

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

მირიან კუბლაშვილი

მექანიკის ზოგიერთი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სადოქტორო პროგრამა „მშენებლობა“, შიფრი 0406

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

თბილისი, საქართველო

2017 წელი

სადისერტაციო ნაშრომი შესრულებულია საქართველოს ტექნიკური  
უნივერსიტეტის სამშენებლო ფაკულტეტზე, მშენებლობის კომპიუტერული  
დაპროექტების დეპარტამენტში

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: ასოც. პროფ. ზაზა სანიკიძე

რეცენზენტები: პროფ. ზუბიკო ნაცვლიშვილი  
ასოც. პროფ. კონსტანტინე ჩხიკვაძე

დაცვა შედგება 2017 წლის 23 თებერვალს, 14 საათზე,  
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო ფაკულტეტის  
სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის სხდომაზე,  
კორპუსი I, აუდიტორია 227.  
მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 68.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ს ბიბლიოთეკაში,  
ავტორეფერატის - ფაკულტეტის ვებ-გვერდზე.

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი, პროფესორი დემურ ტაბატაძე

## შინაარსი

შესავალი.....	5
თავი I. სრიალის საკისართან დაკავშირებული საინჟინრო მექანიკის საკონტაქტო ამოცანა .....	13
1.1. სრიალის საკისრის მექანიკური შინაარსი.....	13
1.2. სრიალის საკისრის მათემატიკური მოდელი .....	16
თავი II. გამოთვლითი ალგორითმების დამუშავება სრიალის საკისართან დაკავშირებული საკონტაქტო ამოცანისთვის.....	19
2.1. გამოთვლითი სქემების აგება სრიალის საკისრის დეფორმაციის ამოცანისთვის.....	19
2.2. ბზარებიანი სრიალის საკისრის რიცხვითი გაანგარიშების შესახებ.....	26
თავი III. ბზარების თეორიის ამოცანების რიცხვითი ამოხსნა სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებით.....	28
3.1. წრფივი ჭრილის მქონე დრეკადი სიბრტყის დაძაბულ – დეფორმირებადი მდგომარეობა .....	31
3.2. თერმოზოლირებული ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა.....	42
3.3. დრეკად სხეულზე გრძივი გადაადგილების მქონე ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა .....	46
3.4. უსასრულო ფირფიტაზე მოცემული ორი თანაბარი სიგრძის სიმეტრიულად განლაგებული ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა.....	49
3.5. ნახევარსიბრტყის საზღვრის პერპენდიკულარული ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა .....	67
3.6. კოლინეარული ბზარების ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა .....	69
3.7. სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნა გამარტივებული სქემების გამოყენებით.....	75
დანართი .....	80
კვლევის ეტაპები და ძირითადი შედეგები .....	97
გამოყენებული ლიტერატურა.....	98

## რეზიუმე

სადისერტაციო ნაშრომში განხილულია ზოგიერთი სახის საინჟინრო ამოცანის რიცხვით ამოხსნასთან დაკავშირებული საკითხები, იმ პრაქტიკულად მნიშვნელოვანი შემთხვევისთვის, როდესაც შესაბამის სამშენებლო კონსტრუქციებსა თუ მექანიკურ დეტალებზე, მათზე გარკვეული ძალების ზემოქმედების შედეგად, წარმოქმნილია ბზარის ტიპის რღვევების გავრცელების მიდამოები.

ნაშრომში განსაკუთრებული ყურადღება ეთმობა ერთმანეთში ჩადგმული, თითქმის ტოლი რადიუსების მქონე ორი წრიული დრეკადი ცილინდრის ურთიერთქმედების ამოცანას და მის მიახლოებით ამოხსნასთან დაკავშირებულ საკითხებს იმ შემთხვევისთვის, როდესაც კონტაქტში მონაწილე სხეულებს ზედაპირებზე გააჩნიათ სხვადასხვა კონფიგურაციის ბზარები.

აღნიშნული ამოცანა, საზოგადოდ ბზარებით არაშესუსტებულ შემთხვევაში, განეკუთვნება საინჟინრო მექანიკის მნიშვნელოვან საკონტაქტო ამოცანათა რიცხვს და არსებითი გამოყენება აქვს მანქანათმშენებლობაში, კერძოდ, სრიალის საკისრების თეორიასა და შესაბამისად იმ დეტალებისა და კონსტრუქციების გათვლებში, რომლებიც აღნიშნული ტიპის მექანიზმების გამოყენებას ეფუძნებიან. მაგალითად, ტრიბოტექნიკაში სრიალის საკისარი, როგორც უმნიშვნელოვანესი დეტალი, მონაწილეობს თითქმის ყველა ტიპისა და ფუნქციონალური დანიშნულების მანქანურ დანადგარებსა და მოწყობილობებში, მათ შორის ძრავებში, ტურბინებში, ტუმბოებში, კომპრესორებში და ა.შ.

დისერტაციაში განხილული ბზარებიანი სრიალის საკისრების დეფორმაციის ამოცანისათვის, რომელიც ასეთი დასმით პირველად არის განხილული საინჟინრო პრაქტიკაში, შერჩეული იქნა მისი რიცხვითი ამოხსნის კომპლექსური მეთოდიკა, რაც გულისხმობს, ერთის მხრივ, დეფორმაციისას შეუღლებული დეტალების კონტაქტის არეში აღძრული საძიებელი ძაბვების გამოთვლისთვის სპეციალური სააპროქსიმაციო ფორმულების გამოყენებას. რაც შეეხება ძაბვების განაწილების შესწავლას ბზარების გავრცელების მიდამოებში, ამისათვის გამოიყენება სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდი.

ნაშრომში აგებული ახალი რიცხვითი სქემების საფუძველზე, რომელიც გამოირჩევა რეალიზაციის სიმარტივით, შექმნილია გამოთვლითი პროგრამული პაკეტი, რომლის გამოყენებითაც შესაძლოა ამოხსნას საინჟინრო მექანიკის მნიშვნელოვანი პრაქტიკული ამოცანები.

## შესავალი

### პრობლემის აღწერა და აქტუალობა.

სადისერტაციო ნაშრომში განხორციელებული კვლევები მიზნად ისახავს რიცხვითი ამოხსნის მეთოდების დამუშავებას და სათანადო გამოთვლითი პროგრამული პაკეტის შექმნას საინჟინრო მექანიკის პრაქტიკულად მნიშვნელოვანი ამოცანების ამოხსნისთვის.

კვლევის ძირითადი ნაწილი შეეხება სამშენებლო მექანიკის ერთ-ერთი ძირითადი მიმართულების, მანქანათმშენებლობის გარკვეული საკონტაქტო ამოცანის მათემატიკურ წარმოდგენას, ანალიზსა და გამოთვლითი მეთოდების დამუშავებას მისი რიცხვითი ამოხსნისთვის.

საზოგადოდ, საკონტაქტო ამოცანები საკმაოდ მრავალფეროვანია და მათთან შეხება გვიხდება სამშენებლო კონსტრუქციების, საინჟინრო დეტალებისა თუ მექანიზმების გათვლებისას, რაც ბუნებრივია მეტყველებს ასეთი ამოცანების დიდ პრაქტიკულ მნიშვნელობაზე.

შესაბამისად, შემთხვევითი არ არის, რომ ასეთი ტიპის ამოცანების შესწავლას ეძღვნება არაერთი ცნობილი მკვლევარის მონოგრაფია თუ ცალკეული სამეცნიერო სტატია. ეს განპირობებულია ამ სახის ამოცანათა არა მარტო პრაქტიკული, არამედ თეორიული მნიშვნელობითაც, ვინაიდან სპეციფიური მექანიკური ხასიათიდან გამომდინარე ისინი დაკავშირებული არიან მნიშვნელოვანი სირთულის მქონე მათემატიკური ამოცანების ჩამოყალიბებასა და შესწავლასთან. მათი ამოხსნა თავის მხრივ მოითხოვს არასტანდარტული გამოთვლითი სქემების აგებასა და რეალიზაციას.

კონკრეტულად ჩვენს შემთხვევაში განხილულია საკონტაქტო ამოცანა ერთმანეთში ჩადგმული, თითქმის ტოლი რადიუსების მქონე ცილინდრების დეფორმაციის შესახებ. სხვა პრაქტიკულ გამოყენებებთან ერთად იგი მჭიდროდ არის დაკავშირებული მნიშვნელოვანი საინჟინრო დეტალის, სრიალის საკისრის

გათვლებთან, რომელსაც თავის მხრივ ფართო გამოყენება გააჩნია მრავალი ტიპისა და ფუნქციონალური დანიშნულების მექანიზმში, კონსტრუქციასა თუ მოწყობილობაში, მათ შორის ძრავებში, ტურბინებში, ტუმბოებში, კომპრესორებში და სხვა მანქანურ დანადგარებში.

ნაშრომში განხილული პრობლემატიკის ირგვლივ არსებობს არსებითი საკითხები, რომლებიც დაკავშირებულია საკონტაქტო სხეულების გარკვეულ სტრუქტურულ-კონფიგურაციულ ცვლილებებთან და მოითხოვს ძირეულ მეცნიერულ კვლევებსა და პრაქტიკულ გადაწყვეტას. მაგალითად, რეალურ მასალებში ყოველთვის არსებობს მიკროდეფექტები, რომელთა განვითარება დეფორმაციის პირობებში წარმოშობს სხეულის ლოკალური ან სრული რღვევის საშიშროებას. მექანიზმის გამართულ მუშაობასა და სიმტკიცეზე არანაკლებ ნეგატიურ გავლენას ახდენს მისი შემადგენელი დეტალების ცვეთის ფაქტორიც.

აღწერილი სიტუაციები, მათი პრაქტიკული მნიშვნელობიდან გამომდინარე, აუცილებელ შესწავლას მოითხოვს და შესაძლოა მიგვიყვანოს არც თუ ისე იოლად გადასაწყვეტ მექანიკურ თუ მათემატიკურ პრობლემებთან. კერძოდ, ჩვენს შემთხვევაშიც, განსახილავი ამოცანა მნიშვნელოვნად რთულდება, როდესაც შესაბამისი საინჟინრო მოწყობილობის ნაწილებს, ანუ კონტაქტში მონაწილე ცილინდრულ ზედაპირებს, გააჩნიათ რღვევის (ბზარების) გავრცელების მიდამოები.

საზოგადოდ, ნაგებობისა და კონსტრუქციის ელემენტების მდგრადობაზე გაანგარიშებისას ბზარების გასწვრივ ძაბვების განაწილების განსაზღვრა, შემდგომი რღვევის ლოკალიზების შესაძლებლობის დაზუსტების მიზნით, ბუნებრივია, საკმარისად აქტუალურია და სამშენებლო მექანიკის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან საკითხად მოიაზრება.

ნაშრომში ჩატარებული კვლევები, აღნიშნულ საკონტაქტო ამოცანასთან ერთად, მოიცავს მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდების დამუშავებას და გამოყენებას სამშენებლო მექანიკის იმ ამოცანებისთვისაც, რომელიც შეეხება ბზარებით შესუსტებული კონსტრუქციებისა და ნაგებობების გაანგარიშებასა და გათვლას.

### კვლევის ობიექტი და მეთოდები.

სადისერტაციო ნაშრომით გათვალისწინებული კვლევების ძირითად ობიექტს წარმოადგენს საინჟინრო მექანიკის და დრეკადობის თეორიის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი საკონტაქტო ამოცანა, სადაც განხილულია ერთმანეთში ჩადგმული, მახლობელრადიუსებიანი წრიული დრეკადი ცილინდრების დეფორმაცია იმ შემთხვევაში, როცა შეუღლებულ სხეულებს ზედაპირზე გააჩნიათ ბზარის ტიპის ჭრილები.

შესწავლილია სუსტი და ძლიერი სინგულარობის შემცველი ინტეგრალური განტოლებები, რომლებიც შესაბამისად წარმოადგენენ კონტაქტის არესა და ბზარების გავრცელების მიდამოებში არსებული ძაბვების განაწილების მათემატიკურ მოდელს.

აღნიშნული განტოლებების რიცხვითი ამოხსნისთვის გამოყენებულია სათანადო კვადრატურული ფორმულების გარდაქმნისა და მოდიფიცირების შედეგად მიღებული ახალი გამოთვლითი სქემები. ამასთან, დეფორმაციისას საკონტაქტო არეში აღძრული ძაბვების საძიებელი სუსტი განსაკუთრებულობის მქონე ინტეგრალური განტოლების მიახლოებითი ამოხსნა დაფუძნებულია შესაბამისი ფუნქციის ჩებიშევის პოლინომებით მიახლოებაზე, ხოლო ბზარის მიდამოში განხილული კოშის ტიპის ინტეგრალები ექვემდებარებიან უშუალოდ სინგულარული ოპერატორის აპროქსიმაციას.

ასეთ მიდგომაზე დამყარებული ალგორითმი მნიშვნელოვნად ამარტივებს ამოცანის ამოხსნის პროცესს და ადვილი გამოსაყენებელია საინჟინრო გამოთვლებისას.

### მეცნიერული სიახლე.

მეცნიერული სიახლის თვალსაზრისით ინტერესს იწვევს ის შედეგები, რაც უკავშირდება ნაშრომში განხილული განტოლებების რიცხვით ამოხსნებს. კერძოდ, ბზარების გასწვრივ მოქმედი დატვირთვების შესაბამისი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის აგებულია ახალი, უშუალოდ სინგულარული

ოპერატორის აპროქსიმაციაზე დაფუძნებული სქემები, რაც საკმარისად აადვილებს მათი რიცხვითი რეალიზაციის პროცესს. უშუალოდ კონტაქტის არეში მოქმედი დატვირთვებისას განხილული განტოლებისათვის ასევე მიღებულია გამარტივებული კვადრატურული ფორმულები ურთიერთქმედი სხეულების სხვადასხვა დრეკადი მახასიათებლების შემთხვევაში, რის საფუძველზეც დაზუსტებულია კონტაქტის არეში ძაბვების განაწილების არსებული სურათი.

### **პრაქტიკული მნიშვნელობა.**

დისერტაციაში განხილული ამოცანა უკავშირდება იმ საინჟინრო დეტალების, კონსტრუქციებისა და მექანიზმების გათვლებს, რომელთაც ფართო პრაქტიკული გამოყენება გააჩნიათ სამშენებლო მექანიკაში, კერძოდ, მანქანათმშენებლობაში.

ნაშრომში განხილული ახალი, საინჟინრო გამოთვლების თვალსაზრისით იოლად რეალიზებადი რიცხვითი სქემების გამოყენებით დამუშავებული ალგორითმების საფუძველზე, შექმნილია გამოთვლითი პროგრამული პაკეტი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს ამოვხსნათ საინჟინრო მექანიკის მნიშვნელოვანი პრაქტიკული ამოცანები.

### **სამუშაოს აპრობაცია.**

კვლევის შედეგები განხილული იქნა შემდეგ სამეცნიერო კონფერენციებზე და სემინარებზე:

1. სამშენებლო მექანიკის ერთი საკონტაქტო ამოცანის რიცხვითი მეთოდის ალგორითმის დამუშავება სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდის გამოყენებით. სტუდენტთა 83-ე ღია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, 2016.
2. სრიალის საკისარის ერთი მათემატიკური მოდელი და მისი რიცხვითი რეალიზაცია. სტუდენტთა 82-ე ღია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, 2014.
3. კოლინეარული ბზარების რიცხვითი ამოხსნის შესახებ. საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია "21-ე საუკუნის მეცნიერებისა და ტექნოლოგიების განვითარების ძირითადი პარადიგმები". საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, 2012.



4. მექანიკის ერთი საკონტაქტო ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის შესახებ. სტუდენტთა მე-80 ღია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, 2012.
5. პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნის შესახებ. საერთაშორისო კოფერენცია "ინფორმაციული და გამოთვლითი ტექნოლოგიები". საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, 2010.

**დისერტაციის მასალებზე მომზადდა და გამოქვეყნდა ნაშრომები:**

1. Kublashvili M.D., Kublashvili M.M., Numerical solution of singular integral equation with opened Contour in the nonzero index case, Scientific-technical journal "Building", 3 (18), 2010.
2. Kublashvili M.D., Kublashvili M.M., On numerical solution of the first kind singular integral equation, Proceedings of the International Scientific Conference "Information and Computer Technologies, Modelling, Control", GTU, Tbilisi, 2011.
3. Kublashvili M.D., Filfani N., Kapanadze Z., Kublashvili M.M., Numerical Solution of the Crack Problem on the Circular Disc, Scientific-Technical Journal "Building", 4(27), 2012.
4. მ. დ. კუბლაშვილი, თ. მაღრაძე, მ.მ. კუბლაშვილი. კოლინეარული ბზარების რიცხვითი ამოხსნის შესახებ. საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციის "21-ე საუკუნის მეცნიერებისა და ტექნოლოგიების განვითარების ძირითადი პარადიგმები" შრომები, თბილისი, სტუ, 2012.
5. მ. დ. კუბლაშვილი, თ.დ. კვაჭაძე, მ.მ. კუბლაშვილი. ბზარების ზოგიერთი ბრტყელი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნები მაღალი რიგის სიზუსტით. სტუ-ს შრომები, N1 (467), 2008, გვ. 9–11.

**სადისერტაციო ნაშრომის სტრუქტურა.**

სადისერტაციო ნაშრომი შედგება შესავლის, სამი თავის, დანართისა და გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხისგან. ნაშრომის მთლიანი მოცულობა შეადგენს 110 გვერდს.

ნაშრომის შესავალი ნაწილი ძირითადად საინფორმაციო ხასიათისაა. მასში აღწერილია დისერტაციაში განხილული პრობლემატიკის აქტუალობა, ამოცანის დასმა, კვლევის ძირითადი ობიექტები, გამოყენებული მეთოდის სიახლე და ეფექტურობა, მიღებული შედეგების სამეცნიერო და პრაქტიკული მნიშვნელობა.

**პირველ თავში** განხილულია თემის ძირითად საკვლევ ობიექტთან - საინჟინრო მექანიკის კონკრეტული საკონტაქტო ამოცანის შესაბამის, სუსტი სინგულარობის შემცველ ინტეგრალური განტოლებასთან და მის რიცხვით ამოხსნასთან დაკავშირებული საკითხები.

ნათქვამია, რომ აღნიშნული საკონტაქტო ამოცანა - ერთმანეთთან შეუღლებული მახლობელრადიუსებიანი ცილინდრული სხეულების დეფორმაციისას შეხების არეში წარმოქმნილი ძაბვების განსაზღვრა - მჭიდროდ არის დაკავშირებული ისეთი კონკრეტული საინჟინრო დეტალებისა თუ კონსტრუქციების გათვლებთან, რომელთაც ფართო გამოყენება გააჩნიათ მანქანათმშენებლობაში და ზოგადად სამშენებლო მექანიკაში. კერძოდ, ნაჩვენებია, რომ ასეთი ტიპის საკონტაქტო ამოცანით აღიწერება, მაგალითად, ისეთი მნიშვნელოვანი დანიშნულების მქონე მექანიზმი, როგორცაა სრიალის საკისარი, რომლის გამართულ მდგომარეობაზე ბევრად არის დამოკიდებული მრავალი სხვადასხვა დანიშნულების მქონე მანქანური დანადგარისა და მოწყობილობის შეუფერხებელი მუშაობა.

