

## მივარეზე რბილად დაჯდომის ოპტიმალური მართვის ამოცანა

ია მოსაშვილი, ნინო მჭედლიშვილი  
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

### რეზიუმე

განხილულია საწვავის ოპტიმიზაციის ამოცანა კოსმოსური ხომალდის მთვარეზე დაჯდომის მაგალითზე. გამოყენებულია პონტრიაგინის მაქსიმუმის პრინციპის მეთოდი. შედგენილია სისტემის მათემატიკური მოდელი, განსაზღვრულია დაჯდომის სასაზღვრო პირობები, მიღებულია რაკეტის ოპტიმალური მართვა საწვავის მინიმალური ხარჯვის პირობებში. მთვარეზე რბილად დაჯდომის ოპტიმალური სისტემის კომპიუტერული პროექტირება რეალიზებულია Matlab სისტემის საშუალებით.

**გასაღებური სიტყვები:** მათემატიკური მოდელი. ოპტიმიზაციის მეთოდი. პონტრიაგინის მაქსიმუმის პრინციპი. კოსმოსური ხომალდი. მთვარეზე დაჯდომა.

### 1. შესავალი

როგორც ცნობილია, 1კგ. მასის მქონე სხეულის ორბიტაზე გაყვანა მოითხოვს 30-50 კგ საწვავს, ამიტომ აუცილებელია კოსმოსში ისეთი მანევრის განხორციელება, რომლის დროსაც გამოიყენება მინიმალური რაოდენობის საწვავი. ასეთ შემთხვევაში, ტექნიკურად აუცილებელი და ეკონომიკურად გამართლებულია საწვავის ოპტიმიზაციის ამოცანის ამოხსნა.

არსებობს უწყვეტი, დეტერმინირებული ოპტიმალური მართვის ამოცანების სხვადასხვაგვარი მათემატიკური დასმა. მაგალითისთვის, განვიხილოთ ისეთი ამოცანა, როგორცაა მთვარეზე დაჯდომა, რომლისთვისაც ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობა ჩაიწერება პონტრიაგინის მაქსიმუმის პრინციპის სახით. მთვარის ავტომატური სადგურის ან ხომალდის მთვარესთან მიახლოებამ შეიძლება მოგვცეს სასარგებლო მეცნიერული ინფორმაცია.

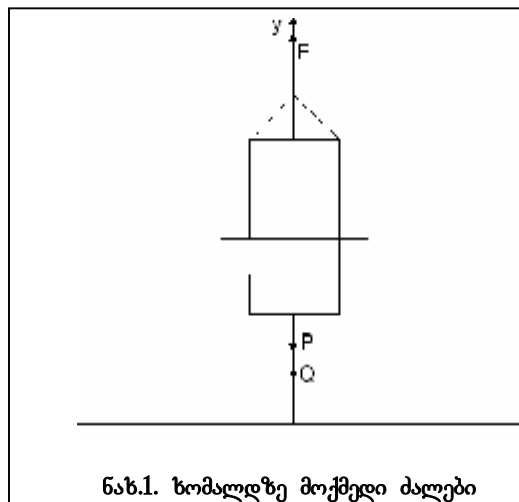
### 2. ძირითადი ნაწილი

განვიხილოთ კოსმოსური ხომალდის მთვარეზე დაჯდომის ბოლო ეტაპი. ჩავთვალოთ, რომ:

ა) მთვარესთან მიახლოების ტრაექტორია წარმოადგენს წრფეს, მიმართულს დაჯდომის წერტილისაკენ მთვარის ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ;

ბ) ხომალდზე მოქმედებს  $P = m(t) \cdot g$  სიმძიმის ძალა და  $F = \mu u(t)$  წვეის ძალა;

გ) უგულებელყოფილია აეროდინამიკური ძალები (რადგან მთვარეს არა აქვს ატმოსფერო);



ნახ.1. ხომალდზე მოქმედი ძალები

- დ) მთვარე უძრავია და მთვარესთან კონტაქტის წერტილის არეში ზედაპირი ბრტყელია;  
 ე)  $g$  და  $\mu$  მუდმივებია, საწვავის ხარჯი  $u(t)$  ზემოდან შემოსაზღვრულია  $u_0$  მნიშვნელობით, ძრავა უინერცია (დაშვება).

