О СПОСОБЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НА МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ПРИ НАЛИЧИИ РЕЗЕРВА ВРЕМЕНИ

Джоджуа З.С., Джоджуа Н.М., Микадзе И.З.
Грузинский технический университет

Резюме

Разрабатывается аналитическая модель определения вероятности выполнения задачи на многопроцессорной (многомашинной) вычислительной системе (МПВС) при существовании Пуассоновского потока отказов и наличия резерва времени выполнения задания. Время решения задачи считается распределенным в виде единичной функции. Время восстановления отказавших процессоров распределена по показательному закону. Время реконфигурации системы распределена по произвольному закону. Введена функция вероятности решения задачи за заданное время и составлены соответствующие аналитические выражения. После ряда преобразований с помощью методов Лапласа-Стилтьеса получена система линейных алгебраических уравнений, решение которой окончательно даёт функцию вероятности решения задачи в форме Лапласа.

Ключевые слова: вероятность, отказ, восстановление, время, Лаплас.

1. Введение

Вероятность выполнения задания на многопроцессорных(многомашинных) вычислительных системах(МПВС), подверженных потокам отказов Пуассоновского типа, имеющий резерв времени выполнения задания, описывается функцией $\Phi_{ij}(u)$. Вид функции $\Phi_{ij}(u)$ зависит от характера отказов МПВС, от способов её контроля, от распределения времени реконфигурации системы, времени восстановления, от правил завершения задач, прерванных из-за отказа отдельных устройств МПВС и т.д.

Однородная МПВС, состоящая из m основных и n-m резервных вычислительных устройств, выполняет задание постоянного объема E. Задание распределяется между всеми основными устройствами МПВС, все устройства МПВС обрабатывают требование в режиме взаимозаменяемости; при безотказной работе задание можно выполнить одним устройством за время $\tau_{\mathrm{p}}=E/B$, а i устройствами _ за время $u = E/(B \cdot f(i)) = \tau_{\mathrm{p}} / f(i)$. Здесь B –номинальная производительность каждого вычислительного устройства МПВС; вид функции $f(i)(1 \le f(i) \le i)$ определяется затратами аппаратуры и времени на комплексирование при выполнении $i(i = 1,\overline{m})$ работоспособными устройствами общего задания; рабочие устройства отказывают с интенсивностью β_1, а резервные с интенсивностью β_2; время восстановления является случайной величиной с показательным распределением с параметром μ_1; отказы отдельных устройств не обесценивают уже выполненной работы; функция распределения времени реконфигурации МПВС (переход системы из состояния i в состояние j) является случайной величиной с функцией распределения $G_{ij}(v)$ (изменении состояния системы осуществляется управляющей программой, которая при необходимости перераспределяет оставшуюся работу между работоспособными устройствами МПВС).

2. Основная часть

Обозначим $\Phi_{ij}(t,x)$ - вероятность того, что выполнение задания завершится за время, меньшее t, МПВС , находящейся в состоянии j, при условии, что выполнение задания возобновилось в момент времени t=0 , когда система находилась в состоянии i и для его завершения требовалось время y=τ₃-x, при безотказной работе её одного устройства (т.е. в перерасчете на одно устройство).Очевидно, что $\Phi_{ij}(t) = \Phi_{ij}(t,0)$.

Для рассматриваемой модели функции $\Phi_{ij}(t,x)$, при $n \ge 2$ $(m = \overline{1,n})$ определяются из следующей системы функциональных уравнений:

$$\overline{F}(x)\Phi_{ij}(t,x)=\delta_{ij}\int_0^t \exp(-C_i^0u)duF(x+n_iu)+(1-\delta_{in})\mu_1\cdot\int_0^t \exp(-C_i^0u)\overline{F}(x+n_iu)du\times$$

$$\times\int_0^{t-u}\Phi_{i+1,j}(t-u-v,x+n_iu)dG_{i,i+1}(v)+C_i\int_0^t \exp(-C_i^0u)\overline{F}(x+n_iu)du\times \tag{1}$$