იქვე აღწერილია სრიალის საკისრების, როგორც ტექნიკური დეტალის ტიპები, მოდიფიკაციები და მუშაობის ზოგადი პრინციპები. ამასთან ერთად, მოყვანილია თემატიკის ირგვლივ არსებული ის ძირითადი, განხილულ პრობლემატიკასთან დაკავშირებული ტექნიკური ხასიათის ცნებები, ტერმინები და განმარტებები, რომლებიც გამოყენებულია წარმოდგენილი ნაშრომის შემდგომ ნაწილში.

პირველ თავში ასევე განხილულია დასმული ამოცანის მათემატიკური მოდელი და მოყვანილია შესაბამისი ინტეგრალური განტოლება. დეტალურად არის განხილული მისი სტრუქტურა და შემავალი სიდიდეების ფიზიკური შინაარსი, საძიებელი ამონახსნის თვისებები. გადმოცემულია განტოლების რიცხვითი ამოხსნის აქამდე არსებული გამოთვლითი სქემები, მათი დადებითი და

უარყოფითი მხარეები. დასაბუთებულია აღნიშნული სათვლელი ალგორითმების გამარტივების მიზანშეწონილობა საინჟინრო პრაქტიკაში მათი ეფექტურად გამოყენების თვალსაზრისით.

**მეორე** თავი ეხება მოცემული სუსტი სინგულარობის მქონე ინტეგრალური განტოლების მიახლოებითი ამოხსნის ახალი, თვლის სიმარტივეზე ორიენტირებული ალგორითმების უშუალოდ აგებისა და მისი რიცხვითი რეალიზების საკითხებს.

დეტალურად არის აღწერილი იმ კვადრატურული ფორმულის კონსტრუირებისა და შემდგომ მისი მოდიფიცირების პროცესი, რომელიც ამონახსნის საზოგადოდ არაგლუვ სტრუქტურას ითვალისწინებს.

განსაკუთრებული ყურადღება ეთმობა საინჟინრო პრაქტიკაში იმ მნიშვნელოვან შემთხვევას, როცა კონტაქტში მონაწილე სხეულებს ზედაპირზე გააჩნიათ ბზარების გავრცელების მიდამოები.

უნდა აღინიშნოს, რომ ეს შემთხვევა მათემატიკური მოდელირებისა და რიცხვითი რეალიზაციის თვალსაზრისით პირველად არის განხილული საინჟინრო პრაქტიკაში და შესაბამისად ნაშრომში შემოთავაზებული მეთოდიკა შეიცავს გარკვეულ სიახლეებს მასში განხორციელებული მიდგომებისა და გამოყენებული გამოთვლითი სქემების აგების მიმართულებით.

ნაშრომში, ბზარების მქონე სრიალის საკისრების გაანგარიშების ამოცანის რიცხვითი ამოხსნისთვის გამოყენებულია სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდი, რომელიც საზოგადოდ გამოირჩევა საკმარისად დიდი ეფექტურობით ბზარებისა და რღვევების შემცველი არეების შემთხვევაში. მაგალითად, ცნობილია, რომ ხშირად, ასეთ დროს, შესაბამისი წირის წარმოდგენა ხერხდება მხოლოდ გრაფიკული სახით. ასეთ შემთხვევაში, სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდით კორექტული გამოთვლითი პროცესის უზრუნველყოფისთვის, სხვა მეთოდებისგან განსხვავებით, საკმარისია მხოლოდ წირის კვანძითი წერტილების ცოდნა.

შესაბამისად, დისერტაციის მეორე თავში განხილულია სათანადო სინგულარული ინტეგრალური განტოლებები ბზარების სხვადასხვა მდებარეობისა და კონფიგურაციის შემთხვევაში. აღნიშნული ბზარის ამოცანები უფრო დაწვრილებით განხილულია მომდევნო თავში, სადაც აგრეთვე, აგებულია ამ განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის სქემები, რომლებიც უშუალოდ სინგულარული ოპერატორის აპროქსიმაციას ეფუძნება. ამით საგრძნობლად გაადვილებულია ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნისა და შემდგომი საინჟინრო გამოთვლების პროცესი.

წარმოდგენილი ალგორითმის საფუძველზე შექმნილი და რეალიზებულია სათვლელი პროგრამა, რომელიც იძლევა რეალურ შედეგებს ბზარებიანი სრიალის საკისრების დეფორმაციის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნისას საკონტაქტო სხეულების (ლილვისა და გარე კორპუსის) სხვადასხვა დრეკადი მაჩვენებლების შემთხვევაში.

დისერტაციის მესამე თავი ეძღვნება სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების მეთოდის საფუძველზე აგებული მიახლოებითი პროცესების უფრო დეტალურ აღწერას და მათ გამოყენებას სამშენებლო მექანიკის ზოგიერთ პრაქტიკულად მნიშვნელოვან ამოცანაში. მოყვანილია სათანადო კვადრატურული ფორმულები სხვადასხვა კონფიგურაციის ბზარების მქონე სამშენებლო თუ სხვა დანიშნულების კონსტრუქციების გათვლებისთვის. აღნიშნული ფორმულების საფუძველზე შედგენილია სათვლელი პროგრამა-პაკეტი, რომელიც იძლევა აღნიშნული ამოცანების რიცხვითი რეალიზაციის საშუალებას, როგორც პოლიმერული და ლითონური სრიალის საკისრების, ასევე ბზარებიანი კონსტრუქციების (მათ შორის რღვევების მქონე სამშენებლო ნაგებობების) გაცილებით უფრო ფართო კლასის შემთხვევაში.

დისერტაციის ბოლო ნაწილში მოყვანილია ნაშრომში აგებული გამოთვლითი სქემების მიხედვით შექმნილი პროგრამული პაკეტის გამოყენებით ჩატარებული ექსპერიმენტების საფუძველზე მიღებული რიცხვითი შედეგები და სამეცნიერო-ტექნიკური ლიტერატურის ნუსხა, რომელიც შედგება ასორმომცამდე დასახელების პუბლიკაციისგან.

# I თავი

## სრიალის საკისართან დაკავშირებული საინჟინრო მექანიკის საკონტაქტო ამოცანა

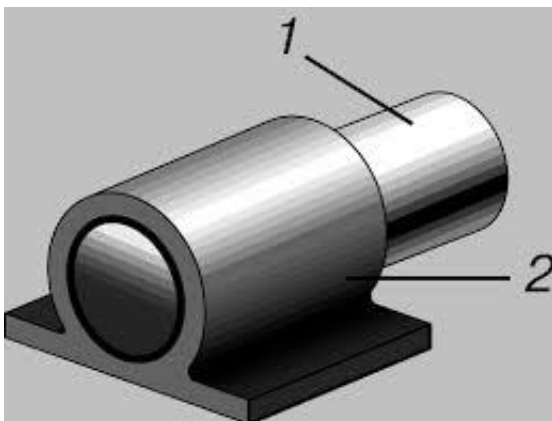
სადისერტაციო ნაშრომის პირველ და მეორე თავებში განხილული იქნება მექანიკის მნიშვნელოვანი საკონტაქტო ამოცანის რიცხვით ამოხსნასთან დაკავშირებული საკითხები.

საზოგადოდ, საკონტაქტო ამოცანები დაკავშირებულია სამშენებლო კონსტრუქციებისა და სხვადასხვა საინჟინრო მოწყობილობების გათვლებთან.

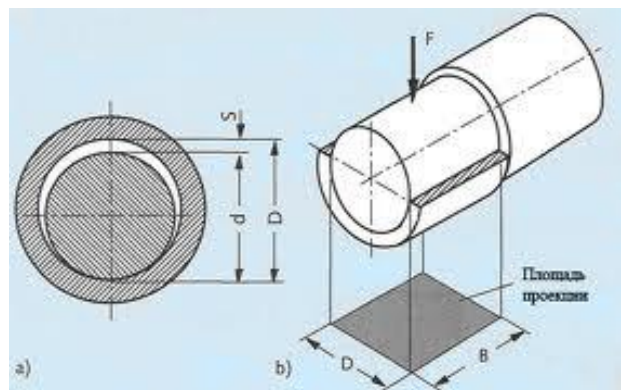
ერთ-ერთ ასეთ მოწყობილობას, რომლის ფიზიკურ და მათემატიკურ შესწავლას მივყავართ კონკრეტული ტიპის საკონტაქტო ამოცანამდე, წარმოადგენს საინჟინრო პრაქტიკაში ფართოდ გავრცელებული მექანიკური დეტალი, რომელიც ტრიბოტექნიკაში ცნობილია სრიალის საკისარის სახელით.

### 1.2. სრიალის საკისარის მექანიკური შინაარსი

სრიალის საკისარი (სურ. 1,2,3,4), როგორც ნაშრომის შესავალ ნაწილში აღინიშნა, უმნიშვნელოვანესი მოწყობილობაა და მონაწილეობს თითქმის ყველა ტიპის მანქანურ დანადგარებში.



სურ. 1



სურ. 2

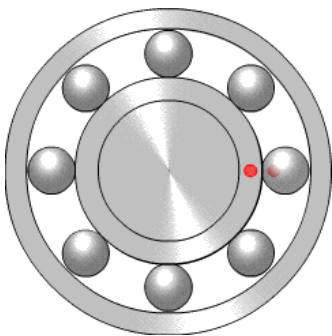


სურ. 3

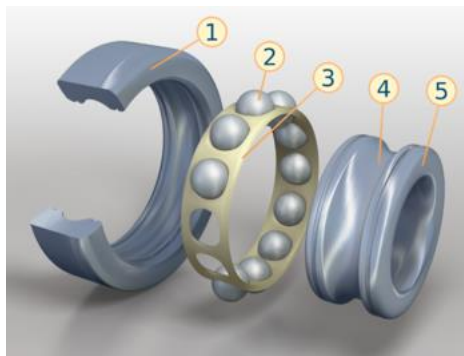


სურ. 4

აქვე ავლნიშნოთ, რომ სრიალის საკისართან ერთად საინჟინრო პრაქტიკაში ფართო გამოყენება გააჩნიათ, აგრეთვე, რხევის (სურ. 5,6,7) და ჰიდროდინამიკურ საკისრებს (სურ. 8,9,10).



სურ. 5



სურ. 6



სურ. 7



სურ. 8



სურ. 9

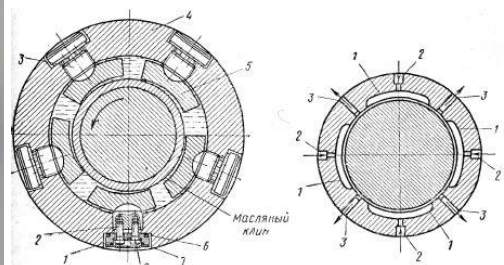
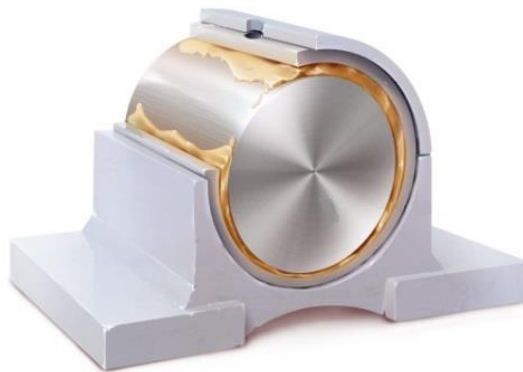


Рис. 25. Гидродинамический подшипник скольжения тип ЛОН-34  
Рис. 26. Схема гидростатической опоры

სურ. 10

უშუალოდ სრიალის საკისარი წარმოადგენს მექანიზმს, სადაც ხახუნი მიმდინარეობს შეხების მქონე ზედაპირების სხეულების სრიალისას. არსებობს სხვადასხვა ფორმისა და კონსტრუქციის სრიალის საკისრები. ჩვენს შემთხვევაში განხილული სრიალის საკისარი წარმოადგენს კორპუსს, რომელსაც აქვს ცილინდრული ნახვრეტი, სადაც მოთავსებულია ამავე ფორმის მუშა ელემენტი - ლილვი. მათ შორის არის საპოხი მასალით შევსებული ღრეჩო, რომელიც ლილვის თავისუფლად ბრუნვის საშუალებას იძლევა (სურ. 11).



სურ. 11

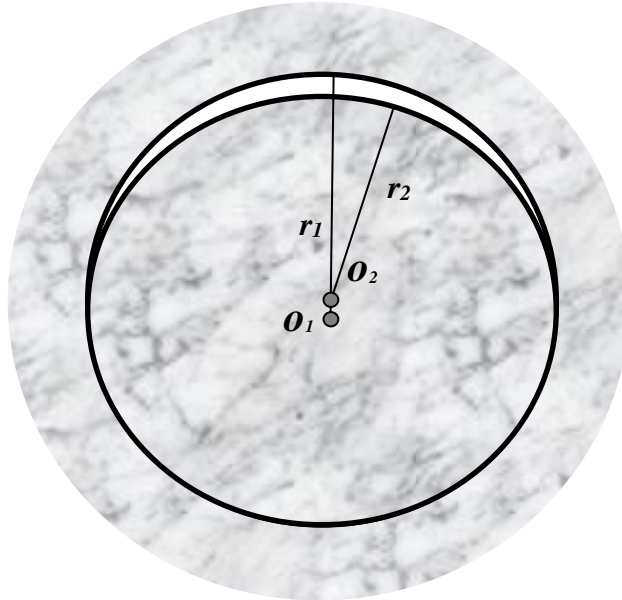
რაც შეეხება საკისრის კონსტრუქციულ გადაწყვეტილებას, უნდა აღინიშნოს, რომ ძირითადად განიხილავენ ორი ტიპის სრიალის საკისარს, რაც დაკავშირებულია შეუღლებული დეტალების დრეკადობის განსხვავებულ მოდულებთან (იხ., მაგ. [134]). კერძოდ, ერთნაირი დრეკადობის მოდულის მქონე ელემენტების შემთხვევაში განიხილება ლითონური საკისრები, ხოლო დიდად განსხვავებული დრეკადობის მოდულების შემთხვევაში - პლასტმასოვანი (პოლიმერული) საკისრები.

საინჟინრო პრაქტიკაში მნიშვნელოვან შემთხვევას წარმოადგენს სწორედ პლასტმასური საკისრების შემთხვევა. თვითონ პლასტმასოვანი სრიალის საკისრები რეალიზდება ორი გზით: პირდაპირი წყვილის სახით, როდესაც პლასტმასის სადები ჩაწნეხილია საკისრის ლითონურ კორპუსში და შეუღლებულია ფოლადის ლილვთან და შექცეული წყვილის სახით - როდესაც პლასტმასის სადები დაწნეხილია ლილვზე და შეუღლებულია ლითონური კორპუსის ნახვრეტთან [134].



## 1.2. სრიალის საკისრის მათემატიკური მოდელი

სრიალის საკისრის დეფორმაციის ამოცანა მათემატიკურად წარმოიდგინება ერთმანეთში ჩადგმული, თითქმის ტოლი რადიუსების მქონე ორი წრიული დრეკადი ცილინდრის ურთიერთქმედებით,



სურ. 12

რომელსაც შეესაბამება ქვემოთ მოყვანილი ინტეგრალური განტოლება:

$$2(\mathcal{G}_1 r_1 + \mathcal{G}_2 r_2) \int_{-\omega_0}^{\omega_0} p(\tau) \cos(\omega - \tau) \ln \operatorname{tg} \frac{|\omega - \tau|}{2} d\tau - 2(\kappa_1 r_1 + \kappa_2 r_2) \int_{-\omega_0}^{\omega_0} p(\tau) \sin |\omega - \tau| d\tau + 2\mathcal{G}_1 r_1 \int_{-\omega_0}^{\omega_0} p(\tau) d\tau + \alpha \cos \omega = (r_2 - r_1)(1 - \cos \omega), \quad -\omega_0 < \omega < \omega_0,$$

სადაც  $r_1$  და  $r_2$  შეუღლებული ცილინდრების რადიუსებია;  $p(\tau)$  - კონტაქტის არეში აღძრული საძიებელი ნორმალური წნევა;

$$\mathcal{G}_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{\pi \cdot E_1}; \quad \mathcal{G}_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{\pi \cdot E_2}; \quad \kappa_1 = \frac{(1 + \mu_1) \cdot (1 - 2\mu_1)}{2 \cdot E_1}; \quad \kappa_2 = \frac{(1 + \mu_2) \cdot (1 - 2\mu_2)}{2 \cdot E_2};$$

$E_1, E_2$  სხეულების დრეკადობის მუდმივებია;  $\mu_1, \mu_2$  - სხეულების პუასონის კოეფიციენტები;  $\alpha$  წარმოადგენს სხეულების ურთიერთდაახლოების სიდიდეს მათი დეფორმაციის დროს;  $\omega$  მიმდინარე საკონტაქტო კუთხეა კუმშვის დროს;  $\tau$  - ინტეგრაციის მიმდინარე კუთხე, ხოლო  $\omega_0$  საკონტაქტო კუთხის ნახევარია.



მოცემული განტოლების ამოხსნისთვის [1]-ში აგებულია გამოთვლითი სქემა, რომელიც საძიებელი ფუნქციის მუდმივი ფუნქციით ცვლილებას ეფუძნება. სქემა საკმაოდ მარტივია გამოყენების თვალსაზრისით, მაგრამ მასში არ არის გათვალისწინებული ის მნიშვნელოვანი გარემოება, რომ საძიებელი  $p(\tau)$  ფუნქცია კონტაქტის ბოლოების მახლობლობაში საზოგადოდ შემოუსაზღვრელია.

სახელდობრ, განტოლების შემდგომმა თეორიულმა კვლევებმა აჩვენა, რომ საძიებელ ფუნქციას გააჩნია  $\frac{p_0(\tau)}{\sqrt{\omega_0^2 - \tau^2}}$  სახე, სადაც  $p_0(\tau)$  ჰელდერის კლასის ფუნქციაა  $[-\omega_0, \omega_0]$  სეგმენტზე  $\frac{1}{2}$  მაჩვენებლით [10-13]. ამავე ნაშრომებში დაფუძნებულია, აგრეთვე, რიცხვითი სქემა, რომელიც  $p(\tau)$ -ის აღნიშნულ წარმოდგენას ითვალისწინებს და  $p_0(\tau)$  ფუნქციის ჩებიშევის კვანძებში აგებული საინტერპოლაციო მრავალწევრით აპროქსიმაციას ემყარება.

