

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

გელა მაჭარაშვილი

ბზარების მქონე კონსტრუქციების დამაბულ-დეფორმაციული
მდგომარეობის კვლევა და რიცხვითი ანალიზი

სადოქტორო პროგრამა მშენებლობა

შიფრი 0732

დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად
წარდგენილი დისერტაციის

ა ვ ტ ო რ ე ფ ე რ ა ტ ი

თბილისი
2026 წელი

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში,
სამშენებლო ფაკულტეტზე,
მშენებლობის კომპიუტერული დაპროექტების №106 დეპარტამენტში.

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: პროფესორი მურმან კუბლაშვილი

რეცენზენტები:

გელა ყიფიანი, პროფესორი, სტუ სამშენებლო ფაკულტეტი
მამული ზაქრაძე ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, სტუ-ს ნ.
მუსხელიშვილის სახელობის გამოთვლითი მათემატიკის ინსტიტუტის
გამოთვლითი მეთოდების განყოფილების გამგე

დაცვა შედგება 2026 წლის 26 თებერვალს 13⁰⁰ საათზე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო ფაკულტეტის
სადისერტაციო ნაშრომის დაცვის კოლეგიის სხდომაზე, სტუ-ს I კორპუსი, მე-5
სართული. აუდიტორია №508.

მისამართი: 0160, თბილისი, მ. კოსტავას ქ. №68.

.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება ტექნიკური უნივერსიტეტის ბიბლიოთეკაში,
მისამართი: 0160, თბილისი, მ. კოსტავას ქ. №77.

ხოლო ავტორეფერატისა – უნივერსიტეტის ვებგვერდზე

ფაკულტეტის სწავლული მდივანი:



დ. ტაბატაძე

ნაშრომის საერთო დახასიათება

თემის აქტუალურობა:

სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორია ბოლო წლებში სულ უფრო მეტ მნიშვნელობას იძენს. დრეკადობის თეორიის, აეროდინამიკის, რღვევის თეორიის, ელექტროდინამიკის და სხვა მრავალი გამოყენებითი ტიპის ამოცანები მიიყვანება ერთგანზომილებიან სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებზე. აღნიშნულ განტოლებებთან დაკავშირებით საკმაოდ კარგად დამუშავებული თეორია მოცემულია სხვადასხვა ავტორების ნაშრომებში (ივანოვი, გახოვი, მუსხელიშვილი, ლიფანოვი და სხვა).

რაც შეეხება სინგულარული ინტეგრალები, მათი დათვლა, ან ინტეგრალური განტოლებების ამოხსნა ძალიან რთულია, ზოგ შემთხვევაში შეუძლებელიც და ამ პრობლემების გადასაჭრელად აუცილებელი ხდება რიცხვითი მეთოდების გამოყენება.

ზოგადად რიცხვითი ამონახსნების ალგორითმების დამუშავება და მათი კომპიუტერული რეალიზაცია დაკავშირებულია გარკვეულ სირთულეებთან და მოიცავს რამოდენიმე ეტაპს. პირველ რიგში მოცემული ამოცანის რიცხვითი ამოხსნისათვის უნდა დამუშავდეს შესაბამისი ალგორითმები, რა დროსაც გათვალისწინებული უნდა იქნას ამოსახსნელი ამოცანების თავისებურებანი: კერძოდ, ალგორითმი სრულად უნდა აღწერდეს ამოცანის ბუნებას და რაც შეიძლება ზუსტად გადმოცემდეს მის შინაარსს. მეორე მხრივ, ალგორითმი უნდა იყოს გამოთვლითი პროცესების მიმართ მდგრადი და გამოირჩეოდეს მაღალი სიზუსტით.

რიცხვითი ამოხსნის მეთოდების განვითარება სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის დაიწყო გაცილებით უფრო გვიან, ვიდრე თეორიული გამოკვლევები. ამ მიმართულებით პირველი შრომები გამოჩნდა გასული საუკუნის ოცდაათიან წლებში. 1932 წელს გამოქვეყნდა მ. ლავრენტიევის ცნობილი სტატია სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების მიახლოებითი ამოხსნების შესახებ. ეს სტატია მაგალითის მიმცემი გახდა დანარჩენი ავტორებისათვის და 50-იან წლებში დაიწყო გამოთვლითი მეთოდების ინტენსიური დამუშავება აღნიშნული

მიმართულებით. განსაკუთრებით აღნიშვნის ღირსია აეროდინამიკაში ს. ბელოცერკოვსკის შრომები, რომელიც საფუძვლად დაედო არსებითად ახალ, ამჟამად კარგად ცნობილ, სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა რიცხვითი ამოხსნის მეთოდს, რომელიც დღეისათვის ცნობილია როგორც დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდი.

სინგულარული ინტეგრალისათვის მიახლოებითი გამოთვლების სქემების შექმნაზე და დაფუძნებაზე მუშაობა დაიწყო სხვა და სხვა უამრავმა მეცნიერმა, რომელთა შრომებიდან განსაკუთრებულად დასახელებული უნდა იქნას ი. ლიფანოვის, ს. ბელოცერკოვსკის, მუსაევის, ჯ. სანიკიძის, ა. ჯიშკარიანის, მ. კუბლაშვილის, ბ. გაბდულხაევის, ი. ბოიკოვისა და სხვათა შრომები.

სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის რიცხვითი ალგორითმების აგების დროს, წარმოიქმნება გარკვეული პრობლემები იმის გამო, რომ სინგულარული ინტეგრალი ჩვეულებრივი აზრით კრებადი არ არის (განშლადია) და გაიგება გარკვეული სპეციალური აზრით (ე.წ. კომის მთავარი მნიშვნელობით). აქედან გამომდინარე სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის რიცხვითი გამოთვლითი სქემების ალგორითმების დამუშავების დროს ჩნდება დამატებითი სიძნელებები. მაგალითისათვის განვიხილოთ ფრედგოლმის განტოლება: $K\varphi = f$, აქ K ფრედგოლმის ოპერატორია, f ცნობილი, ხოლო φ საძებნი ფუნქცია. დაუშვათ K ოპერატორისათვის ავაგეთ K_n მიახლოებითი ოპერატორი ისეთი, რომ $\|K - K_n\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, მაშინ როცა $K\varphi = f$ განტოლებას აქვე ერთადერთი ამონახსნი φ , $K_n\varphi_n = f_n$ მიახლოებით განტოლებასაც გარკვეული n_0 -დან დაწყებული ექნება ერთადერთი ამონახსნი φ_n და $\|\varphi - \varphi_n\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. სინამდვილეში სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაში ასე არ ხდება: თუ ზუსტი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებაა $S\varphi = f$, ხოლო $S_n\varphi_n = f_n$ წარმოადგენს აპროქსიმაციის შედეგად მიღებულ მიახლოებითი განტოლებას. ვთქვათ, რომ ზუსტ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და $\|S - S_n\| \rightarrow 0$, აქედან არ გამომდინარეობს, რომ $\|\varphi - \varphi_n\| \rightarrow 0$; სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებში ინდივიდუალური შესწავლა სჭირდება ყოველ

განტოლებას, რაც საკმაოდ ართულებს აღნიშნული განტოლებებისათვის მიახლოებითი გამოთვლითი სქემების დაფუძნება.

ყოველივე ზემოთაღნიშნულიდან გამომდინარე სინგულარული ინტეგრალების რიცხვითი დათვლები და ზოგადად სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის ისეთი მაღალი სიზუსტის რიხვითი გამოთვლების სქემების აგება, რომელიც აღწევს გაუსის სიზუსტეს და ამავდროულად გამოირჩევა სიმარტივით, წარმოადგენს მეტად **აქტუალურ** საკითხს.

ბზარების ამოცანები წარმოადგენენ სამშენებლო მექანიკის ურთულეს ამოცანებს. განსაკუთრებით რთული შესასწავლია წირითი ბზარები (ისეთი ბზარები, რომლის ნაპირები ერთმანეთს ედება, ე.ი. ბზარი გახსნილი არ არის). ასეთი ბზარების ამოცანების რიცხვითი ამოხსნებისათვის კლასიკური მეთოდები (სასრულ სხვაობათა, სასრულ ელემენტთა, ვარიაციული, ინტეგრალურ განტოლებათა და ა. შ.) არაეფექტურია. მათი საშუალებით ვერ ხერხდება ძაბვის განსაზღვრა ბზარის ბოლოების რაგინდ მცირე მიდამოებში თვით ბოლოების ჩათვლით. ამიტომ განსაკუთრებით **აქტუალურია** ისეთი მეთოდების დამუშავება, რომლებიც ბზარების ბოლოების რაგინდ მცირე მიდამოში ძაბვის მნიშვნელობების მარტივად განსაზღვის საშუალებას იძლევა. ჩვენს მიერ აგებული რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები, რომელშიდაც ვიყენებთ წონიან სინგულარულ ინტეგრალებს, იძლევა საშუალებას განვსაზღვროთ ძაბვები ბზარის ბოლოების რაგინდ მცირე მახლობლობაში, რაც თავის მხრივ, ბზარის შემდგომი გავრცელების მიმართულების პროგნოზირების გაკეთების საშუალებას მოგვცემს. ბზარის მიმართულების პროგნოზირება კი ძალიან არსებითია გამოყენებითი ტიპის სტრატეგიულ ამოცანებში. მაგალითისათვის, ატომურ ელექტროსადგურებში როგორც ცნობილია ურანი მოთავსებულია დიდი ზომის ცილინდრული ტიპის რეზერვუარებში. რეზერვუარს ბზარი რომ გაუჩნდეს, სასწრაფოდ საჭირო ხდება ავარიული მდგომარეობის განმუხტვა დროის მცირე მონაკვეთში. მოცემულ სიტუაციაში მნიშვნელოვანია ბზარის მოსალოდნელი

გავრცელების მიმართულების დადგენა, რათა სწორად დაიგეგმოს შესაბამისი გამაგრებითი სამუშაოები.

დისერტაციის მიზანია:

სამუშაოს მიზანს წარმოადგენს სინგულარული ინტეგრალებისათვის და შესაბამისად სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის ისეთი მიახლოებითი სქემების აგება, რომელიც გამორჩეული იქნება გამოყენების სიმარტივით და მაღალი სიზუსტით, რომელთა გამოყენებაც ხელმისაწვდომი იქნება ინჟინრებისათვის სხვა და სხვა გამოყენებითი ტიპის ამოცანების (სამშენებლო მექანიკის, დრეკადობის თეორიის, აეროდინამიკის, ჰიდროდინამიკის და სხვა) ამოსახსნელად.

კვლევის მეთოდები: სადოქტორო დისერტაციაზე მუშაობის დროს გამოყენებულია სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორია. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორია, რღვევის მექანიკის, სამშენებლო მექანიკის, დრეკადობის, აეროდინამიკის და მიახლოებითი მეთოდების ზოგადი თეორიები.

სამეცნიერო სიახლე: სინგულარული ინტეგრალებისათვის ნებისმიერი გლუვი და უბან-უბან გლუვი გახსნილი წირებისათვის აგებულია მაღალი რიგის (გაუსის ტიპის) კვადრატურული ფორმულები. დადგენილია შესაბამისი ცდომილების რიგი. გლუვი და უბან-უბან გლუვი გახსნილი წირის ფორმის ბზარების ამოცანები მიყვანილია პირველი გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებზე. შესწავლილია აპროქსიმაციის შედეგად მიღებული მიახლოებითი განტოლებების (ალგებრულ განტოლებათა სისტემის) ამოხსნადობის და ერთადერთობის საკითხი. კერძოდ დადგენილია, რომ როდესაც ზუსტ ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, მაშინ მიახლოებით ამოცანასაც აქვს ერთადერთი ამონახსნი და მიახლოებითი ამოცანის ამონახსნი მისწრაფვის მაღალი რიგის სიზუსტით ზუსტი ამონახსნისაკენ. სინგულარული ინტეგრალისათვის ნებისმიერი გლუვი და უბან-უბან გლუვი შეკრული და გახსნილი წირების შემთხვევაში, როდესაც სიმკვრივეს აქვს პირველი წყვეტის წერტილები წირის სასრული რაოდენობის კუთხის წერტილებში, აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის მიახლოებითი გამოთვლის

ფორმულები. შესაბამისად პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები. განხილულია და შესწავლილია კონკრეტული ამოცანები აერო და ჰიდროდინამიკის სფეროდან. თვითმფრინავის გარსდენის ამოცანები. ბზარების ამოცანები. ახალი გაუსის ტიპის კვადრატურული ფორმულებით აგებული რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმისათვის დაწერილია შესაბამისი პაკეტის ტიპის პროგრამები. შესრულებულია კომპიუტერული რეალიზაციები.

