ი. კუცია, ე. გუგუტიშვილი, ე. კუცია

ორგანზომილებიანი სპექტრალური ანალიზი

რეზიუმე

ორგანზომილებიანი სპექტრალური ანალიზი შეიძლება გამოყენებული იყოს სივრცულ მონაცემთა მასივებისათვის, სივრცულ-დროითი მონაცემთა მასივისათვის. ან დროითი მონაცემთა მასივის დამუშავებისას. ერთგანზომილებიანი სიგნალების დამუშავების კონცეფციის განზოგადება ორგანზომილებიანი სიგნალებისათვის არ შეიძლება. არსებობს რამდენიმე მეთოდი კერძოდ, ორგანზომილებიანი პერიოდოგრამის, ორგანზომილებიანი ჰიბრიდული და დისპერსიის მინიმუმის საფუძველზე აგებული მეთოდები.

საკვანძო სიტყვები: ორგანზომილებიანი, ერთგანზომილებიანი, სპექტრალური, მასივი, დისპერსია.

1. შესავალი

ორგანზომილებიანი სპექტრალური ანალიზი შეიძლება გამოყენებული იყოს სივრცულ მონაცემთა მასივებისათვის (მაგალითად, გამოსახულების დამუშავება), სივრცულ-დროითი მონაცემთა მასივისათვის (მაგალითად, ჰიდროლოკაციური, სეისმური და რადიოლოკაციური სიგნალების აპარატურის სინთეზის შემთხვევაში). ან დროითი მონაცემთა მასივის დამუშავებისას. ერთგანზომილებიანი სიგნალების დამუშავების კონცეფციის განზოგადება ორგანზომილებიანი სიგნალებისათვის არ შეიძლება. არსებობს რამდენიმე მეთოდი კერძოდ, ორგანზომილებიანი პერიოდოგრამის, ორგანზომილებიანი ჰიბრიდული და დისპერსიის მინიმუმის საფუძველზე აგებული მეთოდები [1].

2. ამოცანის დასმა

საერთოდ, უნდა აღინიშნოს, რომ ლიტერატურაში ორგანზომილებიანი სიგნალის სპექტრალური გამოკვლევის ექსპერიმენტალური რეზულტატების სიმცირის გამო ძალიან ძნელია სხვადასხვა მეთოდების მახასიათებლების შედარება. ძირითადად განიხილება გამოკვლევები, მონაცემთა მცირე ნაკრებისათვის და მხოლოდ რამდენიმე ორგანზომილებიანი პარამეტრებისათვის ძირითადად შევეხოთ ენერგიის ორგანზომილებიან სპექტალურ სიმკვრივეს.

$$S(f_1,f_2)=\left|X(f_1,f_2)\right|^2 \tag{1}$$

სადაც $X(f_1,f_2)$ ფურიეს ორგანზომილებიანი დისკრეტული გარდაქმნაა აქედან გამომდინარე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ პარსევალის ორგანზომილებიანი ფორმულა

$$\text{ენერგია}=T_1T_2\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[m,n]\right|^2=\int_{-1/2T_1}^{1/2T_2}\int_{-1/2T_1}^{1/2T_2}\left|X(f_1,f_2)\right|^2 df_1 df_2 \tag{2}$$

T_1, T_2 - დროის ინტერვალებია

არსებობს ორგანზომილებიანი სპექტრალური შეფასების ციფრული მეთოდბი, რომელთა ძირითადი პროცედურაა ორმაგი ჯამების გამოთვლა. მოცემულ მეთოდებს ახასიათებთ ერთი ნაკლი, არ არის დადგენილი კრებადობის რადიუსი [1]. ექსპეერიმენტალური შედეგები

$$\begin{array}{l} u_{11},\ u_{12}\ \ .\ .\ .\ u_{1n}\ \ .\ .\ . \\ u_{21},\ u_{22}\ \ .\ .\ .\ u_{2n}\ \ .\ .\ . \\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ - \\ u_{m1},\ u_{m2}\ \ .\ .\ .\ u_{mn}\ \ .\ .\ . \end{array} \tag{3}$$

ეს ცხრილი შეიძლება წარმოვადგინოთ აჯამვის სახით

$$\begin{array}{l} u_{11}+u_{12}+\ .\ .\ .\ u_{1n}+\ .\ .\ . \\ u_{21}+u_{22}+\ .\ .\ .\ u_{2n}+\ .\ . \\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ - \\ u_{m1}+u_{m2}+\ .\ .\ .\ u_{mn}+\ .\ . \end{array} \tag{4}$$

