

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ НИЖНЕЙ ЧАСТИ ПРОФИЛЯ КРЫЛА САМОЛЁТА

Прангишвили А.И., Обгадзе Т.А., Давиташвили И.А.  
Грузинский Технический Университет

### Резюме

При изучении задач обтекания профилей вязкой жидкостью, часто применяют математическую модель Навье-Стокса. Разработанные соответствующие алгоритмы настолько сложны и погрешности настолько высоки, что становятся малоприменимыми для аэродинамики. Поэтому, соответствующие расчёты на практике, основаны на полуэмпирических формулах и соотношениях. Мы строим алгоритм, который основан на классических экспериментах и законах механики. Рассматриваем вязкую, несжимаемую жидкость и после этого пользуемся формулами пересчёта для перехода на аэродинамические показатели в случае сжимаемой жидкости. Работа основывается на методе нелинейного программирования для минимизации целевой функции-интегральной невязки, состоящей: из кинематических условий, граничных условий и модифицированной функции качества крыла, когда интегральные законы сохранения массы и энергии для вязких жидкостей, представлены в виде ограничений.

Для демонстрации нового алгоритма приводится задача обтекания профиля крыла самолета. Верхняя часть крыла самолёта представляется матрицей координат точек профиля. А нижняя часть представляется кубическим многочленом, проходящим через две данные точки (передняя и задняя кромки). Компоненты векторного поля искомой скорости определяются, как полиномы двух переменных с неизвестными коэффициентами. Ставится и решается задача о нахождении нижнего контура профиля, из условия максимума качества.

**Ключевые слова:** Нелинейное программирование. Многокритериальная задача. Оптимизация. Аэродинамика. Крыла самолета. Алгоритм. Нижний контур профиля крыла.

### 1. Введение

Рассматриваем верхнюю часть, профиля крыла находящегося в потоке вязкой несжимаемой жидкости и заданного в виде матрицы (рис.1). В первом столбце стоят

абсциссы профиля крыла, а второй столбец соответствует ординатам крыла. Как видно, профиль рассматривается в безразмерном виде и расположен в промежутке  $[0; 1]$ . Будем рассматривать горизонтальный полёт, подъём и снижение (планирование) самолёта, поэтому поток воздуха, можно считать установившимся. Также, мы будем рассматривать лишь дозвуковые режимы полёта, поэтому можно считать поток воздуха несжимаемым. В начале, будем рассматривать нулевой угол атаки.

Для правильной постановки задачи, построим в начале целевую функцию. Профиль крыла считается оптимальным, если качество крыла  $K$  принимает максимально возможное значение. В нашей постановке

$$K(a, b, \gamma) := \frac{C_y(a, b, \gamma)}{C_x(a, b, \gamma)}$$

где

$C_y$  – коэффициент подъемной силы,

$C_x$  – коэффициент силы сопротивления давления.

Как известно,

$$C_y(a, b, \gamma) = \sum_{s=0}^q [p[x_s, (x_s - 1)[a \cdot (x_s)^2 + b \cdot x_s], \gamma] - p(x_s, y_s, \gamma);$$

$$C_x(a, b, \gamma) = \sum_{s=0}^{12} [p[x_s, (x_s - 1)[a \cdot (x_s)^2 + b \cdot x_s], \gamma] + p(x_s, y_s, \gamma) ;$$

$$C_x(a, b, \gamma) = C_x(a, b, \gamma) - \sum_{s=13}^q [p[x_s, (x_s - 1)[a \cdot (x_s)^2 + b \cdot x_s], \gamma] + p(x_s, y_s, \gamma) ;$$

где  $C_y(a, b, \gamma)$  – получается, как разность давлений на нижней и верхней части профиля;

$C_x(a, b, \gamma)$  – разность давлений в лобовой и задней части профиля.

Надо отметить, что мы ищем нижнюю часть профиля, из условий оптимальности. Кроме того, мы знаем, что нижняя часть неизвестного профиля, должна обеспечивать непрерывность контура профиля, поэтому целесообразно, искать её в виде:

$$f_{kvedx}(x, a, b) = (x - 1)(ax^2 + bx) ;$$

где  $a$  и  $b$  - неизвестные коэффициенты, определяемые из условий оптимальности профиля.