მიღებული შედეგების პრაქტიკული გამოყენება:

მიღებული შედეგები შესაძლებელია გამოყენებული იქნას სამშენებლო მექანიკის, რღვევის თეორიის, აეროდინამიკისა და სხვა მრავალი ტექნიკური საინჟინრო დარგის გამოყენებითი ტიპის ამოცანების გადასაწყვეტად. სადისერტაციო ნაშრომში აგებული მაღალი სიზუსტის (გაუსის ტიპის სიზუსტის) ალგორითმები შესაძლებელია გამოყენებული იქნას ბზარების ამოცანების გადასაწყვეტად, რომელიც თავის მხრივ წარმოადგენს სამშენებლო მექანიკის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ამოცანას.

ნაშრომის აპრობაცია და გამოქვეყნებული პუბლიკაციები:

სადისერტაციო ნაშრომის, როგორც ცალკეული ისე ძირითადი შედეგები მოხსენებული იქნა სადისერტაციო პროგრამით გათვალისწინებულ სამ კოლოქვიუმზე, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სტუდენტთა ღია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციაზე და საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის XIV ღია საერთაშორისო კონფერენციაზე. გარდა ამისა სადისერტაციო ნაშრომის მასალების მიხედვით გამოქვეყნებულია სამი სამეცნიერო ნაშრომი.

ნაშრომის სტრუქტურა და მოცულობა:

სადისერტაციო ნაშრომი შედგება შესავლის, სამი თავის, დასკვნის, დანართის, გამოყენებული ლიტერატურის 70 დასახელების ნუსხიხგან. ტექსტის საერთო მოცულობა 126 გვერდია.

ნაშრომის შინაარსი

შესავალში მოცემულია ნაშრომის საერთო დახასიათება: დასაბუთებულია პრობლემის აქტუალობა, სამუშაოს მიზანი და კვლევის მეთოდები, მეცნიერული სიახლე, პრაქტიკული ღირებულება და შედეგების რეალიზაცია, მეცნიერული დასკვნების და რეკომენდაციების სარწმუნოობის დასაბუთება, სამუშაოს აპრობაცია, ნაშრომის სტრუქტურა და მოცულობა.

პირველ თავში განხილულია წონიანი სინგულარული ინტეგრალისათვის სხვადასხვა ავტორების მიერ დამუშავებული რიცხვითი გამოთვლების ალგორითმები და მათი კრებადობის რიგის შეფასებები. ნაჩვენებია ამ თავში აგებული მიახლოებითი ფორმულების გამოყენება ერთი კლასის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნებისათვის.

პირველი თავის §1-ში მოყვანილია ხარისხობრივი ტიპის განსაკუთრებულობების მქონე სიმკვრივიანი სინგულარული ინტეგრალის თვისებები

$$S(\varphi; t_0, \eta) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{(t-c)^\eta (t-t_0)} \quad (t_0 \in L),$$

სადაც $L \equiv ab$ წარმოადგენს გლუვ გახსნილ კონტურს a და b ბოლოებით, რომელიც მოცემულია განტოლებით $t = t(s)$, ($s_a \leq s \leq s_b$). ამასთან, დადებითი მიმართულება აიღება s პერიმეტრის ზრდის მიხედვით. c არის a ან b , $\eta = \lambda + i\beta$, ($0 \leq \lambda < 1$), $(t-c)^{-\lambda}$ -ს ქვეშ იგულისხმება ამ მრავალსახა ფუნქციის ნებისმიერი ფიქსირებული შტო.

პირველი თავის §2-ში განხილულია ს. ბელოცერკოვსკისა და ი. ლიფანოვის მიერ აგებული რიცხვითი გამოთვლის ალგორითმები შემდეგი სახის სინგულარული ინტეგრალისათვის

$$I(t_0) = \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} \quad (1.2.1)$$

სადაც L ერთეულრადიუსიანი წრეა ცენტრით კოორდინატთა სათავეში, ხოლო $\varphi(t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას L კონტურზე (ჰელდერის კლასის ფუნქციაა L -ზე). აღნიშნული ინტეგრალი შეცვლილია

$$s_n(t_{0j}) = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k) \Delta t_k}{t_k - t_{0j}} \quad j=1, \dots, n \quad \text{კვადრატული ჯამით. } \varphi(t) \in H(\alpha) \text{ კლასის}$$

ფუნქციებისთვის მიღებულია შემდეგი შეფასება

$$\begin{aligned} |I(t_{0j}) - s_n(t_{0j})| &\leq \theta(t_{0j}), \quad j=1, \dots, n, \\ \theta(t_{0j}) &= O\left(\frac{1}{n^\alpha \ln n}\right) + |\varphi(t_{0j})| O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

პირველი თავის §3-ში გადმოცემულია ჯ. სანიკიძის მიერ აგებული დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდის მოდიფიცირებული მომატებული რიგის სიზუსტის გამოთვლითი სქემა, რომელიც კრებადობის რიგით მნიშვნელოვნად აუმჯობესებს ს. ბელოცერკოვსკისა და ი. ლიფანოვის სქემებს.

განხილულია შემდეგი სახის სინგულარული ინტეგრალი

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} \quad (1.3.1)$$

მოცემული (1.3.1) ინტეგრალისათვის აგებულია მიახლოება:

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} \approx \varphi(t_0) + \sum_{\sigma=1}^n (P_{\nu+2\sigma-1} + P_{\nu+2\sigma+1}) \frac{\varphi(\tau_{\nu+2\sigma+1}) - \varphi(t_0)}{\tau_{\nu+2\sigma+1} - t_0}$$

იმ პირობით, რომ $t_0 \in \tau_{\nu-1}, \tau_{\nu+1}$ ($t_0 \neq \tau_{\nu-1}, \tau_{\nu+1}$), დამტკიცებულია, რომ, თუ $\varphi(t)$ ფუნქციას L -ზე გააჩნია მეორე რიგის შემოსაზღვრული წარმოებული, მაშინ აღნიშნული კვადრატული ფორმულით მიახლოება გვამღევს კრებადობის $O(n^{-2} \ln n)$ რიგს.

პირველი თავის §4-ში განხილულია მ. კუბლაშვილის მიერ აგებული დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდის მოდიფიცირებული მომატებული რიგის სიზუსტის გამოთვლითი სქემა გახსნილი კონტურების შემთხვევაში. ბუნებრივია, ამ დროს წარმოიშობა გაცილებით უფრო რთული დამატებითი სიძნელებები, სინგულარული ინტეგრალების წირის ბოლოებში ყოფაქცევის გამო, ასევე შესაბამისი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების ამონახსნების თვისებების გამო, საჭირო ხდება გარკვეული წონიანი სინგულარული ინტეგრალების აპროქსიმაცია და მათი შესაბამისი გამოყენება აღნიშნულ განტოლებებში.

განხილულია შემდეგი სახის სინგულარული ინტეგრალი:

$$S^{(p;q)}(\varphi; t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L (t-a)^p (t-b)^q \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} \quad (1.4.1)$$

სადაც $L \equiv ab$ კომპლექსურ სიბრტყეზე რაიმე გახსნილი გლუვი კონტურია a და b ბოლოებით, რომელიც მოცემულია პარამეტრული სახით $t = t(s) (s_a \leq s \leq s_b)$. აქ $\rho(t) = (t-a)^p (t-b)^q$ წონითი ფუნქციაა, სადაც p და q პარამეტრები იღებს ერთ-ერთ მნიშვნელობას $\pm 1/2$ რიცხვებიდან.

(1.4.1) სახის სინგულარული ინტეგრალისათვის აგებულია კვადრატურული ფორმულა

$$\begin{aligned} S_n^{(1/2;-1/2)}(\varphi; t) &\approx \varphi(t_0) + \sum_{\sigma=1}^n \int_{\tau_{2\sigma-1}}^{\tau_{2\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \left[\frac{t-\tau_{2\sigma-1}}{\tau_{2\sigma+1}-\tau_{2\sigma-1}} \chi(\tau_{2\sigma+1}, t_0) + \frac{t-\tau_{2\sigma+1}}{\tau_{2\sigma-1}-\tau_{2\sigma+1}} \chi(\tau_{2\sigma+1}, t_0) \right] = \\ &= \varphi(t_0) + p_1 \chi(\tau_1, t_0) + \sum_{\sigma=1}^{n-1} (q_1^{(1/2;-1/2)} + q_1^{(1/2;-1/2)}) \chi(\tau_{2\sigma+1}, t_0) + q_1^{(1/2;-1/2)} \chi(\tau_{2n-1}, t_0), \end{aligned}$$

დამტკიცებულია, რომ, როდესაც $\varphi(t)$ ფუნქციას გააჩნია მეორე რიგის შემოსაზღვრული წარმოებული, სამართლიანია შემდეგი შეფასება:

$$\|R_n^{(1/2;-1/2)}(\varphi; t_0)\|_{H_\beta} \leq \frac{M \ln n}{n^{3/2+\alpha-\phi}} \quad (n > 1, \beta < \alpha - 1/2),$$

$$\|R_n^{(-1/2;-1/2)}(\varphi; t_0)\|_{H_\beta} \leq \frac{A \ln n}{n^{3/2+\alpha-\phi}} \quad (n > 1, \beta < \alpha - 1/2)$$

$$\|R_n^{(1/2;1/2)}(\varphi; t_0)\|_{H_\beta} \leq \frac{B \ln n}{n^{3/2+\alpha-\phi}} \quad (n > 1, \beta < \alpha - 1/2)$$

სადაც M, A, B მუდმივებია, რომლებიც დამოკიდებულია მხოლოდ L -ზე და $\varphi^{(2)}$ ფუნქციის ჰელდერის მაჩვენებელზე.

პირველი თავის §5-ში განხილულია ჯ. სანიკიდის და კ. ნინიძის მიერ კომის გულიანი სინგულარული ინტეგრალისათვის ჩებიშევის ტიპის მომატებული რიგის სიზუსტის კვადრატურული ფორმულები. მოყვანილია სინგულარული ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის ფორმულა ჩებიშევის კვანძებისათვის $\pm t_1, \pm t_2$.

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt \approx \frac{1}{2} \left\{ \frac{\varphi(-t_1)}{-t_1-t_0} + \frac{\varphi(t_1)}{t_1-t_0} + \frac{\varphi(-t_2)}{-t_2-t_0} + \frac{\varphi(t_2)}{t_2-t_0} \right\},$$

$$\text{სადაც } t_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{3\sqrt{5}}}, \quad t_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}}},$$

პირველი თავის §6-ში გადმოცემულია მ. კუბლაშვილისა და ჯ. სანიკიდის მიერ განხილული კომის გულიანი სინგულარული ინტეგრალისათვის

კვადრატული ფორმულების მომატებული რიგის სიზუსტის შესახებ. განხილულია შემდეგი სახის კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრალი

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t) dt}{t-x} \quad (-1 < x < 1)$$

სადაც $\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, რომელიც აკმაყოფილებს ასეთი ინტეგრალების თეორიაში

ზოგადად მიღებულ პირობებს. ასეთი წონითი ფუნქცია უფრო ხშირია გამოყენებითი ტიპის ამოცანებში. თუ გავითვალისწინებთ $\rho(t)$ -ს სახეს, მივიღებთ:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{1-t^2} (t-x)} \quad (-1 < x < 1)$$

აგებულია კვადრატული ფორმულა

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t) dt}{t-x} \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\varphi(t_k)}{t_k-x}; \quad x \in (-1, +1), x \neq t_k,$$

სადაც $\{t_k\}$, $\{A_k\}$ - შესაბამისად, გაუსის ჩვეულებრივი კვადრატული ფორმულის კვანძები და წონებია, თანაც ნაგულისხმევია, რომ წონითი ფუნქცია $\rho(t)$ აკმაყოფილებს ცნობილ სტანდარტულ პირობებს.

პირველი თავის §7-ში ხორციელდება სანიკიძე-კუბლაშვილის მიერ კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრალისათვის მარკოვის ტიპის მომატებული რიგის სიზუსტის კვადრატული ფორმულების აგება $n=25$ კვანძისათვის. მოყვანილია სინგულარული ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის ფორმულა მარკოვის კვანძებისათვის. (მარკოვის სისტემის ამოხსნით ვღებულობთ 12 ფესვს, ეს 12 ფესვი, დალაგებული კლებადობის მიხედვით და მათი 0-ის მიმართ სიმეტრიული მნიშვნელობები თვით $t=0$ -ის ჩათვლით გვაძლევს 25 კვანძს). მარკოვის 25 კვანძისათვის ვღებულობთ 7 სინგულარობის წერტილს t_{0j} , $j=1, 2, \dots, 7$. მიღებული სინგულარობის წერტილებში სინგულარული ინტეგრალის დასათვლელად ვიყენებთ კვადრატულ ფორმულას

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} \approx 2 \sum_{k=1}^{12} \left(\frac{\varphi(t_k)}{t_k-t_{0j}} + \frac{\varphi(-t_k)}{-t_k-t_{0j}} \right) + 2 \frac{\varphi(0)}{-t_{0j}}, \quad j=1, 2, \dots, 7$$

განხილული საკითხი წარმოადგენს მეტად მნიშვნელოვანს, იმ თვალსაზრისით, რომ აღნიშნული ტიპის სინგულარული ინტეგრალებისათვის აიგო მუდმივკოეფიციენტებიანი კვადრატურული ფორმულა.

