რთული მასობრივი მომსახურების სისტემის ანალიზის ერთი განზოგადებული მეთოდის შესახებ

ზაალ მიქაძე, ირაკლი შურღაია, ილია ზაალის ძე მიქაძე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

მოცემულია რთული მასიობრივი მომსახურების სისტემის ანალიზი მათემატიკური მოდელირების ერთ-ერთი მეთოდის, კერძოდ მიქაძე-კაკუბავას მეთოდის გამოყენებით.

გასაღებური სიტყვები: რთული სისტემა. მასობრივი მომსახურება. მათემატიკური მოდელირება. ანალიზის მეთოდი.

1. შესავალი

რთული მასობრივი მომსახურების სისტემის (მმს) ანალიზური მოდელირების ზოგად ტენდენციას წარმოადგენს ისეთი შემთხვევითი პროცესის აგება (მოძებნა, პოვნა), რომელიც აღწერს მომსახურების პროცესს და შესაძლებელია მისი შესწავლა მარკოვული პროცესის გამოყენებით.

ამ მიზნით პრაქტიკაში უპირატესად გამოიყენება ორი მეთოდი. პირველი მეთოდი, რომლის არსი მდგომარეობს შემდეგში: აღვნიშნოთ $V(t)$ – თი რომელიღაც შემთხვევითი პროცესი, რომლის რეალიზაციის მიხედვით შესაძლებელია თვალყური ვადევნოთ სისტემაში მიმდინარე ცვლილებებს: განაცხადის შემოსვლის მომენტებს, მათი მომსახურების დამთავრების მომენტებს და ა.შ. ამ პროცესში შეირჩევა დროის ისეთი მომენტები $\{t_n\}(t_n < t_{n+1})$, რომელშიც პროცესის მნიშვნელობები $\{V(t_n)\}$ ქმნის დისკრეტულ მარკოვულ ჯაჭვს; შემდგომ დისკრეტული მარკოვული ჯაჭვისათვის დამახასიათებელი ჩვეულებრივი მეთოდებით მოიძებნება შემთხვევითი სიდიდეების $V(t_n)$ განაწილება. ბოლოს, ამ განაწილების მიხედვით შეგვიძლია გამოვიტანოთ დასკვნები საწყისი პროცესის თვისებებზე; უმრავლეს შემთხვევაში ეს ბოლო ეტაპი არც არის საჭირო, რადგანაც თვით ეს სიდიდეები იძლევა ამომწურავ ინფორმაციას მმს-ის სისტემის ფუნქციონირებაზე.

ამრიგად, მარკოვის ჩალაგებული ჯაჭვი ეს არის პროცესის მნიშვნელობათა მიმდევრობა სპეციალურად შერჩეულ დროის მომენტებში - t_n, რომლებიც ქმნის მარკოვის ჯაჭვს, უნდა აღინიშნოს ის, რომ t_n მომენტები, როგორც წესი, შემთხვევითია და დამოკიდებულია თვით პროცესის ყოფაქცევაზე. მარკოვის ჩალაგებული ჯაჭვი შეიძლება მაშინაც კი განისაზღვროს, როდესაც t_n მომენტები, არ შეიძლება აღიწეროს დისკრეტული მარკოვული ჯაჭვით.