$$\times\int_0^{t-u}\Phi_{i-1,j}(t-u-v,x+n_iu)dG_{i,i-1}(v),$$

$$i=\overline{2,n}\ ,\quad j=\overline{1,n}$$

$$\overline{\mathrm{F}}(x)\Phi_{1j}(t,x)=\delta_{1j}\int_0^t \exp(-C_1^0u)duF(x+u)+\mu_1\int_0^t \exp(-C_1^0u)\overline{F}(x+u)du\times$$

$$\times\int_0^{t-u}\Phi_{2,j}(t-u-v,x+u)dG_{12}(v)+\beta_1\int_0^t \exp(-C_1^0u\overline{F}(x+u)du\int_0^{t-u}\mu_1\exp(-\mu_1v)dv\times \tag{.2}$$

$$\times\int_0^{t-u-v}\Phi_{1,j}(t-u-v-\upsilon,x+u)dG_{01}(\upsilon)$$

$$i=1\ ,\quad j=\overline{1,n}$$

Здесь,

$C_i=i\beta_1\delta_0(i<m)+[m\beta_1+(i-m)\beta_2]\delta_1(i\ge m)$; $\quad C_i^0=(1-\delta_{in})\mu_1+C_i$;

$n_i=\delta_0(i<m)f(i)+\delta_1(i\ge m)f(m)$;

$$F(x)=\begin{cases}1, когда\ \ x>\tau_з\\0, когда\ \ x\le\tau_з\end{cases};\qquad \overline{F}(x)=1-F(x).$$

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1,\text{когда }\ i=j\\0,\ \text{когда}\ i\ne j\end{cases},\quad \delta_0(i<m)=\begin{cases}1,\ \text{когда }\ i<m\\0,\ \text{когда }\ i\ge m\end{cases},\quad \delta_1(i\ge m)=\begin{cases}1,\ \text{когда }\ i\ge m\\0,\ \text{когда }\ i<m\end{cases}$$

$$\Phi_{ij}(t,x)=\begin{cases}\delta_{ij}\ ,\quad \text{при}\ \ x=\tau_{\mathrm{p}}\\0,\quad \text{при}\,x>\tau_{\mathrm{p}},\quad i,j=\overline{1,n}\ ,\ (t\in 0,\infty)\end{cases}$$

$\Phi_{ij}(0,x)=0$, при $x\ne\tau_{\mathrm{p}}(i,j=1,n)$;

Для примера поясним $\Phi_{ij}(t,x)$, при $i>m$ и $i\ne n$.

Первый член - это совместная вероятность того, что выполнение задания завершится в интервале времени $(u,u+du)$, если оно начнется в момент t=0 i работоспособными, m рабочими и i-m резервными устройствами; и за время u ни один из них не откажет и не завершится восстановление ни одного из n-i неисправных устройств;

второй член - в интервале времени $(u,u+du)$, завершится восстановление одного и n-i неисправных устройств, находящегося в момент t=0 в ремонте; за время u не завершится выполнение задания и не откажут ни рабочие, ни резервные устройства; для реконфигурации потребуется время v; выполнение задания завершится системой, находящейся в состоянии j, за время, меньшее t-u-v, если в момент t=u+v система находится в i+1-ом состоянии и для завершения обработки требований требуется время $\tau_p - x - n_i u$ непрерывной и безотказной работы одногоустройства;

третий член - в интервале времени $(u, u+du)$ откажет одно из рабочих или резервных устройств, за время u не завершится выполнение задания и восстановление устройства, находящегося в момент t=0 в ремонте; для реконфигурации системы потребуется время v; дообслуживание требований завершится системой, находящейся в состояние j , за время, меньшее t-u-v, если в момент t=u+v система находилась в i+1-ом состоянии и для завершения выполнения задания требуется непрерывная и безотказная работа одного устройства в течение времени $\tau_p - x - n_i u$.

