ნ. ჯიბლაძე, ო. ხუციშვილი, თ. ხუციშვილი, ე. ბუხრაძე

ლაქსის მეთოდის გამოყენებითი ასპექტის შესახებ

რეზიუმე

ნაშრომში განხილულია კავშირი პონტრიაგინის მაქსიმუმის პრინციპსა და პ. ლაქსის მეთოდს შორის. მეთოდი საშუალებას გვაძლევს წარმოვადგინოთ ჰამილტონიანი ლაქსის განტოლების ფორმით. იგი საშუალებას იძლევა დავაკავშიროთ კორტევეგ-დე ფრიზის განტოლების შენახვის კანონები ოპტიმალურ მართვის ამოცანასთან ფაზურ კოორდინატებზე შეზღუდვების გათვალისწინებით.

საკვანძო სიტყვები: მართვა, სიმეტრიები, შენახვის კანონები, იზოსპექტრალური დეფორმაცია.

1. ***შესავალი***. ოპტიმალური მართვის თეორია სათავეს იღებს ვარიაციული პრინციპებიდან. აღსანიშნავია ოპტიმალური მართვის ორი ფუნდამენტალური შედეგი: ლ. პონტრიაგინის მაქსიმუმის პრინციპი და რ. ბელმანის დინამიკური დაპროგრამების მეთოდი. ვარიაციული აღრიცხვის მეთოდი იძლევა აუცილებელ პირობებს, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ე. წ. ოპტიმალური ტრაექტორია. მაქსიმუმის პრინციპით შეიძლება ოპტიმალური ტრაექტორიის მოძებნა იმ შემთხვევაში, როცა შეზღუდვები დადებულია როგორც მართვის ფუნქციაზე, ისე ფაზურ კოორდინატებზეც. რიგ შემთხვევაში ფაზური წერტილის საწყისი წერტილიდან საბოლოო წერტილში ოპტიმალური გადასვლისას ადგილი აქვს ძალიან დიდ გადახრებს აღნიშნული წერტილებიდან, რაც საინჟინრო თვალსაზრისით არა მარტო არასასურველია, არამედ დაუშვებელიც.

ასეთ შემთხვევაში, საჭიროა შეზღუდვები დაედოს არა მარტო მართვის ფუნქციებს, არამედ ფაზურ კოორდინატებსაც. ოპტიმალური მართვის ამოცანა მდგომარეობს ისეთი დასაშვები მართვის მოძებნაში, რომლისთვისაც შესაბამისი ტრაექტორია მდებარეობს მოცემულ ფიქსირებულ არეში და აკმაყოფილებს მოცემულ სასაზღვრო პირობებს. ამასთან, ადგილი აქვს მოცემული ფუნქციონალის მინიმიზაციას.

2. ***ძირითადი ნაწილი***. მათემატიკურად ამოცანა შემდეგნაირად ჩამოყალიბდება: განიხილება სრული ნორმირებული ფუნქციონალური W სივრცე, რომლის ელემენტებია $W=\{u(t),y(t)\}$, სადაც $u(t)$ მართვაა, $y(t)$ – შესაბამისი ფაზური ტრაექტორია, და იგი შეესაბამება შემდეგი განტოლების ამონახსნს

$$y = f(y,u,t) \tag{1}$$

ქვემოთ მოცემული სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში:

$$y(t_0)\in Y_0, \qquad y(t_1)\in Y_1, \qquad t\in[0,T]. \tag{2}$$

W სივრცეში მოცემულია $I(w)$ ფუნქციონალი. ოპტიმალური მართვის ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ ვიპოვოთ $I(w)$-ს მინიმუმი W-ზე დადებული შემდეგი სახის შეზღუდვებისას:

$$\varphi_i(w)\le 0, \qquad i=\overline{1,m} \tag{3}$$

ან

$$\Phi_j(w)=0, \qquad j=\overline{1,p}. \tag{4}$$

(1)÷(4) ამოცანა თავდაპირველად დასმული და გადაწყვეტილი იყო რ. გამყრელიძის მიერ [1]. მიღებული შედეგი, მიუხედავად თავისი მათემატიკური დახვეწილობისა, პრაქტიკულად ძალიან რთული გამოსაყენებელია, ამიტომ პრაქტიკაში გამოიყენება გამარტივებული მეთოდები.

