0(x)}{\partial z}\Bigg|_{z=0} g(x'),$$

$$\psi(x') \equiv \left(\nabla' U_0(x)\cdot\nabla' f(x') - \frac{\partial^2 U_0(x)}{\partial z^2} f(x')\right)\Bigg|_{z=-1}$$

$$\nabla' \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right).$$

$$\mu(r) \equiv \alpha \frac{\partial u(x)}{\partial z}\Bigg|_{z=-1} = \frac{\alpha k i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{n+1}\sqrt{\lambda_n^{\ 2} - n_1^{\ 2}}\,\sin\left(\beta_n z_j\right)H_0^{(1)}\left(k\lambda_n r\right)$$

Введём преобразование аннулирующее граничные условия

$$W(x) = U_1(x) - z(\psi(x') + \mu(r)) - \varphi(x')$$

(3.2)

Тогда для функции $W(x)$ получим следующую краевую задачу

$$\left(\Delta + k^2\right)W(x) = -\left(\Delta_2 + k^2\right)[z(\psi(x') + \mu(r)) + \varphi(x')] - k^2\eta(x)U_0(x)$$

(3.3)

$$W(x)\Big|_{z=0} = 0, \qquad \frac{\partial W(x)}{\partial z}\Bigg|_{z=-1} = 0,$$

Интегральная форма решения задачи (3.3) имеет вид

$$W(x) = \sum_{j\ge 0} W_j(x')\sin\left(\beta_j\ z\right),$$

(3.4)

$$W_j\ (x') = -\frac{i}{4}\int_{\Omega_0} H_0^{(1)}\left(k\lambda_j\ |x' - y'|\right)h_j\ (y')dy'$$

$$h_j(x') = 2\int_{-1}^{0} h(x)\sin\left(\beta_j z\right)dz$$

$$h(x) \equiv -\left(\Delta_2 + k^2\right)[z(\psi(x') + \mu(r)) + \varphi(x')] - k^2\eta(x)U_0(x),$$

где $H_0^{(1)}$ - функции Ханкеля первого рода нулевого порядка.

После некоторых преобразований в (3.4) получим (будем интересоваться только распространяющимися модами)

$$W(x)=\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{M}\sin(\beta_s z)\left\{(-1)^s\frac{\alpha k i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\lambda_n^{\,2}-n_1^{\,2}}(-1)^{n+1}\sin(\beta_n z_j)\int_{\Omega_0}H_0^{(1)}(r_n)H_0^{(1)}(\rho_s)dy'+\right.$$

$$+\frac{ik^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sin(\beta_n z_j)\int_{\Omega_0}I_{sn}(y')H_0^{(1)}(r_n)H_0^{(1)}(\rho_s)dy'+\frac{ik^2}{2}(-1)^s\int_{\Omega}f(y')G_{sj}(x',y')dy')+$$

$$\left.+2(-1)^s\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin(\beta_n z_j)f(0)H_0^{(1)}(k\lambda_s r)+\sum_{n=0}^{\infty}\sin(\beta_n z_j)\int_{\Omega_0}H_0^{(1)}(\rho_s)(\Delta_2+k^2)H_0^{(1)}(r_n)g(y')dy'\right\}-$$

$$-2\sum_{s=0}^{M}\frac{(-1)^s}{\beta_s^{\,2}}\sin(\beta_s z)(\psi(x')+\mu(r)),$$

$$I_{sn}(y')=\int_{-1}^{0}\eta(y)\sin(\beta_n z)\sin(\beta_s z)dz,$$

$$G_{sj}(x',y')=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin(\beta_n z_j)\left[H_0^{(1)}(\rho_s)H_0^{(1)}(r_n)+\lambda_n\lambda_s H_1^{(1)}(\rho_s)H_1^{(1)}(r_n)\cos\theta\right]$$

$$\rho_s\equiv k\lambda_s\left|x'-y'\right|,r_n\equiv k\lambda_n\left|y'\right|,M=\left[\frac{k}{\pi}-\frac{1}{2}\right](\text{ целая часть}),$$

где θ -угол между векторами y' и $(x'-y')$, а $H_1^{(1)}$ - функции Ханкеля первого рода первого порядка.

3. Требование равномерности регулярного асимптотического разложения (2.1)

$$U_{j-1}(x)>>\varepsilon U_j(x),\qquad j\in N$$

приводит к условию

$$\varepsilon k<<1,$$

что соответствует малым частотам (низкочастотное или длинноволновое приближение).

Если ограничимся только двумя членами в разложении (2.1), тогда область применения решения характеризуется радиусом

$$\mathrm{r}\lessapprox\underline{\underline{O}}\left(\varepsilon^{-1}\right)$$

Суммируя (3.5), (3.3), с учетом (2.4), (3.1) получим модовое представление для возмущения звукового поля, создаваемого гармоническими точечными источниками.