პირველი თავის §8-ში განხილულია მ. კუბლაშვილის მიერ აგებულ მაღალი რიგის გამოთვლითი სქემებს წონიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის.

$$S(\varphi; t_0, \eta) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{(t-c)^\eta (t-t_0)} \quad (t_0 \in L)$$

აგებულია კვადრატურული ფორმულა მოცემული ინტეგრალისათვის

$$S_n^{*(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) = [1 + \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{\sigma k}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{vk}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{vk}} - P_{vj}^{*(-1/2; -1/2)} \sum_{k=1}^m d_{vk}(t_{vj})] \varphi(t_{vj}) - \\ - \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{\sigma k}} \varphi(t_{\sigma k}) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{vk}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{vk}} \varphi(t_{vk}) + P_{vj}^{*(-1/2; -1/2)} \sum_{k=1}^m d_{vk}(t_{vj}) \varphi(t_{vk}) \quad \text{სადაც}$$

$$d_{vk} = \frac{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k, j}}^m t_{vj} - t_{vj_0}}{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k}}^m t_{vk} - t_{vj_0}}, \quad P_{\sigma k}^{(1/2; -1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{t-t_{\sigma j}}{t_{\sigma k} - t_{\sigma j}} dt$$

$$P_{\sigma k}^{*(-1/2; -1/2)} = \begin{cases} P_{\sigma 1}^{(1/2; -1/2)} + P_{\sigma-1 m}^{(1/2; -1/2)}; & \sigma = 1, 2, 3, \dots, n; \\ P_{\sigma k}^{(1/2; 1/2)}, & k = 2, 3, \dots, m-1; \sigma = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$(\sigma = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m), \quad (t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}; \quad \nu = 1, 2, \dots, n)$$

ანალოგიურად ამოიწერება კვადრატული ფორმულების შესაბამისი გამოსახულებები $S_n^{*(-1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$ და $S_n^{*(1/2; 1/2)}(\varphi; t_0)$ -ის შემთხვევაში.

მტკიცდება, რომ როცა $\varphi(t) \in H_r^\alpha$ ადგილი აქვს შეფასებას

$$\|S^{(\pm 1/2; \pm 1/2)}(\varphi; t_0) - S_n^{*(\pm 1/2; \pm 1/2)}(\varphi; t_0)\|_{H_\beta} \leq \frac{C \ln n}{n^{r+\alpha-1/2}}, \text{ სადაც } C \text{ რაიმე მუდმივია.}$$

პირველი თავის §9-ში განხილულია პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის ს. ბელოცერკოვსკისა და ი. ლიფანოვის მიერ რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმის აგება დისკრეტულ განსაკუთრებულებათა მეთოდის გამოყენებით. განხილულია შემდეგი სახის პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლება

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{t_0 - t} + \int_{-1}^1 K(t_0, t) \varphi(t) dt = f(t_0) \quad (1.9.1)$$

(1.9.1) განტოლებაში $f(t)$ და $K(t_0, t)$ ფუნქციები ეკუთვნის ჰელდერის კლასს შესაბამისად $[-1; 1]$ და $[-1; 1] \times [-1; 1]$ სიმრავლეზე და ამ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი შესაბამისი მოცემული ინდექსისათვის, მაშინ გამოყენებულია შემდეგი სახის მიახლოებითი გამოთვლის ალგორითმი

$$\sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j} - t_k} + \sum_{k=1}^n K(t_{0j}, t_k)\varphi_n(t_k)h = f(t_{0j}), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1.9.2)$$

(1.9.2), სისტემების ამონახსნებსა და (1.9.1) განტოლების ამონახსნებს შორის ადგილი აქვს დამოკიდებულებას:

$$|\varphi(t_k) - \varphi_n(t_k)| \leq \theta_n(t_k) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

სადაც მნიშვნელობა $\theta(t_k)$ აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობებს:

$$\theta_n(t_k) \leq O_\delta(h^{\lambda_1}), \quad \lambda_1 > 0$$

როგორც ამ ფორმულებიდან ჩანს, ბელოცერკოვსკის მიერ აგებული სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამონახსნის ალგორითმი საკმაოდ მარტივია, მაგრამ მათ არ აქვთ სიზუსტის მაღალი რიგი.

პირველი თავის §10-ში განხილულია პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამონახსნის ალგორითმი გახსნილი კონტურების შემთხვევები. განიხილება შემდეგი სახის სინგულარული ინტეგრალური განტოლება:

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(t)dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L K(t_0, t)\varphi_0(t)dt = f(t_0), \quad (t_0 \in L) \quad (1.10.1)$$

ჩავთვალოთ, რომ (1.10.1) განტოლებაში $L \equiv ab$ წარმოადგენს გახსნილ გლუვ კონტურს, რომელიც მოცემულია პარამეტრული სახით $t = t(s)$ ($s_a \leq s \leq s_b$), $K(t_0, t)$ და $f(t)$ L -ზე მოცემული ჰელდერის კლასის ფუნქციებია. ვეძებთ (1.10.1) განტოლების ამონახსნს, რომელიც შემოსაზღვრულია a ბოლოზე და შემოუსაზღვრელი b -ზე. ასეთ ამონახსნს, როგორც ცნობილია, აქვს შემდეგი სახე

$$\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \varphi(t),$$

მახასიათებელი ნაწილის შებრუნებით, მოცემული განტოლება შეიძლება მოყვანილი იქნეს სახეზე:

$$\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \left[\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{t_1 - b}{t_1 - t_0} \frac{k(t_1, t)}{t_1 - t_0} dt_1 \right] \varphi_0(t) dt = \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-b}{t-a}} \frac{f(t)}{t-t_0}$$

შემდეგში ამ უკანასკნელ განტოლებას განვიხილავთ, როგორც ოპერატიულ განტოლებას, გარკვეულ ფუნქციონალურ სივრცეში. ამასთან დაკავშირებით მას ჩავწერთ შემდეგი სახით

$$K^0 \varphi = I\varphi + k\varphi = f_0(t_0),$$

თუ მიღებულ განტოლებაში შემავალ სინგულარულ ინტეგრალებს შევცვლით წინა თავებში განხილული მიახლოებითი გამოთვლის სქემებით, მივიღებთ შემდეგი სახის წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას $\varphi_n(t_{vj})$ -სადიებელი უცნობების მიმართ.

$$\varphi_n(t_{vj}) + \sum_{i=1}^n \sum_e^m q_{ie} A_n(t_{ie}, t_{vj}) \varphi_n(t_{ie}) = f_0(t_{vj}), \text{ სადაც}$$

$$A_n(t_{ie}, t_{vj}) = \left[1 + \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq v}}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{\sigma k} - t_{vj}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{vk}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vk} - t_{vj}} - P_{vj}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{vk}(t_{vj}) \right] K(t_{vj}; t_{ie}) - \\ - \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq v}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{\sigma k} - t_{vj}} K(t_{\sigma k}; t_{ie}) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{vk}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vk} - t_{vj}} K(t_{vk}; t_{ie}) + P_{vj}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{vk}(t_{vj}) K(t_{vk}; t_{ie}),$$

ხოლო

$$f_0(t_{vj}) = \left[1 + \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq v}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{\sigma k}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{vk}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{vk}} - P_{vj}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{vk}(t_{vj}) \right] f(t_{vj}) - \\ - \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq v}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{\sigma k}} f(t_{\sigma k}) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{vk}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{vk}} f(t_{vk}) + P_{vj}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{vk}(t_{vj}) f(t_{vj}), \\ (v=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m)$$

$$P_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{\sigma} \tau_{\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-b}{t-a}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{t-t_{\sigma j}}{t_{\sigma k} - t_{\sigma j}} dt \quad q_{ij}^{(-1/2; 1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_i \tau_{i+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq e}}^m \frac{t-t_{ij}}{t_{ie} - t_{ij}} dt$$

$$P_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)} = \begin{cases} P_{\sigma k}^{(1/2; -1/2)}, & k = \overline{2, m-1}; \quad \sigma = \overline{1, n}, \\ P_{\sigma 1}^{(1/2; -1/2)} + P_{\sigma-1, m}^{(1/2; -1/2)}; & k = 1; \quad \sigma = \overline{1, n}, \end{cases} \quad d_{vk} = \frac{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k, j}}^m (t_{vj} - t_{vj_0})}{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k}}^m (t_{vk} - t_{vj_0})}$$

ამასთან, მტკიცდება, რომ როცა $\alpha = 1$, შესაბამის დაშვებებში K -სა და f -ის მიმართ, მაშინ $\|\varphi - L_n\varphi\|$ -ის რიგი არის $O\left(\frac{1}{n^{r+1/2-\varepsilon}}\right)$, სადაც ε რაგინდ მცირე დადებითი რიცხვია.

პირველი თავის §11-ში განხილულია პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამონახსნა, გახსნილი კონტურებით, არანულოვანი ინდექსის შემთხვევაში. აქაც კვლავ განიხილება განტოლება

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L K(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0) \quad (t_0 \in L) \quad (1.11.1)$$

კვლავ ვიგულისხმობთ, რომ $f(t), K(t_0, t) \in H$ და განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ვეძებთ (1.11.1) განტოლების ამონახსნს, რომელიც შემოუსაზღვრელია ორივე a და b ბოლოებზე. როგორც ცნობილია ამ შემთხვევაში (1.11.1) განტოლების ინდექსი 1-ის ტოლია და ამონახსნი ზოგადად ცალსახად არ განისაზღვრება.

აქაც, თუ შევცვლით (1.11.1) განტოლებაში შემავალ სინგულარულ ინტეგრალს მათი მიახლოებითი გამოთვლის სქემებით, მივიღებთ შემდეგი სახის წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_n(t_{vj}) + \sum_{\sigma=1}^n \sum_{e=1}^m q_{ie}^{*(1/2;1/2)} B_n(t_{ie}; t_{vj}) = f_{1n}(t_{vj}) \\ (v = 1, 2, \dots, n-1; j = 1, 2, \dots, m) \\ (v = n; j = 1, 2, \dots, m-1) \\ \sum_{\sigma=1}^n \sum_{k=1}^m q_{\sigma k}^{*(1/2;1/2)} \varphi(t_{\sigma k}) = C; \end{array} \right. \quad (1.11.2)$$

სადაც

$$B_n(t_{ie}, t_{vj}) = \left[\sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq v}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{\sigma k} - t_{vj}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{vk}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{vk} - t_{vj}} - P_{vj}^{*(-1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{vk}(t_{vj}) \right] K(t_{vj}, t_{ie}) - \\ - \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq v}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{\sigma k} - t_{vj}} K(t_{\sigma k}, t_{ie}) - \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq j}}^n \frac{P_{vk}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{vk} - t_{vj}} K(t_{vk}, t_{ie}) + P_{oj}^* \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{vk}(t_{vj}) K(t_{vk}, t_{ie})$$

$\varphi_n(t_{vj})$ - კვლავ საძებნი ფუნქციებია.

კვლავ ვიგულისხმობთ, რომ $K, f \in H_\alpha^{(r)}(L)$ მტკიცდება, რომ თუ (1.11.1) განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, მაშინ გარკვეული $n=n_0$ -დან დაწყებული (1.11.1) განტოლებას და (1.11.2 სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, ამასთან, თუ $L_n(\varphi_n; t_0)$ არის (1.11.1) განტოლების ამონახსნი, მაშინ K და f -ის მიმართ ზემოთ მოყვანილ დაშვებებში ადგილი აქვს შეფასებებს

$$\|\varphi(t) - L_n[\varphi_n, t]\|_{H_\beta} \leq \frac{A_r \ln n}{n^{r+\alpha-\beta-1/2}}, \quad (m > r+1, \beta < \alpha-1/2),$$

სადაც A_r მუდმივია, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ L -ზე და $\varphi^{(r)}$ -ფუნქციის ჰელდერის მაჩვენებელზე.