აქვე უნდა ითქვას, რომ ეს გამოთვლითი სქემა, გარკვეული მოდიფიცირების შემდგომ, გამოყენებულია ერთ-ერთ ძირითად სქემად ჩვენს გამოთვლებში, დრეკადობის მნიშვნელოვნად განსხვავებული მოდულების მქონე შეუღლებული სხეულების შემთხვევისთვის. აღნიშნული სქემის კონსტრუირებისა და გამარტივების პროცესი დაწვრილებით იქნება განხილული მომდევნო თავში.

პრაქტიკული თვალსაზრისით მნიშვნელოვან შემთხვევას წარმოადგენს ისეთი სრიალის საკისრების დეფორმაციის შესწავლა, რომელსაც ლილვზე ან გარე კორპუსზე გააჩნია ბზარების გავრცელების მიდამოები.

ამასთან დაკავშირებით, საზოგადოდ შეიძლება ითქვას, რომ სამშენებლო, საგზაო და ამწე-სატრანსპორტო მოწყობილობების მუშაობის პერიოდში მკვეთრად გამოიხატება მათი ექსპლუატაციის თანმხვედრი პროცესები, რომლებიც იწვევენ ნაკეთობის მასალაში მექანიკურ, ფიზიკურ და ქიმიურ ცვლილებებს. აღნიშნული ცვლილებები, პროცესები განსხვავდებიან რა თავიანთი ბუნებით, არსით და მიმდინარეობის ხასიათით, სხვადასხვა ინტენსიურობით მოქმედებენ ნაკეთობის მუშაობის უნარზე. პროცესებს, რომლებიც იწვევენ სამშენებლო მანქანა-მოწყობილობების მტყუნებათა მოვლენებს, მიეკუთვნება მანქანა-მოწყობილობებისა და მისი ელემენტების ცვეთა ხახუნის შედეგად; დალილობა მრავალჯერადი

დატვირთვის გამო; კოროზია; დაძველება; ბზარის ტიპის დეფექტების წარმოშობა და გავრცელება. შესაბამისად, ამ პროცესებისადმი მედეგობა მიჩნეულია ამ ჯგუფის მანქანათა საიმედოობის კრიტერიუმად.

საყოველთაო აღიარებით, სამშენებლო მანქანა-მოწყობილობების მტყუნებათა ძირითად მიზეზებს მიეკუთვნება: ელემენტების ცვეთა ხახუნის შედეგად, რიგი ნაკეთობების დაღლილობა და ბზარების წარმოშობა დეტალებში. ამასთან, სტატისტიკური მონაცემებით დადგენილია, რომ მანქანების მტყუნების დიდი პროცენტი მოდის ცვეთისა და ბზარების არსებობის ფაქტორზე [134]. აღნიშნულის გამო, მანქანა-მოწყობილობების ტექნიკური მდგომარეობის გამოკვლევის დროს, როგორც წესი, განსაკუთრებული ყურადღება ექცევა მათში ხახუნით გამოწვეული ცვეთისა და სხვადასხვა ტიპის ბზარების წარმოშობის პროცესებს.

ჩვენს შემთხვევაში, ბზარებიანი სრიალის საკისრების დეფორმაციის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნისთვის შერჩეული იქნა სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდი, რომელიც შესაბამისი ამოცანების ამოხსნის არსებულ მეთოდებში განსაკუთრებით ეფექტურად არის მიჩნეული მთელი რიგი უპირატესობათა გამო. საკმარისია აღინიშნოს, რომ, როგორც წესი, ბზარების მქონე არეებისათვის სათანადო წირის ზუსტი პარამეტრული განტოლებებით მოცემა რთულია და ხშირად ცნობილია ამ წირის მხოლოდ გრაფიკული სახე. ასეთ შემთხვევაში, სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდით გამოთვლითი სქემების აგებისთვის, სხვა მეთოდებისგან განსხვავებით, საკმარისია მხოლოდ წირის კვანძითი წერტილების ცოდნა.

ჩვენს მიერ, აღნიშნული ამოცანისთვის განხილულია შესაბამისი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებები ბზარების სხვადასხვა მდებარეობისა და კონფიგურაციის შემთხვევაში. აგებულია ამ განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის სქემები, რომლებიც უშუალოდ სინგულარული ოპერატორის აპროქსიმაციას ეფუძნება. ეს გარემოება საგრძნობლად ამარტივებს ამოცანის ამოხსნისა და შემდგომი საინჟინრო გამოთვლების პროცესს.

## II თავი

### გამოთვლითი ალგორითმების დამუშავება სრიალის საკისართან დაკავშირებული საკონტაქტო ამოცანისთვის

#### 2.1. გამოთვლითი სქემების აგება სრიალის საკისრის დეფორმაციის ამოცანისთვის

როგორც ცნობილია, ზოგადად საკონტაქტო ამოცანების ქვეშ იგულისხმება ისეთი ამოცანები, სადაც შეისწავლება დეფორმაციებისა და ძაბვების განაწილებები იმ მყარი სხეულების სისტემაში, რომელთაც გარკვეულ საზღვრებში ურთიერთქმედების საერთო ზედაპირი (შეხების არე) გააჩნიათ.

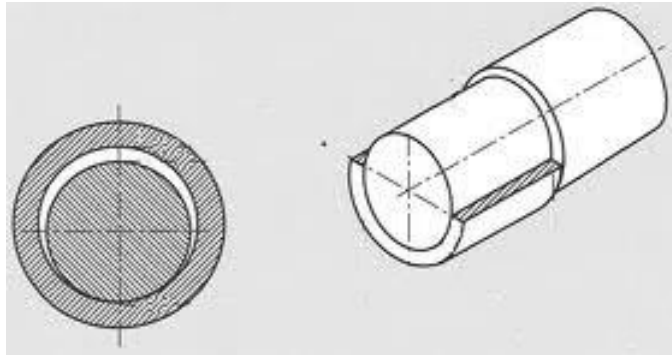
აღნიშნული ტიპის ამოცანების შესწავლას ეძღვნება არაერთი ცნობილი მკვლევარის მონოგრაფია და ცალკეული სამეცნიერო ნაშრომი (იხ. მაგ. [1-9]). ეს განპირობებულია ამ სახის ამოცანათა არა მარტო პრაქტიკული, არამედ თეორიული მნიშვნელობითაც, ვინაიდან შესაბამის ამოცანათა მექანიკური მრავალწახნაგოვნება გარკვეულ დასაბამს ქმნის მნიშვნელოვანი სირთულის მქონე მათემატიკურ ამოცანათა ჩამოყალიბებისა და შესწავლისათვის.

საკონტაქტო ამოცანების პრაქტიკულ მნიშვნელობასთან დაკავშირებით საკმარისია აღინიშნოს, რომ, როგორც უკვე ზემოთ აღინიშნა, მათი განხილვა გვიხდება სხვადასხვა სამშენებლო კონსტრუქციის, საინჟინრო დეტალისა თუ მექანიზმის გათვლებისას.

რაც შეეხება წარმოდგენილი პრობლემატიკის მათემატიკურ ასპექტებს, ამ თვალსაზრისით შეიძლება ითქვას, რომ დრეკადი საკონტაქტო სხეულების სხვადასხვა კონფიგურაციასა და დრეკად მახასიათებლებს არც თუ იშვიათად მივყავართ საკმარისად რთულ განტოლებებამდე, რომელთა ამოხსნაც მოითხოვს არასტანდარტული გამოთვლითი სქემების აგებასა და რეალიზაციას.

სწორედ ასეთ ამოცანათა რიცხვს მიეკუთვნება ერთმანეთში ჩადგმული, თითქმის ტოლი რადიუსების მქონე ორი წრიული დრეკადი ცილინდრის

ურთიერთქმედების ამოცანა (სურ. 13), რომელიც ნახსენები იქნა ჩვენი კვლევების ერთ-ერთი ძირითადი ობიექტის მათემატიკური მოდელის განხილვისას.



სურ. 13

ზემოთ ითქვა ისიც, რომ აღნიშნულ საკონტაქტო ამოცანას არსებითი გამოყენება აქვს საინჟინრო ტექნიკაში, მათ შორის, სრიალის საკისრების თეორიასა და შესაბამისად იმ დეტალებისა და კონსტრუქციების გათვლებში, რომლებიც აღნიშნული ტიპის მექანიზმების გამოყენებას ეფუძნებიან. აგრეთვე, ხაზი გაესვა იმ გარემოებას, რომ სრიალის საკისარი, როგორც უმნიშვნელოვანესი დეტალი, მონაწილეობს თითქმის ყველა ტიპისა და ფუნქციონალური დანიშნულების მანქანურ დანადგარებსა და მოწყობილობებში, მათ შორის ძრავებში, ტურბინებში, ტუმბოებში, კომპრესორებში და ა.შ.

პირველ თავში ასევე აღინიშნა, რომ სრიალის საკისრის დეფორმაციის ამოცანა განხილულია ცნობილი მექანიკოსისა და მათემატიკოსის ი. შტაერმანის მონოგრაფიაში “Контактная задача теории упругости” [1]. იქვე მოყვანილია ამოცანის მათემატიკური მოდელირების პროცესი და განტოლება, რომელზეც ეს ამოცანა მიიყვანება:

$$2(\mathcal{G}_1 r_1 + \mathcal{G}_2 r_2) \int_{-\omega_0}^{\omega_0} p(\tau) \cos(\omega - \tau) \ln \operatorname{tg} \frac{|\omega - \tau|}{2} d\tau - (\kappa_1 r_1 + \kappa_2 r_2) \int_{-\omega_0}^{\omega_0} p(\tau) \sin |\omega - \tau| d\tau +$$

$$(2.1.1)$$

$$+ 2\mathcal{G}_1 r_1 \int_{-\omega_0}^{\omega_0} p(\tau) d\tau + \alpha \cos \omega = (r_2 - r_1)(1 - \cos \omega), \quad -\omega_0 < \omega < \omega_0.$$

$r_1$  და  $r_2$ -ით აღნიშნულია კონტაქტში შემავალი (შეუღლებული) ცილინდრული სხეულების რადიუსები;  $p(\tau)$  –  $[-\omega_0, \omega_0]$  საკონტაქტო არეში წარმოქმნილი (საძიებელი) წნევაა;

$$\vartheta_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{\pi \cdot E_1}; \quad \kappa_1 = \frac{(1 + \mu_1) \cdot (1 - 2\mu_1)}{2 \cdot E_1}; \quad (2.1.2)$$

$$\vartheta_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{\pi \cdot E_2}; \quad \kappa_2 = \frac{(1 + \mu_2) \cdot (1 - 2\mu_2)}{2 \cdot E_2};$$

$\mu_1, \mu_2$  - სხეულების პუასონის კოეფიციენტები, ხოლო  $E_1, E_2$  სხეულების დრეკადობის მუდმივებია;  $a$  წარმოადგენს სხეულების დეფორმაციისას მათი ურთიერთდაახლოების მაჩვენებელ სიდიდეს და განისაზღვრება (2.1.1)-დან (მასში  $\omega = 0$  მნიშვნელობის ჩასმით) შემდეგი ტოლობის საშუალებით:

$$\alpha(p) = -2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \int_{-\omega_0}^{\omega_0} p(\tau) \cos(\tau) \ln \operatorname{tg} \frac{|\tau|}{2} d\tau + \quad (2.1.3)$$

$$+ (\kappa_1 r_1 + \kappa_2 r_2) \int_{-\omega_0}^{\omega_0} p(\tau) \sin|\tau| d\tau - 2\vartheta_1 r_1 \int_{-\omega_0}^{\omega_0} p(\tau) d\tau$$

(2.1.1) ინტეგრალური განტოლება,  $\int_{-\omega_0}^{\omega_0} p(\tau) \cos(\tau) d\tau = \frac{F}{r_1}$  პირობასთან ერთად ( $F$  -

დეფორმაციის გამომწვევი ძალაა), განსაზღვრავს  $\omega_0$  ( $0 < \omega_0 < \pi/2$ ) კუთხეს და  $p(\omega)$  საძიებელ წნევას  $-\omega_0 < \omega < \omega_0$  კონტაქტის არეში. აქვე ისიც უნდა ითქვას, რომ, როგორც ეს ნაჩვენებია [1]-ში,  $\omega_0$ -ის სხვადასხვა კონკრეტული მნიშვნელობებისთვის მიღებული რიცხვითი ამოხსნების საფუძველზე შესაძლოა საბოლოო ჯამში მიღებული იქნას მოცემული განტოლების მიახლოებითი ამოხსნა ზოგადად, რაც პრინციპში, პრაქტიკული გამოთვლებისას, განხორციელებული არის კიდევ აღნიშნულ მონოგრაფიაში.

იქვე, [1]-ში, (2.1.1) განტოლების ამოხსნისთვის აგებულია მარტივი გამოთვლითი სქემა, რომელიც საძიებელი ფუნქციის მუდმივი ფუნქციით ცვლილებას ეფუძნება. ამ სქემის გამოყენებით ჩატარებულია სათანადო გამოთვლები და მიღებულია გარკვეული რიცხვითი შედეგებიც. თუმცა, წინამდებარე ნაშრომის 1.2 პარაგრაფში

შესაბამისი სქემის განხილვისას აღინიშნა, რომ ასეთი სახის აპროქსიმაციამ შესაძლოა მიგვიყვანოს არაკორექტულ ამოხსნებამდე, ვინაიდან აღნიშნულ სქემაში არ არის გათვალისწინებული ის მნიშვნელოვანი გარემოება, რომ საძიებელი  $p(\tau)$  ფუნქცია კონტაქტის ბოლოების მახლობლობაში საზოგადოდ შემოუსაზღვრელია, რაც ნაჩვენები იქნა შემდგომ ჩატარებულ კვლევებში [10-13]. იქვე, განტოლებაში შემავალი ფუნქციების თვისებების უფრო დეტალური შესწავლის საფუძველზე, აგებულია ახალი რიცხვითი სქემა, სადაც გათვალისწინებულია განტოლების სპეციფიკა და სხვადასხვა თავისებურებები.

კერძოდ, ნაჩვენებია, რომ რომ საძიებელ ფუნქციას გააჩნია შემდეგი სახე:

$$p(\tau) = \frac{p_0(\tau)}{\sqrt{\omega_0^2 - \tau^2}}, \quad p_0(\tau) \in H_{\frac{1}{2}}[-\omega_0, \omega_0].$$

ქვემოთ, დეტალურად არის მოყვანილი აღნიშნული კვლევების საფუძველზე აგებული კვადრატურული პროცესი, რომელიც საფუძველად უდევს განსახილავი ამოცანის ალგორითმიზაციას და სათანადო სათვლელი პროგრამის შედგენას მისი რიცხვითი რეალიზაციისთვის.

საძიებელი  $p(\tau)$  ფუნქციის ზემოთაღნიშნული სტრუქტურის გათვალისწინებით (იხ. [10,11]) (2.1.1) განტოლება გადავწეროთ ასეთი სახით:

$$2(\mathcal{G}_1 r_1 + \mathcal{G}_2 r_2) \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{p_0(\tau)}{\sqrt{\omega_0^2 - \tau^2}} \cos(\omega - \tau) \ln \operatorname{tg} \frac{|\omega - \tau|}{2} d\tau - (\kappa_1 r_1 + \kappa_2 r_2) \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{p_0(\tau)}{\sqrt{\omega_0^2 - \tau^2}} \sin |\omega - \tau| d\tau +$$

$$(2.1.4)$$

$$+ 2\mathcal{G}_1 r_1 \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{p_0(\tau)}{\sqrt{\omega_0^2 - \tau^2}} d\tau + \alpha \cos \omega = (r_2 - r_1)(1 - \cos \omega), \quad -\omega_0 < \omega < \omega_0,$$

სადაც  $p_0(\tau) \in H_{\frac{1}{2}}[-\omega_0, \omega_0]$ .

შემდგომ, ჩებიშევის კვანძებში აგებული კვადრატურული ფორმულების გამოსაყენებლად, მოვახდინოთ ცვლადის გარდაქმნა ინტეგრების შუალედის შესაცვლელად. (2.1.3)-ის გათვალისწინებით გვექნება:

$$\begin{aligned}
& 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \int_{-1}^1 \frac{p_0(\omega_0 \tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \left[ \cos(\omega_0 \tau - \omega) \ln \operatorname{tg} \frac{|\omega_0 \tau - \omega|}{2} - \cos \omega \cos(\omega_0 \tau) \ln \operatorname{tg} \frac{\omega_0 |\tau|}{2} \right] d\tau - \\
& - (\kappa_1 r_1 + \kappa_2 r_2) \int_{-1}^1 \frac{p_0(\omega_0 \tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} [\cos \omega \sin(\omega_0 |\tau|) - \sin |\omega_0 \tau - \omega|] d\tau + \\
& + 2\vartheta_1 r_1 (1 - \cos \omega) \int_{-1}^1 \frac{p_0(\omega_0 \tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = (r_2 - r_1)(1 - \cos \omega), \quad -\omega_0 < \omega < \omega_0,
\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

$p_0(\omega_0 \tau)$  ფუნქციის მიახლოება მოვახდინოთ ჩებიშევის პირველი გვარის საინტერპოლაციო პოლინომის საშუალებით:

$$p_0(\omega_0 \tau) = \sum_{k=1}^n C_k^{(n)}(\tau) p_0(\omega_0 \tau_k), \tag{2.1.6}$$

სადაც

$$C_k^{(n)}(\tau) = \frac{(-1)^{k-1} \sqrt{1-\tau^2} T_n(\tau)}{n(\tau - \tau_k)}, \tag{2.1.7}$$

$$T_n(\tau) = \cos(n \cdot \arccos(\tau)), \tag{2.1.8}$$

$$\tau_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi \quad (k=1, 2, \dots, n). \tag{2.1.9}$$

შესაბამისად, (2.1.1) ინტეგრალური განტოლება შეიცვლება მიახლოებითი განტოლებით:

$$\sum_{k=1}^n A_k^{(n)}(\omega) \tilde{p}_0(\omega_0 \tau_k) = (r_2 - r_1)(1 - \cos \omega), \tag{2.1.10}$$

სადაც

$$\begin{aligned}
A_k^{(n)}(\omega) = & 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2) \int_{-1}^1 \frac{C_k^{(n)}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \left[ \cos(\omega_0 \tau - \omega) \ln \operatorname{tg} \frac{|\omega_0 \tau - \omega|}{2} - \cos \omega \cos(\omega_0 \tau) \ln \operatorname{tg} \frac{\omega_0 |\tau|}{2} \right] d\tau - \\
& - (\kappa_1 r_1 + \kappa_2 r_2) \int_{-1}^1 \frac{C_k^{(n)}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} [\cos \omega \sin(\omega_0 |\tau|) - \sin |\omega_0 \tau - \omega|] d\tau + 2\vartheta_1 r_1 (1 - \cos \omega) \int_{-1}^1 \frac{C_k^{(n)}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau
\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

თუ (2.1.10) განტოლებაში  $\omega$  ცვლადს მივანიჭებთ  $\omega_j = \omega_0 \cos \frac{2j-1}{2n} \pi$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) მნიშვნელობებს, მივიღებთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას საძიებელი ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობის მოსაძებნად  $\omega_0 \tau_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) კვანძებში.

