არაწრფივი სისტემების ეკვივალენტურ კომპლექსური კოეფიციენტის განსაზღვრის საკითხისათვის

ნინო მჭედლიშვილი, თეიმურაზ იმედაძე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

სამუშაოს მიზანია არაწრფივი სისტემების ანალიზის გარკვეული კლასის ამოცანის გადაწყვეტა, კერძოდ, კვლევის მეთოდების ორ დიდ ჯგუფს: ჰარმონიული ბალანსისა და ობიექტთა დროის სივრცეში ფუნქციონალური აღწერის მეთოდებს შორის კავშირის დადგენა. საკვლევი სისტემის სტრუქტურა წარმოადგენს მიმდევრობით ჩართულ წრფივ დინამიკურ და არაწრფივ სტატიკურ ნაწილებს (ვინერის და ჰამერშტეინის მოდელები), რომლებიც აღწერილია ვოლტერას მწკრივის საშუალებით. დამუშავებულია ფართო კლასის არაწრფივი დინამიკური სისტემების გაძლიერების კომპლექსური კოეფიციენტის მათემატიკური მოდელის მიღების ალგორითმი.

საკვანძო სიტყვები: არაწრფივი სისტემები. ჰარმონიული ბალანსის მეთოდი. ვოლტერას მწკრივი. ვინერის და ჰამერშტეინის მოდელები.

1. შესავალი

არაწრფივი სისტემების ანალიზი დღემდე წარმოადგენს რთულ პრობლემას და ამიტომ მას მკვლევარები საკმაოდ დიდ დროს უთმობენ. ყოველი გარკვეული სიახლე ამ ამოცანათა გადაწყვეტაში კიდევ ერთი წინგადადგმული ნაბიჯია აღნიშნული კლასის გამოკვლევაში. ჩვენ მიზნად დავისახეთ დაგვემყარებინა კავშირი კვლევის ორ დიდ ჯგუფს შორის: ჰარმონიული ბალანსისა და ობიექტთა დროით სივრცეში ფუნქციონალური აღწერის მეთოდებს შორის. ამ ამოცანის გადაწყვეტა მოგვცემდა საშუალებას მიგვეღო არაწრფივი სისტემების ანგარიშისა და კვლევის ისეთი მათემატიკური გამოსახულებანი, რომელთა პრაქტიკული გამოყენება საკმაოდ მოსახერხებელი იქნებოდა.

2. ძირითადი ნაწილი

არაწრფივი დინამიკური ობიექტების მათემატიკური მოდელის სახით განვიხილოთ კარგად ცნობილი ვოლტერას ფუნქციონალური მწკრივის გამოსახულება:

$$y(t)=\omega_0+\sum_{k=1`}^{\infty}\int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty}\omega_k(\tau_1,\ldots,\tau_k)\bigcap_{i=1}^{k}x(t-\tau_k)d\tau_k \qquad (1)$$

იმ კლასისათვის, როდესაც სტრუქტურა შედგება მიმდევრობით ჩართულ წრფივი დინამიკური და არაწრფივი სტატიკური ნაწილებით. გამოვიყენოთ ჰარმონიული ბალანსის მეთოდი და დავამყაროთ კავშირი (1) გამოსახულებასა და გაძლიერების ეკვივალენტურ კომპლექსურ კოეფიციენტს შორის. ჩავთვალოთ, რომ საწყისი პირობები ნულოვანია, მოდელს გააჩნია ზემოთ ნახსენები სტრუქტურა და არაწრფივობა წარმოდგენილია ხარისხოვან მწკრივად:

$$F(z)=\sum_{i=1}^{\infty}C_i z^i\ . \qquad (2)$$

ვინერის მოდელისათვის (მოდელში ჯერ არის წრფივი ნაწილი, შემდეგ არაწრფივი და მასზე მოქმედებს სიგნალი $x(t)=A\cos(\omega t)$), გამოსავალი სიგნალის ვოლტერას მწკრივი მიიღებს სახეს:

$$y(t)=\sum_{i=1`}^{\infty}C_i A^i\left(\int_0^{\infty}\omega(\tau)\cos(t-\tau)d\tau\right)^i . \qquad (3)$$

(3) გამოსახულების გარდაქმნით ვღებულობთ:

$$y(t)=\sum_{i=1`}^{\infty}\left(A_k\cos k\omega t+B_k\sin k\omega t\right). \qquad (4)$$

ჰარმონიული ბალანსის ჰიპოთეზის გათვალისწინებით (4) მიიღებს სახეს:

$$y(t) \approx y_1(t) = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t\,, \qquad (5)$$

სადაც A_1 და B_1 კოეფიციენტების გამოსახულებები მოყვანილია 1-ელ ცხრილში.