პირველი თავის §12-ში განხილულია პირველი გვარის სრული სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამონახსნა, გახსნილი კონტურებით. აქაც კვლავ განიხილება განტოლება

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L h(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0) \quad (t_0 \in L) \quad (1.12.1)$$

კვლავ ვიგულისხმობთ, რომ ვეძებთ (1.12.1) განტოლების a ბოლოებზე შემოსაზღვრულ და b ბოლოზე შემოუსაზღვრელ ამონახსნას, მაშინ როგორც ცნობილია (1.12.1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt + \frac{1}{\pi i} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} h(t_0, t) \varphi(t) dt = f(t_0) \quad (1.12.2)$$

სინგულარული; ი ინტეგრალებისათვის წინა თავებში აგებული მიახლოებითი გამოთვლის სქემების გამოყენებით ვღებულობთ შემდეგი სახის განტოლებას.

$$\varphi(t_0) + [D_n^{(1/2; -1/2)}]^{-1} \left[L_n \left[\int_L (L_n h(t_0, t) \varphi_n, t_0) dt \right] \right] = [D_n^{(1/2; -1/2)}] (L_n f)(t_0).$$

სადაც, თუ გავითვალისწინებთ $D_n^{(1/2; -1/2)}$ ოპერატორის სტრუქტურას, ცხადი გახდება, რომ უკანასკნელი განტოლების მარცხენა მხარის ოპერატორი მოქმედებს უბან-უბან პოლინომიურ ქვესივრციდან (რომლის ხარისხი ≤ 2) იგივე ქვესივრცეში, რომელშიც ვიხილავთ განტოლებას. მტკიცდება, რომ

$$D_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) + L_n \left[\int_L (L_n h(t_0, t) \varphi_n(t) dt; t_0) \right] = L_n[f; t_0]$$

განტოლებას საკმარისად დიდი n -ებისათვის აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

ნაშრომის II თავში განხილულია წონიანი სინგულარული ინტეგრალისათვის ჩვენს მიერ დამუშავებული რიცხვითი გამოთვლების ალგორითმები და მათი კრებადობის რიგის შეფასებები. ნაჩვენებია ამ თავში აგებული მიახლოებითი ფორმულების გამოყენება სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნისათვის.

მეორე თავის § 1-ში ჩვენს მიერ აგებულია კომის გულიანი სინგულარული ინტეგრალისათვის მაღალი რიგის გამოთვლითი სქემები, რომლებიც მიახლოების სიზუსტით ახლოსაა გაუსის ტიპის კვადრატურულ ფორმულებთან. განხილულია კომის გულიანი შემდეგი სახის სინგულარული ინტეგრალი

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t - x} dt \quad (-1 < x < 1) \quad (1.1.1)$$

(2.1.1) ინტეგრალისათვის განხილულია გაუსის კვადრატურული ფუნქცია t_k კვანძებით და $\{A_k\}$ კოეფიციენტებით:

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t - x} dt \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\varphi(t_k) - \varphi(x)}{t_k - x} \quad (-1 < x < 1) \quad (2.1.2)$$

იგულისხმება, რომ $\varphi(t)$ -ს გააჩნია შესაბამისი სიგლუვე, ამასთან, როცა $t_k = x$

(1.9.2)-ე გამოსახულებაში იგულისხმება შესაბამისი ზღვარი.

როდესაც $\varphi(t)$ წარმოადგენს $\leq 2n$ მრავალწევრს, ცხადია, ნებისმიერი $x \in (-1; +1)$ -ისათვის მოცემული კვადრატურული ფორმულა, არის ზუსტი, ხოლო თუ $x \in (-1 < x < 1)$ მნიშვნელობები (2.1.2)-ში შერჩეულია ისე, რომ ამ უკანასკნელისათვის შესრულდეს ტოლობა

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{dt}{t - x} - \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{t_k - x} = 0, \quad (1.9.3)$$

მაშინ x -ის შესაბამისი მნიშვნელობებისათვის (2.1.3)-ე პირობის მიხედვით შემდეგი სინგულარული ინტეგრალისათვის

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t)}{t - x} dt \quad (-1 < x < 1):$$

გვექნება კვადრატურული ფორმულა

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\varphi(t_k)}{t_k-x} \quad (-1 < x < 1), \quad (2.1.4)$$

ასეთი სტრუქტურის კვადრატული ფორმულები, რომლებიც ლიტერატურაში ცნობილია სინგულარული ინტეგრალებისათვის გაუსის კვადრატული ფორმულების სახელწოდებით, განისაზღვრება სავსებით ერთმნიშვნელოვნად მოცემული $\rho(t)$ -სათვის $\{x_k\}_{k=1}^{n-1}$ სინგულარობის წერტილების მნიშვნელობებით. ამით შეიძლება ითქვას, რომ x სინგულარობის პარამეტრის იმ მნიშვნელობების რაოდენობა, რომელთა დროსაც მიიღწევა (2.1.4)-ე კვადრატული ფორმულების უმაღლესი ალგებრული სიზუსტე, მკაცრად შეზღუდულია.

ამასთან დაკავშირებით, იმ კვადრატული ფორმულების პრაქტიკული ეფექტურობის გათვალისწინებით, რომლებსაც გააჩნიათ სიზუსტის ასე თუ ისე მაღალი ხარისხი, ბუნებრივია ვცადოთ რაღაც ოდენობით სინგულარობის ასეთი წერტილების x რაოდენობის გაზრდა, რაც (2.1.4)-ე სახის ფორმულებთან მიმართებაში შესაძლოა განხორციელდეს ასეთი ფორმულების სიზუსტის შედარებით დაწვევის ხარჯზე, მაგრამ ისე კი, რომ შესაბამის კვადრატულ ფორმულებს გააჩნდეთ სიზუსტის მნიშვნელოვნად უფრო მაღალი ხარისხი, ვიდრე გაცილებით ხშირად გამოყენებად (ანდა მათთან მიახლოებულ) ინტერპოლაციური სიზუსტის ფორმულებს. როგორც რიცხვითი ექსპერიმენტიდან ცხადი ხდება, r -ის მნიშვნელობის თანდათანობითი შემცირებისას მოცემულ საზღვრებში ჩვენ ვიღებთ კვადრატულ ფორმულებს რამდენადმე შემცირებული, მაგრამ მაინც გაუსის სიზუსტისადმი მიახლოებული სიზუსტით.

(7) სახის სინგულარული ინტეგრალების ყველაზე უფრო ეფექტური სიზუსტის ფორმულების აგების მიზნით ძალიან არსებითია გამოთვლითი ექსპერიმენტის როლი. ამასთან დაკავშირებით კიდევ ერთხელ უნდა აღინიშნოს მომატებული სიზუსტის სინგულარული ინტეგრალებისათვის კვადრატული ფორმულების გამოყენების ცნობილი ეფექტურობა იმ ამოცანების რიცხობრივ ამოხსნით, რომლებიც დაკავშირებულია კოშის გულინ სინგულარული ინტეგრალების შემცველი ინტეგრალური განტოლებების გადაწყვეტის საკითხთან.

მეორე თავის § 2-ში განიხილება უბან-უბან დიფერენცირებადი სიმკვრივის მქონე სინგულარული ინტეგრალების მიახლოებითი გამოთვლები.

ჩვენ ამ §-ში ვიგულისხმებთ, რომ განსახილველ ინტეგრალებში ინტეგრების წირი უბან-უბან გლუვია, ასევე ვიგულისხმებთ რომ შესაბამისი წონითი ფუნქციის წარმოებულებს წყვეტის წერტილები ემთხვევა კუთხით წერტილებს.

განვიხილოთ შემდეგი სახის სინგულარული ინტეგრალი

$$S(\varphi; t_0) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0}, t_0 \in L. \quad (2.2.1)$$

გარკვეულობისათვის ვიგულისხმობთ, რომ მოცემული (უბან-უბანგლუვი) L წირი შეკრულია. $\varphi(t)$ ფუნქციის მიმართ ვიგულისხმობთ, რომ $C_q C_{q+1} \subset L$ რკალებზე ($C_q C_{q+1} \subset L$ რკალის ქვეშ, როცა L შეკრული კონტურია, ვიგულისხმებთ უმცირეს რკალს C_q, C_{q+1} ბოლოებით, ამასთან C_q -დან C_{q+1} -ზე გადასვლა უნდა შეესაბამებოდეს L -წირზე დადებითი მიმართულებით შემოვლას) სადაც $C_j (j = 1, 2, \dots, p)$ L -წირის კუთხის წერტილებია. $\varphi(t)$ უწყვეტია თავის r რიგის წარმოებულებთან ერთად, ამასთან $\varphi^{(r)}(t)$ წარმოებული აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას. ამასთან $C_j (j = 1, 2, \dots, p)$ წერტილებში საზოგადოდ $\varphi'(C_j - 0) \neq \varphi'(C_j + 0)$ ასეთი კლასის ფუნქციები შემდეგში აღვნიშნოთ $H_\alpha^{(r)}(L; C_1, C_2, \dots, C_p)$. გარკვეული გარდაქმნებით (2.2.1) სინგულარული ინტეგრალისათვის მიღებულია შემდეგი მიახლოებითი გამოთვლის სქემა:

$$\begin{aligned} S_{n, c_1 c_2 \dots c_p}(\varphi; t_0) = & \sum_{\sigma=1}^n \left\{ \varphi(t_0) \gamma_{q\sigma}(t_0) + \sum_{(k=1)}^m \frac{p_{q\sigma k}}{t_0 - t_{q\sigma k}} [L_{qv}(\varphi; t_0) - \varphi(t_{q\sigma k})] \right\} + \\ & + \sum_{\substack{i=1 \\ i=q, q-1}}^p \left[\varphi(C_i) \gamma_{i\sigma}(t_0) + \sum_{k=1}^m \frac{W_{i\sigma k}(t_0, C_i)}{C_i - t_{i\sigma k}} [L_{i,0}(\varphi; C_i) - \varphi(t_{i\sigma k})] \right] + \\ & + \varphi(C_q) \gamma_{q-1\sigma}(t_0) + \sum_{k=1}^m \frac{W_{q-1\sigma k}(t_0, C_q)}{C_q - t_{q-1\sigma k}} [L_{q-1, n-1}(\varphi; C_q) - \varphi(t_{q-1\sigma k})] \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

მიღებულ გამოსახულებებს აზრი აქვს მაშინაც როცა $t_0 \rightarrow C_q$ ან $t_0 \rightarrow C_{q+1}$. ასე, რომ აღნიშნული მაპროქსიმირებელი გამოსახულება მოცემული $q = \overline{1, p}, v = \overline{1, n}$ - ისათვის შეგვიძლია ჩავთვალოთ განსაზღვრულად ნებისმიერ $t_0 \in L$. მტკიცდება, რომთუ $\varphi \in H_\alpha^{(r)}(L, C_1, C_2, \dots, C_p)$ მაშინ ნებისმიერი

$x_k \in [0,1](k = \overline{1,m}, m \geq r)$ წერტილთა სისტემისთვის, ნებისმიერ $t_0 \in L$ წერტილში, ადგილი აქვს შეფასებას

$$|S(\varphi; t_0) - S_{n,c_1,c_2,\dots,c_p}(\varphi; t_0)| \leq \frac{C \ln n}{n^{r+\alpha}} (n > 1) \quad (2.2.4)$$

სადაც C მუდმივია, რომელიც არ არის დამოკიდებული n და t_0 -ზე.

მეორე თავის §3-ში განხილულია პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნები უბან-უბან დიფერენცირებადი სიმკვრივის შემთხვევაში.

განვიხილოთ მახასიათებელი პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლება.