როგორც ვხედავთ, მოყვანილი სქემის რეალიზაცია მოითხოვს  $A_k^{(n)}(\omega)$  ინტეგრალური კოეფიციენტების გამოთვლას, რაც შესაძლოა განხორციელდეს ნებისმიერი სიზუსტით სათანადოდ შერჩეული კვადრატურული ფორმულების საშუალებით.

იმ ინტეგრალების გამოსათვლელად, რომლებიც არ შეიცავენ ლოგარითმულ განსაკუთრებულობებს, მიზანშეწონილია გამოყენებული იქნას ერმიტის კვადრატურული ფორმულა. იმის გათვალისწინებით, რომ აღნიშნული ფორმულა ზუსტია  $\leq 2n-1$  ხარისხის მრავალწევრებისთვის ( $n$  კვანძის შემთხვევაში), გვექნება:

$$\int_{-1}^1 \frac{C_k^{(n)}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n C_k^{(n)}(\tau_j) = \frac{\pi}{n} C_k^{(n)}(\tau_k) = \frac{\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.1.12)$$

შემდგომ, თუ ვიგულისხმებთ  $N \gg n$ , შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int_{-1}^1 \frac{C_k^{(n)}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} [\cos \omega \sin(\omega_0 |\tau|) - \sin |\omega_0 \tau - \omega|] d\tau \approx \frac{\pi}{N} \sum_{j=1}^N C_k^{(n)}(\tau_j) [\cos \omega \sin(\omega_0 |\tau_j|) - \sin |\omega_0 \tau_j - \omega|], \quad (2.1.13)$$

$$\tau_j = \cos \frac{2j-1}{2N} \pi \quad (j = 1, 2, \dots, N).$$

რაც შეეხება ლოგარითმული განსაკუთრებულობების მქონე ინტეგრალურ კოეფიციენტებს

$$\bar{A}_k^{(n)}(\omega) = \bar{A}_k^{(n)}(\omega_0 \xi) = \int_{-1}^1 \frac{C_k^{(n)}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \left[ \cos(\omega_0 \tau - \xi) \ln \operatorname{tg} \frac{|\omega_0 \tau - \xi|}{2} - \cos \omega \cos(\omega_0 \tau) \ln \operatorname{tg} \frac{\omega_0 |\tau|}{2} \right] d\tau \quad (2.1.14)$$

$$\left( \xi \in \{ \tau_j \}_{j=1}^n \right),$$



მათ შემთხვევაში ერმიტის ფორმულის უშუალოდ გამოყენების მართლზომიერების დასაბუთება რთულია, ამიტომ აღნიშნული კოეფიციენტები წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$\bar{A}_k^{(n)}(\omega_0 \xi) = \int_{-1}^1 \frac{g_n(\tau, \xi)}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-\xi)} d\tau, \quad (2.1.15)$$

სადაც

$$g_n(\tau, \xi) = C_k^{(n)}(\tau)(\tau-\xi) \left\{ \cos[\omega_0(\tau-\xi)] \ln \operatorname{tg} \frac{\omega_0|\tau-\xi|}{2} - \cos \omega \cos(\omega_0 \tau) \ln \operatorname{tg} \frac{\omega_0|\tau|}{2} \right\}. \quad (2.1.16)$$

შეიძლება იმის ჩვენება, რომ  $(\tau-\xi) \ln \operatorname{tg} \frac{\omega_0|\tau-\xi|}{2}$  ფუნქცია აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას  $1-\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ). შესაბამისად, ნებისმიერი მოცემული  $n$ -სთვის  $g_n(\tau, \xi) \in H_{1-\varepsilon}$ . ამის გათვალისწინებით, (2.1.15) ინტეგრალის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ სათანადო ლიტერატურაში ცნობილი შემდეგი მიახლოებითი ფორმულა:

$$\int_{-1}^1 \frac{g_n(\tau, \xi)}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-\xi)} d\tau \approx \sum_{j=1}^N B_j^{(N)}(\xi) g_n(\tau_j, \xi) \quad (N \gg n), \quad (2.1.17)$$

სადაც

$$B_j^{(N)}(\xi) = \frac{(-1)^{j-1} \sqrt{1-\tau_j^2} U_{N-1}(\xi) - 1}{N(\xi - \tau_j)} \pi, \quad (2.1.18)$$

$$U_{N-1}(\xi) = \frac{\sin(N \cdot \arccos(\xi))}{\sin(\arccos(\xi))},$$

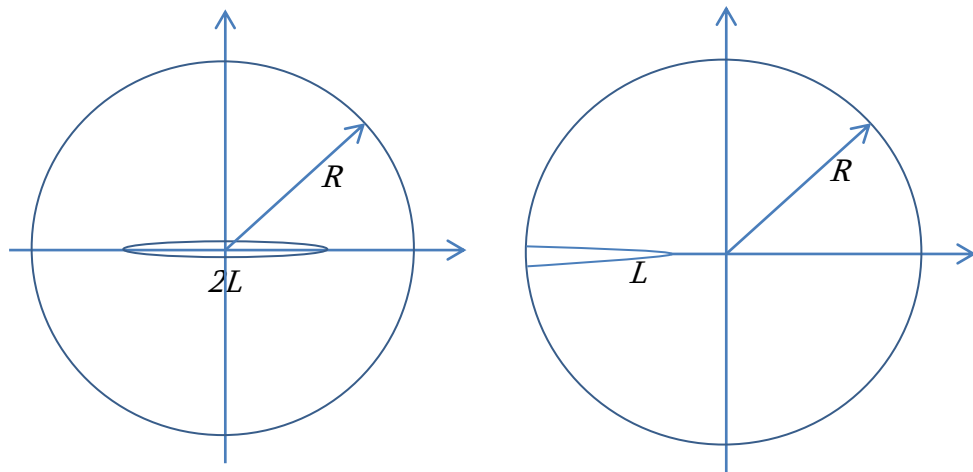
ხოლო  $\tau_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) - ზემოთ მითითებული კვანძებია.

აღნიშნული სქემის მიხედვით ჩატარებული იქნა რიცხვითი გამოთვლები პროგრამული პაკეტის „Wolfram Mathematica“ გამოყენებით. მიღებულია შედეგები კონტაქტში მონაწილე სხეულების სხვადასხვა დრეკადი მახასიათებლების შემთხვევაში, რაც კიდევ უფრო მრავალფეროვანს და თვალსაჩინოს ხდის სამიებელი ძაბვების განაწილების დღემდე არსებულ სურათს.

## 2.2. ბზარებიანი სრიალის საკისრის რიცხვითი გაანგარიშების შესახებ

ნაშრომში განხორციელებული შემდგომი კვლევები შეეხება სათანადო სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების განხილვას ბზარების სხვადასხვა მდებარეობისა და კონფიგურაციის შემთხვევაში. მესამე თავში მოყვანილია ამ განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის სქემები, რომლებიც უშუალოდ სინგულარული ოპერატორის აპროქსიმაციას ეფუძნება. უნდა აღინიშნოს, რომ ეს გარემოება საგრძნობლად ამარტივებს ამოცანის ამოხსნისა და შემდგომი საინჟინრო გამოთვლების პროცესს.

ჩვენი კვლევები ამ მიმართულებით ითვალისწინებს პრაქტიკულად მნიშვნელოვან შემთხვევებს, როცა საკისრის ლილვს ცენტრში ან საზღვარზე გააჩნია რადიალური ბზარი:

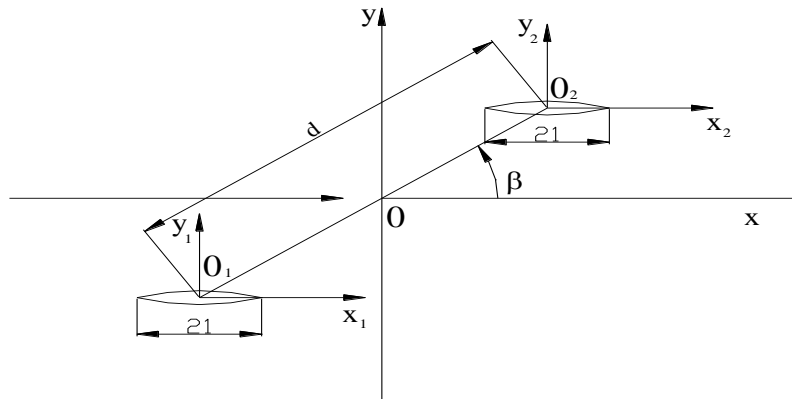


ამ შემთხვევაში, ბზარის წირის გასწვრივ, მაგალითად სიმეტრიული დატვირთვის დროს, შესაბამისად მიიღება განტოლებები:

$$\int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\eta - \xi} + M(\eta, \xi) \right] v'(\eta) d\eta = \pi \sigma(\xi), \quad |\xi| < 1; \quad \int_0^1 K(\eta, \xi) v'(\eta) d\eta = \pi \sigma(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

სადაც  $M(\eta, \xi)$  და  $K(\eta, \xi)$  გარკვეული სახის სინგულარული გულებია;  $\xi = x/L$ ,  $\eta = t/L$ .

განხილულია აგრეთვე ამოცანა, როცა უსასრულო ნახევარსიბრტყეზე (ჩვენს შემთხვევაში საკისრის გარე კორპუსზე) მოცემულია ორი თანაბარი სიგრძის სიმეტრიულად განლაგებული ბზარი მათზე მოცემული დატვირთვით, რომელიც აკმაყოფილებს სიმეტრიის პირობას:



აღნიშნული ამოცანა მიიყვანება პირველი გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l}^{+l} \frac{\varphi_0(t)}{t-t_0} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-l}^{+l} k(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0),$$

სადაც  $k(t_0, t) = \frac{t+t_0+d \cos \beta}{(t+t_0+d \cos \beta)^2 + d^2 \sin^2 \beta}$ , ხოლო  $\beta$  -წარმოადგენს კუთხეს ბზარის

სიბრტყესა და წრფეს შორის, რომელიც გადის ბზარის ცენტრებს შორის.

როგორც ითქვა, აღნიშნული ამოცანები და მათი რიცხვითი ამოხსნა უფრო ვრცლად განხილულია მესამე თავის 3.6 პარაგრაფში, ხოლო შესაბამისი გამოთვლითი ალგორითმის რეალიზაციის საფუძველზე მიღებული რიცხვითი შედეგები და შესაბამისი ეპიურები, კონტაქტში მონაწილე სხეულების სხვადასხვა დრეკადი მაჩვენებლების შემთხვევაში, მოცემულია სადისერტაციო ნაშრომის ბოლო ნაწილში დანართის სახით.

### III თავი

#### ბზარების თეორიის ამოცანების რიცხვითი ამოხსნა სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებით

ცნობილია, რომ მყარი სხეულების სიმტკიცე არსებითად არის დამოკიდებული რეალური სტრუქტურის დეფექტებზე. ნაშრომის შესავალში აღნიშნული იყო, რომ რეალურ მასალებში ყოველთვის არსებობს სხვადასხვა ტიპის დიდი რაოდენობის მიკროდეფექტები, რომელთა განვითარება მოდებული დატვირთვის მოქმედებით მათი ზრდის მიმართულებით წარმოშობს ბზარებს, რომელთა შედეგად საბოლოო ჯამში ხდება სხეულის ლოკალური ან სრული რღვევა. როგორც პრაქტიკული გამოცდილება აჩვენებს, ეს მოვლენა განსაკუთრებით დამახასიათებელია მყიფე ან კვაზიმყიფე დეფორმირებადი მყარი სხეულის რღვევისათვის.

საზოგადოდ, მყიფე რღვევის მექანიკის მეცნიერების საფუძველს წარმოადგენს ბზარების მექანე სხეულების დამაბული დეფორმირებადი მდგომარეობის შესწავლა ბზარის წვეროების (ან სხვა ასეთი ტიპის დეფექტების) მახლობლობაში. მნიშვნელოვანია, აგრეთვე, ბზარების გავრცელების კრიტერიუმების დადგენა დეფორმირებად სხეულებზე გარე მოქმედების ველის შემთხვევაში.

სიმტკიცეზე ბზარების მექანე ნაგებობებისა და კონსტრუქციის ელემენტების გაანგარიშებისას მყიფე რღვევის მექანიკის ერთ-ერთი ძირითადი საკითხია ბზარების გასწვრივ ძაბვების განაწილების განსაზღვრა, რომელიც ხასიათდება ძაბვის ინტენსივობის კოეფიციენტებით.

აღნიშნული საკითხების შესწავლა დიდი ხანია წარმოადგენს მრავალი ცნობილი პრაქტიკოსი თუ თეორიული მკვლევარის ინტერესს. მყიფე რღვევის მექანიკა სათავეს იღებს ა. გრიფითის [15-16] ნაშრომებიდან. შემდეგ ეს თეორია განავითარეს გ. ირვინმა [18], ე. ოროვანმა [19].

ნ. მოროზოვის [20], ვ. პანასიუკის [111], ვ. პანასიუკი, ს. სავრუკი ა. დაციშინის [112], ფ. მაკკლინტონის, ა. არგონის [105], ტ. ეკობორის [33], გ. ჩერეპანოვის [64], ვ. პარტონი, ე. მოროზოვის [39] მონოგრაფიული ხასიათის ნაშრომებს გამორჩეული ადგილი უჭირავთ მყარი სხეულების მყიფე რღვევის თეორიაში. აღნიშნულ თემატიკას ეძღვნება ნ. მუსხელიშვილისა [3] და ლ. სედოვის [129] მონოგრაფიების ცალკეული თავები, ასევე სტატიები: ჯ. სი [130], გ. ჩერეპანოვი [63], რ. ბანცური [59-60, 133] და სხვა. ბზარების თემაზე გამოქვეყნებული ნაშრომების უფრო დეტალური განხილვა წარმოდგენილია მონოგრაფიაში [68]. ამ შრომებში ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს გამოკვლევას წარმოადგენს სხეულებში ძაბვების გადანაწილების გათვალისწინება მათში ბზარებისა და ხვრელების წარმოშობის დროს. დღეისათვის წრფივი დრეკადობის ფარგლებში ამოხსნილია საკმარისად ბევრი სხვადასხვა სახის ჭრილების (ბზარების) მქონე დამაბულ-დეფორმირებულ სხეულების მდგომარეობა. ძირითადად ეს ამონახსნები ეხება ერთი ჭრილის (ბზარის) ან გარკვეული აზრით მოწესრიგებული ჭრილების მქონე სხეულებს, ხოლო ამოხსნის დამუშავებული მეთოდები ეფექტურად გამოიყენება მხოლოდ ამა თუ იმ კლასის ამოცანებისათვის.

მნიშვნელოვანი წვლილი აქვს შეტანილი ბზარების გასწვრივ დამაბული მდგომარეობების შესწავლაში კოლოსოვს [14], რომელიც იკვლევდა ელიფსური ტიპის ხვრელით შესუსტებული თანაბრად გაჭიმული სიბრტყის წონასწორობის საკითხებს. შემდგომში ეს ამოცანა განიხილა ინგლანდმა [17] ნებისმიერი დატვირთვის მქონე ელიფსური ტიპის ხვრელების შემთხვევაში. შესუსტებული სიბრტყის დამაბულობის ამოცანა ამოხსნილი იქნა ნ. მუსხელიშვილის მიერ [3].

რაც შეეხება ბზარების თეორიის ამოცანების ამოხსნის მათემატიკურ აპარატს, შეიძლება ითქვას, რომ ამ მხრივ საკმარისად მოხერხებულ საშუალებას წარმოადგენს სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდი, რომელიც შესაბამისი ამოცანების ამოხსნის არსებულ მეთოდებში განსაკუთრებით ეფექტურად არის მიჩნეული რიგი უპირატესობების გამო.

კოშის ტიპის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებები უკანასკნელ წლებში სულ უფრო და უფრო ფართოდ გამოიყენება სხვადასხვა სახის გამოყენებითი ამოცანების რიცხვითი ამოხსნებისთვის. ამან, ბუნებრივია, თავისი ასახვა ჰპოვა მრავალი ცნობილი ავტორის მონოგრაფიასა და ნაშრომში [3, 21, 30-32, 35, 46-50, 65, 78-79, 83, 110, 112, 113-114]. შესაბამისად, ასეთი ტიპის განტოლებებისათვის შექმნილია კარგი თეორიული ბაზა, რომელიც საკმარისი სისრულით გადმოცემულია [30, 76] მონოგრაფიებში.

სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის მეთოდების განვითარება დაიწყო მის თეორიულ გამოკვლევებზე გაცილებით უფრო გვიან. პირველი ნაშრომებიდან მ. ლავრენტიევის ცნობილი სტატია [104], რომელმაც საფუძველი ჩაუყარა ამ მიმართულებით დაწყებულ გამოთვლითი მეთოდების ინტენსიურ დამუშავებას. მოგვიანებით გამოქვეყნებული იქნა ნაშრომები, რომლებშიც მოცემულია უფრო სისტემატიური ხასიათის კვლევები სხვადასხვა სახის სინგულარული ინტეგრალების მიახლოებითი გამოთვლისა და სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა რიცხვითი ამოხსნის საკითხებში. აღნიშნული პუბლიკაციებიდან გამოსარჩევია გ. პიხტეევის [116-117] და ვ. ივანოვის [82] შრომები. ცალკე აღნიშვნის ღირსია ს. ბელოცერკოვსკის ნაშრომები აეროდინამიკაში [48, 51-57], რომლებიც საფუძვლად დაედო სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა რიცხვითი ამოხსნის არსებითად ახალ მეთოდს, რომელიც დღეისათვის ცნობილია როგორც დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდი. მოგვიანებით ეს მეთოდი მნიშვნელოვნად განვითარდა იმავე ს. ბელოცერკოვსკისა და ი. ლიფანოვის [31], აგრეთვე მათი მიმდევრების მიერ [49- 50].

სინგულარული ინტეგრალების მიახლოებით გამოთვლებისადმი და ასეთი ინტეგრალების შემცველ ინტეგრალურ განტოლებათა ამოხსნისადმი მიძღვნილ სხვა ავტორთა შრომებიდან დასახელებული უნდა იქნას ი. ბოიკოვის [66], ი. განდელის [69-71], ბ. მუსაევის [107-109], ჯ. სანიკიძის [25-27], მ. შეშკოს [132], ფ. ერდოგანი, გ. გუპტას [136], ს. კრენკის [34], პრესდორფისა და შმიდტის [137] კვლევები.

აღნიშნულ თემატიკაში ნაშრომების უფრო ვრცელი ჩამონათვალი მოყვანილია, მაგალითად, ბ. გაბდულხაევის მიმოხილვით სტატიაში [68].