რომელსაც უწოდებენ ორმაგ მწკრივს. ის შეიძლება აღვნიშნოთ, როგორც

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{m,n} \quad \text{ან} \quad \sum_{m,n} u_{m,n}\,, \quad \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n}$$

ცხადია, რომ (4) ორმაგი მწკრივის, როგორც სტრიქონები ასევე სვეტები არის მარტივი მწკრივები. შემდეგში ჩვენ განვიხილავთ ორმაგი მწკრივების სტრიქონების ან სვეტების კრებადობას. (4) ჩანაწერი განისაზღვრება, როგორც ზღვარი ჯამის ზღვრების რიცხვების სტრიქონების მიხედვით

$$S' = \lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}(\lim_{h\to\infty}\sum_{j=1}^{n} u_{ij}) \tag{5}$$

(4) ჩანაწერი სვეტების მიხედვით განისაზღვრება გამოსახულებით

$$S'' = \lim_{n\to\infty}\sum_{j}^{n}(\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{n} u_{ij}) \tag{6}$$

აღვნიშნოთ ორმაგი მწკრივის i სტრიქონის ჯამი S_{i*}:

$$S_{i*} = \lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty} u_{ij} \tag{7}$$

მაშინ, ორმაგი მწკრივის სტრიქონების ჯამს ექნება სახე

$$S' = \lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m} S_{i*}\,. \tag{8}$$

ხოლო ორმაგი მწკრივის სვეტების ჯამს ექნება სახე

$$S'' = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} S_{*j} \tag{9}$$

(4) მწკრივის mn წევრების ჯამს ეწოდება მისი (m,n) კერძო ჯამი და აღინიშნება, როგორც $S_{m,n}$.

ორმაგი მწკრივი კრებადია და აქვს S ჯამი, თუ როგორიც არ უნდა იყოს $\varepsilon > 0$, მოიძებნება ისეთი m_0 და n_0, რომ $m > m_o$ და $n > n_0$ პირობებისას სრულდება უტოლობა

$$|S_{mn} - s| < \varepsilon \tag{10}$$

(4) მწკრივის კრებადობის პირობა S ჯამის გათვალიწინებით ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} S_{mn} = S\,. \tag{11}$$

$$u_{mn} = ap^{n-1}q^{m-1} \tag{12}$$

ჩავთვალოთ, რომ

$$|p|,\ |q| < 1;$$

მაშინ

$$S' = \frac{a}{(1-p)(1-q)}, \qquad S'' = \frac{a}{(1-p)(1-q)}, \tag{13}$$

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} ap^{j-1}q^{i-1} = a\frac{1-p^n}{1-p}\frac{1-q^m}{1-q}\,. \tag{14}$$

m და n უსასრულო ზრდისას გვექნება

$$S_{mn} = \lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} S_{mn} = \frac{a}{(1-p)(1-q)}\,. \tag{15}$$

კარგად ჩანს, რომ $|p|$, $|q|<1$ ორმაგი მწკრივი კრებადია, ამასთან S თანხვდება S' და S'' ჯამებს.

ე.ი. $S=S'=S''$. რაც ორმაგი მწკრივის აბსოლიტური კრებადობაა. ასეთი შემთხვევა ძალიან გავრცელებული და მნიშვნელოვანია. თუ $|p|$ და $|q|$ ერთი მნიშვნელობაც კი არ არის ერთზე ნაკლები, მაშინ შესაბამისი ორმაგი მწკრივი განშლადია.