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} = f(t_0) \quad (2.3.1)$$

სინგულარული ინტეგრალი შევცვალოთ კუბლაშვილის მიერ აგებული მიახლოებითი კვადრატურული ფორმულით, გვექნება :

$$S_{n,c_1,c_2,\dots,c_p}(\varphi; t_0) = f(t_0) \quad (2.3.2)$$

(20) ტოლობაში თითოეულ $C_q C_{q+1}$ რკალზე შესაბამისი მიახლოებითი S_{n,c_1,c_2,\dots,c_p} გამოსახულება შევცვალოთ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო ფორმულებით. მივიღებთ:

$$\sum_{j=1}^p S_{n_j,c_1,c_2,\dots,c_p} \approx \sum_{j=1}^p L_{n_j} [S_{n_j,c_1,c_2,\dots,c_p}(\varphi; t_0); t] = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^m \frac{\omega_{qj}(t_0)}{(t_0 - t_{qjk}) \omega'_{qj}(t_{qjk})} * \\ * (S_{n_j,c_1,c_2,\dots,c_p}(\varphi; t_{qjk}; t) = f(t_0) \quad (2.3.3)$$

$$t \in c_q c_{q+1}; \quad t_0 \in \tau_{qj}; \tau_{qj+1}$$

თუ ამ განტოლებაში t_0 პარამეტრს მივცემთ მნიშვნელობას $T(q; v; j) = \{t_{qvj}\}$, ($q = 1, 2, \dots, p; v = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$) სიმრავლიდან, მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას $T(q; v; j)$ წერტილებში $\varphi_n(t_{qvj})$ უცნობების მიმართ:

$$L_{n_j} [S_{n_j,c_1,c_2,\dots,c_p}(\varphi; t_0); t] L_n [S_{n_j,c_1,c_2,\dots,c_p}[\varphi_n; t_0]]_{t_0=t_{qvj}} = f(t_{qvj}) \\ (q = 1, 2, \dots, p); (v = 1, 2, \dots, n); (j = 1; 2, \dots, m) \quad (2.3.4)$$

ახლა განვიხილოთ სრული განტოლება

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L K(t_0, t) \varphi(t) dt = f(t_0) \quad (2.3.5)$$

სინგულარული ინტეგრალი შევცვალოთ ზემოთ მოყვანილი მიახლოებითი კვადრატურული ფორმულით, ხოლო რეგულარული ნაწილი ჩვეულებრივი გართულებული ტიპის კვადრატურული ფორმულით, მივირებთ:

$$\sum_{q=1}^p \left(\frac{1}{\pi i} \int_{c_q}^{c_{q+1}} \frac{\varphi(t) d(t)}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_{c_q}^{c_{q+1}} K(t_0, t) \varphi(t) d(t) \right) = f(t_0) \quad (2.3.6)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_n[\varphi; t_0] &= \sum_{q=1}^p S_{nq, c_1, c_2, \dots, c_p}(\varphi; t_0) \\ &+ \sum_{q=1}^p \sum_{\sigma=1}^n \sum_{k=1}^m P_{q\sigma k} K(t_0; t_{q\sigma k}) \varphi(t_{q\sigma k}) = f(t_0) \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

მაშინ ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის ანალოგიურად განვიხილოთ (2.3.7) განტოლება $H_\alpha^{(r)}(L, C_1, C_2, \dots, C_p)$ ფუნქციათა სივრცეში და გამოვყოთ $L_n[H_\alpha^{(r)}(L, C_1, C_2, \dots, C_p), t_0]$ ქვეკლასი და t_0 პარამეტრს მივცეთ მნიშვნელობა $T(q; v; j) = \{t_{qvj}\}, (q = \overline{1, p}; v = \overline{1, n}; j = \overline{1, m})$ სიმრავლიდან, მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას $\varphi_n(t_{qvj})$ უცნობების მიმართ:

$$\widetilde{S}_n[\varphi_n; t_0]_{t_0=t_{qvj}} = f(t_{qvj}) \quad (2.3.8)$$

$$(q = 1, 2, \dots, p); (v = 1, 2, \dots, n); (j = 1, 2, \dots, m)$$

როგორც ვხედავთ (2.2.4) და (2.2.8) წრფივ განტოლებათა სისტემები მიიღება (2.2.1) და (2.2.5) სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების პირდაპირი შეცვლით შესაბამისი მიახლოებითი კვადრატურული ფორმულებით. ამიტომ ისინი არიან პირდაპირი სქემები (2.2.1) და (2.2.5) განტოლებების მიახლოებითი ამოხსნისათვის. ამ ეტაპისათვის ჯერჯერობით არ არის შესწავლილი (ვაგრძელებთ მათ შესწავლას) მათი დაფუძნების საკითხი (რომ ამ მიახლოებით სისტემებს აქვთ ერთადერთი ამონახსნი და რომ მიახლოებითი ამონახსნი მიისწრაფვის მაღალი რიგის სიზუსტით ზუსტი ამონახსნისაკენ).

ნაშრომის III თავში წარმოდგენილია სამშენებლო მექანიკის მეტად აქტუალური საკითხი, ბზარების ზოგიერთი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებით. ცნობილია, რომ როცა ბზარს აქვს გლუვი ან უბან-უბან გლუვი წირის ფორმა, იგი მიიყვანება დირიხლეს ამოცანაზე.

მესამე თავის §1-ში წარმოდგენილია დირიხლეს ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა გახსნილი სასაზღვრო წირის შემთხვევაში. აღვნიშნოთ D - თი სიბრტყე, რომელიც გაჭრილია გლუვი ლიაპუნოვის $L=ab$ წირის გასწვრივ (ბოლოებით a და b), ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: უნდა ვიპოვოთ D -არეში ისეთი უსასრულობაში ქრობადი ϕ ჰოლომორფული ფუნქცია, რომელიც უწყვეტად გაგრძელებადია მარცხნიდან და მარჯვნიდან წირის გასწვრივ, გარდა a და b ბოლოებისა. სადაც ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$|\phi(z)| \leq \frac{const}{|z-c|^\alpha}; \quad 0 \leq \alpha < 1$$

c ემთხვევა a ან b , შემდეგი ზღვრული პირობით

$$\operatorname{Re} \phi^+(t_0) = \operatorname{Re} \phi^-(t_0) = f(t_0), \quad (3.1.1)$$

სადაც $f(t_0)$ L -ზე მოცემული ნამდვილი უწყვეტი ფუნქციაა.

$$\text{დავუშვათ } U(x, y) + iV(x, y) = \phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-z}, \quad (z) \in D.$$

$$\text{ვეძებთ ამონახსნი შემდეგი სახით: } U(x, y) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-z}, \quad (z \in D), \quad (3.1.2)$$

სადაც $\varphi(t)$ – საძიებელი ნამდვილი ფუნქცია.

(3.1.2) ტოლობა ჩავსვათ (3.1.1) სასაზღვრო ტოლობაში. მაშინ $\varphi(t)$ -ს მოძებნის ამოცანა დაიყვანება შემდეგი სახის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე:

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} = f(t_0). \quad (3.1.3)$$

როგორც მუსხელიშვილის თეორიიდანაა ცნობილი, (3.1.3) განტოლებას შეიძლება ჰქონდეს სამი ტიპის ამონახსნი:

- 1) ერთ ბოლოზე შემოსაზღვრული და მეორეზე შემოუსაზღვრელი;
- 2) ორივე ბოლოზე შემოუსაზღვრელი;
- 3) ორივე ბოლოზე შემოსაზღვრული.

სიმარტივისათვის ვეძებთ $\varphi(t)$ ამონახსნი, რომელიც შემოსაზღვრულია მრუდის a ბოლოზე და არ არის შემოსაზღვრული b ბოლოზე:

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \varphi_0(t)$$

მაშინ (3.1.3) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \varphi_0(t) = f(t_0) \quad (3.1.4)$$

ახლა ვიგულისხმობთ, რომ L -წირი მოცემულია მხოლოდ გრაფიკულად.

სპეციალური პაკეტი - პროგრამა „**Spline toolbars**“- ის საშუალებით დისკლის ეკრანზე შეგვყავს ამ წირის გრაფიკის შესაბამისი რამდენიმე წერტილის კოორდინატები. ეკრანზე წირის სხვა პარამეტრებთან ერთად დაიწერება წირის სიგრძის შესაბამისი s - პარამეტრი, რომლის შემდეგაც საშუალება გვქვია დაწეროთ მრუდის განტოლება $t = t(s)$, სადაც s არის წირის სიგრძის

შესაბამისი ბუნებრივი პარამეტრი. ჩავთვალოთ, რომ n - ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, გავყოთ $[a,b]$ შუალედი n - ტოლ ნაწილად

წერტილებით: $S_\sigma = a + \frac{b-a}{n}(\sigma-1), \sigma=1,2,\dots,n+1$

შემდეგ მოცემული ფიქსირებული m ნატურალური რიცხვისთვის ყოველი $[S_\sigma, S_{\sigma+1}]$ სეგმენტი დავყოთ ნაწილებად წერტილებით:

$$S_{\sigma k} = S_\sigma + h \cdot x_k \left(h = \frac{b-a}{n} \right), k = 1, 2, \dots, m,$$

სადაც $\{x_k\}_{k=1}^m$ არის $[0,1]$ შუალედიდან აღებული მოცემული წერტილთა სისტემა. შემდეგში გარკვეულობისათვის ვიგულისხმობთ, რომ, $x_1, x_2, x_3 \dots x_m$ რიცხვები დანომრილია ზრდის მიხედვით.

აღვნიშნოთ $\tau_\sigma = t(s_\sigma), t_{\sigma k} = t(s_{\sigma k})$ ($\sigma = 1, 2 \dots n; k = 1, 2 \dots m$)

ვიგულისხმობთ, რომ σ, ν ნებისმიერია $1, 2, \dots, n$ რიცხვთაგან და t_0 წერტილი განსხვავებულია $t_{\sigma k}$ კვანძებისაგან. განვიხილოთ გამოსახულება:

$$\psi_{\sigma\nu}(\varphi; t, t_0) = \varphi(t_0) + \sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t-t_0}{t_{\sigma k}-t_0} \cdot \varphi(t_{\sigma k}) + \sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t-t_0}{t_0-t_{\sigma k}} \cdot L_\nu(\varphi; t_0),$$

სადაც $L_\nu(\varphi; t_0) = \sum_{k_0=1}^m l_{\nu k_0}(t_0) \varphi_{0n}(t_{\nu k_0}),$

$$l_{\sigma k}(t) = \frac{\omega_{\sigma}(t)}{(t-t_{\sigma k})\omega'_{\sigma}(t_{\sigma k})}, \quad \omega_{\sigma}(t) = \prod_{k=1}^m (t-t_{\sigma k}),$$

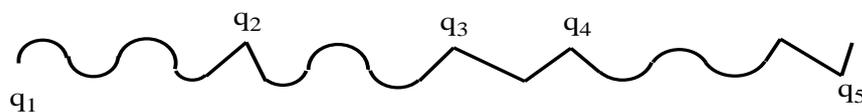
ხოლო φ , L -ზე მოცემული ჰელდერის კლასის ფუნქციაა ($\varphi \in H$). შევნიშნოთ, რომ $\psi_{\sigma\nu}(\varphi; t, t_0)$ გამოსახულებას შეიძლება მივანიჭოთ სრულიად გარკვეული აზრი, როცა $t = t_{\sigma k}$ (ამ შემთხვევაში უნდა ვიგულისხმოთ, რომ $t \rightarrow t_{\sigma k}$).

აღვნიშნოთ ახლა $\phi_n(\varphi; t, t_0) = \psi_{\sigma\nu}(\varphi; t, t_0)$, $t \in \tau_{\sigma}\tau_{\sigma+1}$, $t_0 \in \tau_{\nu}\tau_{\nu+1}$, $\sigma = 1, 2, \dots, n$; $\nu = 1, 2, \dots, n$, და (3.1.4) ინტეგრალურ განტოლებაში $\varphi_0(t)$ მიახლოებით შევცვალოთ $\phi_n(\varphi; t, t_0)$ ფუნქციით, შემდეგ t_0 -ში ჩავსვათ $\{t_{\sigma k}\}$ ($\sigma = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, m$) დისკრეტული წერტილები. (3.1.4)-განტოლებიდან მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას $\{\varphi_{\sigma k}\}$ ($\sigma = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, m$) უცნობების მიმართ. მტკიცდება, რომ ეს სისტემა ცალსახად ამოხსნადია. ვპოულობთ ამ ამონახსნებს და დირიხლეს ამოცანის მიახლოებით ამონახსნად ვღებულობთ:

$$U_n(x, y) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \cdot \frac{\psi_n(t)}{t-z} dt, \quad (z \in D) \quad (3.1.5)$$

სადაც $\psi_n(t)$ წარმოადგენს $\{\sigma_{0j}\}_{j=1}^n$ მნიშვნელობაზე აგებულ ლანგრანჟის ინტერპოლაციურ მრავალწევრს, $\psi_n(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\omega(t)}{(t-t_{0j})\omega'(t_{0j})} \cdot \varphi_{0n}(t_{0j})$.

როცა L წირი უბან-უბან გლუვია q_1, q_2, \dots, q_n კუთხითი წერტილებით ან (იხ. სურ.1) $f(t)$ -ს გააჩნია პირველი გვარის წყვეტები, მაშინ



სურ. 1.

დირიხლეს ამოცანაში $S^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$ სინგულარულ ინტეგრალს ვცვლით მ. კუბლაშვილის მიერ აგებული $S_{n, q_1, q_2, \dots, q_n}(\varphi; t_0)$ მაღალი სიზუსტის მიახლოებითი მაპროქსიმირებელი ჯამით:

$$S_{n, q_1, q_2, \dots, q_n}(\varphi; t_0) = \sum_{\sigma=1}^n \left\{ \varphi(t_0) \lambda_{r\sigma}(t_0) + \sum_{k=1}^m \frac{P_{r\sigma k}}{t_0 - t_{r\sigma k}} [L_{r\nu}(\varphi; t_0) - \varphi(t_{r\sigma k})] \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^l [\varphi(q_i) \lambda_{i\sigma}(t_0) + \sum_{k=1}^m \frac{\Omega_{i\sigma k}(t_0; q_i)}{q_i - t_{i\sigma k}}] + [L_{i,0}(\varphi; q_i) - \varphi(t_{i\sigma k})] + \varphi(q_r) \lambda_{r-1\sigma}(t_0) + \\
& + \sum_{k=1}^m \frac{\Omega_{r-1\sigma k}(t_0; q_r)}{q_r - t_{r-1\sigma k}} \times [L_{r-1,n-1}(\varphi; q_r) - \varphi(t_{r-1\sigma k})] \}.
\end{aligned}$$

$t_{i\sigma k}$ ($i=1,2,\dots,e$; $\sigma=1,2,\dots,n$; $k=1,2,\dots,m$) კვანძითი წერტილებია $q_i, q_{i+1} \subset L$ რკალზე.