აღსანიშნავია ასევე [33, 36, 37] შრომები, რომელშიც განხილულია მექანიკისა და დრეკადობის თეორიის მრავალი კონკრეტული ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების საფუძველზე.

კონკრეტულად ბზარების ამოცანებს ეძღვნება მონოგრაფიები [3, 21, 30-32, 39, 112]. ამ და სხვა ანალოგიურ ნაშრომებში განხილულია ამოცანები წყვეტილი საწყისი მონაცემებით; ამოცანები, რომლებიც ეხება ნებისმიერი ფორმის ბზარების მქონე სხეულის დამაბული მდგომარეობის გათვლას და ა.შ.

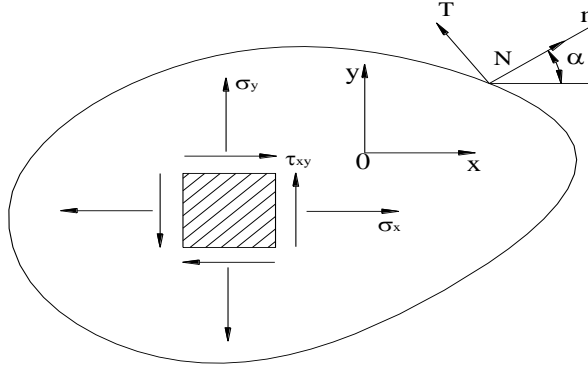
ბოლო პერიოდში გამოქვეყნებული ნაშრომებიდან, რომელთაც პირდაპირი შეხება აქვთ ჩვენს კვლევებთან, შეიძლება აღინიშნოს [28, 29, 40-45].

მომდევნო პარაგრაფებში განხილული იქნება სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების მეთოდის საფუძველზე აგებული მიახლოებითი პროცესები და მათი გამოყენება ბზარების თეორიის ზოგიერთ ამოცანაში. მოყვანილი იქნება სათანადო კვადრატურული ფორმულები სხვადასხვა კონფიგურაციის ბზარების მქონე კონსტრუქციების გათვლებისთვის და შესაბამისი რიცხვითი შედეგები.

### **3.1. წრფივი ჭრილის მქონე დრეკადი სიბრტყის**

#### **დამაბულ-დეფორმირებადი მდგომარეობა**

როგორც ცნობილია [112], დრეკადი იზოტროპული სხეულის ნებისმიერ წერტილში დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის განსაზღვრისათვის აუცილებელია ძაბვის ვექტორის ტენზორის სამი კომპონენტის -  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  (სურ. 14) და გადაადგილების ვექტორის ორი შემადგენელი კომპონენტის  $u, v$  პოვნა.



სურ. 14

ამოცანის დასმა და მისი მიყვანა ინტეგრალურ განტოლებაზე.

ვთქვათ არე, რომელიც დაკავებულია დრეკადი სხეულით, წარმოადგენს  $x$  ღერძზე  $|x| \leq l$ ,  $\gamma = 0$  მონაკვეთის გასწვრივ გაჭრილ მთელ სიბრტყეს. ვიგულისხმობთ, რომ უსასრულობაში ძაბვა ნულის ტოლია, ხოლო ჭრილის ნაპირებზე მოცემულია  $\sigma_y^+, \tau_{xy}^+, \sigma_y^-, \tau_{xy}^-$  ძაბვის კომპონენტები. შემდეგში “+” და “-” ნიშნები აღნიშნავენ შესაბამისი სიდიდეების სასაზღვრო მნიშვნელობებს, შესაბამისად ჭრილის ზედა და ქვედა მხრიდან. ავლნიშნოთ [112]:

$$\sigma_y^\pm(x,0) - i\tau_{xy}^\pm(x,0) = p(x) \pm q(x), \quad |x| < l, \quad (3.1.1)$$

სადაც  $p(x)$  და  $q(x)$  ცნობილი ფუნქციებია:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2}(\sigma_y^+ + \sigma_y^-) - \frac{i}{2}(\tau_{xy}^+ + \tau_{xy}^-) \\ q(x) &= \frac{1}{2}(\sigma_y^+ - \sigma_y^-) - \frac{i}{2}(\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

ვთქვათ  $|x| \leq l$  მონაკვეთზე მოცემულია ძაბვისა და გადაადგილების წარმოებულის წყვეტა:

$$\sigma_y^+ - \sigma_y^- - i(\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-) = 2q(x), \quad (3.1.3)$$



$$\frac{\partial}{\partial x}[u^+ - u^- + i(v^+ - v^-)] = \frac{i(\aleph + 1)}{2\mu} g'(x), \quad (3.1.4)$$

სადაც  $\aleph, \mu$  მუდმივებია, ამასთან მონაკვეთის ბოლოებში გადაადგილების წყვეტის მნიშვნელობა ნულის ტოლია ე. ი.

$$g(-\ell) = g(\ell) = 0. \quad (3.1.5)$$

თუ შემოვიტანთ ფუნქციას

$$\Omega(z) = \phi(\bar{z}) + z \phi'(\bar{z}) + \psi(\bar{z}), \quad (3.1.6)$$

მაშინ შესაბამისი გადაადგილება და ძაბვები გამოისახება შემდეგი დამოკიდებულებებით [14, 3]:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\phi(z) + \phi(\bar{z})], \quad (3.1.7)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\phi'(\bar{z}),$$

$$2\mu(u' + iv') = \aleph \phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z}) - \phi'(\bar{z}). \quad (3.1.8)$$

3.1.3) და (3.1.4) სასაზღვრო ამოცანის ამომხსნელი უსასრულოებაში ქრობადი  $\phi(z)$  და  $\Omega(z)$  ფუნქციები წარმოიდგინება შემდეგნაირად:

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-e}^{+l} \frac{Q(t)}{t-z} dt, \quad (3.1.9)$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{-l} \frac{Q(t) + 2iq(t)}{t-z} dt, \quad (3.1.10)$$

სადაც  $Q(x)$  განისაზღვრება პირობიდან:

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = i \left[ g'(x) - i \frac{2q(x)}{\aleph + 1} \right] = iQ(x) \quad |x| < 1. \quad (3.1.11)$$

თუ გავითვალისწინებთ

$$\psi(z) = \Omega(z) - \phi(z) - z\phi'(z), \quad (3.1.12)$$

$\psi(z)$  ფუნქციისათვის მივიღებთ ფორმულას

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{+l} \left[ \frac{\overline{Q(t)} - 2i\overline{q(t)}}{t-z} - \frac{iQ(t)}{(t-z)^2} \right] dt. \quad (3.1.13)$$

ახლა დაუშვათ, რომ  $|x| < l, y = 0$  ჭრილის ნაპირებზე მოცემულია (3.1.1) დატვირთვა და ძაბვა უსასრულობაში არ გვაქვს. ამ ამოცანის პოტენციალები  $\phi(z)$  და  $\Omega(z)$  ვეძებთ (3.1.9) და (3.1.10) სახით. დაუშვათ ამასთან, რომ  $g(x)$  ფუნქცია უცნობია. შესაბამისად, ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ განვსაზღვროთ  $g(x)$  ან  $g'(x)$  ფუნქცია. როგორც ცნობილია, ეს ამოცანა მიიყვანება [112] სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l}^{+l} \frac{Q(t) + iq(t)}{t-x} dt = p(x), \quad |x| < l, \quad (3.1.14)$$

საიდანაც,  $\int_{-l}^{+l} g'(t) dt = 0$  პირობის გათვალისწინებით, გვექნება

$$g'(x) = -i \frac{\aleph-1}{\aleph+1} q(x) + \frac{1}{\pi \sqrt{l^2-x^2}} \left[ - \int_{-l}^{+l} \frac{\sqrt{l^2-t^2} p(t)}{t-x} dt + iR \right],$$

სადაც

$$R = \frac{\aleph-1}{\aleph+1} \int_{-e}^{+e} q(t) dt. \quad (3.1.15)$$

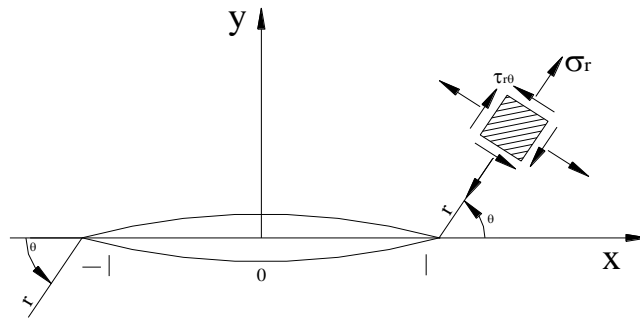
ამოცანის სრული ამონახსნისათვის ვღებულობთ

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi \sqrt{z^2-l^2}} \int_{-l}^{+l} \frac{\sqrt{l^2-t^2} p(t) dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{-l}^{+l} \frac{q(t) dt}{t-z} + \frac{R}{\sqrt{z^2-l^2}} \right],$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{z^2 - l^2}} \int_{-l}^{+l} \frac{\sqrt{l^2 - t^2} p(t) dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi i} \left[ - \int_{-l}^{+l} \frac{q(t) dt}{t - z} + \frac{R}{\sqrt{z^2 - l^2}} \right]. \quad (3.1.16)$$

განვიხილოთ უსასრულო იზოტროპული სიბრტყე და ძაბვებისა და გადაადგილების განაწილება ამ სიბრტყეში წრფივი ბზარის ბოლოების მცირე მიდამოში. ამ მიზნით გადავიდეთ ახალ (პოლარულ) კოორდინატთა სისტემაზე სათავით ბზარის წვეროში  $z_{10} = l$  ან  $z_{20} = -l$  (სურ. 15) [112]. ე.ი. დავუშვათ

$$z = \pm(z_1 + l), \quad z_1 = ze^{i\varphi}. \quad (3.1.17)$$



სურ. 15

$\Phi_1(z_1)$  და  $\Omega_1(z_1)$  პოტენციალები, რომლებიც ახალ კოორდინატთა სისტემაში შეესაბამებიან  $\Phi(z)$  და  $\Omega(z)$  ფუნქციებს,  $XOY$  სისტემაში განისაზღვრებიან ფორმულებით:

$$\Phi_1(z_1) = \Phi(\pm z_1 \pm l), \quad (3.1.18)$$

$$\Omega_1(z_1) = \Omega(\pm z_1 \pm l).$$

ბზარის მცირე მიდამოში, ე.ი.  $|z_1| \ll l$ , ადგილი აქვს  $\Phi_1(z_1)$  და  $\Omega_1(z_1)$  ფუნქციების შემდეგ წარმოდგენებს

$$\Phi_1(z_1) = \frac{k_1^\pm - ik_2^\pm}{2\sqrt{2z_1}} + O(1), \quad (3.1.19)$$

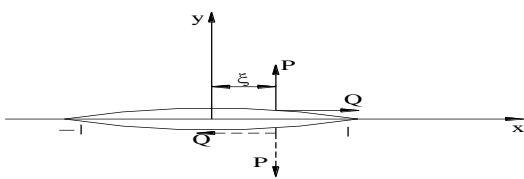
$$\Omega_1(z_1) = \frac{k_1^\pm - ik_2^\pm}{2\sqrt{2z_1}} + O(1)$$

სადაც  $O(1)$  შემოსაზღვრული სიდიდეა, როცა  $|z_1| \rightarrow 0$ ;

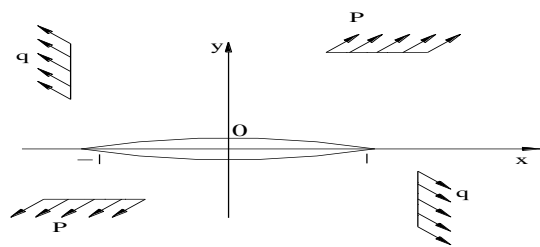
$$k_1^\pm - ik_2^\pm = -\frac{1}{\pi\sqrt{l}} \left[ \int_{-l}^{+l} \sqrt{\frac{l \pm t}{l \mp t}} p(t) dt \pm i \frac{\mathfrak{N}-1}{\mathfrak{N}+1} \int_{-l}^{+l} q(t) dt \right]. \quad (3.1.20)$$

აქ და შემდეგში  $k_1^\pm$  და  $k_2^\pm$  ნამდვილი სიდიდეებია. “+” ნიშანი ეკუთვნის ბზარის მარჯვენა წვეროს ( $z=l$ ), ხოლო ქვედა “-” მარცხენა წვეროს ( $z=-l$ ).  $k_1^\pm$  და  $k_2^\pm$  კოეფიციენტებს უწოდებენ დამაბულობის ინტენსივობის კოეფიციენტებს. ზოგჯერ ძაბვის ინტენსივობის კოეფიციენტებში გულისხმობენ  $\sqrt{\pi}$ -ჯერ მეტ სიდიდეებს, ე.ი  $k_1^\pm = \sqrt{\pi} k_1^{\pm'}$ ,  $k_2^\pm = \sqrt{\pi} k_2^{\pm'}$ . ისინი განისაზღვრებიან დრეკადობის თეორიის ამოცანების ამოხსნის ძაბვის ფუნქციებითა და პარამეტრებით, რომლებიც ახასიათებენ სხეულის კონფიგურაციასა და ბზარის ფორმას. ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში (3.1.20) ფორმულას აქვს მარტივი სახე. მაგალითად, როცა ბზარის ქვედა საზღვარზე  $x = \xi$  ( $y = 0$ ) წერტილში მოდებულია  $P$  და  $Q$  სიდიდის, მაგრამ ერთმანეთის საწინააღმდეგოდ მიმართული ძალები (სურ. 16), მაშინ (3.1.20) ფორმულა მარტივდება და

$$k_1^\pm - ik_2^\pm = \frac{P-Q}{\pi\sqrt{l}} \sqrt{\frac{l \pm \xi}{l \mp \xi}}.$$



სურ. 16



სურ. 17

უსასრულო სიბრტყის შემთხვევაში, რომელიც შესუსტებულია  $2l$  სიგრძის ბზარით, რომელზეც უსასრულობაში ერთმანეთის მართობულად მოქმედებენ  $p$  და  $q$  ძალები (სურ. 17), (3.1.20) ფორმულა კიდევ უფრო მარტივდება და დებულობს სახეს

$$k_1^\pm - ik_2^\pm = \frac{1}{2}[p + q - (p - q)e^{2i\alpha}] \sqrt{l}, \quad (3.1.21)$$

სადაც  $\alpha$  არის კუთხე, რომელსაც ძაბვა ადგენს ბზარის სიბრტყესთან.

ბზარების გასწვრივ ყველაზე ზოგადი დატვირთვის დროს,  $k_1^\pm$  და  $k_2^\pm$  ინტენსივობის კოეფიციენტები გამოითვლება (3.1.20) ფორმულით. შევნიშნოთ, რომ ამავე ფორმულით შეიძლება მივიღოთ  $k_1^\pm, k_2^\pm$  სიდიდეები იმ შემთხვევაში, როცა დატვირთვა მოდებულია უსასრულობაში ან სიბრტყის შიგა წერტილში. ამისათვის აუცილებელია განვსაზღვროთ  $\sigma_y(x,0) - i\tau_{xy}(x,0)$  ძაბვების კომბინაცია  $|x| < l, y = 0$  ბზარის წირზე, სიბრტყეზე, ჭრილის გარეშე იგივე დატვირთვის დროს. შემდეგ ძაბვის ინტენსივობის კოეფიციენტები ჭრილის მქონე სიბრტყისათვის გამოითვლება (3.1.20) ფორმულით, რომელშიც უნდა დავუშვათ  $q(x) = 0$ ,  $p(x) = -[\sigma_y(x,0) - i\tau_{xy}(x,0)]$ . სხვანაირად რომ ვთქვათ, ასეთი ამოცანის ამოხსნის დროს გამოიყენება სუპერპოზიციის მეთოდი. არსებითი მნიშვნელობა აქვს იმ ფაქტს, რომ ძაბვისა და გადაადგილების განაწილებას ბზარის წვეროს მახლობლობაში ყოველთვის აქვს  $(z, Q)$  პოლარული კოორდინატების მიმართ ერთიდაიგივე ფუნქციონალური დამოკიდებულება [112]. შესაბამისად, ძაბვის ინტენსივობის კოეფიციენტები შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც პარამეტრები, რომლებიც ასახავენ სხეულში ბზარების წარმოქმნის გამო ძაბვების გადანაწილებას. ამიტომ, ბზარის წვეროს მცირე მიდამოში ძაბვის განაწილება ცნობილი იქნება, თუ განსაზღვრული იქნება ძაბვის ინტენსივობის კოეფიციენტები. შესაბამისად, არსებითი მნიშვნელობა აქვს  $k_1^\pm, k_2^\pm$  ინტენსივობის კოეფიციენტების განსაზღვრას.

### **ზღვრული წონასწორობის განტოლებები.**

ბზარის ტიპის დეფექტების მქონე მყიფე სხეულების ზღვრულ-წონასწორული მდგომარეობის გამოკვლევის დროს, მოითხოვება განისაზღვროს გარე დატვირთვის კრიტიკული მნიშვნელობა, რომლის მიღწევისას ბზარები იწყებენ გავრცელებას, ე. ი. იწყება სხეულის ლოკალური ან სრული რღვევა. ამ ამოცანის

ამოხსნის დროს პრინციპული მომენტია ზღვრული წონასწორობის პირობის ფორმულირება. ეს შედარებით ადვილად ხერხდება ეგრეთწოდებული კვაზიმყიფე ბზარების თეორიაში, როცა ბზარის წვეროს მიდამოში პლასტიკური არის უდიდესი ზომა მცირეა ბზარის ზომებთან შედარებით და ასევე მანძილთან ბზარის წვეროდან სხეულის საზღვრამდე. ამ პირობის უმარტივესი ვარიანტი გრიფთისის [15] ფიზიკურ იდეაზე დაყრდნობით ჩამოაყალიბა ირვინმა [18]. ნორმალური განვითარების ბზარის, ანუ ლოკალური სიმეტრიის ( $k_2 = 0$ ) შემთხვევაში, მის მიერ გამოთქმული იყო მოსაზრება იმის შესახებ, რომ მყიფე ან კვაზიმყიფე სხეულებში ბზარის გავრცელება იწყება მაშინ, როცა მოცემული მასალისათვის, მოცემულ პირობებში, ძაბვის ინტენსივობის კოეფიციენტი ბზარის წვეროსთან აღწევს რაიმე მუდმივ მნიშვნელობას

$$k_1 = K_{1c} / \sqrt{\pi} . \quad (3.1.22)$$

$K_{1c}$  მუდმივი, რომელიც ახასიათებს მასალის რღვევის წინააღმდეგობას უნდა განისაზღვროს ექსპერიმენტალურად.