მეორე მეთოდი: კოკსი – ბელიაევის [1,2]. მოცემულია სისტემა, რომელშიც შესაძლებელია ადგილი ჰქონდეს სხვადასხვა ტიპის ოპერაციებს იმის გათვალისწინებით, რომ დროის ნებისმიერ მომენტში შეიძლება წარმოებდეს მხოლოდ ერთი ოპერაცია. სისტემის მდგომარეობა აღიწერება $\xi(t)$ მარკოვული პროცესით, რომლის მდგომარეობათა სიმრავლე შედგება ორი ქვესიმრავლისგან: X_0 და X_1. ორივე სიმრავლე სასრულია და თვლადი თუ $\xi(t) \in X_0$, მაშინ t მომენტში სისტემაში ოპერაცია არ სრულდება. X_1 სიმრავლე კი შედგება შემდეგი სახის ელემენტებისაგან (e, j, z), სადაც e არის ინდექსი იმ ოპერაციისა, რომელიც მოცემულ დროის მომენტში სრულდება, j – რომელიღაც დამატებითი დისკრეტული პარამეტრია, ხოლო z - დრო გასული ოპერაციის დაწყებიდან; e ტიპის ოპერაციის ხანგრძლივობის დროის განაწილების ფუნქციას თუ აღვნიშნავთ $Fe(x)$-ით, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ ოპერაცია დამთავრდება $(t, t+dt)$, დროის ინტერვალში, ტოლია $\left[Fe(Z+dt)-Fe(Z)\right]/Fe(Z)$, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ დროის ინტერვალში $(t, t+dt)$ მოხდება გადასვლა, დამოკიდებულია, მხოლოდ იმაზე, თუ რა მდგომარეობაში იმყოფება პროცესი დროის აღებულ მომენტში. გარდა იმ გადასვლებისა, რომლებიც დაკავშირებულია ოპერაციის შესრულების დამთავრებასთან. შესაძლებელია სპონტანური გადასვლები მუდმივი ინტენსივობით, რომელიც აღიწერება ისეთივე წესით, როგორც ჩვეულებრივ მარკოვულ ჯაჭვებში.

2. ძირითადი ნაწილი

ახლა აღვწეროთ პროფესორების ილია მიქაძისა და რევაზ კაკუბავას მიერ შემოთავაზებული მარკოვული პროცესების კიდევ ერთი ახალი – განზოგადოებული კლასი [3]. ვთქვათ, გვაქვს სისტემა, რომელშიც შეიძლება ადგილი ჰქონდეს სხვადასხვა ტიპის ოპერაციებს (დროის ნებისმიერ მომენტში მხოლოდ ერთს); სისტემის მდგომარეობა აღიწერება შემთხვევითი პროცესით $\xi(t)$, რომლის მდგომარეობათა X სიმრავლე შედგება სამი სასრული და თვლადი ქვესიმრავლისგან; X_0, X_1 და X_2. თუ $\xi(t) \in X_0$, მაშინ დროის t მომენტში სისტემაში ოპერაცია არ სრულდება და $\xi(t)$ შემთხვევითი პროცესის მდგომარეობა აღიწერება მთელ რიცხვთა მიმდევრობით $\overline{j} = (j_1, j_2, \dots j_n) \in X_0$; თუ $\xi(t) \in X_1$, ან $\xi(t) \in X_2$, მაშინ სისტემაში დროის t მომენტში ოპერაციები სრულდება, X_1 და $\overline{X_2}$ სიმრავლეები შედგება ელემენტთა შემდეგი ერთობლიობისაგან (e, $\overline{j}$, k, u) $\in$ X_1, და $\left(m, \overline{v}, u\right) \in X_2$ სადაც e და m ოპერაციათა ტიპის ინდექსებია, რომელიც დაიწყო ν მომენტში $\left(t-u < v < t-u+du\right)$; u არის დრო, გასული ოპერაციის დაწყებიდან; $\overline{j}$ – დისკრეტულ პარამეტრთა ვექტორია, რომლითაც ხასიათდება შემთხვევითი პროცესი $t-u$ მომენტში (e ტიპის ოპერაციის დაწყების მომენტში), რომელსაც

შემდგომში ვუწოდებთ e ტიპის ოპერაციის ნიშნულის ვექტორს; $k \in X_1$ და $\nu \in X_2$, რომელიღაც დისკრეტული პარამეტრებია, რომლითაც ხასიათდება შემთხვევითი პროცესი დროის t მომენტში.

შემდგომში მათ ვუწოდებთ ξ (t) შემთხვევითი პროცესის ნიშნულებს (შპნ) და აღვნიშნავთ შპნ – e და შპნ – m; ოპერაციის დაწყების მომენტში ისინი აღნიშნულია $\tilde{k} \in X_1$ და $\tilde{\nu} \in X_2$.