(3.1.5) ფორმულაში L მრუდთან ახლო წერტილისთვის $z = x + iy$ ვიყენებთ მ. კუბლაშვილის მიერ აგებულ მაღალი რიგის სიზუსტის კვადრატურულ ფორმულას:

$$\frac{1}{\pi} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \cdot \frac{\psi_n(t)}{t-z} \approx 2iL_v(\phi_v; t_0) + 2i \sum_{\sigma=1}^n \sum_{k=0}^1 P_{\sigma k}(\sigma; t; z) \cdot \frac{\psi_n(\tau_{\sigma+k}) - L_{\sigma k}}{\tau_{\sigma+k}}$$

დანარჩენი z წერტილებისთვის გამოვიყენოთ ჩვეულებრივი კვადრატურული ფორმულა.

$$\frac{1}{\pi} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \cdot \frac{\psi_n(t)}{t-z} \approx 2i \sum_{\sigma=1}^n \sum_{k=0}^1 P_{\sigma k} \cdot \frac{\psi_n(\tau_{\sigma+k}) - L_{\sigma k}}{\tau_{\sigma+k} - z}$$

მაგალითისთვის, L კონტურის როლში მივიღოთ გრაფიკულად ფორმულირებული მრუდი (სურ.2), ხოლო მარჯვენა მხარედ $f(t) = \text{Re}(t) + \text{Im}(t)$ და გამოვთვალოთ დირიხლეს ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნა კონტურის დაყოფათა n -ის სხვადასხვა მნიშვნელობისთვის. შედეგები წარმოდგენილია (5.6,7) ცხრილებში:



სურ. 2. გრაფიკულად ფორმულირებული მრუდი

პროგრამა დავწერეთ „Mathematica“-ში.

$n=10$

ცხრილი 5

z	$U(x, y)$	$U_n(x, y)$	$R_n = U(x, y) - U_n(x, y) $
0.005i	$5.84648 \cdot 10^{-15}$	-0.00359624	0.00359624
$2\pi + 0.005i$	1.	0.866977	0.133003

n=50

ცხრილი 6

z	$U(x, y)$	$U_n(x, y)$	$R_n = U(x, y) - U_n(x, y) $
0.005i	$5.84648 \cdot 10^{-15}$	-0.00469624	0.0046966
$2\pi + 0.005i$	1.	0.93816	0.061804

n=100

ცხრილი 7

z	$U(x, y)$	$U_n(x, y)$	$R_n = U(x, y) - U_n(x, y) $
0.005i	$5.84648 \cdot 10^{-15}$	-0.00959009	0.009004
$2\pi + 0.005i$	1.	0.95221	0.04779493

აგებული ალგორითმის ეფექტურობა კარგად ჩანს მიღებული ცხრილებიდან, როცა ბზარს აქვს ნებისმიერი გლუვი გახსნილი წირის ფორმა, რომლის პარამეტრული განტოლებაც უცნობია.

მესამე თავის § 2-ში მოყვანილია დირიხლეს სახეშეცვლილი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა გახსნილი კონტურების შემთხვევაში.

როგორც ცნობილია, ბზარების, გრების, კონფორმულად გადამსახავი ფუნქციის პოვნის ამოცანა (ამ უკანასკნელზე, თავის მხრივ, მიიყვანება მრავალი გამოყენებითი ტიპის ამოცანები, რომელიც ფორმულირდება შემდეგი სახით):

ვთქვათ, L - აღნიშნავს გლუვ მარტივ, ლიაპუნოვის გახსნილ წირს. ავღნიშნოთ D -თი სიბრტყე, რომელიც გაჭრილია L -ის გასწვრივ. ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: უნდა ვიპოვოთ D -არეში ისეთი უსასრულობაში ქრობადი Φ ჰოლომორფული ფუნქცია, რომელიც უწყვეტად გაგრძელებადია მარცხნიდან და მარჯვნიდან L -წირის გასწვრივ, გარდა a და b ბოლოებისა, სადაც ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$|\Phi(z)| < \frac{cont}{|z-c|^\alpha} \quad 0 < \alpha \leq cont < 1$$

c ემთხვევა a -ს ან b -ს, შემდეგი სასაზღვრო პირობით

$$Re\Phi^+(t_0) = Re\Phi^-(t_0) = f(t_0) + d,$$

სადაც $f(t_0) - L$ -ზე მოცემული ნამდვილი უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო d განისაზღვრება ამოცანის ამოხსნის პროცესში.

დავუშვათ

$$U(x, y) + iV(x, y) = \phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t - z}, \quad (z \in D)$$

ვეებოთ ამონახსნი შემდეგი სახით

$$U(x, y) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t - t_0} \quad (z \in D) \quad (3.2.1)$$

სადაც $\varphi_0(t)$ საძებნი ნამდვილი ფუნქციაა. მაშინ φ ფუნქციის მოძებნის ამოცანა მიიყვანება შემდეგი სახის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t - z} - \frac{1}{\pi} \int_L \varphi_0(t) ds = f(t_0) \quad (3.2.2)$$

(s -არის L წირის რეალური აბცისა). ამასთან L კონტურზე დადებით მიმართულებად იგულისხმება L -ზე გადაადგილება s -პარამეტრის ზრდის მიხედვით.

როგორც ცნობილია (3.2.2) განტოლება ცალსახად ამოხსნადია და თუ $\varphi(t)$ არის მისი ამოხსნა, მაშინ საძებნი $u(x, y)$ ამოხსნა მოიცემა (3.2.1) ფორმულით, ამასთან, სასაზღვრო პირობაში შემავალი საძებნი მუდმივი

$$d = \frac{1}{\pi} \int_L \varphi(t) ds$$

გარკვეული გარდაქმნებით, საწყისი ამოცანა მიიყვანება შემდეგი სახის პირველი გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{[y'(\sigma) \cos \theta - x'(\sigma) \sin \theta] e^{i\theta} - i(t - t_0)}{t - t_0} \cdot \frac{\varphi_0(t) dt}{t'(\sigma)} = f(t_0) \quad (3.2.3)$$

ამ განტოლების (ნამდვილი) $\varphi(t)$ ამოხსნის შემდეგ საძიებელ $U(x, y)$ ჰარმონიულ ფუნქციას ვიპოვით ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის საფუძველზე, ხოლო d მუდმივისათვის გვექნება

$$d = \frac{1}{\pi} \int_L \varphi_0(t) \frac{dt}{t'(\sigma)}$$

გამოვიყენოთ პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამონახსნების წინა თავებში განხილული წარმოდგენები, მაშინ, თუ $\varphi_0(t)$

ამონახსნს ვებოთ $\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \varphi(t)$ სახით, სადაც $\varphi \in H$, მაშინ (3.2.3)

განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{1}{\pi} \int_L \sqrt{(t-a)/(t-b)} \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} k_1(t, t_0) \varphi(t) = f(t_0)$$

$$K(t_0, t) = \frac{[y'(\sigma) \cos \vartheta - x'(\sigma) \sin \vartheta]}{t - t_0} \cdot \frac{1}{t'(\sigma)}$$

როგორც ცნობილია, ამ განტოლებას აქვს H კლასის ერთადერთი ამონახსნი.

როცა ამონახსნს ვეძებთ $\varphi_0(t) = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{(t-a)/(t-b)}}$ სახით, მაშინ (3.2.3) განტოლებას

ექნება სახე:

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-t_0)}} + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{k_1(t_0, t) \varphi(t)dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} = f(t_0), \quad (3.2.4)$$

ასეთ შემთხვევაში (3.2.4) განტოლების ცალსახად ამოხსნისათვის, ამონახსნი უნდა აკმაყოფილებდეს დამატებით პირობას

$$\int_L \frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} = C,$$

სადაც C რაიმე მუდმივია. ბოლოს, როცა ამონახსნს ვეძებთ

$\varphi(t) = \sqrt{(t-a)(t-b)} \varphi_0(t)$ სახით, (3.2.3) განტოლებას ექნება სახე:

$$\frac{1}{\pi} \int_L \sqrt{(t-a)(t-b)} \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L \sqrt{(t-a)(t-b)} k_1(t_0, t) \varphi(t)dt = f(t_0) \quad (3.2.5)$$

(3.2.5) განტოლებას რომ ჰქონდეს ამონახსნი უნდა სრულდებოდეს დამატებითი

პირობა, $\int_L \frac{f(t)dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} = 0$, ამ დროს მას ექნება ერთადერთი ამონახსნი. (3.2.3),

(3.2.4), (3.2.5) განტოლების რიცხვით ამონახსნებზე ჩვენ აქ აღარ შევჩერდებით,

რადგან ეს საკითხი ჩვენ დაწვრილებით განვიხილეთ წინა თავებში. გამოვიყენოთ

ზემოთ მოყვანილ განტოლებებზე Π თავში ინტეგრალური განტოლებების

მიახლოებითი ამოხსნის სქემები, მას შემდეგ რაც შესაბამისი მიახლოებითი

სისტემიდან ვიპოვით $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ -ს მნიშვნელობებს, ამოცანის მიახლოებით

ამონახსნად მივიღოთ

$$U_n(x, y) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{ab} \rho(t) \frac{\psi_n(t)}{t-z} dt \quad (z \in D), \quad (3.2.7)$$

სადაც $\psi_n(t)$ -წარმოადგენს $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ -ის მნიშვნელობებზე აგებულ ლაგრანჟის

საინტერპოლაციო მრავალწევრს, ხოლო $\rho(t) = (t-a)^\alpha (t-b)^\beta$ წონითი

ფუნქციაა. α და β ღებულობს მნიშვნელობას იმის შესაბამისად, რომელი განტოლების ამონახსნს ვიხილავთ. განტოლებაში $\alpha = \beta = 1/2$; (3.2.7)-ფორმულით მივიღებთ ამოხსნის მიახლოებით $U_n(x, y)$ მნიშვნელობას $D + L$ არეში, ამასთან, საჭიროა განისაზღვროს d მუდმივის მიახლოებითი მნიშვნელობა

$$d_n = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi_n(t)}{t'(s)} d(t).$$

აქ $U_n(x, y)$ არის დირიხლეს სახეცვლილი ამოცანის ამოხსნა. თვითონ დირიხლეს ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნა იქნება $U_n(x, y) - d_n$.

(3.2.7) ფორმულაში L -წირის მიახლოებითი $z = x + iy$ წერტილებისათვის გამოვიყენოთ წინა თავებში აგებული მიახლოებითი ფორმულა.

$$\frac{1}{\pi} \int_L \rho(t) \cdot \frac{\psi_n(t) dt}{t - z} \approx 2iL_v(\phi_v; t_0) + 2i \sum_{\sigma=1}^n \sum_{k=0}^1 P_{\sigma k}(\rho; t_0; z) \cdot \frac{\psi_n(\tau_{\sigma+k}) - L_{\sigma k}}{\tau_{\sigma+k} - z},$$

სადაც $P_{\sigma k}(\rho; t_0; z)$ კოეფიციენტები განისაზღვრება წინა პარაგრაფის შესაბამისად. დანარჩენი z წერტილებისათვის გამოვიყენოთ ჩვეულებრივი კვადრატული ფორმულები

$$\frac{1}{\pi} \int_L \rho(t) \cdot \frac{\psi_n(t) dt}{t - z} \approx 2i \sum_{\sigma=1}^n \sum_{k=0}^1 P_{\sigma k} \frac{\psi_n(\tau_{\sigma+k}) - L_{\sigma k}}{\tau_{\sigma+k} - z},$$

ქვემოთ მოყვანილია დირიხლეს სახეცვლილი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის ცხრილები, როცა $L \equiv [-1; +1]$ ნამდვილი ღერძის მონაკვეთია, ხოლო $f(t) = f(t(s)) = \text{Re}(t) = t$.