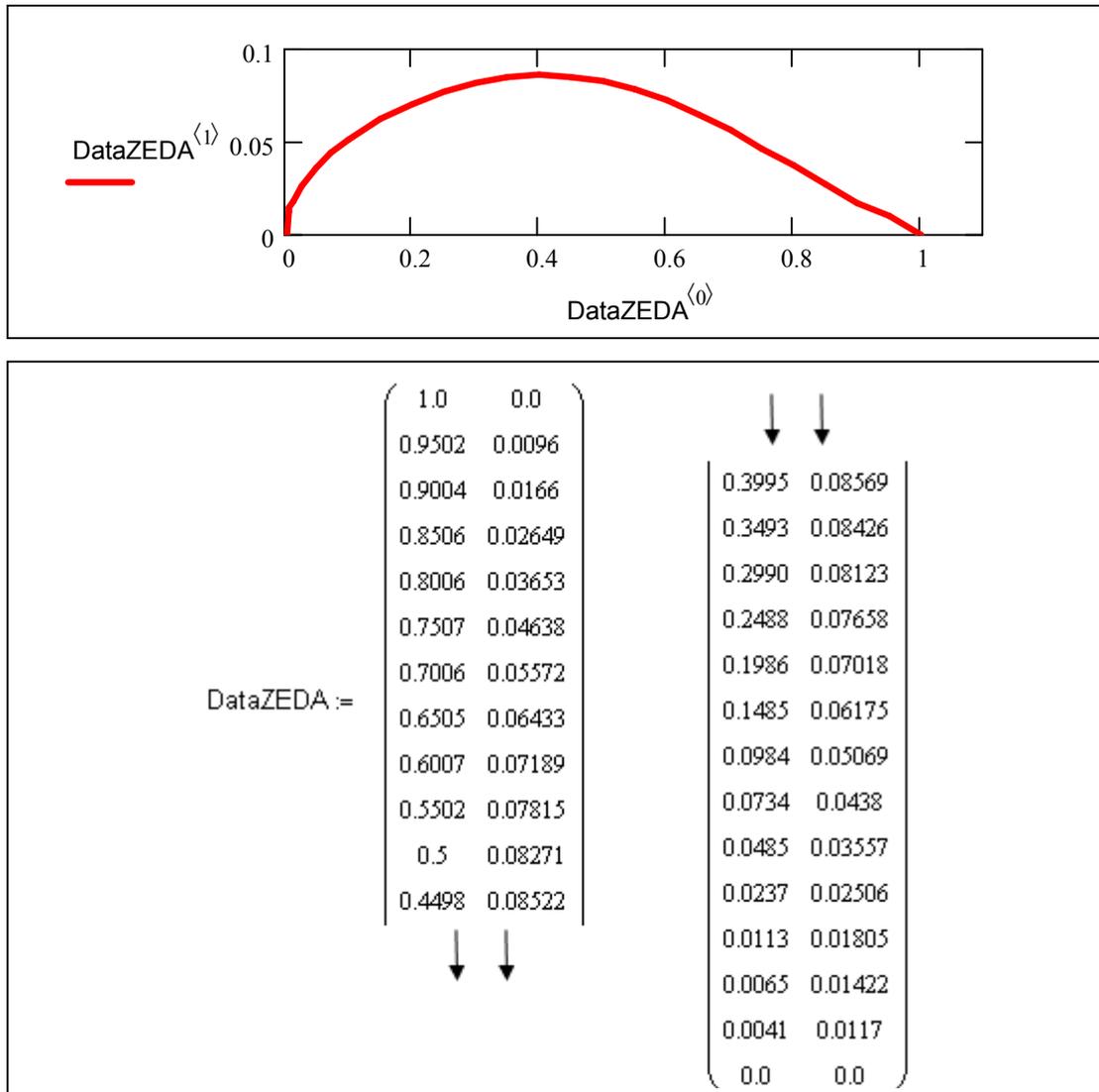


Рис.1. Таблица координат и график верхней части профиля крыла.

Рассматривается плоское течение установившегося потока вязкой несжимаемой жидкости. Параметрами потока служат: компоненты вектора скорости плоского потока и давление, которые определяются как представленные по двумерному полиномиальному базису функции, с неизвестными коэффициентами разложений. Они определяются из условий оптимальности и законов сохранения массы и энергии, которые в нашей постановке играют роль ограничений.

$$u(x, y, \alpha) := \sum_{m=0}^{k1} \sum_{n=0}^{k1} \alpha_{m,n} \cdot x^m \cdot y^n ;$$

$$v(x, y, \beta) := \sum_{m=0}^{k1} \sum_{n=0}^{k1} \beta_{m,n} \cdot x^m \cdot y^n ;$$

$$p(x, y, \gamma) := \sum_{m=0}^{k1} \sum_{n=0}^{k1} \gamma_{m,n} \cdot x^m \cdot y^n;$$