Рассматривая распространение моды с фиксированным номером s, видим, что возмущение акустического поля $U_1(x)$ имеет вид континуальной суммы расходящихся вторичных волн, "источниками" которых являются трехмерная неоднородность среды $(\eta(x\ )\neq 0)$ и неровности границ $(f(x')\neq 0,g(x')\neq 0)$.

При этом амплитуды волн пропорциональны ε и зависят от параметров всех мод (нормальная волна).

3. Заключение

С этой точки зрения процесс рассеяния можно представить себе как переход энергии звуковой волны от моды данного номера (падающая волна) к модам других номеров (рассеянные волны). Таким образом, неоднородность среды и неровности границ осуществляют связь между модами разных номеров, которые были бы вполне независимыми в волноводе, не содержащем никаких неоднородностей.

Список литературы

1. Вайнберг. Б.Р. Асимптотические методы в уравнениях математической физики. Москва, МГУ, 1982.

2. Рабинович В.С., Шамайло О.Н. Разрешимость уравнения Гельмгольца в неоднородном слое. ВИНИТИ, 198.

3. Чилачава Т.И. О решении сопряженной задачи для уравнения Гельмгольца в пространственно-неоднородной среде. Докл. расшир. засед. Семинара ИПМ им. И.Н. Векуа, т.4, № 1, Тбилиси, 1989.

4. Чилачава Т.И. О разрешимости уравнения Гельмгольца в пространственно-неоднородном слое с жидким дном. ТГУ, Сб.тр. №1, 1998.

5. Буров В.А., Румянцева О.Д. Единственность и устойчивость решения обратной задачи акустического рассеяния. Акустический журнал. т.49, № 5, 2003.

6. Келлер Дж.Б., Пападакис Дж. С. Распространение волн и подводная акустика. Москва, Мир, 1980.

7. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. Москва, Наука, 1973.

8. Булдырев В.С., Буслаев В.С. Качественная структура акустического поля в океане. Москва, Препринт ИРЭ АН СССР, № 44, 1984.

9. Булдырев В.С., Буслаев В.С. Распространение звука в океане. Москва, Препринт ИРЭ АН СССР, , № 45, 1984.

10. Барридж Р., Вейнберг Г. Горизонтальные лучи и вертикальные моды. В кн. Распространение волн и подводная акустика. Москва, Мир, 1980.

11. Келлер Дж. Б. Теория распространения волн и подводная акустика. В кн. Распространение волн и подводная акустика. Москва, Мир, 1980.

12. Тапперт Ф.Д. Метод параболического уравнения. В кн. Распространение волн и подводная акустика. Москва, Мир, 1980.

13. Чилачава Т.И. Рассеяние звука в трёхмерно-неоднородном волноводе с неровным жидким дном. Академия Наук СССР, Акустический жур. т.32, в.5. 1986.

ON THE ONE MATHEMATICAL MODEL OF THE SOUND WAVE PROPAGATION THEORY

Teimuraz Chilachava
Sukhumi State University

Summary

The questions have been connected with the existence and singularity of the solution of boundary value problem for Helmholtz equation with variable coefficients are represented with the significant interest in the theory of differential equations with partial derivatives. In this previous articles a sound field created by point-like harmonic sources in a three-dimensional nonhomogeneous wave conductor with a ruffled surface and an uneven bottom was found by an asymptotic method of a small parameter. It is confirmed that the sound field pertubation is represented by the continual sum of diverge secondary waves, the source of which is the nonhomogeneously of medium and the rouhgness of boundarys. Besides the wave amplitudes are proportional to the small parameter and are depended on the parameters of all modes (normal wave).

ბგერითი ტალღების გავრცელების თეორიის ერთი მათემატიკური მოდელის შესახებ

თეიმურაზ ჩილაჩავა
სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

რეზიუმე

ცვალებადკოეფიციენტებიანი ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის არსებობისა და ერთადერთობის საკითხები დიდ ინტერესს იწვევს კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში. მოცემულ ნაშრომში მცირე პარამეტრის ასიმპტოტური მეთოდით ნაპოვნია ჰარმონიული წერტილოვანი წყაროების მიერ წარმოქმნილი ბგერითი ველი სამგანზომილებიან არაერთგვაროვან ტალღსატარში აღელვებული ზედაპირით და უსწორო თხევადი ფსკერით. დამტკიცებულია, რომ ბგერითი ველის შეშფოთებას აქვს განშლადი მეორადი ტალღების კონტინუალური ჯამის სახე, რომელთა ,,წყაროებია", გარემოს არაერთგვაროვნება და საზღვრების უსწორობა, ამასთან ამ ტალღების ამპლიტუდები მცირე პარამეტრის პროპორციულია და დამოკიდებულია ყველა მოდის (ნორმალური ტალღის) პარამეტრებზე.