აღვნიშნავთ, რომ l ტიპის ოპერაცია m – ტიპის ოპერაციისაგან განსხვავებით, შეიძლება მრავალჯერ შეწყდეს და ყოველი შეწყვეტის მომენტიდან გაგრძელდეს სხვა ტიპის ოპერაციით (მაგალითად m) იმავე ოპერაციაზე დაბრუნებით ან არ დაბრუნებით, ხოლო m ტიპის ოპერაცია ასეთი სახის წყვეტას არ განიცდის (დაწყებული m ოპერაცია აუცილებლად უნდა დამთავრდეს).

ξ (t) შემთხვევითი პროცესის უფრო განზოგადოების და სრულყოფილად აღწერის მიზნით შემოტანილია კიდევ ერთი დისკრეტული პარამეტრი - η, რომელიც მთელრიცხვა დამოკიდებულებაშია j და $\tilde{k}$ – თან [$\eta=\eta$ (j, $\tilde{k}$). შემდგომში e ტიპის ოპერაციის საწყის მდგომარეობას ვუწოდებთ ელემენტთა შემდეგ კრებულს $(e, j, \eta) \in X_1$ აღვნიშნოთ $H_{e,j,\eta}(u) = p\{x<u| \xi(t - x) = (e, j_1, 0) \in X_1|\}$ – ალბათობა იმისა, რომ $e \in X_1$ ტიპის ოპერაცია, რომელიც დაიწყო $t-x$ დროის მომენტში მდგომარეობით $(e, j, \tilde{k}, 0)$ და η დატვირთვის მაჩვენებლით და შესრულდება $X(X<u)$ დროში. ხოლო $H_{ej\eta}^{(i)}(u)$, თუ ოპერაციის დამთავრების მომენტში პროცესი აღმოჩნდება i $(i \in X_0$ ან $(i \in X_1)$ მდგომარეობაში $(hej\eta(u) = H^1 ej\eta(u)$; $h_{ej\eta}^{(i)}(u) = \left[H_{ej\eta}^{(i)}(u)\right]'$); $G_m(u)$ ალბათობა იმისა, რომ $m \in X_2$ ტიპის ოპერაცია, რომელიც დაიწყო $t-x$ დროის მომენტში დამთავრდება $x(x<u)$ დროში $(t, t+dt)$ დროის ინტერვალში [$g_m(u)=G_m^{|}(u)$];

$$r_{ej\eta}(\upsilon)=h_{ej\eta}(u)/\bar{H}_{ej\eta}(u);\ r_{ej\eta}^{(j)}(u) = h_{ej\eta}^{(i)} / H_{ej\eta}(u);$$

$$\mu_m(u) = g_m(u) / \bar{G}_m(u);$$

$$\left[H_{ej\eta}(u) = 1 - H_{ej\eta};\ G_m(u) = 1 - G_m(u)\right].$$

ზემოთ მოყვანილ, ჩვენს მიერ კონსტრუირებულ მარკოვულ პროცესს ვუწოდებთ "ჩალაგებულ მარკოვულ პროცესს დამატებითი ცვლადით", მოვიყვანოთ მისი განსაზღვრა (სიმარტივის მიზნით დავუშვათ, რომ X_0 სიმრავლეების დისკრეტულ კომპონენტთა რაოდენობა არ აღემატება ორს).

განსაზღვრება. ξ (t) შემთხვევით პროცესს, რომლის მდგომარეობათა სიმრავლე X შედგება სამი ქვესიმრავლისგან: $(I,k) \in X_0, (e, j, k, u) \in X_1$ და $(m, \nu, u) \in X_2$ ეწოდება ჩალაგებული მარკოვული პროცესი დამატებითი ცვლადით, თუ გადასვლათა ალბათობები მისი ნებისმიერი მდგომარეობიდან: $\xi(t) \in X_0$ ან $\xi(t) \in X_1$ ან $\xi(t) \in X_2$ მდგომარეობებში, რომლებიც მიეკუთვნება ამავე სიმრავლეებს $(t, t+dt)$ დროის ინტერვალში დამოკიდებულია არა მარტო

