ახალი ალგორითმი პროფილის ბლანტი სითხით გარსდენის ამოცანის გასათვლელად დამყარებული გარსდენის შემთხვევაში

თამაზ ობგაძე, ირმა დავითაშვილი
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

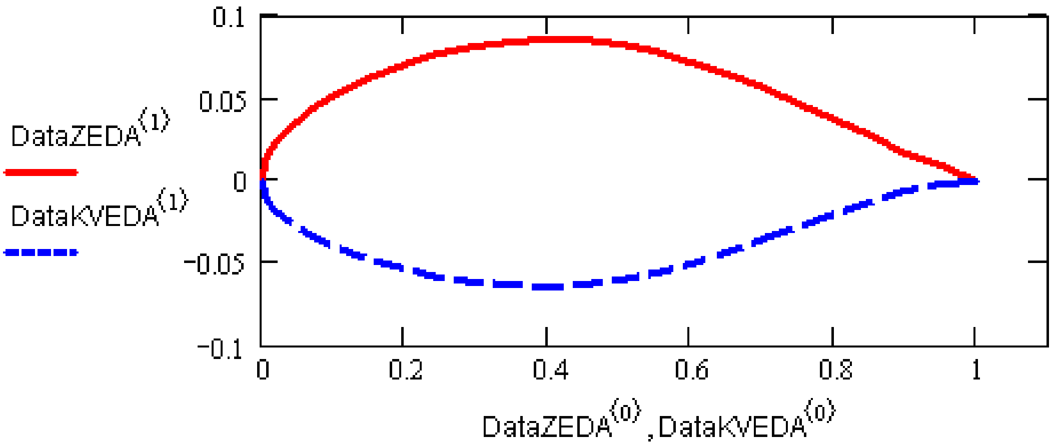
შემოთავაზებულია ალგორითმი, რომელიც ემყარება მექანიკის ძირითად კანონებს და კლასიკურ ექსპერიმენტებს. განვიხილავთ უკუმშ, ბლანტ სითხეს და შემდგომში, ქრისტიანოვიჩის გადათვლის ფორმულების მეშვეობით, გადავდივართ პროფილის აეროდინამიკურ მახასიათებლებზე კუმშვადი სითხეებისათვის. ნაშრომი ემყარება არაწრფივი დაპროგრამების მეთოდის გამოყენებას ინტეგრალური ცდომილების მინიმიზაციისათვის, როდესაც შემოფარგვლის პირობები წარმოადგენს მასის შენახვის კანონს და ბერნულის ინტეგრალურ განტოლებას ბლანტი სითხეებისათვის. გამოითვლება ტანგაჟის მომენტი და ამწევი ძალის კოეფიციენტი ნულოვანი დასმის კუთხისათვის.

1. შესავალი

პროფილის ბლანტი სითხით გარსდენის ამოცანების შესასწავლად, ხშირად გამოიყენება ნავიე-სტოქსის მათემატიკური მოდელი, რომლისთვისაც დამუშავებული ალგორითმები იმდენად რთულია და ცდომილება იმდენად დიდი, რომ აეროდინამიკის ამოცანებისათვის გამოუსადეგარი ხდება. ამიტომ, სათანადო გათვლები, უმეტესწილად, ხდება ნახევრადემპირიული ფორმულების დახმარებით.

2. ძირითადი ნაწილი

ახალი ალგორითმის დემონსტრირებისათვის განვიხილოთ თვითმფრინავის ფრთის პროფილის გარსდენის ამოცანა (ნახ.1):



ნახ.1

თვითმფრინავის ფრთა წარმოვადგინოთ პროფილის წერტილების კოორდინატების მატრიცების საშუალებით. ცალ-ცალკე ავაგებთ პროფილის ზედა და ქვედა ნაწილების შესაბამის მატრიცებს. შემდეგ, ვაგებთ პროფილის პოლინომიალური აპროქსიმაციის პოლინომს და შედეგს ვამოწმებთ გრაფიკის მეშვეობით. სიჩქარეთა საძებნი ვექტორული ველის კომპონენტებს ვეძებთ, როგორც ორი ცვლადის პოლინომებს უცნობი კოეფიციენტებით. უცნობ კოეფიციენტებს ვეძებთ არაწრფივი დაპროგრამების მეთოდის საშუალებით, როცა სასაზღვრო პირობები წარმოადგენს მიზან-ფუნქციას, ხოლო მასის შენახვის კანონი და ბერნულის განტოლება წარმოადგენს შემოფარგვლის პირობებს.