ზოგად შემთხვევაში, სხეულის ზღვრული წონასწორობის საკითხის განხილვისას, როცა ლოკალური სიმეტრიის პირობა ( $k_2 \neq 0$ ) არ სრულდება, აუცილებელია ჩამოვაყალიბოთ დამატებითი პირობა. ასეთ პირობად უფრო ხშირად გამოიყენება ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ ბზარის საწყისი მიმართულება ემთხვევა სიბრტყეს, რომელშიაც გამჭიმავი ძაბვის მთავარი ნაწილი (სურ. 15) აღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას. ჰიპოთეზა განხილულია [58], [63] შრომებში. ამ ჰიპოთეზის საფუძველზე ბზარის საწყისი გავრცელების კუთხე გამოითვლება ფორმულით [37]

$$\theta_* = 2 \arctg \frac{k_1 - \sqrt{k_1^2 + 8k_2^2}}{4k_2} . \quad (3.1.23)$$

ზღვრული წონასწორობის განტოლებას ექნება სახე [37]

$$\cos^2 \frac{\theta_*}{2} (k_1 - 3k_2 \operatorname{tg} \frac{\theta_*}{2}) = \frac{K_{1c}}{\sqrt{\pi}} . \quad (3.1.24)$$

აქედან გამოითვლება გარე დატვირთვის კრიტიკული მნიშვნელობა, რომლის დროსაც იწყება სხეულის ლოკალური რღვევა.

ნებისმიერად ორიენტირებული ფირფიტის ერთღერძა გაჭიმვა.

ვთქვათ, წრფივი სიგრძის ბზარის მქონე იზოტროპიული ფირფიტა (სურ. 17) ( $q = 0$ ) იჭიმება უსასრულოებაში, ბზარის სიბრტყის მიმართ  $\alpha$  კუთხით, მონოტონურად ზრდადი გარე  $p$  ძაბვით. მოცემულ მომენტში ბზარის მარცხენა და მარჯვენა წვერო იმყოფებიან ერთნაირ პირობებში ( $k_{1,2}^{\pm} = k_{1,2}$ ). (3.1.21) ფორმულით მოცემული ძაბვის ინტენსივობის კოეფიციენტები, როცა  $q = 0$ , დაითვლება ფორმულებით

$$k_1 = p\sqrt{l} \sin^2 \alpha; \quad k_2 = p\sqrt{l} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (3.1.25)$$

ბზარის საწყისი განვითარების  $\theta_*$  კუთხე გამოითვლება ფორმულით

$$\theta_* = 2 \operatorname{arctg} \frac{1 - \sqrt{1 + 8ctg^2 \alpha}}{4ctg \alpha}, \quad (3.1.26)$$

ხოლო ზღვრული ძაბვის მნიშვნელობა  $p = p_*$  გამოისახება დამოკიდებულებით

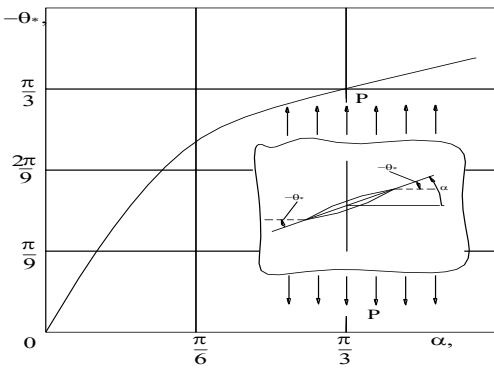
$$p_* = \frac{p_0}{\cos^3 \frac{\theta_*}{2} \sin^2 \alpha (1 - 3ctg \alpha \cdot tg \frac{\theta_*}{2})}, \quad (3.1.27)$$

სადაც

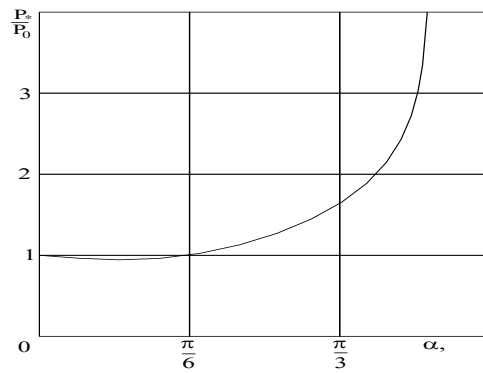
$$p_0 = \frac{K_{1c}}{\sqrt{\pi l}} \quad (3.1.28)$$

ფირფიტის გაჭიმვის დროს კრიტიკული გარე ძაბვის მნიშვნელობაა, რომელიც გაჭიმვის მიმართულების პერპენდიკულარულია.

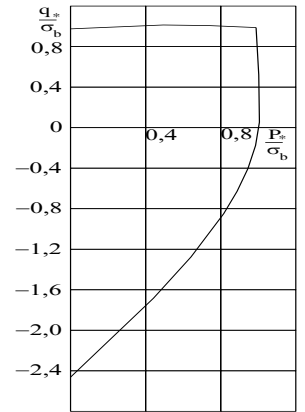
(3.1.28) ფორმულა წარმოადგენს გრიფთისის ცნობილი ამოცანის ამოხსნას. (3.1.27) ფორმულით მე-18 სურათზე აგებულია  $\theta_*$  კუთხე ბზარის ორიენტაციის მიხედვით მოცემულ მომენტში. ბზარის გავრცელების საწყისი მიმართულება ახლოს არის გარე ძაბვის მიმართულების მართ კუთხესთან.



სურ. 18



სურ. 19



სურ. 20

მე-19 სურათზე ნაჩვენებია დამოკიდებულება  $P^*/p$  სიდიდისა  $\alpha (0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2})$  კუთხესთან.  $p_*$  ზღვრული დატვირთვა დებულობს  $p_* \approx 0,97 p_0$  მინიმალურ მნიშვნელობას, როცა  $\alpha \approx 1,19$  რადიანს.

უნდა აღინიშნოს, რომ (3.1.26) და (3.1.27) დამოკიდებულებები, რომლებიც მიღებულია არიან ბზარის საწყისი გავრცელების ჰიპოთეზაზე დაყრდნობით, კარგად ეთანხმება ექსპერიმენტულ მონაცემებს [58]).

### ზღვრული დაძაბულობის დიაგრამა.

განვიხილოთ უსასრულო იზოტროპული ერთეულოვანი სიგანის ფირფიტა  $2l$  სიგრძის წრფივი ბზარით, როცა უსასრულობაში ერთმანეთის მართობულად მოქმედებენ  $p$  და  $q$  (იხ. სურ. 17) დატვირთვები, იმ დაშვებით, რომ ბზარის ნაპირები ერთმანეთთან კონტაქტში არ არიან. მაშინ (3.1.23) და (3.1.24) ფორმულების საფუძველზე,  $p_*$  და  $q_*$  ზღვრული ძაბვებისათვის გვექნება:



$$p_* = p_0 \sec^2 \frac{\theta_*}{2} \left[ \cos \frac{\theta_*}{2} (\sin^2 \alpha + \eta_0 \cos^2 \alpha) - 3(1 - \eta_0) \sin \alpha \cos \alpha \sin \frac{\theta_*}{2} \right]^{-1}, \quad (3.1.29)$$

$$q_* = \eta_0 / p_*.$$

აქ

$$\theta_* = 2 \operatorname{arctg} \frac{1 \mp \sqrt{1 + 8n^2}}{4n}, \quad (3.1.30)$$

სადაც “+” შეესაბამება  $k_1 < 0$  მნიშვნელობას, ხოლო “-” მნიშვნელობა  $k_1 > 0$ ;

$$n = \frac{k_2}{k_1} = \frac{(1 - \eta_0) \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \eta_0 \cos^2 \alpha}. \quad (3.1.31)$$

(3.1.29)–(3.1.30) დამოკიდებულება გამოიყენება მყიფე წრფივი ჭრილით შესუსტებული სხეულების ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობის ზღვრული დიაგრამების ასაგებად.

დავუშვათ, საწყის, არადეფორმირებულ მყიფე სხეულში გვაქვს შინაგანი დეფექტები, რომელთა მახასიათებელი წრფივი განზომილებაა  $2l$ . ვთქვათ, ისინი ერთმანეთისაგან იზოლირებული, ნებისმიერად ორიენტირებულნი არიან მთელ სხეულში. თუ ასეთი სხეული გაჭიმულია გარე  $p(\eta_0 = 0)$  ძაბვით, გაჭიმვის ძაბვის მინიმალური მნიშვნელობა სხვადასხვა  $\alpha$  კუთხისათვის ტოლია  $p_* \approx 0,97 p_0$ .

განსახილველ შემთხვევაში  $\min p_*$  სიდიდე წარმოადგენს მოცემულ ნივთიერებას  $\sigma$ :

$$\min p_* \approx 0,97 p_0 = \sigma. \quad (3.1.32)$$

თუ ბზარების მქონე სხეული იცდება ორღერძა გაჭიმვით  $p$  და  $q$  ძაბვებით, მაშინ  $p_*$  და  $q_*$  ზღვრული ძაბვის მნიშვნელობები ( $\eta_0$ -ის ფიქსირებული მნიშვნელობების  $\alpha$  კუთხის ორიენტაციის მიხედვით) გამოითვლება (3.1.29)–(3.1.31) ფორმულებით.

მე-20 სურათზე აგებულია  $\eta_0$  პარამეტრზე დამოკიდებულებით ზღვრული ძაბვის მნიშვნელობების ცვლილება, სადაც აბსცისათა ღერძზე იზომება  $P^*/\sigma$ , ხოლო ორდინატაზე  $\min q^*/\sigma$  მნიშვნელობები. ეს გრაფიკი წარმოადგენს  $p_*$  და  $q_*$  ძაბვების ზღვრული მნიშვნელობების გრაფიკს, რომელიც სამართლიანია ბზარ-ხვრელისათვის, რომელთა ნაპირები სხეულის დეფორმაციის პირობებში არ ეხებიან ერთმანეთს. ამასთან,  $\min P^*/\sigma$  და  $\min q^*/\sigma$  უნდა განვიხილოთ როგორც მთავარი ძაბვის მნიშვნელობები, რომლებიც აღიძვრებიან ბრტყელ დაძაბულ მდგომარეობაში მყოფ დეფორმირებულ სხეულებში.

ამგვარად, როგორც ზემოთმოყვანილი მსჯელობიდან ჩანს, ბზარების კვლევის ამოცანებში არსებითია ძაბვის ინტენსივობის კოეფიციენტების დათვლა, ასევე დრეკადი დეფექტების მქონე სხეულების ზღვრული დეფორმირებული მდგომარეობის განსაზღვრა, რომლის შემდეგ საჭიროა განისაზღვროს ძაბვების გადანაწილება, რათა თავიდან ავიცილოთ სხეულის რღვევა.

ძაბვის ინტენსივობის კოეფიციენტების რიცხვითი გამოთვლები მოცემულ თავში განხილული პრაქტიკული ამოცანებისათვის განხორციელებულია Wolfram Mathematica სიმბოლურ ენაზე შედგენილი პროგრამის საშუალებით. შესაბამისი შედეგები მოყვანილია შემდგომ პარაგრაფებში.

### 3.2 თერმოიზოლირებული ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა

ვთქვათ, უსასრულო სხეულზე  $|x| \leq a, y = 0$  ზოლის გასწვრივ, მოცემულია თერმოიზოლირებული ბზარი. დავუშვათ, რომ სხეულზე ბზარის გარეშე ტემპერატურის განაწილება აღიწერება მოცემული ჰარმონიული  $t_0(x, y)$  ფუნქციის საშუალებით. მაშინ ზოგადი  $T(x, y)$  ტემპერატურა შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$T(x, y) = t_0(x, y) + t(x, y), \quad (3.2.1)$$

სადაც  $t(x, y)$  – შეშფოთებული ტემპერატურული ველია, რომელიც გამოწვეულია ბზარით. რადგან ბზარი თერმოიზოლირებულია, ამიტომ მის საზღვარზე სრულდება პირობა [112]

$$\frac{\partial T^+}{\partial y} = \frac{\partial T^-}{\partial y} = 0, \quad |x| < a, y = 0, \quad (3.2.2)$$

რომელიც (3.2.1)-ის გათვალისწინებით შეიძლება ჩავწეროთ ასე:

$$\frac{\partial t^+}{\partial y} = \frac{\partial t^-}{\partial y} = -\frac{\partial t_0}{\partial y} = \varphi(x), \quad |x| < a, y = 0. \quad (3.2.3)$$

ბზარის წვეროებში ტემპერატურის უწყვეტობის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$t^+(x, 0) = t^-(x, 0), \quad \text{როცა } x = \pm a. \quad (3.2.4)$$

ამგვარად, ამოცანა მიიყვანება უსასრულობაში ქრობადი ისეთი ჰარმონიული  $t(x, y)$  ფუნქციის განსაზღვრაზე, რომელიც აკმაყოფილებს (3.2.3) და (3.2.4) პირობებს.

წარმოვადგინოთ  $t(x, y)$  ტემპერატურა შემდეგი სახით

$$t(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad (3.2.5)$$

სადაც  $f(z)$  ნებისმიერი უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქციაა. მაშინ

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \operatorname{Re} F(z); \quad \frac{\partial t}{\partial y} = -\operatorname{Im} F(z), \quad F(z) = f'(z). \quad (3.2.6)$$

შემოვიტანოთ ასევე გადანაწილების ფუნქცია. ამის გამო ბზარის წვეროს მცირე მიდამოში ძაბვის განაწილება ცნობილი იქნება, თუ განსაზღვრული იქნება ძაბვის

ინტენსივობის კოეფიციენტი. ამიტომ, არსებითი მნიშვნელობა აქვს  $k_1^\pm$  და  $k_2^\pm$  ინტენსივობის კოეფიციენტების განსაზღვრას.

$$\psi(x) = \frac{1}{2} [t^+(x,0) - t^-(x,0)], \quad |x| < a, \quad (3.2.7)$$

წარმოადგენს ფუნქციას, რომელიც აღწერს  $t(x, y)$  ტემპერატურის ნახტომს ბზარის წირზე გადასვლის დროს. როგორც ცნობილია [112],  $\psi(x)$ -ის მიმართ მიიღება შემდეგი პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლება

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{\psi'(t) dt}{t-x} = \varphi(x), \quad |x| < a \quad (3.2.8)$$

დამატებითი პირობით

$$\int_{-a}^{+a} \psi'(t) dt = 0. \quad (3.2.9)$$

(3.2.8)-(3.2.9) სასაზღვრო ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა შესაძლებელია [95]-ში აგებული ალგორითმებით, რომელთაც დეტალურად განვიხილავთ მომდევნო პარაგრაფებში.  $F(z)$  ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე [112]:

$$F(z) = \frac{F^*(z)}{\sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{1}{\pi i \sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{a^2 - t^2} \varphi(t) dt}{t-z}, \quad (3.2.10)$$

სადაც

$$F^*(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{a^2 - t^2} \varphi(t) dt}{t-z}.$$

თუ ვიცით  $F(z)$  ფუნქცია, (3.2.6) დამოკიდებულებიდან ვიპოვით  $f(z)$ -ს, ხოლო შემდეგ (3.2.5) დამოკიდებულებით განვსაზღვრავთ  $t(x, y)$  ტემპერატურას.

$F(z)$  ინტეგრალი ფიქსირებული  $z$  წერტილისათვის შეიძლება გამოითვალოს [95]-ში აგებული მაღალი რიგის სიზუსტის კვადრატურული ფორმულით, მაგრამ სიზუსტის რიგი არსებითად შემცირდება, როდესაც  $z$  წერტილი რაგინდ უახლოვდება  $[-a, +a]$  საზღვრის წერტილებს (განსაკუთრებით როცა  $z \rightarrow \pm a$ ).

$F^*(z)$  ინტეგრალის გამოსათვლელ ფორმულას აქვს შემდეგი სახე:

$$F^*(z) \approx F_n^*(z) = F^*(1; z)L_v(\varphi; t_0) + p_{v-10}(t_0; z) \frac{\varphi(\tau_{v-1}) - \varphi(t_0)}{\tau_{v-1} - t_0} + [p_{v-11}(t_0, z) + p_{v0}(t_0, z) + p_{v1}(t_0, z) + p_{v+10}(t_0, z)] \frac{\varphi(\tau_{v+1}) - \varphi(\tau_v)}{\tau_{v+1} - \tau_v} + p_{v+11}(t_0, z) \frac{\varphi(\tau_{v+2}) - \varphi(t_0)}{\tau_{v+2} - t_0} + \sum_{\sigma \neq v \pm 1} \sum_{k=0}^e p_{\sigma k}(t_0, z) \frac{\varphi(\tau_{v+1}) - \varphi(t_0)}{\tau_{v+k} - t_0},$$

სადაც

$$p_{\sigma k}(t_0, z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-t_0)}}{t-z} l_{\sigma k}(t) dt.$$

( $\sigma = 1, 2, \dots, n$ ).

ქვემოთ მოყვანილია  $F(z)$  ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის ცხრილი ზემოთ განხილული ალგორითმით  $n$ -ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის  $z = \pm 1$  წერტილის მახლობლობაში, როცა  $\varphi(t) = \operatorname{Re}(t) + \operatorname{Im}(t)$ .

ცხრილი 3.1

$n$	$z$	$F(z)$	$F_n(z)$	$R_n(z) = F(z) - F_n(z)$
5	$-1 + 0.005i$	$3.60173 + 3.46915i$	$3.8148 + 3.66829i$	$0.21307 + 0.19914i$
	$1 + 0.005i$	$-3.60173 + 3.46915i$	$-3.81848 + 3.66829i$	$-0.21307 + 0.19914i$
	$-1 + 0.005i$	$3.60173 + 3.46915i$	$-3.69248 + 3.52953i$	$0.09075 + 0.06038i$

10	$1 + 0.005i$	$-3.60173 + 3.46915i$	$-3.69248 + 3.52953i$	$-0.09075 + 0.06038i$
30	$-1 + 0.005i$	$3.60173 + 3.46915i$	$3.69248 + 3.52953i$	$0.04035 + 0.09338i$
	$1 + 0.005i$	$-3.60173 + 3.46915i$	$-3.69248 + 3.52953i$	$-0.04035 + 0.09338i$
50	$-1 + 0.005i$	$3.60173 + 3.46915i$	$3.63742 + 3.45305i$	$0.03569 - 0.01610i$
	$1 + 0.005i$	$-3.60173 + 3.46915i$	$-3.63742 + 3.45305i$	$-0.03569 - 0.01610i$

ამრიგად, როგორც ცხრილიდან ჩანს, ზემოთმოყვანილი ალგორითმის საშუალებით,  $z = \pm 1 + 0,005i$  განსაკუთრებულ წერტილებში (ზზარის ბოლოებში)  $n = 50$ - სთვის მიიღწევა  $10^{-2}$  სიზუსტის რიგი.

აღნიშნულ საკითხთან დაკავშირებული ჩვენს მიერ მიღებული შედეგები გამოქვეყნებულია [43] ნაშრომში.