იმაზე, თუ რა მდგომარეობაში იმყოფება პროცესი დროის t მომენტში, არამედ იმაზეც თუ რა მდგომარეობაში იმყოფებოდა ის ოპერაციის დაწყების მომენტში და აღიწერება შემდეგნაირად. თუ დროის t მომენტში $\xi(t)=(e,j\nu,u) \in X_1$, მაშინ Δt დროში $Z_{ej\eta}^{(i)}(u)\, P_{e\nu\eta}^{(k)} \Delta t + \partial(\Delta t)$ ალბათობით პროცესი გადადის $(i,k) \in X_0$ მდგომარეობაში ან $r^0(u) P_{e\nu\eta}(e^{|},\overline{k})_{\Delta t} + D(\Delta t)$ ალბათობით $e', i, K, \partial) \in X_1$ მდგომარეობაში. (აქ e' ოპერაციათა ისეთი კლასია, როგორიცაა e). თუ $\xi(t) = (m,\nu,u) \in X_2$ მაშინ Δt დროში ალბათობით $\mu_m(u)\, P_{m\nu}^{(k,i)} \Delta t + \partial(\Delta t)$ პროცესი გადავა $(i,k) \in X_0$ მდგომარეობაში ან ალბათობით $\mu_m(u) P_{m\nu}^{(e,j,\bar{k})} \Delta t + \partial(\Delta t)$ $(e,j,k,\partial) \in X_1$ მდგომარეობაში.

ასევე შესაძლებელია სპონტანური გადასვლები, რომლებიც არაა დაკავშირებული ოპერაციის დამთავრებასთან, მაგალითად $(c,d) \in X_0$ მდგომარეობიდან $(c,k) \in X_0$ მდგომარეობაში ალბათობით $\lambda_d(k)\Delta t + \partial(\Delta t)$, ხოლო $(\mathrm{I},\mathrm{d}) \in X_0$ მდგომარეობაში ალბათობით $\alpha_c(i)\Delta t + \partial(\Delta t)$ მდგომარეობაში $(\mathrm{e},\mathrm{c},\tilde{k},\partial)$ ალბათობით $\lambda(e,k)\Delta t + \partial(\Delta t)$ და ა. შ.

მოვიყვანოთ ξ (t) პროცესის აღმწერი თანაფარდობები. ამ მიზნით შეიძლება დამტკიცდეს შემდეგი თეორემა:

თუ $\xi(t)$ შემთხვევითი პროცესის დისკრეტული მდგომარეობათა სიმრავლე სასრულია, ხოლო $H_{ej\eta}^{(i)}(u)$ და G_m (u) აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციებია და $\xi(t)$ -ს საწყისი მდგომარეობათა განაწილების პირობები – უწყვეტია, არსებობს უწყვეტი ფუნქციები:

$$R_c^{(d)}(t) = p\{\xi(t) = (c,d)\},(cd) \in X_0$$

$$P_{e,j,\eta}^{(k)}(t,u) = \frac{d}{du}\{\xi(t) = \{e,j,k,y<u\}\},(e,j,k,u) \in X_1$$

$$P_{m,j}^{(\nu)}(t,u) = \frac{d}{du}\{\xi(t) = \{m,\nu,y<u\}\},(m,\nu,u) \in X_2,$$