პროფილის ზედა და ქვედა ნაწილების კოორდინატების მატრიცები:

შევადგინოთ აღწერილი ალგორითმის პროგრამა Mathcad-ზე.

$$\text{DataZEDA} := \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.9502 & 0.0096 \\ 0.9004 & 0.0166 \\ 0.8506 & 0.02649 \\ 0.8006 & 0.03653 \\ 0.7507 & 0.04638 \\ 0.7006 & 0.05572 \\ 0.6505 & 0.06433 \\ 0.6007 & 0.07189 \\ 0.5502 & 0.07815 \\ 0.5 & 0.08271 \\ 0.4498 & 0.08522 \\ 0.3995 & 0.08569 \\ 0.3493 & 0.08426 \\ 0.2990 & 0.08123 \\ 0.2488 & 0.07658 \\ 0.1986 & 0.07018 \\ 0.1485 & 0.06175 \\ 0.0984 & 0.05069 \\ 0.0734 & 0.0438 \\ 0.0485 & 0.03557 \\ 0.0237 & 0.02506 \\ 0.0113 & 0.01805 \\ 0.0065 & 0.01422 \\ 0.0041 & 0.0117 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \qquad \text{DataKVEDA} := \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.9502 & -0.002077 \\ 0.9004 & -0.00617 \\ 0.8506 & -0.012867 \\ 0.8006 & -0.020425 \\ 0.7507 & -0.028274 \\ 0.7006 & -0.036096 \\ 0.6505 & -0.043587 \\ 0.6007 & -0.050331 \\ 0.5502 & -0.056208 \\ 0.5 & -0.06065 \\ 0.4498 & -0.063334 \\ 0.3995 & -0.064272 \\ 0.3493 & -0.06362 \\ 0.2990 & -0.061689 \\ 0.2488 & -0.058499 \\ 0.1986 & -0.053966 \\ 0.1485 & -0.047881 \\ 0.0984 & -0.03974 \\ 0.0734 & -0.034626 \\ 0.0485 & -0.0284 \\ 0.0237 & -0.020344 \\ 0.0113 & -0.014559 \\ 0.0065 & -0.011218 \\ 0.0041 & -0.008906 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

მიახლოვების პოლინომის ხარისხი

$k := 3$

მონაცემთა მატრიცების ფორმირება:

$\text{VXZEDA} := \text{DataZEDA}^{\langle 0 \rangle}$

$\text{VYZEDA} := \text{DataZEDA}^{\langle 1 \rangle}$

$\text{VXKVEDA} := \text{DataKVEDA}^{\langle 0 \rangle}$

$\text{VYKVEDA} := \text{DataKVEDA}^{\langle 1 \rangle}$

$\text{VSZEDA} := \text{regress}(\text{VXZEDA}, \text{VYZEDA}, k)$

$\text{VSKVEDA} := \text{regress}(\text{VXKVEDA}, \text{VYKVEDA}, k)$

$\text{fzeda}(x) := \text{interp}(\text{VSZEDA}, \text{VXZEDA}, \text{VYZEDA}, x)$

$\text{fkveda}(x) := \text{interp}(\text{VSKVEDA}, \text{VXKVEDA}, \text{VYKVEDA}, x)$

$\text{coeffszeda} := \text{submatrix}(\text{VSZEDA}, 3, \text{length}(\text{VSZEDA}) - 1, 0, 0)$

$\text{coeffskveda} := \text{submatrix}(\text{VSKVEDA}, 3, \text{length}(\text{VSKVEDA}) - 1, 0, 0)$