Из граничных условий прилипания вязкой жидкости на стенки, имеем что функции

$$RZEDA(\alpha, \beta, \gamma) := \sum_{s=0}^q (u(x_s, y_s, \alpha)^2 + v(x_s, y_s, \beta)^2);$$

$$RKVEDA(\alpha, \beta, a, b) = \sum_{s=0}^q u[x_s, (x_s - 1) \cdot [a \cdot (x_s)^2 + b \cdot x_s] \alpha]^2;$$

$$RKVEDA(\alpha, \beta, a, b) = RKVEDA(\alpha, \beta, a, b) + \sum_{s=0}^q v[x_s, (x_s - 1) \cdot [a \cdot (x_s)^2 + b \cdot x_s] \beta]^2.$$

должны принимать нулевые значения.

Принимая принцип Даламбера, считаем, что профиль неподвижен и на него набегаёт установившийся поток вязкой несжимаемой жидкости. Считаем, что эпюра вектора скоростей набегающего потока в начальном сечении  $x = X0$  имеет вид квадратичной параболы, соответствующее условие записывается в метрике  $L_2(G)$  и имеет вид

$$IGR1(\alpha, \beta) = \int_{Y0}^{YN} [u(X0, y, \alpha) - (1 - y^2)]^2 dy + \int_{Y0_0}^{YN} v(X0, y, \beta)^2 dy.$$

где принято, что областью поиска решения является часть жидкости находящаяся в декартовом произведении

$$G = [X0, XN] \times [Y0, YN].$$

В этом промежутке, должны удовлетворяться условия сохранения массы и условие сохранения энергии в виде интеграла Бернулли с законом Вейсбаха - Дарси для потери напора по длине выделенного жидкого объёма, с коэффициентом шероховатости в форме Альштуля, записанные в безразмерном виде.

$$\int_{Y0}^{YN} u(X0, y, \alpha) dy = \int_{Y0}^{YN} u(XN, y, \alpha) dy + \int_{X0}^{XN} (v(x, Y0, \beta) + v(x, YN, \beta)) dx.$$

$$\int_{Y_0}^{YN} [p(X_0, y, \gamma) + 1.1 \cdot (u(X_0, y, \alpha)^2 + v(X_0, y, \beta)^2)] dy = \int_{Y_0}^{YN} [p(XN, y, \gamma) + 1.1 \cdot (u(XN, y, \alpha)^2 + v(XN, y, \beta)^2)] dy +$$

$$+ \int_{Y_0}^{YN} \left[ \frac{0.026}{(YN - Y_0)^{0.3}} \cdot \frac{XN - X_0}{YN - Y_0} \cdot \left[ \frac{u(XN, y, \alpha)^2 + v(XN, y, \beta)^2 + (u(X_0, y, \alpha)^2 + v(X_0, y, \beta)^2)}{4} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{2 \cdot \sqrt{(u(X_0, y, \alpha)^2 + v(X_0, y, \beta)^2) \cdot (u(XN, y, \alpha)^2 + v(XN, y, \beta)^2)}}{4} \right] dy,$$

кроме того, чтобы обойти ошибку в знаке, проявленную от метрики  $L_2(G)$ , мы вводим дополнительные кинематические условия, а также, условие для нормировки давления

$$\int_{Y_0}^{YN} u(X_0, y, \alpha) dy \geq 0;$$

$$\int_{Y_0}^{YN} (uX_0 + 0.1, y, \alpha) dy \geq 0;$$

$$p(0, 0, \gamma) = I.$$

Суммарная невязка имеет вид:

$$I(\alpha, \beta, a, b) = IGR1(\alpha, \beta) + RZEDA(\alpha, \beta) + RKVEDA(\alpha, \beta, a, b) \rightarrow \min;$$

Получаем условия оптимальности в виде:

$$I(\alpha, \beta, a, b) \rightarrow \min;$$

$$K(a, b, \gamma) \rightarrow \max.$$

Таким образом, мы имеем многокритериальную задачу нелинейного программирования. Для её решения, вводится модифицированная функция качества крыла

$$K(a, b, \gamma)^{-2}$$

и вводим единую целевую функцию специального вида с весовыми множителями

$$I(\alpha, \beta, a, b) = IGR1(\alpha, \beta) + RZEDA(\alpha, \beta) + RKVEDA(\alpha, \beta, a, b) \quad (1)$$

$$I(\alpha, \beta, \gamma, a, b) = I(\alpha, \beta, a, b) \cdot 10 + K(a, b, \gamma)^{-2} \rightarrow \min \quad (2)$$