ამ დაშვებების მიხედვით შევადგინოთ სისტემის მათემატიკური მოდელი [1], რომელიც კომის ნორმალური ფორმით შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = \mu \frac{u}{z_3} - g \\ \dot{z}_3 = -u \quad 0 \leq u \leq u_0 \end{cases} \quad (1)$$

დაჯდომის სასაზღვრო პირობები იქნება:

$$\begin{aligned} (i) \quad & t_i = 0, \quad z_1(0) = h_0, \quad z_2(0) = v_0, \quad z_3(0) = m_0 \\ (f) \quad & t_f = T; \quad z_1(T) = 0, \quad z_2(T) = 0, \quad z_3(T) = m_T \end{aligned} \quad (2)$$

ამასთან  $T$  არ ფიქსირდება.

განვსაზღვროთ რაკეტის ოპტიმალური მართვა საწვავის მინიმალური ხარჯვის პირობებში:

$$G = \int_0^T u(t) dt \rightarrow \min \quad (3)$$

ამ შემთხვევაში, ადგილი აქვს მაიერის ამოცანას: დასაშვებ მრუდებს შორის საჭიროა ვიპოვოთ ის, რომელიც (3) ფუნქციონალს მინიმუმს მინიმუმს. ფაქტობრივ ეს ნიშნავს საწვავის მინიმალური დანახარჯით, მთვარეზე რბილი დაჯდომის პროგრამის განსაზღვრას.

ავაგოთ პონტრიაგინის ფუნქცია: [2]

$$\begin{aligned} H &= \psi_1 z_2 + \psi_2 \left( \mu \frac{u}{z_3} - g \right) - \psi_3 u \Rightarrow \\ \Rightarrow H &= \psi_1 z_2 - \psi_2 g + \left( \psi_2 \frac{\mu}{z_3} - \psi_3 \right) u \end{aligned}$$

თუ, აღვნიშნავთ  $k_u = \psi_2 \frac{\mu}{z_3} - \psi_3$ , მივიღებთ

$$H = \psi_1 z_2 - \psi_2 g + k_u u \quad (4)$$

დამხმარე ცვლადები  $\psi_i$  განისაზღვრება სისტემიდან:

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z_1} = 0 \\ \frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z_2} = -\psi_1 \\ \frac{d\psi_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z_3} = \mu \frac{u}{z_3^2} \psi_2 \end{cases} \quad (5)$$

როგორც (4) გამოსახულებიდან ჩანს, პონტრიაგინის  $H$  ფუნქცია,  $u$  – ოპტიმალური მართვის წრფივი ფუნქციაა და შესაბამისად მაქსიმალურ მნიშვნელობას აღწევს მხოლოდ განსაზღვრის არის საზღვარზე. გამოდის, რომ საწვავის ხარჯვის ოპტიმალურ მართვას აქვს ადგილი მხოლოდ მაშინ, როცა:

a)  $u = u_0$ , როცა  $k_u > 0$

b)  $u = 0$ , როცა  $k_u < 0$

c)  $u$  ნებისმიერია ინტერვალში  $0 \leq u \leq u_0$ , როცა  $k_u = 0$ .

$k_u$ -თი აღნიშნულია გადართვის (4) ფუნქცია.

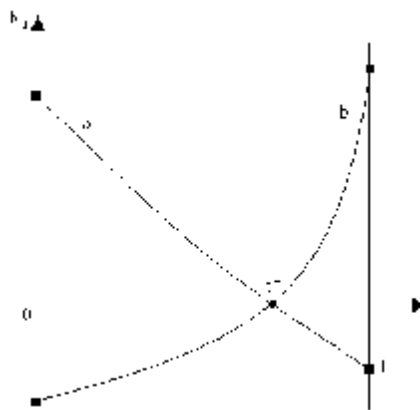
$$k_u = \psi_2 \frac{\mu}{z_3} - \psi_3.$$

გავარკვიოთ, როგორია ამ ფუნქციის ქცევა. განვიხილოთ მისი წარმოებული:

$$\begin{aligned} \dot{k}_u &= \frac{\psi_2 \mu z_3 - \psi_2 \mu \dot{z}_3}{z_3^2} - \dot{\psi}_3 = \psi_2 \frac{\mu}{z_3} - \psi_2 \frac{\mu(-u)}{z_3^2} - \psi_2 \frac{\mu u}{z_3^2} = \psi_2 \frac{\mu}{z_3} \Rightarrow \\ \dot{k}_u &= -\psi_1 \frac{\mu}{z_3} \end{aligned} \tag{6}$$

$\dot{k}_u$  არასდროს არ ხდება ნულის ტოლი, რადგან  $\psi_1 = const$ . მაშასადამე,  $k_u$  გადართვის ფუნქცია იცვლება მონოტონურად, არსად არ გააჩნია არც მაქსიმუმი, არც მინიმუმი.