რომლებიც აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებებს:

$$\frac{dR_i^{(k)}(t)}{dt} + (\alpha_i + \lambda_k) R_i^{(t)}(t) = \sum_{\substack{c \in X_0 \\ c \neq k}} R_i^{(c)}(t)\lambda_c(k) + \sum_{c \in X_0 c \neq i} R_c^{(k)}(t)\alpha_c(i) + \sum_{j \in X_1} \int_0^t P_{e,j\eta}^{(\nu)} Z_{ej\eta}^{(i)}(u) P_{ej\eta}^{(k)} du +$$

$$+ \sum_{j \in X_2} \int_0^t P_{mj}^{(\nu)}(t,u) \mu_m(u) P_{m\nu}^{(i,k)} du; \tag{1}$$

$$\frac{\partial P_{ej\eta}^{(k)}(t,u)}{\partial t} + \frac{\partial \;\; {}_{ej\eta}^{(k)}(t,u)}{\partial u} + \left[Z_{ej\eta}(u) + \lambda_{ek} \right] P_{ej\eta}^{(k)}(t,u) = \sum_{c \in X_1 c \neq k} P_{ej\eta}^{(c)}(t,u) \lambda_{ec}(k); \tag{2}$$

$$\partial P_{mj}^{(v)}(t,u)\Big/\partial t+\partial P_{mj}^{(v)}(t,u)/\partial u+\left[\mu_{m}(u)+\lambda_{mv}\right]P_{mj}^{(v)}(t,u)=\sum_{\substack{c\in X_2\\ c\neq k}}P_{mj}^{(c)}(t,u)\lambda_{mc}(v);\qquad(3)$$

სასაზღვრო პირობებს აქვთ სახე:

$$P_{ej\eta}^{(\tilde{k})}(t,0)\sum_{d\in X_0}R_j^{(d)}(t)\lambda_\alpha(e,\tilde{k})+\sum_{j\in X_2}\int_0^t P_{ej\eta}^{(v)}(t,u)Z_{ej\eta}^{(i)}P_{ev\eta}^{(e,\tilde{k})}du+\sum_{j\in X_2}\int_0^t P_{mj}^{(v)}(t,u)\mu_m(u)P_{mv}^{(e,j,\tilde{k})}du;\qquad(4)$$

$$P_{mj}^{(v)}(t,0)=\sum_{i\in X_0}R_i^{(k)}(t)\alpha_i(m)P_m^{(k,\tilde{v})},\tilde{v}=j\qquad(5)$$

საწყის პირობებს აქვს სახე:

$$R_i^{(k)}(t)\big/t=0=R_i^{(k)}(0);\qquad P_{ej\eta}^{(k)}(t,u)\Big/t=0=P_{ej\eta}^{(k)}(0,u);\quad P_{m\nu}^{(k)}(t,u)/t_0=P_{m\nu}^{(k)}(0,u)\qquad(6)$$

ამ თანაფარდობათა დამტკიცება აღწერილია მე [3] ნაშრომში.

მოვიყვანოთ ერთი საილუსტრაციო მაგალითი მმს-დან. როგორც ცნობილია მკვლევართა მისწრაფებაა მმს-ის მოდელში გამოყენებული შემთხვევითი პროცესის საწყისი ალბათური – დროითი მახასიათებლები მიუახლოვდეს რეალურს, რაც აუცილებელია მოდელის ორიგინალთან ადექვატურობის და სიზუსტის უზრუნველსაყოფად. იგულისხმება მოთხოვნათა აღძვრის, მათი სისტემაში შემოსვლის, მომსახურე ორგანოს მტყუნებისა და აღდგენის პროცესები და ა.შ. ამ თვალსაზრისით ერთ-ერთი ყველაზე ეფექტური მეთოდია შემთხვევითი სიდიდეების ემპირიული ან თეორიული განაწილების კანონების წარმოდგენა (აპროქსიმაცია) ისეთი ფუნქციათა კლასით, რომლის ლაპლასის გარდაქმნას აქვს რაციონალური ფუნქციის სახე. კერძოდ, განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია განაცხადთა ნაკადის და მტყუნებათა ნაკადის განაწილების ფუნქციის წარმოდგენა მაჩვენებლიან ფუნქციათა ნარევით (ერლანგის ნარევით): შემომავალი განაცხადის დროის ალბათური განაწილების ფუნქციას ლაპლასის გარდაქმნის ტერმინებში აქვს სახე:

$$\text{a (s)}=\sum_{i=1}^{n}P_i\prod_{i=1}^{ei}\left[\lambda ij/(s+\lambda ij)\right]$$