К целевой функции (1) - (2), присоединяются ограничения

- Закон сохранения энергии:

$$E1(\alpha, \beta, \gamma) - E2(\alpha, \beta, \gamma) = E3(\alpha, \beta, \gamma)$$

где

$$E1(\alpha, \beta, \gamma) := \int_{Y0}^{YN} [p(X0, y, \gamma) + 1.1 \cdot (u(X0, y, \alpha)^2 + v(X0, y, \beta)^2)] dy$$

$$E2(\alpha, \beta, \gamma) := \int_{Y0}^{YN} [p(XN, y, \gamma) + 1.1 \cdot (u(XN, y, \alpha)^2 + v(XN, y, \beta)^2)] dy$$

$$E3(\alpha, \beta, \gamma) := \int_{Y0}^{YN} \frac{0.026}{(YN - Y0)^{0.3}} \cdot \frac{XN - X0}{YN - Y0} \cdot \left[ \frac{u(XN, y, \alpha)^2 + v(XN, y, \beta)^2 + (u(X0, y, \alpha)^2 + v(X0, y, \beta)^2)}{4} + \frac{2 \cdot \sqrt{(u(X0, y, \alpha)^2 + v(X0, y, \beta)^2) \cdot (u(XN, y, \alpha)^2 + v(XN, y, \beta)^2)}}{4} \right] dy .$$

Закон сохранения массы

$$\int_{Y0}^{YN} u(X0, y, \alpha) dy = \int_{Y0}^{YN} u(XN, y, \alpha) dy + \int_{X0}^{XN} (v(x, Y0, \beta) + v(x, YN, \beta)) dx$$

Кинематические условия

$$\int_{Y0}^{YN} u(X0 + 0.1, y, \alpha) dy \geq 0 ;$$

$$\int_{Y0}^{YN} u(X0, y, \alpha) dy \geq 0 ;$$

$$(x_s - 1) \cdot [a \cdot (x_s)^2 + b \cdot x_s] \leq y ;$$

$$K(a, b, \gamma) \geq 0 ;$$

$$0.999 \leq p(0, 0, \gamma) \leq 1.001 .$$

В результате расчетов на основе Mathcad 2001, получается что

$$S = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.022 & -0.047 & 0.117 & -0.153 \\ -0.204 & -0.122 & 0.34 & -0.335 \\ 0.247 & 0.035 & 0.055 & -0.116 \\ -0.029 & 0.064 & 0.225 & 0.02 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0 & 0.034 & 0.002 & -0.004 \\ 0.013 & 0.032 & 0.025 & 0.011 \\ -0.013 & 0.024 & -0.006 & 0.016 \\ -0.021 & -0.016 & 0.004 & 0.041 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.999 & -1.751 & -0.022 & 0.234 \\ 0.059 & -0.511 & 0.034 & -0.357 \\ -0.031 & 0.015 & 0.118 & -0.335 \\ -0.004 & 0.013 & -0.214 & -0.361 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 0.046 \\ -0.044 \end{matrix} \end{bmatrix} ,$$