ცხრ. 1

A_1 და B_1 კოეფიციენტების გამოსახულებები	მიღებული აღნიშვნები
$A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2-2n} \binom{2n-1}{n-1} a\left(a^2 + b^2\right)^{n-1} C_{2n-1} A^{2n-1}$	$a = \int_0^{\infty} \omega(\tau) \cos \omega\tau d\tau$
$B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2-2n} \binom{2n-1}{n-1} b\left(a^2 + b^2\right)^{n-1} C_{2n-1} A^{2n-1}$	$b = \int_0^{\infty} \omega(\tau) \sin \omega\tau d\tau$

(5) გვაძლევს გაძლიერების ეკვივალენტური კომპლექსური კოეფიციენტის მიღების საშუალებას:

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = a_1^*(A,\omega) + jb_1^*(A,\omega) \qquad (6)$$

სადაც

$$a_1^*(A,\omega) = A_1(\omega)A^{-1} \quad \text{და} \quad b_1^*(A,\omega) = -B_1(\omega)A^{-1} \qquad (7)$$

წარმოადგენს ჰარმონიული გაწრფივების კოეფიციენტებს.

თუ გამოვიყენებთ ცხრ.1-ს და (7) გამოსახულებებს, ჰარმონიული გაწრფივების კოეფიციენტები მიიღებს სახეს:

$$a_1^*(A,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2-2n} \binom{2n-1}{n-1} \cdot a\left(a^2 + b^2\right)^{n-1} C_{2n-1} A^{2n-2}$$

და

$$b_1^*(A,\omega) = -a_1^*(A,\omega) \cdot \frac{b}{a} \qquad (8)$$

მიღებული (8) გამოსახულებათა გამოთვლა შესაძლებელია ინტეგრირების რიცხვითი მეთოდების გამოყენებით ან ინტეგრალქვეშა გამოსახულების აპროქსიმაციით. ჩვენი აზრით, მიზანშეწონილია მეორე მეთოდის გამოყენება, რადგანაც კვლევის დროს ხშირად იყენებენ არაწრფივ მოდელთა პარამეტრიზაციას, მაგალითად, ვოლტერას ბირთვის პარამეტრიზაცია:

$1.\,\omega(\tau) = C\exp\left(-\frac{\tau}{T}\right)$; $2.\,\omega(\tau) = C\exp\left(-\frac{\tau}{T}\right)\sin \beta\tau$; $3.\,\omega(\tau)$ გაიშლება ლაგერის მწკრივად.

სამივე შემთხვევაში (8)-ის გამოთვლები მარტივია და დადის შემდეგ ინტეგრალზე:

$$\int_0^{\infty} e^{-a\tau} \cos \omega\tau d\tau = \frac{a}{a^2 + \omega^2} \quad \text{და} \quad \int_0^{\infty} e^{-a\tau} \sin \omega\tau d\tau = \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \qquad (9)$$

მაგალითისათვის დავუშვათ, რომ წრფივი ნაწილი მოცემულია $\omega(\tau) = \frac{k}{T}\exp\left(-\frac{\tau}{T}\right)$ პარამეტრული მოდელით, მაშინ (9)-ის გათვალისწინებით, ჰარმონიული გაწრფივების კოეფიციენტის საანგარიშო მნიშვნელობები მიიღებს სახეს:

$$a_1^*(A,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2-2n} \binom{2n-1}{n-1} C_{2n-1} A^{2n-2} \frac{K^{2n-1}}{\left(1+\omega^2 T^2\right)^n}$$

და

$$b_1^*(A,\omega) = -a_1^*(A,\omega)\omega T .$$

ანალოგიურად მიღებულია ვოლტერას ბირთვის დანარჩენი შემთხვევისთვისაც $a_1^*(A,\omega)$ და $b_1^*(A,\omega)$ კოეფიციენტების მნიშვნელობანი.

ჰამერშტეინის მოდელის შემთხვევაში (მოდელში ჯერ არის არაწრფივი ნაწილი, შემდეგ წრფივი), ვოლტერას მწკრივი მიიღებს სახეს:

$$y(t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m A^m \int_0^{\infty} \omega(\tau)\cos^m \omega(t-\tau)d\tau \qquad (11)$$

მარტივი გარდაქმნების შედეგად (11) გამოსახულება დაიყვანება (4)-ის სახეზე A_1 და B_1 კოეფიციენტებით, რომლებიც მოცემულია მე-2 ცხრილში.

ცხრ. 2.