$U(x, y)$ და $U_n(x, y)$ -ით აღნიშნულია შესაბამისი ამოცანის შესაბამისად ზუსტი და მიახლოებითი ამონახსნები. z წერტილი აღებულია კონტურის ბოლოების მცირე მახლობელ მიდამოდან.

n =50

ცხრილი 8

z	$U(x, y)$	$U_n(x, y)$	$R_n = U(x, y) - U_n(x, y) $
1+0.005	-36.2402	-36.7524	0.5102
-1+0.005	0.005	0.007468	0.002468

n =100

ცხრილი 9

z	$U(x, y)$	$U_n(x, y)$	$R_n = U(x, y) - U_n(x, y) $
1+0.005	-36.2402	-36.2961	0.0559
-1+0.005	0.005	0.007468	0.000078

n =50

ცხრილი 10

z	$U(x, y)$	$U_n(x, y)$	$R_n = U(x, y) - U_n(x, y) $
1+0.005 <i>i</i>	0.0000	0.00427	0.00427
-1+0.005 <i>i</i>	2	2.00215	0.00215

n =100

ცხრილი 11

z	$U(x, y)$	$U_n(x, y)$	$R_n = U(x, y) - U_n(x, y) $
1+0.005 <i>i</i>	0.0000	0.00155	0.00155
-1+0.005 <i>i</i>	2	2.00052	0.00052

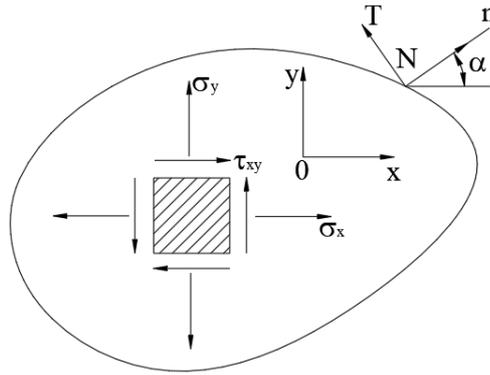
მოცემული ცხრილების მისაღებად ჯერ უნდა ამოიხსნას შესაბამისი (3.2.4)

ინტეგრალური განტოლება, შემდეგ ამ ამონახსნების $\{\varphi_n(\tau_j)\}_{j=1}^n$ საშუალებით ვაგებთ $\psi_n(t)$ საინტერპოლაციო მრავალწევრს და (29) ფორმულით ვპოულობთ $U_n(x, y)$ მიახლოებით ამონახსნს.

მიუხედავად რამდენიმეჯერ ჩატარებული მიახლოებითი პროცესისა, უკვე $n = 100$ წერტილისათვის მიიღწევა საკმარისად მაღალი, 10^{-3} რიგის სიზუსტე. ეს უკანასკნელი ადასტურებს, რომ ჩვენს მიერ აგებული მიახლოებითი გამოთვლის ალგორითმი მდგრადია. დამრგვალების ცდომილება არსებით გავლენას ვერ ახდენს კრებადობის პროცესზე.

მესამე თავის §3-ში მოყვანილია წრფივი ჭრილის მქონე დრეკადი სიბრტყის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის ანალიზი.

დრეკადი იზოტროპული სხეულის ნებისმიერ წერტილში დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის განსაზღვრისათვის აუცილებელია ძაბვის ვექტორის ტენზორის სამი კომპონენტის $-\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ (სურ.-3) და გადაადგილების ვექტორის ორი შემადგენელი კომპონენტის u, v პოვნა.



სურ.-3.

ვთქვათ არე, რომელიც დაკავებულია დრეკადი სხეულით, წარმოადგენს x ღერძზე $|x| \leq l$, $y = 0$ მონაკვეთის გასწვრივ მთელ სიბრტყეს. ვიგულისხმოდ, რომ უსასრულობაში ძაბვა ნულის ტოლია, ხოლო ჭრილის ნაპირებზე მოცემულია ძაბვის $\sigma_y^+, \tau_{xy}^+, \sigma_y^-, \tau_{xy}^-$ კომპონენტები. შემდეგში „+“ და „-“, ნიშნები აღნიშნავენ შესაბამისი სიდიდეების სასაზღვრო მნიშვნელობებს, შესაბამისად ჭრილის ზედა და ქვედა მხრიდან. ავლნიშნოთ:

$$\sigma_y^\pm(x,0) - i\tau_{xy}^\pm(x,0) = p(x) \pm q(x), \quad |x| < l, \quad (3.3.1)$$

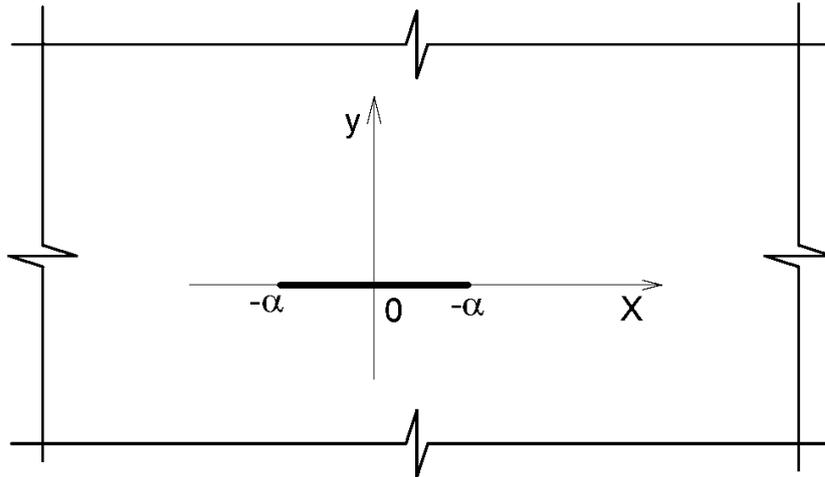
სადაც $p(x)$ და $q(x)$ ცნობილი ფუნქციებია.

როგორც ცნობილია, გარკვეული გარდაქმნებით დასმული ამოცანა მიიყვანება შემდეგი სახის სინგულარულ ინტეგრალურ განროლებაზე:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l}^{+l} \frac{Q(t) + iq(t)}{t - x} dt = p(x) \quad |x| < l$$

მიღებული სინგულარული ინტეგრალური განტოლებისათვის ჩვენ ვიყენებთ ჩვენს მიერ სადისერტაციო ნაშრომში აგებულ მიახლოებითი გამოთვლის სქემებს.

მესამე თავის §4-ში ჩვენ ვიხილავთ თერმოიზოლირებული ბზარის ამოცანის რიცხვით ამოხსნას. ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: ვთქვათ, ბრტყელ კონსტრუქციაზე (ფილა, კოჭლედელი და ა.შ.) $|x| \leq a, y = 0$ ზოლის გასწვრივ, მოცემულია თერმოიზოლირებული ბზარი (იხ. სურათი-4).



სურ.-4

დაუშვათ, რომ ბრტყელ კონსტრუქციაზე ბზარის გარეშე ტემპერატურის განაწილება აღიწერება მოცემული ჰარმონიული $t_0(x, y)$ ფუნქციის საშუალებით. მაშინ ზოგადი $T(x, y)$ ტემპერატურა შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$T(x, y) = t_0(x, y) + t(x, y),$$

სადაც $t(x, y)$ – შეშფოთებული ტემპერატურული ველია, რომელიც გამოწვეულია ბზარით.

როგორც ცნობილია, აღნიშნული ამოცანა მიიყვანება შემდეგი სახის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{\psi'(t) dt}{t-x} = \varphi(x), \quad |x| < a$$

დამატებითი პირობით

$$\int_{-a}^{+a} \psi'(t) dt = 0$$

მიღებული სასაზღვრო ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა ჩვენ შეგვიძლია ჩვენს მიერ სადისერტაციო ნაშრომში აგებული მიახლოებითი გამოთვლის ალგორითმით:

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t-x} dt \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\varphi(t_k) - \varphi(x)}{t_k - x} \quad (-1 < x < 1)$$

იგულისხმება, რომ $\varphi(t)$ -ს გააჩნია შესაბამისი სიგლუვე.

ცხრილში მოცემულია $F(z)$ ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის შედეგები, ზემოთ მოყვანილი ალგორითმით, n -ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის წერტილის $z = \pm 1$ მახლობლობაში, როცა $\varphi(t) = \operatorname{Re}(t) + \operatorname{Im}(t)$

ცხრილი 12

n	z	$F(z)$	$F_n(z)$	$R_n(z) = F(z) - F_n(z)$
5	$-1 + 0.005i$	$3.60173 + 3.46915i$	$3.8148 + 3.66829i$	$0.21307 + 0.19914i$
10	$1 + 0.005i$	$-3.60173 + 3.46915i$	$-3.81848 + 3.66829i$	$-0.21307 + 0.19914i$
15	$-1 + 0.005i$	$3.60173 + 3.46915i$	$-3.69248 + 3.52953i$	$0.09075 + 0.06038i$
20	$1 + 0.005i$	$-3.60173 + 3.46915i$	$-3.69248 + 3.52953i$	$-0.09075 + 0.06038i$
25	$-1 + 0.005i$	$3.60173 + 3.46915i$	$3.69248 + 3.52953i$	$0.04035 + 0.09338i$
30	$1 + 0.005i$	$3.60173 + 3.46915i$	$-3.69248 + 3.52953i$	$-0.04035 + 0.09338i$
40	$-1 + 0.005i$	$3.60173 + 3.46915i$	$3.63742 + 3.45305i$	$0.03569 - 0.01610i$
50	$1 + 0.005i$	$-3.60173 + 3.46915i$	$-3.63742 + 3.45305i$	$-0.03569 - 0.01610i$

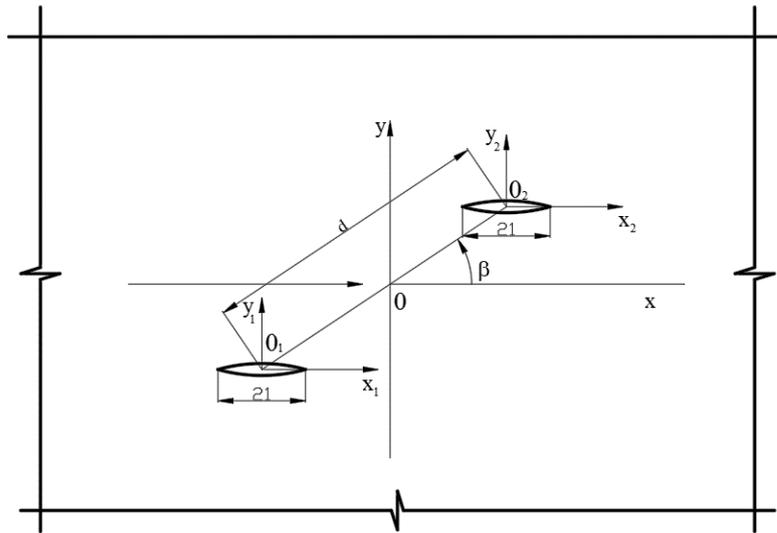
ამგვარად, როგორც ცხრილიდან ჩანს ზემოთმოყვანილი ალგორითმის საშუალებით $z = \pm 1 + 0.005i$ განსაკუთრებულ წერტილებში (ბზარის ბოლოებში) $n = 50$ _ სათვის მიიღწევა 10^{-2} სიზუსტის რიგი.

მესამე თავის §5-ში განხილულია ამოცანა, როცა უსასრულო ბრტყელ კონსტრუქციაზე მოცემულია ორი თანაბარი სიგრძის სიმეტრიულად განლაგებული ბზარი, მასზე მოცემულია დატვირთვა, რომელიც აკმაყოფილებს სიმეტრიის პირობას (სურ.3). აღნიშნული ამოცანა მიიყვანება (3.5.1) სახის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l}^{+l} \frac{\varphi_0(t)}{t-t_0} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-l}^{+l} k(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0), \quad (3.5.1)$$

სადაც

$$k(t_0, t) = \frac{t + t_0 + d \cos \beta}{(t + t_0 + d \cos \beta)^2 + d^2 \sin^2 \beta} ,$$



სურ. 5

სადაც β - არის კუთხე ბზარის სიბრტყისა და წრფეს შორის, რომელიც გადის ბზარის ცენტრებს შორის. (3.5.1) განტოლებიდან მუდმივი დატვირთვის დროს ადვილად მიიღება ცნობილი ინტეგრალური განტოლება უძრავი ან $2l(d \cos \beta = 2l)$ გადანაცვლებული პარალელური ბზარების შემთხვევაში.

(3.5.1) განტოლება არის პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლება. ამ განტოლებას ვხსნით II-ე თავში აგებული ალგორითმებით.

ქვემოთ მოყვანილია (3.5.1)-ე განტოლების ამოხსნის ცხრილები. პროგრამა შედგენილია *Matematica* სიმბოლურ ენაზე.