### 3.3. დრეკად სხეულზე გრძივი გადაადგილების მქონე

#### ზზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა

გრძივი ძერის ანუ ანტიციბრტყული დეფორმაციის ქვეშ გულისხმობენ ცილინდრულ სხეულში დამაბულ მდგომარეობას, რომელიც გამოწვეულია ცილინდრის მსახველის გასწვრივ გამოწვეული დატვირთვით, რომელიც მუდმივია ამ მსახველის მიმართულებით [112]. თუ დეფორმაციის ღერძი მიმართულია  $(x, y, z)$  მართკუთხა კოორდინატა სისტემაში  $z$  ღერძის გასწვრივ, სტატიკურ შემთხვევაში დრეკადი  $u, v$  და  $w$  გადანაცვლებები ასეთ სხეულში შეიძლება წარმოდგენილი იქნას შემდეგი სახით [112]:

$$u = v = 0, \quad w = w(x, y). \quad (3.3.1)$$

ჰუკის კანონიდან გამომდინარე ძაბვის ტენზორის არანულოვანი  $\tau_{xz}$  და  $\tau_{yz}$  კომპონენტები  $x$  და  $y$  ცვლადის ფუნქციებია, რომლებიც  $w(x, y)$  გადაადგილებით გამოისახებიან შემდეგნაირად

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (3.3.2)$$

სადაც  $\mu$  - ძვრის მოდულია.

წონასწორობის განტოლებათა სისტემა მიიყვანება ერთ განტოლებაზე, რომელსაც მასის ძალის არსებობის შემთხვევაში აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (3.3.3)$$

ამასთან, ერთადერთი განტოლება, დეფორმაციასთან შეთანხმებული, იგივეურად კმაყოფილდება.

რადგანაც  $\mu w(x, y)$  წარმოადგენს ჰარმონიულ ფუნქციას, წარმოვიდგინოთ იგი როგორც რომელიმე  $f(z)$  კომპლექსური ცვლადის ანალიზური ფუნქციის ნამდვილი ნაწილი

$$w(x, y) = \frac{1}{\mu} \operatorname{Re} f(z). \quad (3.3.4)$$

(3.3.2)-დან გამომდინარეობს, რომ

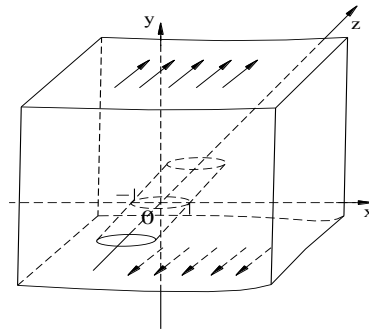
$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = f'(z) = F(z), \quad (3.3.5)$$

სადაც  $f(z)$  ანალიზური ფუნქციაა.

ძალვის მთავარი ვექტორი, რომელიც მოქმედებს სხეულის მიერ დაკავებული არის ნებისმიერ  $AB$  რკალზე, გამოითვლება შემდეგი დამოკიდებულებით [62]:

$$R = \text{Im}[f(z_B) - f(z_A)]. \quad (3.3.6)$$

ვთქვათ, უსასრულო სხეულზე, რომელიც იმყოფება გრძივი ძვრის დეფორმაციის პირობებში,  $|x| \leq a$ ,  $y = 0$  ზოლის გასწვრივ მოცემულია ჭრილი (ბზარი) (სურ. 21):



სურ. 21

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ბზარის ზედაპირებზე მოქმედებს თვითგაწონასწორებადი დატვირთვა [112]:

$$\tau_{yz}^+ = \tau_{yz}^- = \varphi(x), \quad |x| < a, \quad (3.3.7)$$

ხოლო ძაბვა უსასრულობაში ნულის ტოლია.

ავღნიშნოთ  $2\mu(x)/\mu$  - ით გადაადგილების წყვეტა, სიბრტყის გასწვრივ ჭრილზე გადასვლის დროს:

$$w^+(x,0) - w^-(x,0) = \frac{2\mu(x)}{\mu} |x| < a. \quad (3.3.8)$$

ცნობილია, რომ  $F(z)$  -ის მიმართ მიიღება შეუღლებების ამოცანა [112]:

$$F^+(x) - F^-(x) = 2\mu'(x), \quad |x| < a, \quad (3.3.9)$$

საიდანაც, უსასრულობაში ქრობადი უბან-უბან ჰოლომორფული  $F(z)$  ფუნქცია განისაზღვრება კოშის ტიპის ინტეგრალით



$$F(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^{+a} \frac{\mu'(t) dt}{t-x} = \varphi(x), |x| < a. \quad (3.3.10)$$

$x = \pm a$  ბოლოებზე შემოუსაზღვრელი ამოხსნისას უნდა შესრულდეს დამატებითი პირობა

$$\int_{-a}^{+a} \mu'(t) dt = 0. \quad (3.3.11)$$

(3.3.10)-(3.3.11) სინგულარული ინტეგრალური განტოლების მიახლოებით ამოხსნა ჩვენ შეგვიძლია შემდეგ პარაგრაფებში აგებული ალგორითმებით [44], საიდანაც ვიპოვით  $\mu'(x)$  ფუნქციის მნიშვნელობას.

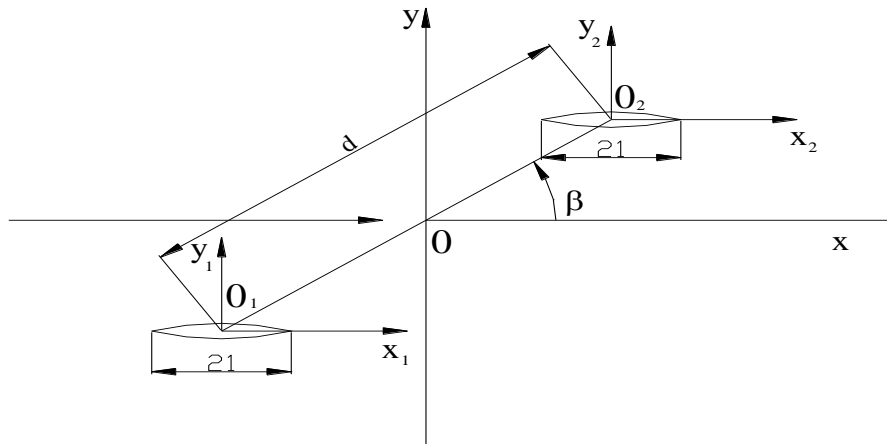
ანალოგიურად მივიღებთ  $F(z)$  ფუნქციისათვის:

$$F(z) = \frac{1}{\pi i \sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{a^2 - t^2} \varphi(t) dt}{t-z}. \quad (3.3.12)$$

ახლა (3.3.6) ფორმულით ადვილად ვიპოვით ძაბვების გადაადგილებებს სხეულის მიერ დაკავებულ მთელ არეში, კერძოდ ბზარის წვეროს მცირე მიდამოში. (3.3.12) ინტეგრალი შეიძლება მიახლოებით გამოითვალოს [44]-ში აგებული კვადრატურული ფორმულით. მისი ეფექტურობა კარგად არის გამოხატული 3.2 პარაგრაფში მოყვანილი ცხრილით.

### 3.4. უსასრულო ფირფიტაზე მოცემული ორი თანაბარი სიგრძის სიმეტრიულად განლაგებული ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა

განიხილება ბზარის ამოცანა, როცა უსასრულო ფირფიტაზე მოცემულია ორი თანაბარი სიგრძის სიმეტრიულად განლაგებული ბზარი, მასზე მოცემულია დატვირთვა, რომელიც აკმაყოფილებს სიმეტრიის პირობას (სურ. 22).



სურ. 22

აღნიშნული ამოცანა მიიყვანება შემდეგი სახის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l}^{+l} \sqrt{\frac{t-l}{t+l}} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-l}^{+l} \sqrt{\frac{t-l}{t+l}} k(t_0, t) \varphi(t) dt = f(t_0), \quad (3.4.1)$$

სადაც

$$k(t_0, t) = \frac{t + t_0 + d \cos \beta}{(t + t_0 + d \cos \beta)^2 + d^2 \sin^2 \beta},$$

$\beta$  - არის კუთხე ბზარის სიბრტყისა და წრფეს შორის, რომელიც გადის ბზარის ცენტრებს შორის. (3.4.1) განტოლებიდან, მუდმივი დატვირთვის დროს, ადვილად მიიღება ცნობილი ინტეგრალური განტოლება უძრავი ან გადანაცვლებული პარალელური ბზარების შემთხვევაში.

(3.4.1) განტოლება არის პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლება.

განვიხილოთ სინგულარული ინტეგრალი

$$S^{(1/2; -1/2)} = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^{+l} \sqrt{\frac{t-l}{t+l}} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt. \quad (3.4.2)$$

ვთქვათ,  $n$  ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, დავყოთ  $[a, b]$  შუალედი  $n$  ტოლ ნაწილად წერტილებით

$$s_\sigma = a + \frac{b-a}{n}(\sigma-1), \sigma = 1, 2, \dots, n+1.$$

შემდეგ, მოცემული ფიქსირებული  $m$  ნატურალური რიცხვისთვის, ყოველი  $[s_\sigma, s_{\sigma+1}]$  სეგმენტი დავყოთ ნაწილებად წერტილებით

$$s_{\sigma k} = s_\sigma + h \cdot x_k \quad \left( h = \frac{b-a}{n} \right), k = 1, 2, \dots, m,$$

სადაც  $\{x_k\}_{k=1}^m - [0, 1]$  შუალედიდან აღებული მოცემული წერტილთა სისტემაა. შემდგომში, გარკვეულობისათვის ვიგულისხმობთ, რომ  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$  რიცხვები გადანომრილია ზრდის მიხედვით.

ავღნიშნოთ  $\tau_\sigma = t(s_\sigma)$ ,  $t_{\sigma k} = t(s_{\sigma k})$  ( $\sigma = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m$ ). ვიგულისხმობთ, რომ  $\sigma, \nu$  ნებისმიერია  $1, 2, \dots, n$  რიცხვთაგან,  $t_0$  წერტილი განსხვავებულია  $t_{\sigma k}$  კვანძებისგან და განვიხილოთ გამოსახულება

$$\Psi_{\sigma\nu}(\varphi; t, t_0) = \varphi(t_0) + \sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t-t_0}{t_{\sigma k}-t_0} \cdot \varphi(t_{\sigma k}) + \sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t-t_0}{t_0-t_{\sigma k}} \cdot L_\nu(\varphi; t_0),$$

სადაც

$$L_\nu(\varphi; t_0) = \sum_{k_0=1}^m l_{\nu k_0}(t_0) \varphi(t_{\nu k_0}), \quad l_{\sigma k}(t) = \frac{\omega_\sigma(t)}{(t-t_{\sigma k}) \omega'_\sigma(t_{\sigma k})}, \quad \omega_\sigma(t) = \prod_{k=1}^m (t-t_{\sigma k}),$$

ხოლო  $\varphi, L = -\|$  -ზე მოცემული ჰელდერის კლასის ფუნქცია ( $\varphi \in H$ ). შევნიშნოთ, რომ  $\Psi_{\sigma\nu}(\varphi; t, t_0)$  გამოსახულებას შეიძლება მივანიჭოთ სრულიად გარკვეული აზრი, როცა  $t_0 = t_{\sigma k}$  (ამ შემთხვევაში უნდა ვიგულისხმობთ რომ  $t_0 \rightarrow t_{\sigma k}$ ). მართლაც, ვიგულისხმობთ, რომ ნატურალური  $\nu$  რიცხვი ყოველთვის შერჩეულია ისე, რომ მოცემული  $t_0$ -ისათვის აღმოჩნდეს  $t_0 \in \tau_\nu, \tau_{\nu+1}$ . ადვილი დასანახია, რომ  $t_0 - t_{\sigma k_1} = 0$

$(1 \leq k_1 \leq m)$  შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა  $\sigma = \nu, \nu \pm 1$  (და თუ ერთდროულად  $x_1 > 0, x_m < 1$ , როცა  $\sigma = \nu$ ). მარტივად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ, მაგალითად,  $\sigma = \nu$ -სთვის შესაბამისი გამოსახულება

$$L_\nu(\varphi; t_0) - \varphi(t_{\nu k_1})$$

$\Psi_{\nu\nu}(\varphi; t, t_0)$ -ში უნაშთოდ იყოფა  $t_0 - t_{\nu k_1}$  ( $t_0 \neq t_{\nu k_1}$ )-ზე. ანალოგიურ გარემოებას აქვს ადგილი მაშინაც, როცა  $\sigma = \nu - 1, \sigma = \nu + 1$  (თუ შესაბამისად  $x_1 = 0, x_m = 1$ ).

ავლნიშნოთ ახლა

$$\Phi_n(\varphi; t, t_0) = \psi_{\sigma\nu}(\varphi; t, t_0), t \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1}, t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}$$

$$\sigma = 1, 2, \dots, n; \nu = 1, 2, \dots, n.$$

ზემოთ მოყვანილი შენიშვნის საფუძველზე  $\Phi_n(\varphi; t, t_0)$  გამოსახულება განსაზღვრულია ნებისმიერი  $t, t_0 \in L$  მნიშვნელობისათვის. ამასთან, ცხადია  $\Phi_n(\varphi; t, t_0)$ -ის შემდეგი სტრუქტურული წარმოდგენა

$$\Phi_n(\varphi; t, t_0) = \varphi(t_0) + (t - t_0)H_n(\varphi; t, t_0),$$

სადაც

$$H_n(\varphi; t, t_0) = \sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \cdot \frac{L_\nu(\varphi; t_0) - \varphi(t_{\sigma k})}{t_0 - t_{\sigma k}}, t \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1},$$

$$t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}, \sigma, \nu = 1, 2, 3, \dots, n,$$

$$(H_n(\varphi; t, t_{\sigma k_1}) = \lim_{t_0 \rightarrow t_{\sigma k_1}} H_n(\varphi; t, t_0)),$$

ნებისმიერი  $k_1$ -სთვის ( $1 \leq k_1 \leq m$ ).

სინგულარული ინტეგრალი  $S^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$  შევცვალოთ  $S_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$ -ით

$$S_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{ab}^{\sqrt{t-a}} \frac{\Phi_n(\varphi; t, t_0) dt}{t-b} = \varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} H_n(\varphi; t, t_0) dt \quad (3.4.3)$$

(მიახლოებითი ფორმულის მისაღებად გამოყენებული იქნა ტოლობა

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \cdot \frac{dt}{t-t_0} = 1,$$

რომელიც ადვილად მტკიცდება, კოშის თეორემისა და პლემელ–სოხოცკის ფორმულების გამოყენებით [30]).

(3.4.3) გამოსახულების მარჯვენა მხარე ცხადი სახით წარმოიდგინება

$$p_{\sigma k}^{(1/2; -1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \cdot l_{\sigma k}(t) dt \quad (\sigma = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m)$$

რიცხვებით და  $\varphi$  ფუნქციის მნიშვნელობებით  $t_{\sigma k}$  კვანძებში.

როგორც ზემოთმოყვანილი მსჯელობებიდან ჩანს, (3.4.2) ინტეგრალს აზრი აქვს, როცა  $t_0 \rightarrow c$  ( $c$  არის  $a$  ან  $b$ ), თუ  $\varphi$  აკმაყოფილებს  $ab$  წირზე ( $a$  და  $b$  ბოლოების ჩათვლით) ჰელდერის პირობას  $1/2$ -ზე მეტი მაჩვენებლით. როგორც შემდეგში გაირკვევა, ეს გარემოება არსებითია იმ სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნებისთვის, რომლებიც (3.4.2) ტიპის ინტეგრალებს შეიცავს. აქედან გამომდინარე, განსახილველი ინტეგრალი  $t_0 = a, b$  წერტილებში განვმარტოთ როგორც შესაბამისი ზღვრული მნიშვნელობები. შესაბამისად, მივიღებთ შეფასებებს რომლებიც სამართლიანი იქნება ნებისმიერი  $t_0 \in ab$ , თვით  $a$  და  $b$  ბოლოების ჩათვლით. ეს უკანასკნელი გარემოება, როგორც ქვემოთ გამოჩნდება, ეფექტურად გამოიყენება შესაბამისი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნებისათვის.

ვიტყვი, რომ  $\varphi \in H_\alpha^{(r)}(L)$ , თუ  $\varphi$  ფუნქცია უწყვეტია მოცემულ  $L$  (გლუვ) კონტურზე თავის წარმოებულებთან ერთად  $r$  რიგამდე ჩათვლით, ამასთან  $r$ -ური რიგის წარმოებული  $\varphi^{(r)} \in H_\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) მაჩვენებლით. როცა  $r = 0$ ,  $H_\alpha^{(0)}(L)$  ( $1/2 < \alpha \leq 1$ ) - ის ნაცვლად ჩავწერთ  $H_\alpha(L)$ .

თავიდანვე შევნიშნოთ, რომ როგორც ცნობილი მტკიცებულებებიდან გამომდინარეობს ([30], §18-22), თუ  $\varphi \in H_\alpha(L)$  ( $1/2 < \alpha \leq 1$ ), მაშინ

$$S_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi, t_0) \in H.$$

ნებისმიერი  $\varphi \in H_\alpha^{(r)}(L)$  ( $1/2 < \alpha \leq 1$ ,  $r \leq m$ )-სთვის შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია შეფასება

$$\left| S^{(1/2; -1/2)}(\varphi, t_0) - S_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi, t_0) \right| \leq \frac{C_m \ln n}{n^{r+\alpha-1/2}}, \quad (n > 1), \quad (3.4.4)$$

სადაც  $C_m$  მუდმივი დამოკიდებულია მხოლოდ  $L \equiv ab$  კონტურზე,  $\{x_k\}_{k=1}^m$  კვანძებზე და  $\varphi^{(r)}$  ფუნქციის ჰელდერის მაჩვენებელზე.