საინტერესოა მაქსიმუმის პრინციპის დაკავშირება სიმეტრიის პრინციპებთან, რაც საშუალებას იძლევა გადაწყდეს ოპტიმალური მართვის ისეთი ამოცანები, როცა შეზღუდვები დადებულია როგორც მართვის ფუნქციაზე, ისე ფაზურ კოორდინატებზე. ამისათვის გამოყენებულია ჰამილტონის განტოლებათა სისტემის ლაქსის ფორმაში ჩაწერა და შემდეგ მისი დაკავშირება შენახვის კანონებთან.

ოპტიმალური მართვის ამოცანის გადაწყვეტა ფაზურ კოორდინატებზე შეზღუდვის გათვალისწინებით დამყარებულია ინტეგრირებადი დინამიკური სისტემების შესწავლის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან პ. ლაქსის მეთოდზე, რომელიც ცნობილია ე. წ. გაზნევის შებრუნებული ამოცანის ან იზოსპექტრალური დეფორმაციის მეთოდის სახელით [2], [3], [4]. მეთოდის იდეა ძალიან მარტივია და მისი არსი შემდეგში მდგომარეობს.

კერძო წარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის არც თუ დიდი ხნის წინანდელ გამოკვლევებში მოძებნილი იყო ინტეგრალები, წრფივი ოპერატორების საკუთრივი მნიშვნელობების სახით, რომლებიც დამოკიდებულია დიფერენციალური განტოლების ამოხსნაზე, მაგრამ გააჩნია თავისებურება, რომ მათი სპექტრი შეინახება განსახილველი დიფერენციალური განტოლების ყოველი ამონახსნისათვის. ამგვარად, დროის განმავლობაში წრფივი ოპერატორი ისე იცვლება, რომ მისი სპექტრი რჩება ფიქსირებული ანუ იგი განიცდის იზოსპექტრალურ დეფორმაციას. სა-

კუთრივი მნიშვნელობები, რომლებიც განიხილება როგორც ფუნქციონალები, წარმოადგენს ინტეგ-რალებს. წრფივ ოპერატორებზე იზოსპექტრალური დეფორმაციის მეთოდის გამოყენება განავითარა პ. ლაქსმა კოტევეგ-დე ფრიზის (კდფ) განტოლებებისათვის და გამოყენებულ იქნა რიგი მკვლევარე-ბის მიერ მრავალი შემთხვევისათვის.

ბუნებრივია იბადება კითხვა, შეიძლება თუ არა ყველა ინტეგრირებადი ჰამილტონური სის-ტემა აღიწეროს იზოსპექტრალური დეფორმაციის საშუალებით? ამასთან, ინტეგრალების მოძებნის პრობლემა, მათი არსებობის შემთხვევაში, დაყვანილ უნდა იქნეს წრფივი ოპერატორების მოძებნაზე, რომელთა სპექტრი მუდმივია.

ვთქვათ, დინამიკური სისტემა აღიწერება განტოლებებით

$$\dot{x}_\alpha = F_\alpha(x), \qquad \alpha = 1,...,n. \tag{5}$$

დავუშვათ, რომ მოვახერხეთ მოგვეძებნა მატრიცების წყვილი L და M (ე. წ. L, M წყვი-ლი), რომელთა ელემენტები დამოკიდებულია დინამიკურ x_α ცვლადებზე, ისე რომ განტოლება (5) ეკვივალენტურია შემდეგი განტოლების

$$\dot{L} = [M, L]. \tag{6}$$

მაშინ (5)-დან გამომდინარეობს, რომ მატრიცა $L(t)$ ევოლუციის პროცესში განიცდის იგივურ გარ-დაქმნას: $L(t) = u(t)L(0)u^{-1}(t)$, $u^{-1}(t) = u(t)$, $M = \dot{u}u^{-1}$.

შესაბამისად, $L(t)$ მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობა არაა დამოკიდებული დროზე ანუ ეკვივალენტურია იმისა, რომ მატრიცა $L(t)$ დროის განმავლობაში განიცდის იზოსპექტრალურ დე-ფორმაციას. ამგვარად, $L(t)$ მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები ან, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, სიმეტრიული ფუნქციები საკუთრივი მნიშვნელობებიდან, მაგალითად, სიდიდეები $I_k = k^{-1}tr(L^k)$, წარმოადგენს მოძრაობის ინტეგრალს. თუ, ამასთან, ხერხდება მოძებნა საკმაოდ მრავალი ფუნქციონალურად დამოუკიდებელი მოძრაობის ინტეგრალისა და ჩვენება, რომ ისინი იმ-ყოფებიან ინვოლუციაში, ე.ი. რომ ნებისმიერი ორი ინტეგრალის პუასონის ფრჩხილი ნულის ტო-ლია, მაშინ განსახილველი სისტემა წარმოადგენს ინტეგრებადს.