Обозначим:

$$\Psi_{ij}(t,x) = \overline{F}(x)\Phi_{ij}(t,x) \qquad \left(\Psi_{ij}(t,0) = \Phi_{ij}(t)\right) ;$$

$$\overline{\psi}_{ij}(s,x) \doteq \Psi_{ij}(t,x); \qquad \overline{g}_{ij}(s) \doteq G^1(t) .$$

Соответственно

$$\Psi_{ij}(0,x) = 0, \quad x \neq \tau_p \ (i,j = \overline{1,n});$$

$$\Psi_{ij}(t,x) = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{при } x \le \tau_p \\ 0, & \text{при } x > \tau_p \end{cases} \qquad i,j = \overline{1,n}$$

Применив к (1) и (2) преобразование Лапласа-Стилтьеса и после несложного преобразования, получим:

$$\exp\left[-(s+C_i^0)x/n_i\right]\overline{\psi}_{ij}(s,x) = \left\{\delta_{ij}\exp\left[-(s+C_i^0)\tau_р/n_i\right]\right\}/s + \left\{\left[(1-\delta_{in})\mu_1\overline{g}_{i,i+1}(s)\right]/n\right\}\times$$
$$\times\int_x^{\tau_р}\exp\left[-(s+C_i^0)\tau/n_i\right]\overline{\psi}_{i+1,j}(s,\tau)d\tau + \left[C_i\overline{g}_{i,i+1}(s)/n_i\right]\times\int_x^{\tau_р}\exp\left[-(s+C_i^0)\tau/n_i\right]\overline{\psi}_{i-1,j}(s,\tau)d\tau$$
$$i=\overline{2,n}, \quad j=\overline{1,n} \qquad (3)$$

$$\exp\left[-(s+C_i^0)x\right]\overline{\psi}_{1j}(s,x) = \delta_{1j}\left\{\exp[-(s+C_i^0)\tau_p]\right\}/s + \mu_1\overline{g}_{12}(s)\int_x^{\tau_p}\exp[-(s+C_1^0)\tau]\overline{\psi}_{2j}(s,\tau)d\tau +$$

$$+[\beta_1\mu_1\overline{g}_{0i}(s)/(\mu_1+s)]\int_x^{\tau_p}\exp[-(s+C_i^0)\tau]\cdot\overline{\psi}_{1j}(s,\tau)d\tau$$
$$i=1, \quad j=\overline{1,n} \qquad (4)$$

$$\Psi_{ij}(s,x) = \begin{cases} \delta_{ij}/s, & \text{при } x \le \tau_p \\ 0, & \text{при } x > \tau_p \end{cases} \qquad i,j = \overline{1,n}$$

Дифференцированием обеих сторон (3) и (4) по аргументу x ($\overline{\psi}_{ij}(s,x)$ - непрерывно - дифференцируемая функция от x на отрезке $0 \le x \le \tau_p$), система интегральных уравнений (3) и (4) приводится к нормальной системе второго порядка разностных, однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\overline{\psi}'_{ij}(s,x) - [(s+C_i^0)/n_i]\overline{\psi}_{ij}(s,x) + [(1-\delta_{in})\mu_1\overline{g}_{i,i+1}(s)/n_i]\times$$
$$\times\overline{\psi}_{i+1,j}(s,x) + [C_i\overline{g}_{i,i-1}(s)/n_i]\overline{\psi}_{i-1,j}(s,x) = 0 \qquad , \ i=\overline{2,n} \qquad (5)$$

$$\overline{\psi}'_{ij}(s,x)+[(\beta_1\mu_1\overline{g}_{01}(s)/(s+\mu_1)-(s+C_1^0)/n_1]\cdot\overline{\psi}_{1j}(s,x)+\mu_1\overline{g}_{12}(s)\overline{\psi}_{2j}(s,x)=0,$$
$$i=\overline{2} \qquad j=\overline{1,n} \tag{6}$$