აქ P_i–i შტოში განაცხადის ალბათობაა მისი შემოსვლის მომენტში; i - შტოთა რაოდენობა, ხოლო e_i – i (i=1,n) შტოს მიმდევრობით ორგანიზებულ ეტაპათა (ფაზათა) რაოდენობა; λ_{ij} შესაბამისი ინტენსივობაა ასევე შემდგომ შესაძლებელ განზოგადებას წარმოადგენს ორ მეზობელ მტყუნებას შორის დროის განაწილების ფუნქციის აპროქსიმაცია ასევე ერლანგის ნარევით:

$$b(s)=\sum_{i=1}^{m}q_i\prod_{i=1}^{ai}\alpha ij\Big/(S+\alpha ij)$$

ამის შემდეგ განვიხილოთ მმს ორი მაგალითი:

1. GI /G/1/∞ ტიპის მმს არასაიმედო მომსახურე ორგანოთი.

ვთქვათ, მოცემულია მმს, რომელშიც შემოდის განაცხადთა ნაკადი განაწილების ფუნქციით a(S), ხოლო მომსახურე ორგანოს მტყუნებათა ნაკადი განაწილებულია B (S) ფუნქციით (ნაკადის

ქვეშ იგულისხმება ორ მეზობელ ცდომილებას შორის დროის განაწილების ფუნქცია); განაცხადთა მომსახურების დროის ხანგრძლივობა შემთხვევითი სიდიდეა და განაწილებულია ზოგადი კანონით F (u); არაქმედითუნარიანი ხელსაწყოს აღდგენის დრო ასევე განაწილებულია ზოგადი კანონით – G (u); ნებისმიერი მოთხოვნა გადის სრულ მომსახურებას; რიგში ლოდინის და სისტემაში ყოფნის დრო არაა შეზღუდული; ასევე არც რიგის სიგრძეა შეზღუდული. ამ შემთხვევაში (1)–(6) განტოლებები მიიღებს შემდეგ კონკრეტულ სახეს:

$$\frac{dR^{(ij)}_{cd(t)}}{dt} = -(\alpha_{cd}+\lambda ij)R^{(ij)}_{cd\,(t)} + \sum_{\tilde c=1}^{m}\sum_{\tilde d=1}^{ac}\int_0^t P^{(ij)}_{\tilde c\tilde d}(t,1,u)\, r^{(cd)}_{\tilde c\tilde d}(u)du + \delta_{d_1} q_c \int_0^t q^{(ij)}(t,0,u)\mu(u)du +$$
$$+(1-\delta_{i1})R^{(i,j-1)}_{cd}(t)\lambda_{i,j-1} + (1-\delta_{d_1})\alpha_c, d_{-1} R^{(ij)}_{c,d=1}; i=\overline{1,n}, j=\overline{1,e_i}; c=\overline{1,m}; d=1,\alpha_c;$$

(7)

აქედან

$$\frac{\partial P^{(ij)}_{cd}(t,k,u)}{\partial t} + \frac{\partial P^{(ij)}_{cd}(t,k,u)}{\partial u} = -\left[r_{cd}(u)+\lambda_{ij}\right]P^{(ij)}_{cd}(t,k,u) + (1-\delta_{j,1})\lambda_{i,j-1}P^{(i,j-1)}_{cd}(t,k,u) +$$
$$+\left(1-\delta_{k1}\right)\delta_{j1}P_i\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_{\nu e_\nu}P^{(\nu ej)}_{cd}(t,k-1,u), \quad k=\overline{1,\infty},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,e},\ c=\overline{1,m},\ d=\overline{1,a_c};$$

$$\frac{\partial q^{(ij)}(t,k,u)}{\partial t} + \frac{\partial q^{(ij)}(t,k,u)}{\partial u} = -\left[\lambda_{ij}+\mu(u)\right]q^{(ij)}(t,k,u) + (1-S_{j1})\lambda_{i,j-1}q^{(i,j-1)}(t,k,u) +$$
$$+\delta_{j1}(1-\delta_{ko})P_i\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_{\nu e_\nu}q^{(\nu e_\nu)}(t,k-1,u),\ k=\overline{o,\infty},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,e_i}$$