იმისათვის, რომ დავიცვათ პირობა $|p|$, $|q|<1$ საჭიროა გამოვიყენოთ აჯამვის დისტრიბუტულობის კანონი გამრავლების მიმართ

$$c(u_1+u_2+\ldots+u_n)=cu_1+cu_2+\ldots\_cu_n \tag{16}$$

ამასთან p და q გამოითვლებიან ფორმულებით

$$\frac{u_{m+1,n}}{u_{mn}}\le p<1, \qquad \frac{u_{m,n+1}}{u_{mn}}\le q<1 \tag{17}$$

3. ამოცანის გადაწყვეტა

გამოთვლების პროცედურა

1. ჩაწერილ იქნას სეისმოგრამა.
2. მოხდეს მისი შეკუმშვა.
3. მოხდეს ყველა კორდინატის კვადრატში აყვანა როგორც ერთი გრაფიკის, ასევე მეორე გრაფიკის.
4. შემდეგ შევადგინოთ (3) ცხრილი
5. შევადგინოთ (4) ცხრილი
6. ვიანგარიშოთ (17)
7. ვიანგარიშოთ (13), (15)
8. ავაგოთ გრაფიკები

მეორე გზა კრებადობის დასადგენად დამყარებულია ეილერის გარდაქმნებზე [2]

$$\sum_{n,k}a_{nk}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\Delta k u_n}{2^k}-\frac{\Delta^{k+1}u_n}{2^{k+1}}\right) \tag{18}$$

და მის მიმართ გამოვიყენოთ მარკოვის თეორემა.

თეორემა.

ვთქვათ, მოცემულია ორმაგი მწკრივი

$$\sum_{m,n}u_{mn}, \tag{19}$$

რომელშიაც იკრიბება ყველა სტრიქონი

$$S_{m*}=\sum_{n=1}^{\infty}u_{mn}, \tag{20}$$

ყველა სვეტი

$$S_{*n}=\sum_{m=1}^{\infty}u_{mn} \tag{21}$$

და მწკრივი სტრიქონების ჯამისაგან

$$S'=\sum_{m=1}^{\infty}S_{m*} \tag{22}$$

მაშინ:

1) სტრიქონის k-ური ნაშთი, შედგენილი თითოეული k-თვის

$$r_m^{(k)}=\sum_{n=k+1}u_{mn} \tag{23}$$

ქმნის კრებად მწკრივს $\sum_{m=1}^{\infty}r_m^{(k)}$, რომელიღაც R_k ჯამით.

2) იმისათვის, რომ მწკრივი იყოს კრებადი და ის შედგენილია სვეტების ჯამისაგან

$$S'' = \sum_{n=1}^{\infty} S_{*n} , \tag{24}$$

აუცილებელი და საკმარისია შემდეგი ზღვრის არსებობა

$$\lim_{k \to \infty} R_k = R \tag{25}$$

3) იმისათვის, რომ $S' = S''$, აუცილებელი და საკმარისია $R = 0$.

4. დასკვნა

ამ თეორემის გამოყენებისას (დ.19) რიგის სტრიქონების მიმართ გვაძლევს

$$S_{n*} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = (-1)^n u_n \tag{26}$$

ხოლო

$$S' = \sum_{n=0}^{\infty} (-a)^n u_n . \tag{27}$$

ხოლო მწკრივის სვეტებისათვის

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} = \frac{\Delta^k u_0}{2^{k+1}} \tag{28}$$

$$S'' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^k u_0}{2^{k+1}}$$

როდესაც $k = 1$

$$\Delta' u_n = u_n - u_{n+1} . \tag{29}$$

ლიტერატურა

1. Marple S.L. Digital Spectral Analysis with applications. Prentice-Hall, Engewood cliffs, New.Jersey, 1987.
2. Воробьев, Н.Н. Теория рядов. Москва.: Наука 1986.

И. Куция, Е. Гугутишвили, Е. Куция

ДВУМЕРНЫЙ СПЕКТРАЛНЫЙ АНАЛИЗ

Резюме

Двухмерный спектральный анализ используются как для массивов пространственных, так временно-пространственных. массивов данных, или для разработки массивов временных данных.

Обобщение концепции разработки одномерных сигналов для двухмерных сигналов невозможно. Для этой цели используют методы двухмерных периодических диаграмм, двухмерных гибридных и методы которые основанны на минимум дисперсии.

Ключевие слова: Двухмерный, спектральный, массивов, одномерных, дисперсии

I. Kutsia, E. Gugutishvili, E. Kutsia

THE TWO-DIMENSIONAL SPECTRAL ANALYSIS

Abstract

The two-dimensional spectral analysis are used as for files spatial, so temporarily - spatial. Data files, or for development of files of the time data. Generalization for two-dimensional signals it is impossible for the concept of development of one-dimensional signals. For this purpose use methods of two-dimensional periodic diagrams, two-dimensional hybrid and methods which are based on a minimum of a dispersion.