დავუშვათ, რომ  $k_u$  არსად არ იცვლის ნიშანს. იმ შემთხვევაში, როცა  $k_u < 0$  - შეუძლებელია რბილი დაჯდომა, ხოლო როცა  $k_u > 0$  - დაჯდომა შეიძლება საწვავის მაქსიმალური ხარჯვით. ბოლო რეჟიმი არაა ოპტიმალური. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა  $k_u$  ფუნქცია გადაკვეთს  $t$  ღერძს, ანუ იცვლის ნიშანს.



ნახ. 2.

(a) შემთხვევაში, რბილი დავდომა გარანტირებული არ არის, ხოლო (b) შემთხვევაში საწვავის ხარჯი მაქსიმალურია მხოლოდ  $[t^*, T]$  შუალედში. მართვის ეს პროგრამა ოპტიმალურია.

შეკადინოთ ტრანსვერსალობის პირობა:

$$\begin{aligned} [\delta G - H\delta t + \psi\delta z]_0^T &= 0. \\ [(\psi_3 + 1)\delta z_3 - H\delta t + \psi_1\delta z_1 + \psi_2\delta z_2]_0^T &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

(2) სასაზღვრო პირობების შესაბამისად:

$$[(\psi_3 + 1)\delta z_3 - H\delta t]^T = 0 \quad (8)$$

იმისათვის, რომ (8) გამოსახულება სრულდებოდეს ნებისმიერი  $\delta z_3$  და  $\delta t$ -სთვის, უნდა სრულდებოდეს შემდეგი პირობა:

$$\psi_3(T) = -1; H(\psi_T, z_T, u(T)) = 0 \quad (9)$$

როგორც წესი, ძრავის მუშაობის რეჟიმი ასეთია: თუ ის ჩართულია, მაშინ წევა მუდმივია და ტოლია  $u_0$ -ის. თუ გამორთულია, წევა ნულის ტოლია. ამიტომ,  $H$  ფუნქციას აქვს მაქსიმალური მნიშვნელობა, როცა  $\psi_1 < 0$  და  $k_u > 0$ . მივიღებთ, რომ:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \xi_0 \\ u_0, & \xi_0 \leq t < T \end{cases} \quad (10)$$

სადაც  $\xi_0$  - არის ძრავის ჩართვის მომენტი,  $T$  - დავდომის მომენტი.

რბილი დავდომის ოპტიმალური მართვის ამოცანა დაიყვანება ძრავის  $\xi_0$  ჩართვის მომენტისა და  $T$  დავდომის მომენტის განსაზღვრის ამოცანაზე.

მათი განსაზღვრისათვის საჭიროა (1), (5) ტოლობების ინტეგრება (2), (9) სასაზღვრო პირობებით.

თუ  $0 \leq t \leq \xi_0$ , ანუ ძრავის ჩართვამდე, ხომალდის მოძრაობა წარმოადგენს უბრალო  $u = 0$  ვარდნას შემდეგი კანონით:

$$\begin{cases} z_1 = z_{10} + z_{20}t - \frac{gt^2}{2} \\ z_2 = z_{20} - gt \\ z_3 = z_{30} \end{cases} \quad (11)$$

განტოლება (11) ფაზურ  $z_1, z_2$  სიბრტყეში წარმოადგენს პარაბოლას.

$$z_1 = z_{10} + \frac{z_{20}}{g}(z_{20} - z_2) - \frac{1}{2g}(z_{20} - z_2)^2 \quad (12)$$

ამ პარაბოლის ღერძი ემთხვევა  $z_1$  ღერძს, ხოლო წვერო მდებარეობს  $z_1 = z_{10} + \frac{z_{20}^2}{g}$

წერტილში.  $\xi_0$  მომენტში ძრავი ირთვება მთელი სიმძლავრით.