$\text{azeda} := \text{coeffszeda}$

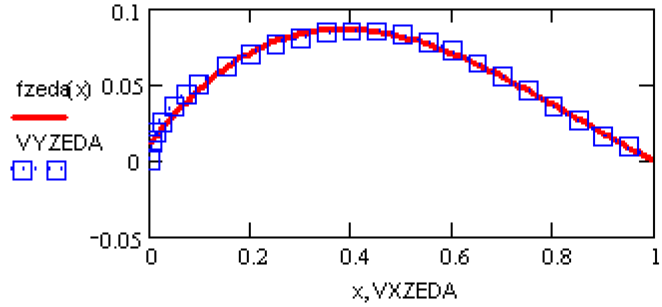
$\text{akveda} := \text{coeffskveda}$

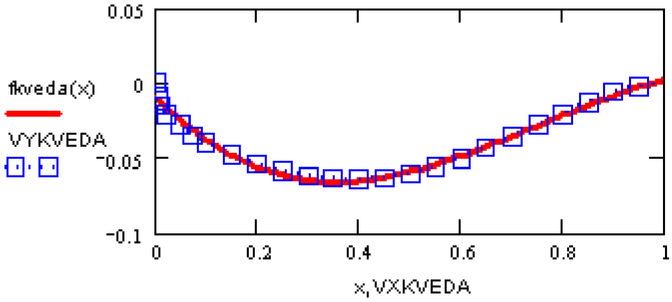
$$\text{fzeda}(x) := \sum_{i=0}^{3} \text{azeda}_{3-i} \cdot x^{3-i}$$

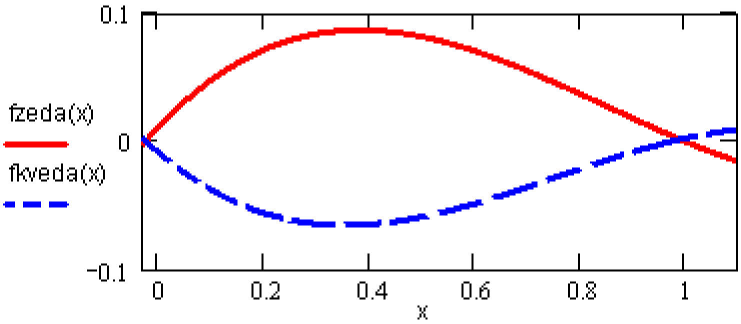
$$\text{fkveda}(x) := \sum_{i=0}^{3} \text{akveda}_{3-i} \cdot x^{3-i}$$

$$\text{akveda} = \begin{pmatrix} -0.009 \\ -0.357 \\ 0.656 \\ -0.289 \end{pmatrix} \qquad \text{azeda} = \begin{pmatrix} 0.011 \\ 0.438 \\ -0.739 \\ 0.289 \end{pmatrix}$$

შემოწმება:







X0=Xmin and XN=Xmax; Y0=Ymin and YN=Ymax; q - პროფილის წერტილთა რაოდენობა:

$X0 := -1.5 \quad XN := 1.5$

$Y0 := -1 \quad YN := 1$

$q := 25 \quad \rho := 1000$

$k1 := 4 \quad g := 9.8$

$a1 := -1 \quad b1 := 1$

$a11 := -0.1 \quad b11 := 0.1$

საბაზისო ფუნქციათა სისტემები:

$\phi(x, y, m, n) := x^m \cdot y^n$

$\psi(x, y, m, n) := x^m \cdot y^n$

$\sigma(x, y, m, n) := x^m \cdot y^n$

საძებნი ფუნქციების გაშლა საბაზისო სისტემების მიმართ. **u, v** სიჩქარის ვექტორის კომპონენტებია, **p**- წნევის ფუნქციაა.

$$u(x, y, \alpha) := \sum_{m=0}^{k1} \sum_{n=0}^{k1} \alpha_{m,n} \cdot \phi(x, y, m, n)$$

$$v(x, y, \beta) := \sum_{m=0}^{k1} \sum_{n=0}^{k1} \beta_{m,n} \cdot \psi(x, y, m, n)$$

$$p(x,y,\gamma) := \sum_{m=0}^{k1} \sum_{n=0}^{k1} \gamma_{m,n} \cdot \sigma(x,y,m,n)$$

რეინოლდსის რიცხვი და მახის რიცხვი:

$Re := 3.9 \cdot 10^6$

$M := 0.69$

სასაზღვრო პირობები:

$$RZEDA(\alpha,\beta,\gamma) := \sum_{s=0}^{q} \left(u\left(VXZEDA_s, VYZEDA_s, \alpha\right)^2 + v\left(VXZEDA_s, VYZEDA_s, \beta\right)^2 \right)$$

$$RKVEDA(\alpha,\beta,\gamma) := \sum_{s=0}^{q} \left(u\left(VXKVEDA_s, VYKVEDA_s, \alpha\right)^2 + v\left(VXKVEDA_s, VYKVEDA_s, \beta\right)^2 \right)$$

$$IGR1(\alpha,\beta,\gamma) := \int_{Y0}^{YN} \left[u(X0,y,\alpha) - \left(1-y^2\right)\right]^2 \cdot 10\, dy + \int_{Y0}^{YN} v(X0,y,\beta)^2\, dy$$

ჯამური-ინტეგრალური ცდომილება:

$I(\alpha,\beta,\gamma) := IGR1(\alpha,\beta,\gamma)$

$I(\alpha,\beta,\gamma) := I(\alpha,\beta,\gamma) + (RZEDA(\alpha,\beta,\gamma) + RKVEDA(\alpha,\beta,\gamma)) \cdot 1C$

საწყისი მონაცემების არჩევა მონტე-კარლოს მეთოდით:

$m := 0..\, k1$

$n := 0..\, k1$

$\alpha_{m,n} := a1 + (b1 - a1) \cdot rnd(1)$

$\beta_{m,n} := a11 + (b11 - a11) \cdot rnd(1)$

$\gamma_{m,n} := a1 + (b1 - a1) \cdot rnd(1)$

$$\alpha = \begin{pmatrix} -0.997 & -0.613 & 0.17 & -0.299 & 0.646 \\ -0.652 & 0.421 & -0.392 & -0.817 & -0.705 \\ 0.977 & -0.762 & -0.982 & 0.063 & 0.204 \\ -0.668 & -0.098 & -0.886 & 0.567 & 0.04 \\ 0.752 & 0.912 & 0.079 & -0.076 & 0.724 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 0.056 & 0.099 & 0.022 & -0.047 & 0.068 \\ -0.025 & 0.035 & -0.098 & -0.045 & 0.018 \\ 0.068 & -0.003 & 0.049 & -0.008 & 0.049 \\ 0.02 & 0.047 & 0.014 & -0.07 & -0.015 \\ 0.003 & 0.05 & -0.066 & -0.002 & 0.04 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} -0.705 & -0.717 & 0.386 & -0.147 & 0.933 \\ -0.693 & 0.643 & -0.617 & 0.634 & -0.689 \\ 0.464 & -0.441 & 0.364 & 0.444 & -0.754 \\ 0.669 & 0.034 & -0.148 & 0.899 & 0.099 \\ -0.057 & 0.694 & -0.088 & 0.966 & 0.478 \end{pmatrix}$$

მასის შენახვის კანონი და ბერნულის განტოლება ბლანტი სითხეებისათვის:

$$\int_{Y0}^{YN} u(X0, y, \alpha)\, dy = \int_{Y0}^{YN} u(XN, y, \alpha)\, dy + \int_{X0}^{XN} (v(x, Y0, \beta) + v(x, YN, \beta))\, dx$$

$$\int_{Y0}^{YN} u(X0, y, \alpha)\, dy \geq 0$$

$$\int_{Y0}^{YN} u(X0 + 0.5, y, \alpha)\, dy \geq 0$$

ტურბულენტური დინება:

$$\int_{Y0}^{YN} \left[\frac{p(X0, y, \gamma)}{\rho \cdot g} + \frac{1.1\left(u(X0, y, \alpha)^2 + v(X0, y, \beta)^2\right)}{2 \cdot g}\right] dy = \int_{Y0}^{YN} \left[\frac{p(XN, y, \gamma)}{\rho \cdot g} + \frac{1.1\left(u(XN, y, \alpha)^2 + v(XN, y, \beta)^2\right)}{2 \cdot g} + \frac{0.026}{(YN - Y0)^{0.3}} \cdot \frac{XN - X0}{YN - Y0} \cdot \frac{u(XN, y, \alpha)^2 + v(XN, y, \beta)^2}{2 \cdot g}\right] dy$$