Обозначим время , необходимое для завершения выполнение задания , начавшихся в момент t=0, через y. Заменим в (5) и (6) x на $\tau_{\text{p}}-y$ и переходя к преобразованию Лапласа по второму аргументу - y (с учетом того, что $\overline{\psi}_{ij}^0(s,y)=\delta_{ij}/s$, при y=0 и $\overline{\psi}_{ij}^0(s,y)=0$, при y<0), получим:

$$-[\omega\overline{\overline{\psi}}_{ij}^0(s,\omega)-\delta_{ij}/s]-[(s+C_i^0)/n_i]\overline{\overline{\psi}}_{i,j}^0(s,\omega)+[(1-\delta_{in})\mu_1\overline{g}_{i.i+1}(s)/n_i]\overline{\overline{\psi}}_{i+1,j}(s,\omega)+$$
$$+(C_i\overline{g}_{i,i-1}(s)/n_i)\cdot\overline{\overline{\psi}}_{i-1,j}^0(s,\omega)=0 \tag{7}$$

$$i=\overline{2,n}\ ,\ j=\overline{1,n}\ ,\ \overline{\overline{\psi}}_{n+1,j}^0(s,\omega)=0.$$

$$-[\omega\overline{\overline{\psi}}_{ij}^0(s,\omega)-\delta_{ij}/s]+[\beta_1\mu_1\overline{g}_{01}(s)/(s+\mu_1)-(s+C_1^0)]\cdot\overline{\overline{\psi}}_{1,j}^0(s,\omega)+\mu_1\overline{g}_{12}(s)\overline{\overline{\psi}}_{2j}(s,\omega)=0 \tag{8}$$

Обозначим через D квадратную матрицу коэффициентов при неизвестных $\overline{\overline{\psi}}_{ij}(s,x)$ системы уравнений (7) и (8), а её определитель через $|D|$:

$$D=\begin{vmatrix} -\omega-\dfrac{\beta_1\mu_1\overline{g}_{01}(s)}{s+\mu_1}+s+C_1^0 & \mu_1\overline{g}_{12}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ [C_2^0\overline{g}_{21}(s)/n_2] & -[\omega+(s+C_2^0)/n_2] & [\mu_1 g_{23}(s)/n_2] & \cdots & 0 \\ 0 & [C_3^0\overline{g}_{32}(s)/n_3] & -[\omega+(s+C_3^0)/n_3] & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -[\omega+(s+C_n^0)/n_n] \end{vmatrix}$$

После решения системы уравнений (7) и (8) через определители и ряда преобразовании окончательно получаем:

$$\overline{\psi}_{ij}^0(s,y)=\left[\frac{(-1)^{i-j+1}}{s}\prod_{\upsilon=j+1}^{i}C_\upsilon^0\overline{g}_{\upsilon,\upsilon-1}(s)/n_\upsilon\right]\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{D_{j-1}(s,\omega_k)\Delta_{n-i}(s,\omega_k)}{\left|D\ (s,\omega)\right|'_{\omega=\omega_k}}\cdot e^{\omega_k(\tau_{\text{з}}-x)},$$
$$i\geq j; \tag{9}$$

$$\overline{\psi}_{ij}^0(s,y)=[\frac{(-1)^{i-j+1}}{s}\mu_1^{j-i}\prod_{\upsilon=i}^{j-1}\frac{\overline{g}_{\upsilon,\upsilon+1}(s)}{n_\upsilon}]\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{D_{i-1}(s,\omega_k)\Delta_{n-j}(s,\omega_k)}{\left|D\ (s,\omega)\right|'_{\omega=\omega_k}}\cdot e^{\omega_k(\tau_{\text{з}}-x)}$$
$$,\qquad i<j \tag{10}$$

здесь, $\left|D(s,\omega)\right|'_{\omega=\omega_k}=-[D_{n-1}(s,\omega_k)+\sum_{j=2}^{n}\frac{(D_{n-j}(s,\omega_k))^2}{D_{n-1}(s,\omega_k)}\cdot\prod_{\upsilon=1}^{j-1}B_{n-\upsilon+1}^0(s)]$.