ჩავატაროთ (1) განტოლების ინტეგრება მეორე  $[\xi^*, T]$  შუალედში, ამასთან  $z_1^*, z_2^*, z_3^*$  კოორდინატები, განსაზღვრული (11) სისტემიდან  $t = \xi^*$ -სთვის, მიეკუთვნება საწყის პირობებს.

$$\begin{cases} z_1 = z_1^* + z_2^*(t - \xi_0) - \frac{g(t - \xi_0)^2}{2} + \mu(r - \xi_0) + \mu \frac{z_3^*}{u_0} \left( 1 - \frac{u_0(t - \xi_0)}{z_3^*} \right) \\ z_2 = z_2^* - g(t - \xi_0) - \mu \ln \left( 1 - \frac{u_0(t - \xi_0)}{z_3^*} \right) \\ z_3 = z_3^* - u_0(t - \xi_0) \end{cases} \quad (13)$$

აღნიშნოთ  $\tau \in [0, T - \xi_0]$  ინტეგრების დრო მეორე მონაკვეთზე. სასაზღვრო პირობების  $z_1(T) = 0, z_2(T) = 0$  გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ ტრანსცენდენტურ განტოლებებს:

$$\begin{cases} z_1^* + z_2^*\tau - \frac{g\tau^2}{2} + \mu\tau + \mu \frac{z_3^*}{u_0} \left( 1 - \frac{u_0\tau}{z_3^*} \right) \ln \left( 1 - \frac{u_0\tau}{z_3^*} \right) = 0 \\ z_2^* - g\tau - c \ln \left( 1 - \frac{u_0}{z_3^*} \right) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

სადაც,

$$\begin{aligned} z_1^* &= z_1(\xi_0) = h_0 + v_0\xi_0 - g \frac{\xi_0^2}{2}; \\ z_2^* &= v_0 - g\xi_0; \\ z_3^* &= m_0. \end{aligned} \quad (15)$$

მაშასადამე, რბილი დაჯდომის განსახორციელებლად, აუცილებელია საფრენ აპარატს ჰქონდეს საზომი მოწყობილობა, რომელიც იძლევა ინფორმაციას სიმაღლის, სიჩქარის და მასის შესახებ. გამომთვლელი მოწყობილობა  $g, \mu$  და  $u_0$  მოცემული პარამეტრების მიხედვით პოულობს ძრავის ჩართვის და დაჯდომის მომენტს, ხსნის რა (14) სისტემას.

ამოხსნათ ამოცანა კომპიუტერზე პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობებისთვის:

$$h_0 = 500 \text{ მ}; v_0 = -5 \text{ მ/წმ}; m_0 = 1000 \text{ კგ}; \mu = 2500 \text{ მ/წმ}; u_0 = 1.$$

(14) არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნისათვის ვიყენებთ Matlab –ის ორ ფუნქციას: fsolve და lsqnonlin.

fsolve ფუნქციას აქვს შემდეგი სინტაქსი:

$$[x, fval]=fsolve(@mysys,x0,options);$$

(14) განტოლებათა სისტემის შესაყვანად საჭიროა შედგეს ფაილ-ფუნქცია:

```
function F=mysys(x)
global h0 nu0 g m0 u0 mu
F(1)=h0+nu0*x(1)-g*x(1)^2/2+(nu0-g*x(1))*x(2)-g*x(2)^2/2+mu*x(2)+...
mu*m0/u0*(1-u0*x(2)/m0)*log(1-u0*x(2)/m0);
F(2)=nu0-g*x(1)-g*x(2)-mu*log(1-u0*x(2)/m0);
end
```

შემდეგ Matlab-ში ვაღებთ პროგრამას, საიდანაც შეგვყავს პარამეტრების მნიშვნელობები და

(14) განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ბრძანება:

```
h0=500;nu0=-5;g=1.62;m0=1000;u0=1;mu=2500;
x=fsolve(@mysys,[1,1],optimset('fsolve'))
```

შედეგად ვღებულობთ:

```
x = 11.8892 26.5495
```

დასმულ ამოცანას ვწყვეტთ მეორე გზით lsqnonlin ბრძანების გამოყენებით, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: დავუშვათ მოცემულია არაწრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} f_1(x) = a_1 \\ f_2(x) = a_2 \end{cases} \quad (16)$$

ჩაეწეროთ დამხმარე ფუნქცია შემდეგი სახით:

$$F(x) = (f_1(x) - a_1)^2 + (f_2(x) - a_2)^2. \quad (17)$$

(16) სისტემის ამოხსნა (17) ფუნქციის მინიმუმის პოვნის ანალოგიურია. (17) ფუნქციის მინიმუზაციისათვის გამოიყენება ბრძანება lsqnonlin.