$$C_y(a, b, \gamma) = 2.266 ;$$

$$C_x(a, b, \gamma) = 0.162 ;$$

$$a = 0.046 ;$$

$$b = -0.044 ;$$

$$K(a, b, \gamma) = 13.977 .$$

Для оценки точности удовлетворения условий имеем соотношения

$$IGR!(\alpha, \beta) = 0.003;$$

$$RZEDA(\alpha, \beta) = 0.011;$$

$$RKVEDA(\alpha, \beta, a, b) = 0.01;$$

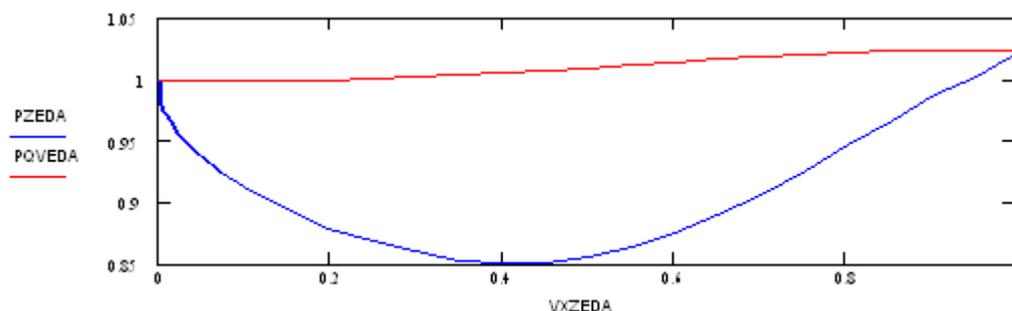
$$I(S_0, S_1, S_2, a, b) = 0.25 ;$$

$$p(0, 0, \gamma) = 0.999 .$$

Из этих соотношений следует, что точность наших расчетов 10%.

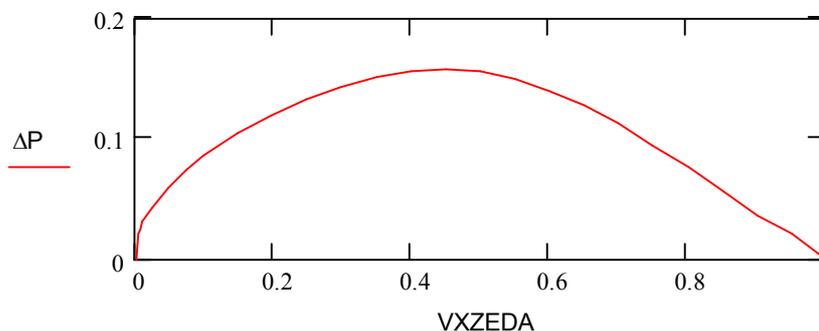
### 3. Выводы

Результаты расчётов показывают, что давление вдоль границ крылового профиля распределяется по закону заданному на рис.2:



**Рис.2. .Распределение давлений вдоль границы крылового профиля**

а разность давлений на нижней и верхней границе профиля задаётся на Рис.3.



**Рис.3. Разность давлений на нижней и верхней границе крылового профиля**

Соответственно, оптимальная нижняя граница профиля задаётся формулой

$$a = 0.046$$

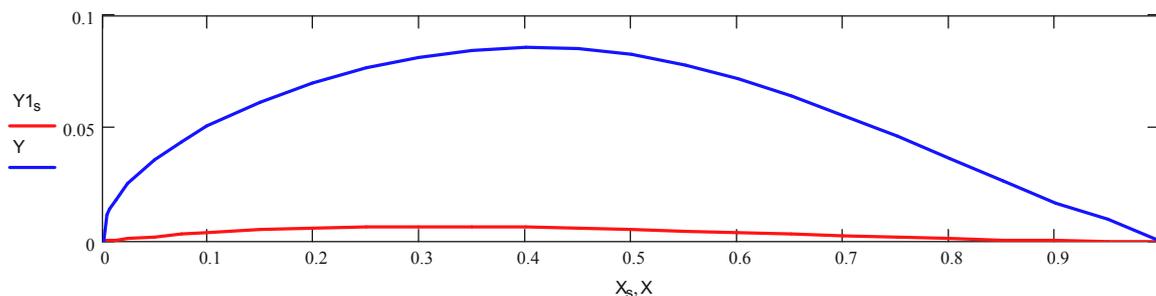
$$b = -0.044$$

$$fkvedax(x, a, b) = (x-1)(ax^2 + bx)$$

Качество крыла в этом случае

$$K(a, b, \gamma) = 13.977$$

Профиль крыла имеет вид Рис.4



**Рис.4. Оптимальный профиль крыла самолёта**

Таким образом, мы разработали метод оптимального проектирования, нижней части профиля крыла самолёта, при заданной верхней части профиля. Очевидно, что мы можем задать итерационный процесс для улучшения профиля.