ინტეგრალური განტოლების ზუსტი ამონახსნია $\varphi(t) = 1$

φ_{00}	0,98437	φ_{21}	0,9955	φ_{42}	0,99942	φ_{63}	0,99695
φ_{01}	0,98641	φ_{22}	0,99734	φ_{43}	0,99891	φ_{70}	0,99695
φ_{02}	0,98811	φ_{23}	0,99769	φ_{50}	0,99891	φ_{71}	0,99856
φ_{03}	0,98955	φ_{30}	0,99769	φ_{51}	0,99077	φ_{72}	0,99879
φ_{10}	0,98955	φ_{31}	0,99802	φ_{52}	0,99184	φ_{73}	0,99899
φ_{11}	0,99356	φ_{32}	0,99830	φ_{53}	0,99277	φ_{80}	0,99899
φ_{12}	0,99431	φ_{33}	0,99919	φ_{60}	0,99277	φ_{81}	0,99963
φ_{13}	0,99496	φ_{40}	0,99919	φ_{61}	0,99606	φ_{82}	0,99860
φ_{20}	0,99496	φ_{41}	0,99931	φ_{62}	0,99653	φ_{83}	1,10160

$$k(t_0, t) = (t + t_0 + 4 \cos \pi / 3) / ((t + t_0 + 4 \cos \frac{\pi}{3})^2 + 16 \sin^2 \frac{\pi}{3}), f = 2, n = 10$$

ინტეგრალური განტოლების ზუსტი ამონახსნია $\varphi(t) = 2$.

φ_{00}	2,03931	φ_{21}	1,95791	φ_{42}	1,86391	φ_{63}	1,93347
φ_{01}	2,03231	φ_{22}	1,92563	φ_{43}	1,85699	φ_{70}	1,93347
φ_{02}	2,0469	φ_{23}	1,91797	φ_{50}	1,85699	φ_{71}	1,89614
φ_{03}	2,01678	φ_{30}	1,91797	φ_{51}	2,00858	φ_{72}	1,88928
φ_{10}	2,01678	φ_{31}	1,91049	φ_{52}	2,00021	φ_{73}	1,88826
φ_{11}	1,98325	φ_{32}	1,90321	φ_{53}	1,99175	φ_{80}	1,88826
φ_{12}	1,97474	φ_{33}	1,87622	φ_{60}	1,99175	φ_{81}	1,85258
φ_{13}	1,96663	φ_{40}	1,87622	φ_{61}	1,94963	φ_{82}	1,84524
φ_{20}	1,96663	φ_{41}	1,86991	φ_{62}	1,941481	φ_{83}	1,87185

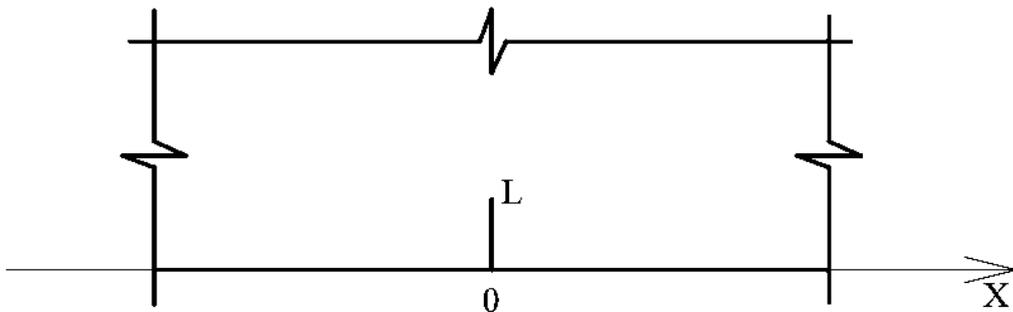
როგორც მოყვანილი ცხრილებიდან ჩანს $n = 10$ -სათვის მიიღწევა 10^{-3} სიზუსტის რიგი.

მესამე თავის §6-ში განიხილება ბრტყელი ფილის საზღვრის პერპენდიკულარული ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა. დრეკად ნახევარსიბრტყეში მოცემულია სასრული სიგრძის ბზარი, რომელიც სიბრტყის საზღვრის მართობულია, ბზარის ნაპირზე მოცემულია თვითგაწონასწორებადი დატვირთვა. აღნიშნული ამოცანა მიიყვანება (3.6.1) სახის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l}^{+l} \frac{\varphi_0(t)}{t-t_0} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-l}^{+l} k(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0), \quad (3.6.1)$$

სადაც

$$k(\tau, y) = \frac{y^2 + 6y + 4\tau - y + 2\tau - \tau^2 + 4}{(\tau + y + 2)^3} \quad (3.6.2)$$



სურ. 6

ხოლო $f(y)$ ბზარის ნაპირებზე მოდებული დატვირთვაა. $k(\tau, y)$ გულს გარდა განსაკუთრებულობისა, $\tau = y = -1$ წერტილში აქვს უძრავი სინგულარობა. ასეთი გულით (3.6.1) განტოლების რიცხვითი ამოხსნისათვის გარკვეულ ფუნქციონალურ სივრცეში აგებულია დაფუძნებადი ალგორითმი. მაგალითისათვის განხილულია შემთხვევა, როცა ბზარის ნაპირზე მოდებულია მუდმივი ნორმალური $f_k = -1$ დატვირთვა.

ქვემოთ მოყვანილია (3.6.1)-ე განტოლების (3.6.2) გულით რიცხვითი ამოხსნის საფუძველზე მიღებული ინტენსიობის კოეფიციენტების ცხრილი n -ის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის.

n	6	10	20	40	60	80	120
$f \cdot k_1 / \sqrt{l}$	1,1392	1,1248	1,1224	1,1224	1,1219	1,1217	1,1216
	1,1138	1,1182	1,12064	1,12129	1,12142	1,12146	1,1218

წინა პარაგრაფში განხილული ამოცანისათვის ე.ი. როცა

$$k(t, t_0) = k(t_0, t) = (t + t_0 + 4 \cos \pi/3) / ((t + t_0 + 4 \cos \frac{\pi}{3})^2 + 16 \sin^2 \frac{\pi}{3}), f = 2.$$

n	6	10	20	40	60	80	120
$f \cdot k_1 / \sqrt{l}$	1,25457	1,2539	1,25384	1,25298	1,25281	1,25275	1,25279
	1,25362	1,25319	1,25285	1,25279	1,25276	1,25278	1,25277

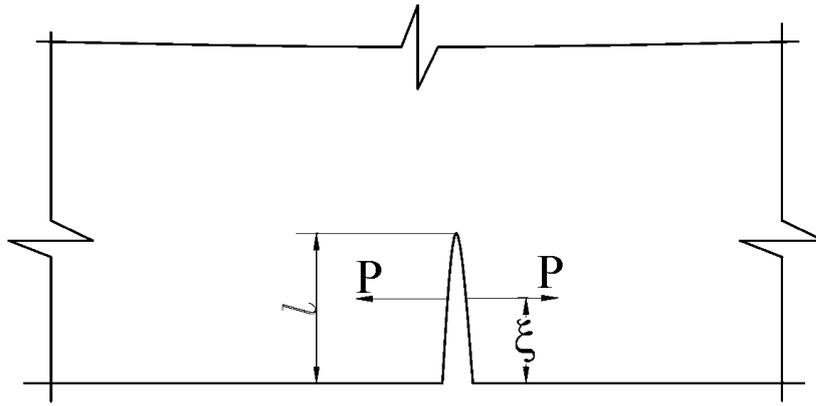
ახლა განვიხილავთ (3.6.1) განტოლების რიცხვითი ამოხსნა იმ შემთხვევაში, როცა ბზარის ნაპირებზე $x = \xi$ წერტილში მოდებულია შეკურსული p ძალა (სურ. 16). ე. ი. $p(x) = -p\delta(x - \xi)$ ამ შემთხვევაში (41) განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(\tau) \left[\frac{1}{\tau - y} + K(\tau, y) \right] d\tau = -\frac{2p}{\pi l} \sqrt{1 - \eta^2} \int_{-1}^{+1} \frac{K(\tau, y) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2} (\eta - \tau)}, \quad |y| < 1, \quad (43)$$

სადაც

$$\delta(y, x) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y. \end{cases}$$

$$\eta = \frac{2\xi}{l} - 1$$



სურ.7

(43)-ში მარჯვნივ გვაქვს ფუნქცია, რომელიც შემოსაზღვრულია ყოველი $|y| < 1$ და $|\eta| < 1$ მნიშვნელობებისათვის, ამიტომ (43) განტოლების რიცხვითი ამოხსნა ჩვენ შეგვიძლია განვახორციელოთ ზემოთ მოყვანილი მეთოდით.

პირითადი დასკვნები

1. გახსნილი კონტურების შემთხვევაში სინგულარული ინტეგრალებისათვის აგებულია და კომპიუტერული პროგრამებით უზრუნველყოფილია მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი გამოთვლის ალგორითმები. ხარისხობრივი ტიპის განსაკუთრებულობების მქონე წონითი ფუნქციებისათვის მიღებულია შეფასებები, რომლებიც კერძოდ ახასიათებს ნაშთითი წევრის ყოფაქცევას ინტეგრების წირის ბოლოების მახლობლობაში.
2. სინგულარული ინტეგრალებისათვის წონითი ფუნქციებით, რომლებიც ინტეგრების წირზე აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას, მაგრამ მათ წარმოებულებს კონტურის (სასრული რაოდენობის) წერტილებში აქვთ პირველი გვარის წყვეტები, აგებულია და კომპიუტერული პროგრამებით უზრუნველყოფილია მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი გამოთვლის ალგორითმები.
3. სინგულარული ინტეგრალებისათვის წონითი ფუნქციებით, რომლებსაც ინტეგრების წირზე ცალკეულ რკალებზე გააჩნიათ სხვადასხვა ტიპის ხარისხობრივი განსაკუთრებულობები, აგებულია და კომპიუტერული პროგრამებით უზრუნველყოფილია მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი გამოთვლების ალგორითმები.
4. გახსნილი კონტურების შემთხვევაში სინგულარული ინტეგრალებისათვის, ხარისხობრივი ტიპის განსაკუთრებულობების მქონე წონიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის აგებულია დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდის ტიპის მომატებული სიზუსტის რიგის მიახლოებითი სქემები.
5. პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის (რომელზედაც მიიყვანება მექანიკის ბევრი მნიშვნელოვანი გამოყენებითი ტიპის ამოცანები), გახსნილი კონტურების შემთხვევაში აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის სხვადასხვა ტიპის რიცხვითი ამოხსნის სქემები.
6. სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის აგებული მაღალი რიგის გამოთვლითი სქემების გამოყენებით განხორციელებულია ისეთი მნიშვნელოვანი გამოყენებითი ტიპის სამშენებლო მექანიკის ამოცანების ამოხსნები, როგორიცაა:

- ა) დირიხლეს ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა გახსნილი სასაზღვრო წირის შემთხვევაში, რომელზედაც თავის მხრივ მიიყვანება ბზარების ამოცანები.
 - ბ) დირიხლეს სახეცვლილი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა, რომელზედაც თავის მხრივ მიიყვანება მრავალი სამშენებლო მექანიკის ამოცანა.
 - გ) დირიხლეს ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა ისეთი არეებისათვის, რომელთა საზღვრის წირებს არ აქვთ მაღალი რიგის სიმრუდე.
7. აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები ისეთი ბზარებისათვის, რომლის წირის წერტილები მოცემულია გრაფიკულად, ხოლო წირის პარამეტრული განტოლება უცნობია

დისერტაციის ძირითადი შინაარსი გამოქვეყნებულია

შემდეგ ნაშრომებში:

1. ბზარების ამოცანების რიცხვითი ამოხსნები სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებით. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სტუდენტთა საერთაშორისო კონფერენცია ინოვაციური ტექნოლოგიები ინჟინერიაში, საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, თბილისი 2023 წ.
2. **Kublashvili Murman**, Kapanadze Zurtab, Gorjoladze Khatia, Macharashvili Gela. Numerical Solution of Thin Profile Circulation Flow Task. **Scientific-Technical Journal “Building”**, #3(67), 2023.
3. **M. Kublashvili**, Z. Kapanadze, Z. Sanikidze, T. Saginadze, G. Macharashvili. Analysis of Dynamic Responce of in-Service High Speed Railway Tunnel with Cavity Defects in Lining. **The 4th International Conference “Problems of Engeneering Sciences” dedicated to the 1750th anniversary of the establishment of Phasis Academy was held in Batumi, Georgia, at 26.08.24-28.08.24 (at Batumi State Maritime Academy).**
4. **Kublashvili Murman**, Kapanadze Zurab, Zaza Sanikidze, Teimuraz Saghinadze, Macharashvili Gela. Apptoximate calculationsof singular integrals with piacewise differentiating density. **XIV International Conference of the Georgian Mathematical Union** Dedicated to the 100th Anniversary of the Georgian Mathematical Union. Batumi, September 2-7, 2024.