სასაზღვრო პირობები ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$P^{(ij)}_{cd}(t,k,o) = \sum_{\varepsilon=1}^{m}\sum_{\tilde d=1}^{a\tilde c}\int_o^t p^{(ij)}_{\tilde c\tilde d}(t,k+1,u)z^{(cd)}_{\tilde c\tilde d}(u)du +$$
$$+\delta_{d1}q_c\int_o^t q_{ij}(t,k,u)\mu(\nu)du + \delta_{k1}\delta_{j1}p\sum_{\tilde i=1}^{n}R^{(\tilde i e_{\tilde i})}_{cd}(t)\lambda_{\tilde i e_{\tilde i}},$$
$$k=\overline{1,\infty};\ i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,e_i};\ c=\overline{1,m};\ d=\overline{1,a_c};$$

ვთქვათ, საწყის პირობებს აქვს სახე: $R^{(\tilde i,\tilde j)}_{\tilde c\tilde d}(0)=1$ (8) და (9) განტოლებათა ამონახსნს აქვს სახე: $P^{(ij)}_{cd}(t,k,o) = \left[\sum_{\nu=1}^{k}\sum_{\tilde i=1}^{n}\sum_{\tilde j=1}^{e_{\tilde i}} p^{(\tilde{ij})}_{cd}(t-u,\nu,0)e^{k(ij)}_{\nu(\tilde{ij})}(u)\right]\overline{H_{cd}}(u)$; აქ $e^{k(ij)}_{\nu(\tilde{ij})}u$ არის პირობითი ალბათობა იმისა, რომ t მომენტში სისტემაში იქნება $k^{\nu(\tilde{ij})}$ განაცხადი და მოსალოდნელი

შემომავალი განაცხადის მიხედვით (ij) ფაზაში, თუ t-u მომენტში იყო ν განაცხადი, ხოლო მოსალოდნელი შემავალი განაცხადის მიხედვით $(\tilde{\tilde{ij}})$ ფაზაში.

მაგალითი 2. მრავალპროცესორიანი გამოთვლითი სისტემა, რომელიც შედგება m მუშა და m-n სარეზერვო იდენტური მოწყობილობებისაგან, ეძლევა საერთო დავალება, რომლის შემოსვლის ინტენსივობა შეადგენს $\lambda - i$ და მომსახურების დრო კი განაწილებულია $F(u)$ ფუნქციით;

სისტემა ერთდროულად ემსახურება ერთ განაცხადს;

მომსახურე ორგანო, როგორც თავისუფალ, ასევე დაკავებულ მდგომარეობაში მტყუნებებს: თვითაღდგენადი და მდგრადი, რომლებიც აღმოჩნდება უწყვეტი კონტროლის საშუალებით აღძვრის მომენტში;

მუშა მოწყობილობები თავისუფალ მდგომარეობაში მტყუნდება α_1, ხოლო სარეზერვო α_2 ინტენსივობით დაკავებულ მდგომარეობაში შესაბამისად შეადგენს β_1 და β_2-ს. სისტემას ემსახურება ერთი სარემონტო ბრიგადა; აღდგენის დროის ინტენსივობა შეადგენს μ-ს.