если подставит в (10) x=0, получим: $\overline{\psi}_{ij}^{\,0}(s,\tau_{\delta}) = \overline{\psi}_{ij}(s,0) = \overline{\Psi}_{ij}(s) = \Phi_{ij}(s)$ и соответственно $\overline{\varphi}_{ij}(s) = S\overline{\Phi}_{ij}(s)$, чем определена искомая функция в форме Лапласа.

4. Литература

1. Микадзе И.С. Какубава Р.В. вероятностная характеристика производительности дуплексной вычислительной системы. Сообщения АН ГССР, 84, № 3,1976.
2. Микадзе И.С. Какубава Р.В. К вопросу осуществимости выполнения задания ЭВМ с учетом надежности и достоверности аппаратуры контроля. Сообщения АН ГССР, 87, № 3,1977.
3. Р.Какубава Об одной модели ЭВМ с отказами. Сообщения АН ГССР, 1980.
4. Микадзе И.С. Курцер М.Ш. К вопросу определении коэффициента производительности технической системы с учетом её надежности. Сообщения АН ГССР, N2,1985
5. Микадзе И.С. Джоджуа З.С. Анализ надежности технических систем с разнородными отказами. Сборник научных работ "ИНТЕЛЕКТ",№3,1998.
6. Джоджуа З. С. Об одном способе определения интервального коэффициента готовности. Georgian Electronic Scientific journal: Comuter Science and Telecommunications 2006, №3(10)

მრავალპროცესორიან გამოთვლით სისტემებში ამოცანის ამოხსნის ალბათობის განსაზღვრის შესახებ დროითი რეზერვის არსებობისას

ზაურ ჯოჯუა, ნინო ჯოჯუა, მიქაძე ილია ზ.

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

დამუშავებულია მრავალპროცესორიან (მრავალმანქანიან) გამოთვლით სისტემებში (მპგს) ამოცანის გადაწყვეტის ალბათობის განსაზღვრის ანალიზური მოდელი, როდესაც სისტემაში მოქმედებს მტყუნებათა პუასონისებური ნაკადი და არსებობს ამოცანის ამოხსნის დროითი რეზერვი. ამოცანის გადაწყვეტის დროის განაწილებას აქვს ერთეულოვანი ფუნქციის სახე. მტყუნებული პროცესორების აღდგენის დრო განაწილებულია მაჩვენებლიანი კანონით. სისტემის რეკონფიგურაციის დრო განაწილებულია ნებისმიერი კანონით. შემოტანილია ამოცანის მოცემულ დროში გადაწყვეტის ალბათობის ფუნქცია და შედგენილია შესაბამისი ანალიზური გამოსახულებები. ლაპლას-სტილტესის მეთოდით რიგი გარდაქმნების შემდეგ მიღებულია წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა, რომლის ამოხსნა საბოლოოდ იძლევა ამოცანის გადაწყვეტის ალბათობის ფუნქციის სახეს ლაპლასის ფორმაში.

ON METHOD OF DETERMINING THE PROBABILIRY OF SOLVING TASKS ON MULTIPROCESSOR COMPUTER SYSTEMS IN THE PRESENCE OF TIME RESERVE

Jojua Z.S., Jojua N.M., Mikadze I.Z.

Georgian Technical University

Summary

An analitical model of determining the probability of performing tasks on multiprocessor (multimachine) computer system when existing a Poisson failure flow and in the presence of time reserve for performance of a task is being considered in the paper submitted. The task performance time distributed in the form of the unit function for a fixed number of processors is considered. The recovery time of the failed processor is alloted by the exponential law. The reconfiguration time of the system is distributed by an arbitrary law. The function of probability of solving a task in the given time has been introduced and the proper analitical expresssions have been admited. After a whole series of transformations using Laplas-Stilties methods the linear algebraic equations system has been obtained. The solution of the system obtained will finally give the function of probability of solving the task in the form of Laplas.