მაგალითი. განვიხილოთ ნაწილაკის (q_1, q_3) სიბრტყეზე თავისუფალი მოძრაობა. მოძრაობის განტოლებას აქვს სახე:

$$\dot{q} = p, \qquad \dot{p} = 0. \tag{7}$$

მოხერხებულობისათვის q წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით: $q \to \hat{q} = (q_1\sigma_1 + q_3\sigma_3)$,

სადაც σ_1 და σ_3 პაულის მატრიცებია: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

მეორე მხრივ, ჩვენ შეგვიძლია $\hat{q}$ წარმოვადგინოთ მატრიცის სახით

$$\hat{q}(t) = u(t)Qu^{-1}(t), \tag{8}$$

სადაც
$$Q = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -q \end{pmatrix}, \qquad u(t) = u(\varphi(t)) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) & \sin(\varphi/2) \\ -\sin(\varphi/2) & \cos(\varphi/2) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$q = q(t) = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}, \qquad \varphi = \varphi(t).$$

შევნიშნოთ, რომ მატრიცა $u(\varphi)$ აღწერს (q_1, q_3) სიბრტყეში φ კუთხით შემობრუნებას. თუ (8) გამოსახულებას გავაწარმოებთ დროის მიხედვით, მაშინ $q(t)$-სთვის მივიღებთ

$$\hat{q} = u(t)L(t)u^{-1}(t) = \hat{p}, \tag{10}$$

სადაც
$$L = \dot{Q} + i[M, Q], \tag{11}$$

$$M = -iu^{-1}\dot{u} = i\dot{u}u^{-1}. \tag{12}$$

(10) გამოსახულების გაწარმოებით მივიღებთ გამოსახულებას

$$\dot{L} + i[M, L] = 0, \tag{13}$$

რაც ლაქსის განტოლებას წარმოადგენს.

(13) განტოლებაში
$$L = \begin{pmatrix} p & gq^{-1} \\ gq^{-1} & -p \end{pmatrix}, \qquad M = i\begin{pmatrix} 0 & gq^{-2} \\ -gq^{-2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

ლაქსის განტოლება ეკვივალენტურია ჰამილტონის განტოლებისა შემდეგი ჰამილტონიანით [2]:

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + g^2 q^{-2})\,. \qquad (15)$$

3. ***დასკვნა.*** აღნიშნული მეთოდი საშუალებას გვაძლევს ჰამილტონის განტოლება (15) ჰამილტონიანით წარმოვადგინოთ ლაქსის (13) განტოლებით, რაც მნიშვნელოვნად ამარტივებს ოპტიმალური მართვის ფუნქციის მოძებნას შეზღუდვების პირობებში.

ლიტერატურა

1. Понтрягин Л. С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. –М.:Наука, 1961. –392с.
2. Мозер Ю. Интегрируемые гамильтоновые системы и спектральная теория. –Ижевск.: Ижевская республиканская типография. 1999.
3. Переломов А. М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. –М.: Наука. 1990.
4. Lax P.D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. Comm. Pure Appl. Math. 1968. 21, 467-490p. (Имеется русский перевод: Лакс П. Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны. Математика, №13, т.5. –М.: Мир, 1969г..

Н. Джибладзе, О. Хуцишвили, Т. Хуцишвили, Е. Бухрадзе

О ПРИКЛАДНОМ АСПЕКТЕ МЕТОДА ЛАКСА

Резюме

В работе рассмотрен связь принципа максимума Понтрягина с методом Лакса. Этот метод даёт возможность представить функцию Гамильтона в виде уравнении Лакса. С учётом метода Лакса можно связать законы сохранения уравнения Кортевега-де Фриза с оптимальным уравнением, при некоторых ограничениях на фазовых координат.

N. Jibladze, O.Khutsishvili, T. Khutsishvili, E. Bukhadze

APPLIED ASPECT OF THE LAX METHOD

Summary

We consider the relation between Pontryagin maximum principle and Lax's method. The method allows us to represent Hamilton equation in the form of Lax equation. Lax's method enables us to relate the conservation laws of Korteweg-de Vries equation with optimal control.