A_1 და B_1 კოეფიციენტების გამოსახულებები	მიღებული აღნიშვნები
$A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2-2n}\binom{2n-1}{n-1} C_{2n-1} A^{2n-1} a_1$	$a_1 = \int_0^{\infty} \omega(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau$
$B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2-2n}\binom{2n-1}{n-1} C_{2n-1} A^{2n-1} b_1$	$b_1 = \int_0^{\infty} \omega(\tau)\sin(\omega\tau)d\tau$

ზემოთ განხილულის ანალოგიურად შეიძლება გამოითვალოს ჰარმონიული გაწრფივების კოეფიციენტები:

$$a_1^*(A,\omega) = a_n \int_0^{\infty} \omega(\tau)\cos\omega\tau d\tau \quad \text{და} \quad b_1^*(A,\omega) = -a_n \int_0^{\infty} \omega(\tau)\sin\omega\tau d\tau , \qquad (12)$$

სადაც $a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2-2n}\binom{2n-1}{n-1} C_{2n-1} A^{2n-2}$.

ხოლო თუ მხედველობაში მივიღებთ ვოლტერას უკვე აღნიშნულ პარამეტრულ ბირთვებს $\left(\omega(\tau) = \frac{k}{T}\exp\left(-\frac{\tau}{T}\right)\right)$ და (9) გამოსახულებებს, (12) მიიღებს სახეს:

$$a_1^*(A,\omega) = -\frac{K}{(1+\omega^2T^2)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2-2n}\binom{2n-1}{n-1} C_{2n-1} A^{2n-2}$$

და

$$b_1^*(A,\omega) = -a_1^*(A,\omega)\omega T \qquad (13)$$

3. დასკვნა

დამუშავებულია არაწრფივი სისტემების ფართო კლასის დინამიკური ობიექტების გაძლიერების კომპლექსური კოეფიციენტის სახით მათემატიკური მოდელის მიღების ალგორითმი, როდესაც მოდელი აღწერილია ვოლტერას მწკრივის საშუალებით და მისი სტრუქტურა წარმოდგენილია მიმდევრობით ჩართული წრფივი დინამიკური და არაწრფივი სტატიკური ნაწილებით.

განხილულია ჰამერშტეინის და ვინერის მოდელები. მიღებულია გაწრფივების კომპლექსური კოეფიციენტის გამოსახულებანი (8) და (12) (1) მოდელში წევრთა რაოდენობის შეზღუდვის გარეშე და მათი საანგარიშო გამუსახულებანი (10) და (13) წრფივი ნაწილის გარკვეული პარამეტრული მოდელის შემთხვევაში.

4. ლიტერატურა

1. ა. გუგუშვილი და სხვ. მართვის თეორია. არაწრფივი სისტემები. წიგნი 2. თბილისი.: სტუ-ს გამომცემლობა, 1999.
2. Anand D.K. Introduction to Control Systems. New-york, 1974.
3. Хаимов С., Стойчев И. Приложение на частотни методы за анализ на нелинейти САУ описани с функционални рядове на Волтера. Автом. и изчисл.техн., 1981.-№5, 5-11с. София.

ABOUT A QUESTION OF DEFINITION OF EQUIVALENT COMPLEX FACTOR OF NONLINEAR SYSTEMS

Mchedlishvili Nino, Imedadze Teimuraz
Georgian Technical University

Summary

The analysis of nonlinear systems till now represents a challenge. The purpose of the given work is the decision of a problem of the certain class, namely, an establishment of communication between two big groups of methods of research: the method of harmonic balance and the functional description of objects of time area.

The structure of researched systems is represented consistently included linear dynamic and nonlinear static by parts (Wiener's models and Hamershtein's) which are described by series Volter. In article is defined the algorithm of mathematical model of wide class of nonlinear dynamic systems as complex factors of describing function. As a result of research expressions for calculation of complex factors of amplification are received.

О ВОПРОСЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНО КОМПЛЕКСНОГО КОЭФФИЦИЕНТА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Мчедлишвили Н., Имедадзе Т.
Грузинский Технический Университет

Резюме

Целью данной работы является решение задачи определенного класса анализа нелинейных систем, а именно, установление связи между двумя большими группами методов исследования: гармонического баланса и функционального описания объектов во временной области.

Структура исследуемых систем представляется последовательно включенными линейным динамическим и нелинейным статическим частями (модели Винера и Гамерштейна), которые описаны рядом Вольтерра. В работе представлен алгоритм получения математической модели широкого класса нелинейных динамических систем в виде комплексных коэффициентов усиления. В результате исследования получены выражения для расчета комплексных коэффициентов усиления.