### **Литература**

1. Обгадзе Т.А., Прокошев В.Г. Вычислительная физика, Мин.обр.России, ВлГУ, 1999.
2. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირება (უწყვეტი მათემატიკური მოდელები), ტ.1., მონოგრაფია, საქართველოს ტექნ.უნივ., 2006.
3. ობგაძე თ., დავითაშვილი ი. ახალი ალგორითმი პროფილის სტაციონარული გარსდენის ამოცანების ამოსახსნელად, სტუ-შრ,კრ. „მას“, №1(2), თბილისი, 2007
4. Обгадзе Т.А., Давиташвили И .Оптимизация профиля крыла самолёта, тезисы докладов, международной конференции:«**Нелинейная динамика и устойчивость**», посвящённой 100 летию Ляпунова, Санкт-Петербург, 2007
5. ობგაძე თ., დავითაშვილი ი. არაწრფივი დაპროგრამების მეთოდის გამოყენება თვითმფრინავის ფრთის პროფილის ოპტიმიზაციისათვის, საერთაშორისო სამეც.კონფ. ICT'07, თბილისი, 2007

**არაწრფივი დაპროგრამების მეთოდის გამოყენება თვითმფრინავის  
ფრთის პროფილის ძველა კონტურის ოპტიმიზაციისთვის**

არჩილ ფრანგიშვილი, თამაზ ობგაძე, ირმა დავითაშვილი

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

**რეზიუმე**

პროფილის ბლანტი სითხით გარსდენის ამოცანების შესასწავლად ხშირად გამოიყენება ნავიე-სტოქსის მათემატიკური მოდელი, რომლისთვისაც დამუშავებული ალგორითმები იმდენად რთულია და ცდომილება იმდენად დიდი, რომ აეროდინამიკის ამოცანებისათვის გამოუსადეგარი ხდება. ამიტომ, სათანადო გათვლები პრაქტიკაში, უმეტესწილად, ხდება ნახევრადემპირიული ფორმულების დახმარებით. ჩვენ ვაგებთ ალგორითმს, რომელიც ემყარება მექანიკის ძირითად კანონებს და კლასიკურ ექსპერიმენტებს. განვიხილავთ უკუმშ, ბლანტ სითხეს. ამის შემდეგ კუმშვადი სითხეების შემთხვევაში აეროდინამიკურ მახასიათებლებზე გადასვლისათვის ვიყენებთ გადათვლის ფორმულებს.

ნაშრომი ემყარება არაწრფივი დაპროგრამების მეთოდს ინტეგრალური მიზნის ფუნქციის მინიმიზაციისთვის, რომელიც შედგება კინემატიკური პირობებისაგან, სასაზღვრო პირობებისაგან და ფრთის ხარისხის მოდიფიცირებული ფუნქციისაგან, როდესაც მასისა და ენერჯის შენახვის კანონები ბლანტი სითხეებისათვის წარმოდგენილია შეზღუდვების სახით. ახალი ალგორითმის დემონსტრირებისათვის მოყვანილია ფრთის პროფილის გარსდენის ამოცანა. თვითმფრინავის ფრთის ზედა საზღვარი მოიცემა პროფილის წერტილთა კოორდინატების მატრიცით, ხოლო ქვედა საზღვარი წარმოადგენს ორ მოცემულ წერტილზე (წინა და უკანა ბოლოებზე) გამავალი კუბურ მრავალწევრს. საპოვნელი სინქარის ვექტორული ველის კომპონენტები განისაზღვრება როგორც ორი ცვლადის პოლინომი უცნობი კოეფიციენტებით. ისმება და იხსნება პროფილის ქვედა კონტურის პოვნის ამოცანა, იმ პირობით, რომ ფრთის ხარისხი იქნება მაქსიმალური.

**USE OF NONLINEAR PROGRAMING METHOD FOR OPTIMIZATION  
OF THE LOWER PART OF AIRCRAFT WING PROFILE**

Prangishvili Archil, Obgadze Tamaz, Davitashvili Irma  
Georgian Technical University

**Summary**

When studying the problems of profile flow around with viscous fluid Navier-Stokes mathematical model is often used. The respective algorithms developed for this model are so complicated and the errors are so grave that as a result they become unsuitable for the problems of aerodynamics. Therefore, in practice the corresponding calculations are based on semi empirical formulas and relations. We construct the algorithm based on classical experiments and laws of mechanics. We consider incompressible viscous fluid and then using recalculation formulas, pass over to aerodynamic indices for compressible fluids. The article is based on nonlinear programming method for minimization of efficiency function – integral error consisting of kinematic conditions, boundary conditions and modified function of wing quality when integral laws of conservation of mass and energy for viscous fluids are presented in the form of limitations.

In order to demonstrate the new algorithm the problem of flow around of aircraft wing profile is presented. The upper part of aircraft wing is presented with the matrix of coordinates of profile points, while lower part is presented with cubic polynomial crossing the two given points (front and rear edges). The components of the vector field of the required speed are determined as the polynomials of two variables with unknown coefficients. The problem of determination of the lower contour of profile is stated and solved on condition of maximum quality.