ეს სისტემა აღიწერება შემდეგი თანაფარდობებით:

$$R_o^1(t) = -(\mu+\lambda)R_o(t) + \alpha_1 R_1(t),$$

$$(R_o^{(k)}(t))^1 = -(\mu+\lambda)R_o^{(k)}(t) + \lambda R_o^{(k-1)}(t),\ k = 1,2,3,...,$$

$$R_i^1(t) = \left[\lambda + (1-\delta_{in})\mu + a_i\right]R_i(t) + \mu R_{i-1}(t) + (1-\delta_{in})a_{i+1}R_{i+1}(t) + \sum_{\nu=1}^{n}\int_o^t p_\nu^{(1)}(t,u)\mathrm{Z}_{\nu i}(u)du,\ i = \overline{1,h}$$

$$\partial p_i^{(k)}(t,u)\Big|\partial t + \partial p_i^{(k)}(t,u)\Big|\partial u = -\left[\lambda + Z_i(u)\right]p_i^{(k)}(t,u) + (1-\partial_{k1})\lambda p_i^{(k-1)}(t,u),\ \ k = 1,2,3...$$

აქ $a_i = \partial_o(i<m)i\alpha_1 + \delta_1(i \ge m)\left[m\alpha_1 + (i-m)\alpha_2\right],\ \ i = \overline{1,n}$

სასაზღვრო პირობებს აქვთ სახე

$$p_i^{(k)}(t,o) = \sum_{\nu=1}^{n}\int_o^t p_\nu^{(k+1)}(t,u)Z_{\nu i}udu + \delta_{k1}\lambda R_i + \delta_{i1}\mu R_o^{(k)}(t),\quad i = \overline{1,n}$$

მომსახურების ფუნქციის $H_{kb}^{(cd)}(t)-$ს მოსაძებნად შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი განტოლებათა სისტემა (მოვიყვანთ მას ამოხსნის გარეშე):

$$H_{kb}^{(cd)}(t)=\delta_{kc}\left[\delta_{bd}\int\limits_{o}^{t}\exp\left\{-\alpha_{kb}u\right\}dF(u)+\int\limits_{o}^{t}\tilde{I}_{(db)}^{(k)}(u)du\int\limits_{o}^{t-u}\exp\left\{-\alpha_{cd}v\right\}\right]$$

$$d_{v}F(u+v)+\sum_{v=1}^{m}\int\limits_{o}^{t}I_{(a_k b)}^{(k)}(u)\overline{F}(u)du\int\limits_{o}^{t-u}H_{v1}^{(cd)}(t-u-v)dG(v),\quad b\le d;$$

$$H_{kb}^{(cd)}(t)=\delta_{kc}\sum_{v=1}^{m}\left[\int\limits_{o}^{t}I_{(ab)}^{(k)}(u)\overline{F}(u)d\int\limits_{o}^{t-u}p_{v}H_{v1}^{(cd)}(t-u-v)dG(v)\right],\quad b>d;$$

$$H_{kb}^{(cd)}(t)=(1-\delta_{kc})\sum_{v=1}^{m}\left[\int\limits_{o}^{t}I_{(ab)}^{(k)}(u)du\int\limits_{o}^{t-u}p_{v}H_{v1}^{(cd)}(t-u-v)dG(v)\right],\ (k\ne c);$$

$$\overline{F}(u)=1-F(u);\ k,c=\overline{1,m},\ \ b=\overline{1,a_k},\ \ d=\overline{1,a_c}\,.$$

ლიტერატურა

1. Кокс Д., Смит В. Теория восстановления м.: Сов радио, 1967.

2. Беляев Ю.К Линейнчатые марковские процессы и их приложение к задачам теории надежности Труды VI всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике, Вильнюс, 1962.

3. Mikadze I.S., Mikadze Z.I On embedded Mazkovion processe with the supplementazy Vaziable, Georgian Engineers News, N1, 2000.

ABOUT THE GENERAL METHOD OF ANALYSES OF THE COMPLICATED MASSIVE SERVICE SYSTEM

Mikadze Zaal, Shurgaia Irakli, Mikadze Ilia Z.

Georgian Technical University

Summary

This article deals with the analysis of a complicated system of massive service using one of the methods (offered by Mikadze-Kakubava) of math modeling.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕННОМ МЕТОДЕ СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ МАСОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Микадзе З.И., Шургая И.Б., Микадзе И.З.

Грузинский Технический Университет

Резюме

В работе предлагается анализ сложной системы масового обслуживания с использованием одного из метода (предложенным Микадзе-Какубава) математического моделирования.