lsqnonlin ფუნქციას გააჩნია შემდეგი სინტაქსი:

```
x = lsqnonlin(fun,x0,lb,ub,options)
```

ამ შემთხვევაში აუცილებელია ასევე შედგეს ფაილ-ფუნქცია:

```
function F=mysys(x)
global h0 nu0 g m0 u0 mu
F=[(h0+nu0*x(1)-g*x(1)^2/2+(nu0-g*x(1))*x(2)-g*x(2)^2/2+mu*x(2)+...
mu*m0/u0*(1-u0*x(2)/m0)*log(1-u0*x(2)/m0));
(nu0-g*x(1)-g*x(2)-mu*log(1-u0*x(2)/m0))];
```

ვხსნით ამოცანას პარამეტრების იმავე მნიშვნელობებისათვის:

```
h0=500;nu0=-5;g=1.62;m0=1000;u0=1;mu=2500;
```

```
x = lsqnonlin(@mysys,[1,1],[0,0]),
```

ვღებულობთ იგივე შედეგებს, რომლებიც მივიღეთ fsolve ფუნქციის საშუალებით ამოხსნისას:

```
x = 11.8892 26.5495
```

აქედან გამომდინარე ვღებულობთ, რომ დამამუხრუჭებელი ძრავის ჩართვის მომენტი 11.8892

წამის ტოლია, ხოლო რბილი დაჯდომის დრო - 26.5495 წამის.

ლიტერატურა

1. Летов А. М., Математическая теория процессов управления. – М.: Наука, 1981.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. –М.: Наука, 1969.
3. Соколов Ю.Н. Компьютерный анализ и проектирование систем управления. – Учеб. пособие. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2006.
4. Hawkins A. M. Constrained Trajectory Optimization of a Soft Lunar Landing from a Parking Orbit. -B.S., “Georgia Institute of Technology” ,2005.

**ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МЯГКОЙ ПОСАДКИ НА ЛУНУ**

Мосашвили И., Мchedlishvili Н.  
Грузинский Технический университет

**Резюме**

Рассмотрена задача оптимизации расхода топлива на примере посадки космического аппарата на луну. Применен принцип максимума Понтрягина. Составлена математическая модель системы, определены граничные условия посадки, получено оптимальное управление при условии минимизации расхода топлива. Компьютерное проектирование оптимальной системы мягкой посадки корабля на луну реализовано с использованием системы Matlab.

**THE TASK OF OPTIMAL CONTROL FOR THE SOFT LANDING  
TO THE MOON**

Mosashvili Ia, Mchedlishvili Nino  
Georgian Technical University

**Summary**

A fuel optimization task in work for a soft landing on the Moon, has been completed. The control is determined with Pontryagin's minimum principle. The mathematical model of system included Maximum Principle with transversality conditions and the boundary conditions to find the optimal solution. Computer designing of optimal system for the soft landing on the moon is realized with use of system Matlab. A detailed investigation of the constrained trajectory optimization of the Moon landing problem has been presented. The resulting trajectories were analyzed based on state and control histories, effect on fuel and usages, operational feasibility, etc..

First, analysis was performed considering only two-dimensional translational motion. The baseline trajectory, which represented a minimally constrained landing trajectory, was found to be operationally infeasible. Operational constraints were imposed to obtain a more viable solution. A parametric study was performed varying the perilune height of the descent orbit and an impulse-like burn was observed in cases that targeted a positive descent orbit perilune height. The final vehicle attitude and landing approach of the vehicle were found to be very shallow (horizontal), which motivated the inclusion of rotational kinematics in the equations of motion in order to constrain the attitude characteristics of the vehicle. Attitude kinematics were included in the equations of motion and a constant scaling of the angular acceleration command appended to the cost function in order to minimize the rotational motion of the vehicle during the flight. The vehicle was constrained to land at a near vertical attitude (within 0.5 deg) with zero angular rate. Fuel penalty metrics were obtained for both the terminal attitude and attitude rate constraints, as well as further constraining the throttle to maximum thrust. It was found that the fuel usage increased by further limiting the throttle bound to maximum thrust. During the final portion of the trajectory, the final throttle profile was observed to decrease to a specified lower bound as the vehicle rotated to a vertical orientation, which suggested the optimum was a minimal, or possibly zero, engine thrust during this interval. To investigate this, and to provide for navigational error margin, a terminal vertical descent phase was included in the trajectory.