$S := \text{Minimize}\,(I, \alpha, \beta, \gamma)$

$\alpha := S_0$

$\beta := S_1$

$\gamma := S_2$

$$S = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.008 & -0.214 & 0.042 & -0.123 & 0.142 \\ -0.059 & 0.175 & -0.131 & -0.132 & -0.162 \\ 0.101 & -0.379 & -0.328 & 0.034 & 0.046 \\ -0.095 & -0.017 & 0.338 & 0.221 & 0.021 \\ 0.072 & 0.321 & 0.018 & -0.03 & 0.038 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.003 & 0.025 & 0.011 & -0.012 & 0.037 \\ -0.007 & 0.018 & -0.024 & -0.022 & 0.004 \\ 0.016 & -0.001 & 0.025 & -0.002 & 0.026 \\ 0.005 & 0.024 & 0.004 & -0.034 & -0.004 \\ 0.002 & 0.013 & -0.031 & -0 & 0.021 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.176 & -0.358 & 0.096 & -0.073 & 0.233 \\ -0.345 & 0.161 & -0.308 & 0.159 & -0.344 \\ 0.116 & -0.22 & 0.091 & 0.222 & -0.188 \\ 0.339 & 0.009 & -0.074 & 0.225 & 0.05 \\ -0.014 & 0.347 & -0.022 & 0.483 & 0.12 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$u(x, y, \alpha) := \sum_{m=0}^{k1} \sum_{n=0}^{k1} \alpha_{m,n} \cdot \phi(x, y, m, n)$$

$$v(x, y, \beta) := \sum_{m=0}^{k1} \sum_{n=0}^{k1} \beta_{m,n} \cdot \psi(x, y, m, n)$$

$$p(x, y, \gamma) := \sum_{m=0}^{k1} \sum_{n=0}^{k1} \gamma_{m,n} \cdot \sigma(x, y, m, n)$$

სიზუსტის შეფასებები:

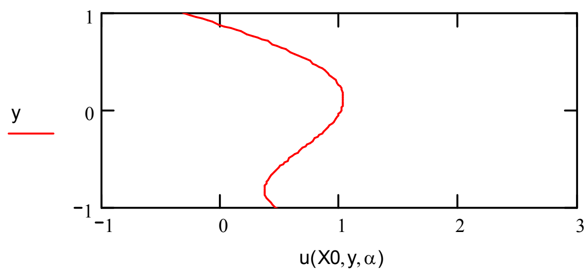
$IGR1(\alpha, \beta, \gamma) = 0.415$

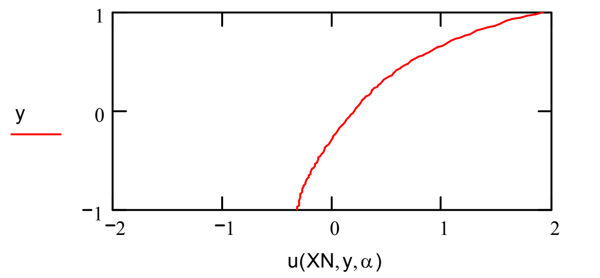
$RZEDA(\alpha, \beta, \gamma) = 0.006$

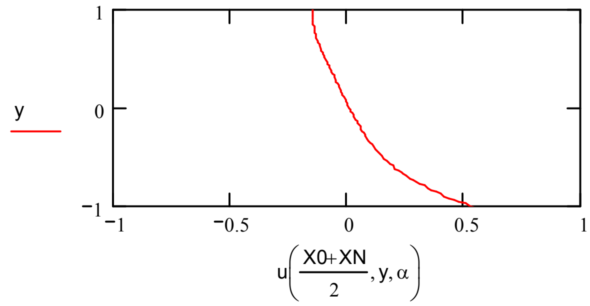
$RKVEDA(\alpha, \beta, \gamma) = 0.004$

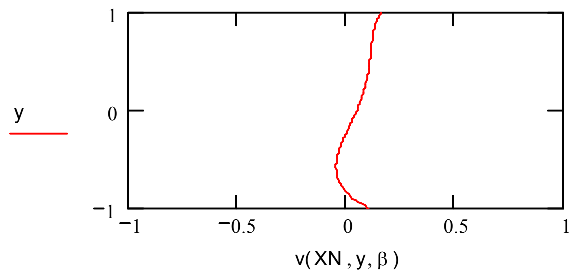
$I(S_0, S_1, S_2) = 0.514$

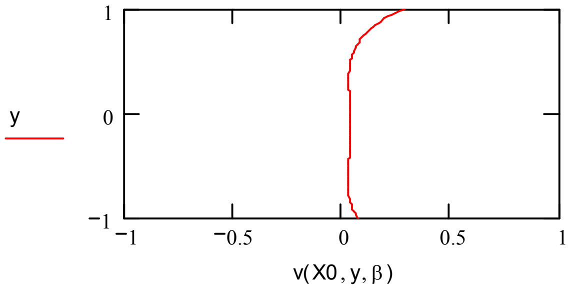
სიჩქარეთა ველის ეპიურები პროფილის წინ და პროფილის კვალში:



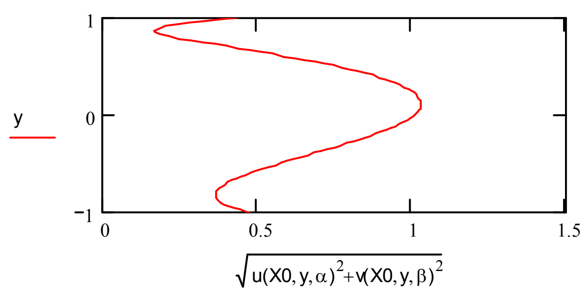


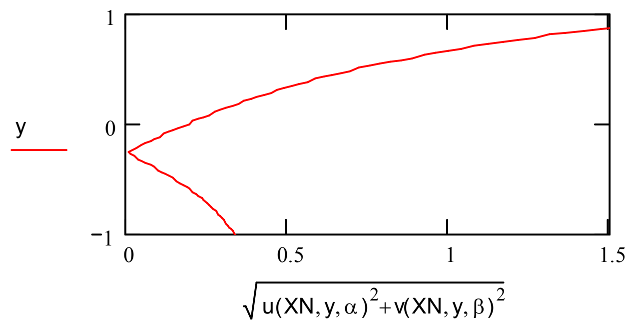






სიჩქარის სიდიდის ცვლილება პროფილის წინ და პროფილის კვალში:

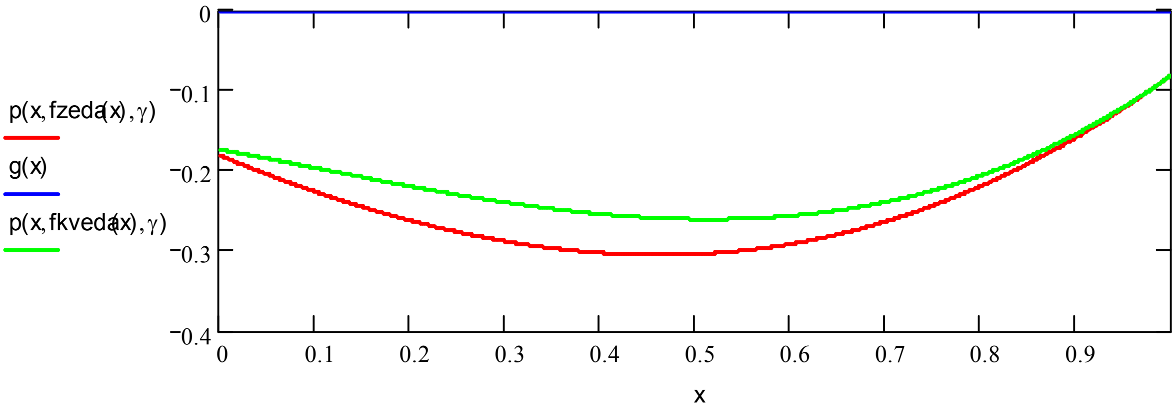




პროფილის ქორდა:

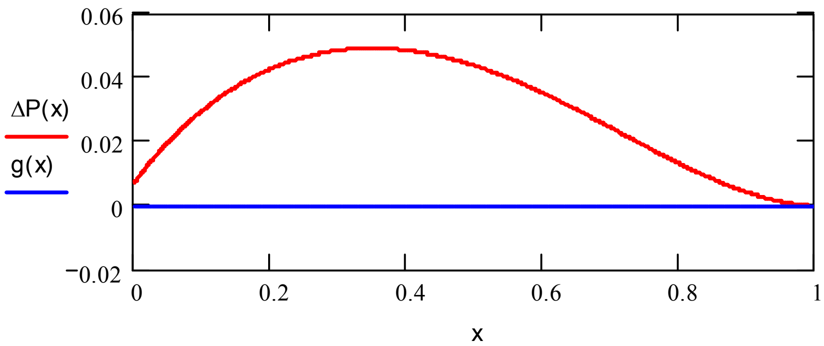
$g(x) := 0$

წნევის განაწილება პროფილის გასწვრივ:



წნევის გრადიენტის განაწილება პროფილის გასწვრივ:

$$\Delta P(x) := p(x, \text{fkveda}(x), \gamma) - p(x, \text{fzeda}(x), \gamma)$$



ამწევი ძალის კოეფიციენტის გამოთვლა:

$$CY := \int_0^1 \Delta P(x)\, dx$$

$$CY = 0.03$$

$$\frac{CY}{\sqrt{1 - M^2}} = 0.041$$

ტანგაჟის მომენტის კოეფიციენტის გამოთვლა (დადებითი CMz - აბრუნებს პროფილს კაბრირების მიმართულებით 0-ის მიმართ):

$$CMz := -\int_0^1 \Delta P(x) \cdot x\, dx$$

$$CMz = -0.012$$

$$\frac{CMz}{\sqrt{1 - M^2}} = -0.017$$

ლიტერატურა

1. Обгадзе Т.А., Прокошев В.Г. Вычислительная физика, Мин.обр.России, ВлГУ, 1999.
2. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირება (უწყვეტი მათემატიკური მოდელები),ტ.1., მონოგრაფია, საქართველოს ტექნ. უნივ., 2006.

NEW ALGORITHM FOR CALCULATION OF THE PROBLEM OF PROFILE FLOW AROUND WITH VISCOUS FLUID IN CASE OF STEADY-STATE FLOW AROUND

Obgadze Tamaz, Davitashvili Irma
Georgian Technical University

Summary

On order to study the problems of profile flow around with viscous fluid Navier-Stokes mathematical model is often used. The algorithms developed for this model are so complicated and the error is so grave that it becomes unsuitable for the problems of aerodynamics. Therefore, the correspondent calculations are mostly done with the help of semi empirical formulas. We construct an algorithm based on basic laws of mechanics and classical experiments. We consider incompressible viscous fluid and then, using calculation formulas, we go over to aerodynamic indices of a profile for compressible fluids. The article is based on using nonlinear programming method for minimization of integral error when boundary conditions represent mass conservation law and Bernoulli integral equation for viscous fluids

НОВЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЁТА ЗАДАЧИ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ПРОФИЛЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Обгадзе Т., Давиташвили И.
Грузинский Технический Университет

Резюме

При изучении задач обтекания вязкой жидкостью, часто применяют математическую модель Навье-Стокса, разработанные соответствующие алгоритмы настолько сложны и погрешности настолько высоки, что становятся малопригодными для аэродинамики. Поэтому, соответствующие расчёты на практике, основаны на полудэмпирические формулы и соотношения. Мы строим алгоритм, который основан на классические эксперименты и законы механики. Рассматриваем вязкую, несжимаемую жидкость и после этого пользуемся формулами пересчёта для перехода на аэродинамические показатели в случае сжимаемой жидкости. Работа основывается на методе нелинейного программирования для минимизации интегральной невязки, когда закон сохранения массы и интегральное уравнение Бернулли для вязких жидкостей представлены в виде ограничении.