მართლაც, გადმოცემის სიმარტივისთვის უფრო დაწვრილებით განვიხილოთ  $r=0$  შემთხვევა. დავუშვათ  $t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}$ ,  $t \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1}$  ( $\sigma \neq \nu$ ,  $\sigma \neq \nu \pm 1$ ) და განვიხილოთ

$$\varphi(t) - \Phi_n(\varphi; t, t_0) = \varphi(t) - \left\{ \varphi(t_0) + \sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t-t_0}{t_{\sigma k} - t_0} \varphi(t_{\sigma k}) + \sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t-t_0}{t_0 - t_{\sigma k}} L_\nu(\varphi; t_0) \right\}.$$

გავითვალისწინოთ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომის ცნობილი თვისება

$$\sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t-t_0}{t_0 - t_{\sigma k}} = -1 + \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)}. \quad (3.4.5)$$

ნებისმიერი  $t$  და  $t_0 \neq t_{\sigma k}$  -თვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \Phi_n(\varphi; t, t_0) &= \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)} [\varphi(t) - \varphi(t_0)] + \left[ 1 - \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)} \right] \times \\ &\times L_\nu(\varphi - \varphi(t_0)); t_0) + \sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t-t_0}{t_{\sigma k} - t_0} [\varphi(t) - \varphi(t_{\sigma k})] \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

$$(t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}, t \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1} \sigma \neq \nu, \sigma \neq \nu \pm 1),$$

$$L_\nu(\varphi - \varphi(t_0)); t_0) = \sum_{k_0=1}^m l_{\nu k_0}(t_0) [\varphi(t_{\nu k_0}) - \varphi(t_0)] = \sum_{k_0=1}^m l_{\nu k_0}(t_0) \varphi(t_{\nu k_0}) - \varphi(t_0).$$

თუ  $\sigma = \nu$ , მაშინ როგორც ადვილად დავრწმუნდებით

$$\varphi(t) - \Phi_n(\varphi; t, t_0) = \varphi(t) - \varphi(t_0) - \sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t)(t-t_0) \sum_{\substack{k_0=1 \\ k_0 \neq k}}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k, k_0}}^m (t-t_{\nu j}) \frac{\varphi(t_{\nu k_0}) - \varphi(t_{\nu k})}{\omega'_\nu(t_{\nu k_0})} \quad (3.4.7)$$

$$(t, t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}).$$

(3.4.7)-ის ანალოგიური წარმოდგენები  $\varphi(t) - \Phi_n(\varphi; t, t_0)$ -სათვის გვექნება, როცა  $\sigma = \nu \pm 1$ .

(3.4.6) და (3.4.7) -ის გათვალისწინებით გვექნება

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\varphi(t) - \Phi_n(\varphi; t, t_0)}{t-t_0} dt =$$

$$\sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu \pm 1, \nu}}^n \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \left\{ \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} + L_\nu(\varphi - \varphi(t_0)); t_0) \left[ 1 - \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)} \right] \frac{1}{t-t_0} + \right\}$$

$$+ \sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \frac{\varphi(t) - \varphi(t_{\sigma k})}{t_{\sigma k} - t_0} \} dt + \quad (3.4.8)$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\nu \tau_{\nu+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \left\{ \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} - \sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \sum_{\substack{k_0=1 \\ k_0 \neq k}}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k, k_0}}^m (t_0 - t_{\nu j}) \frac{\varphi(t_{\nu k_0}) - \varphi(t_{\nu k})}{\omega'_\nu(t_{\nu k_0})} \right\} dt + \int_{\tau_{\nu-1} \tau_\nu} + \int_{\tau_{\nu+1} \tau_{\nu+2}}$$

სადაც ბოლო ორი ინტეგრალი გამოსახულებით იგივეა, როგორც (3.4.8)-ში ინტეგრალი  $\tau_\nu \tau_{\nu+1}$  რკალზე.

გადავიდეთ (3.4.8) გამოსახულების შეფასებაზე. პირველ რიგში, ვაჩვენოთ, რომ როცა  $t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}, t \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1} \sigma \neq \nu, \sigma \neq \nu \pm 1$ , სამართლიანია

$$\max_{t \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \left| \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_{\sigma+1}(t_0)} \right| \cdot |\varphi(t) - \varphi(t_0)| = O(n^{-\alpha}), \quad (3.4.9)$$

ამასთან მუდმივი მარჯვენა მხარეში შეიძლება ავიღოთ  $t_0, \sigma$  და  $\nu$ -ზე დამოუკიდებელი.

მართლაც, ნებისმიერი  $\nu, t \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1}$  ( $\sigma \neq \nu \pm 1, \nu$ ) და  $k(1 \leq k \leq m)$ -სთვის, გვაქვს

$$\max_{t, \sigma} |\omega_\sigma(t)| = O(n^{-m}), \quad \min_{t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}} |t_0 - t_{\sigma k}| > qn^{-1},$$

სადაც  $q > 0$  მუდმივი არაა დამოკიდებული  $\sigma$  და  $\nu$ -ზე. გარდა ამისა,

$$\max_{t_0, t} \left| \frac{t - t_0}{t_0 - t_{\sigma k}} \right| = \max_{t_0, t} \left| 1 + \frac{t_{\sigma k} - t}{t_0 - t_{\sigma k}} \right| = O(1)$$

თანაბრად  $\nu$  და  $\sigma$ -ს მიმართ. ამ უკანასკნელიდან ადვილად მიიღება შეფასება

$$\max_{t \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \left| \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_{\sigma+1}(t_0)} \right| \cdot |\varphi(t) - \varphi(t_0)| = O(n^{-\alpha}),$$

რომლის გამოყენებით,  $\varphi \in H_\alpha(L)$ -ის ძალით მივიღებთ (3.4.9)-ს, საიდანაც ადვილად გამოდის, რომ

$$\max_{t_0 \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \left| \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu \pm 1, \nu}}^n \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} [\varphi(t) - \varphi(t_0)] \frac{dt}{t-t_0} \right| = O\left(\frac{\ln n}{n^{\alpha-1/2}}\right), \quad (n > 1, 1/2 < \alpha \leq 1).$$

შემდეგ, კვლავ გამოვიყენოთ  $\varphi \in H_\alpha(L)$  პირობა (და  $L$ -ის გლუვობა). მივიღებთ:

$$\max_{t_0 \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \left| \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu \pm 1, \nu}}^n L_\nu(\varphi - \varphi(t_0); t_0) \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \left[ 1 - \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_{\sigma+1}(t_0)} \right] \frac{dt}{t-t_0} \right| = O\left(\frac{\ln n}{n^{\alpha-1/2}}\right),$$

$$(n > 1, 1/2 < \alpha \leq 1).$$



გარდა ამისა, ელემენტარული შეფასებების თანახმად:

$$\left| \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu \pm 1, \nu}}^n \sum_{k=1}^m \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} l_{\sigma k}(t) \frac{\varphi(t) - \varphi(t_{\sigma k})}{t_{\sigma k} - t_0} dt \right| = O\left(\frac{1}{n^{1/2+\alpha}}\right) \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu \pm 1, \nu}}^n \frac{1}{|t_{\sigma k} - t_0|} = O\left(\frac{lnn}{n^{\alpha-1/2}}\right) \quad (1/2 < \alpha \leq 1)$$

თანაბრად  $t_0$  და  $\nu$ -ს მიმართ. შემდეგ, ისევე  $\varphi \in H_\alpha(L)$ -ის ძალით და  $L = ab$ -ს გლუვობიდან გვექნება

$$\left| \int_{\tau_\nu \tau_{\nu+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} dt \right| \leq O\left(\frac{1}{n^{\alpha-1/2}}\right).$$

ასევე სამართლიანია შეფასება

$$\max_{t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}} \left| \sum_{k=1}^m p_{\nu k} \sum_{\substack{k_0=1 \\ k_0 \neq k}}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k, k_0}}^m (t_0 - t_{\nu j}) \frac{\varphi(t_{\nu k_0}) - \varphi(t_{\nu k})}{\omega_\nu(t_{\nu k})} \right| = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1/2}}\right).$$

ანალოგიურად შეფასდება (3.4.8) გამოსახულებაში ინტეგრალები, რომლებიც შეესაბამებიან  $\tau_{\nu-1} \tau_\nu$ ,  $\tau_{\nu+1} \tau_{\nu+2}$  რკალებს. მიღებული შეფასებების გაერთიანებით დავრწმუნდებით (3.4.4)-ს სამართლიანობაში, როცა  $r = 0$ .

როცა  $r \geq 1$ , შესაბამისი შეფასებები შეიძლება მიღებული იქნას თუ გამოვიყენებთ  $\varphi(t)$  ტეილორის მწკრივად გაშლას, როცა  $\sigma = \nu \neq 1, \nu$ ,  $t_0$  წერტილის მიდამოში, ნაშთითი წევრის ინტეგრალური ფორმით წარმოდგენით, ხოლო როცა  $\sigma \neq \nu \pm 1, \nu$ , ფორმულით ( $\sigma$ -ს შესაბამისი მნიშვნელობისათვის)

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \varphi(t_0) + (t - t_0) \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(t - t_0)^j}{j!(t_0 - t)^{j+1}} \int_{\tau_\sigma t_0} (t_0 - u)^j \varphi^{(j+1)}(u) du + \\ & + \frac{t - t_0}{(r-1)!} \frac{(t - t_\sigma)^r}{(t_0 - t_\sigma)^{r+1}} \int_{\tau_\sigma t_0} (t_0 - u)^{r-1} \varphi^{(r)}(u) du - \end{aligned}$$

$$-\frac{t-t_0}{(r-1)!} \left\{ \int_{\tau_{\sigma t}} \frac{(t-\tau)^r + (t-\tau)^{r-1}(t_0-\tau)}{(t_0-\tau)^2} \varphi^{(r)}(\tau) d\tau - (r+1) \int_{\tau_{\sigma t}} \frac{(t-\tau)^2 d\tau}{(t_0-\tau)^{r+2}} \int_{\sigma_0} (t_0-u)^{r-1} \varphi^{(r)}(u) du \right\},$$

რომლის სამართლიანობაში ადვილად დავრწმუნდებით ნაწილობითი ინტეგრების გამოყენებით. ამასთან, უნდა გამოვიყენოთ  $\rho(t) - \Phi_n(\rho; t; t_0) = 0$  ტოლობა, რომელიც სრულდება ნებისმიერი  $t, t_0$ -სთვის, როცა  $\rho(t)$  ნებისმიერი პოლინომია, რომლის ხარისხი  $\leq m$ . აღნიშნული ტოლობის სამართლიანობა შეიძლება უშუალოდაც შემოწმდეს.

შევნიშნოთ, რომ  $S_n^{*(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$  გამოსახულება შეიცავს  $\varphi$  ფუნქციის მნიშვნელობას  $t_0$  ცვლად წერტილში, ამიტომ თვითონ ამ გამოსახულების სინგულარული ინტეგრალის მიახლოებით მნიშვნელოზად მიღება შესაძლოა არ იყოს მიზანშეწონილი. ამიტომ, ამ თვალსაზრისით, სავსებით მისაღებია მიახლოებითი ფორმულა

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} \approx S_n^{*(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0), \quad t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

სადაც

$$S_n^{*(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) = L_\nu(\varphi; t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \lambda_n(\varphi; t; t_0) dt.$$

ცხადია, რომ  $t_{\nu k}$  კვანძებში  $S_n$  და  $S_n^*$  ემთხვევიან ერთმანეთს. შემდგომ, ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\left| \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} - S_n^{*(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) \right|$$

გამოსახულებისათვის,  $\varphi$ -ს შესაბამის დაშვებებში, სამართლიანია (3.4.4) სახის შეფასება.

ანალოგიურად შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი  $\varphi \in H_\alpha^{(r)}(L)$  ( $1/2 < \alpha \leq 1$ ,  $r \leq m$ )-სთვის სამართლიანია შეფასებები

$$\left| S^{(-1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) - S_n^{*(-1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) \right| = O\left(\frac{l n n}{n^{r+\alpha-1/2}}\right)$$

და

$$\left| S^{(1/2; 1/2)}(\varphi; t_0) - S_n^{*(1/2; 1/2)}(\varphi; t_0) \right| = O\left(\frac{l n n}{n^{r+\alpha-1/2}}\right).$$

ამოვწეროთ  $S_n^{*(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$ -ის გამოსახულების სახე გაშლილი ფორმით (გარკვეულობისთვის ვიგულისხმობთ, რომ  $x_1 = 0$  და  $x_m = 1$ ):

$$\begin{aligned} S_n^{*(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) = & \\ = & \left[ 1 + \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa \neq \nu}}^m \frac{P_{\sigma\kappa}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\sigma\kappa}} + \sum_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa \neq j}}^m \frac{P_{\nu\kappa}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\nu\kappa}} - P_{\nu j}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{\kappa=1}^m d_{\nu\kappa}(t_{\nu j}) \right] \varphi(t_{\nu j}) - \\ & - \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{\kappa=1}^m \frac{P_{\sigma\kappa}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\sigma\kappa}} \varphi(t_{\sigma\kappa}) - \sum_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa \neq j}}^m \frac{P_{\nu\kappa}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\nu\kappa}} \varphi(t_{\nu\kappa}) + P_{\nu j}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{\kappa=1}^m d_{\nu\kappa}(t_{\nu j}) \varphi(t_{\nu\kappa}), \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

სადაც

$$\begin{aligned} d_{\nu\kappa} = & \frac{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq \kappa, j}}^m (t_{\nu j} - t_{\nu j_0})}{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq \kappa}}^m (t_{\nu\kappa} - t_{\nu j_0})}, \quad P_{\sigma\kappa}^{(1/2; -1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \kappa}}^m \frac{t - t_{\sigma j}}{t_{\sigma\kappa} - t_{\sigma j}} dt \\ P_{\sigma\kappa}^{*(1/2; -1/2)} = & \begin{cases} P_{\sigma 1}^{(1/2; -1/2)} + P_{\sigma-1 m}^{(1/2; -1/2)} & \sigma = 1, 2, 3, \dots, n; \\ P_{\sigma\kappa}^{(1/2; -1/2)} & \kappa = 2, 3, \dots, m-1; \sigma = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

$$(\sigma = 1, 2, \dots, n; \quad \kappa = 1, 2, \dots, m), \quad (t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}; \quad \nu = 1, 2, \dots, n).$$

ზემოთმოყვანილი მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\max_{t_0 \in ab} \left| S_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) \right| \leq M_0 \max_{t \in ab} |\varphi(t)| + M_1 \max_{\sigma, \kappa} |\varphi(t_{\sigma\kappa})| n^{1/2} \ln n \quad (3.4.11)$$

$$\max_{t_0 \in ab} \left| S_n^{*(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) \right| \leq M_2 \max_{\sigma, \kappa} |\varphi(t_{\sigma\kappa})| n^{1/2} \ln n \quad (n > 1),$$

სადაც  $MM_0, M_1, M_2$  – გარკვეული მუდმივებია.

ანალოგიურად ამოიწერება  $S_n^{*(-1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$ ,  $S_n^{*(1/2; 1/2)}(\varphi; t_0)$  კვადრატურული ფორმულების შესაბამისი გამოსახულებები:

$$S_n^{*(-1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) = \left[ \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{\kappa=1}^m \frac{P_{\sigma\kappa}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\sigma\kappa}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\nu k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\nu k}} - p_{\nu j}^{*(-1/2; -1/2)} \sum_{k=1}^m d_{\nu k}(t_{\nu j}) \right] \varphi(t_{\nu j}) -$$

$$- \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\sigma k}} \varphi(t_{\sigma k}) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\nu k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\nu k}} \varphi(t_{\nu k}) + p_{\nu j}^{*(-1/2; -1/2)} \sum_{k=1}^m d_{\nu k}(t_{\nu j}) \varphi(t_{\nu k}) \quad (3.4.12)$$

$$S_n^{*(1/2; 1/2)}(\varphi; t_0) = \left[ t_{\nu j} + \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{\kappa=1}^m \frac{P_{\sigma\kappa}^{*(1/2; 1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\sigma\kappa}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\nu k}^{*(1/2; 1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\nu k}} - p_{\nu j}^{*(1/2; 1/2)} \sum_{k=1}^m d_{\nu k}(t_{\nu j}) \right] \varphi(t_{\nu j}) -$$

$$- \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(1/2; 1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\sigma k}} \varphi(t_{\sigma k}) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\nu k}^{*(1/2; 1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\nu k}} \varphi(t_{\nu k}) + p_{\nu j}^{*(1/2; 1/2)} \sum_{k=1}^m d_{\nu k}(t_{\nu j}) \varphi(t_{\nu k}), \quad (3.4.13)$$

სადაც

$$d_{\nu k} = \frac{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k, j}}^m (t_{\nu j} - t_{\nu j_0})}{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k}}^m (t_{\nu k} - t_{\nu j_0})}, \quad p_{\sigma\kappa}^{*(-1/2; -1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{1}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{t - t_{\sigma j}}{t_{\sigma k} - t_{\sigma j}} dt$$

$$p_{\sigma\kappa}^{*(1/2; 1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \sqrt{(t-a)(t-b)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{t - t_{\sigma j}}{t_{\sigma k} - t_{\sigma j}} dt$$

$$P_{\sigma\kappa}^{*(-1/2; -1/2)} = \begin{cases} p_{\sigma 1}^{*(-1/2; -1/2)} + p_{\sigma-1 m}^{*(-1/2; -1/2)} & \sigma = 1, 2, 3, \dots, n; \\ p_{\sigma\kappa}^{*(-1/2; -1/2)} & k = 2, 3, \dots, m-1; \sigma = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$P_{\sigma\kappa}^{*(1/2; 1/2)} = \begin{cases} p_{\sigma 1}^{*(1/2; 1/2)} + p_{\sigma-1 m}^{*(1/2; 1/2)} & \sigma = 1, 2, 3, \dots, n; \\ p_{\sigma\kappa}^{*(1/2; 1/2)} & k = 2, 3, \dots, m-1; \sigma = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$(\sigma = 1, 2, \dots, n; \quad \kappa = 1, 2, \dots, m), \quad (t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}; \quad \nu = 1, 2, \dots, n).$$

უნდა აღინიშნოს, რომ  $S_n^*$  ჯამებს მივყავართ ერთიან გამოთვლით სქემამდე  $t_0 \in L \equiv ab$  პარამეტრის ყველა მნიშვნელობისათვის (კერძოდ, როცა  $t_0$  რაგინდ ახლოს არის  $L = ab$  წირის კვანძით წერტილებთან და  $a$  და  $b$  ბოლოებთან). ამ თვისებების გამო ისინი მოხერხებულად შეიძლება გამოვიყენოთ პრაქტიკულ გამოთვლებში.

ქვემოთ მოყვანილია სინგულარული ინტეგრალების მიახლოებითი გამოთვლის ცხრილები ზემოთ აგებული (3.4.10), (3.4.12), (3.4.13) კვადრატურული ფორმულების გამოყენებით განსაკუთრებულ  $t_0 = \pm 1$  (ბოლო) წერტილებში, როცა ინტეგრების წირი ნამდვილი  $[-1;1]$  მონაკვეთია. ამ შუალედის  $n$  სხვადასხვა დაყოფათა რიცხვისათვის შიგა დაყოფები ყოველთვის ფიქსირებულია ( $m=4$ ), ხოლო სიმკვრივე  $\rho(t) = t^2$ . თავის მხრივ, ასეთი წერტილები არსებით როლს თამაშობენ მექანიკის პრაქტიკულ-გამოყენებითი ტიპის ამოცანებში. მაგალითად, ბზარების ამოცანების რიცხვითი ამოხსნების დროს, საჭირო მოითხოვს დაითვალოს ინტენსივობის კოეფიციენტი ამ წერტილებში, რომელთა საშუალებითაც, თავის მხრივ, განისაზღვრება ბზარის გავრცელების შემდეგი მიმართულება [112].

ცხრილი 3.2

$n$	$t_0$	$S^{(1/2; -1/2)}(t^2; t_0)$	$S_n^{*(1/2; -1/2)}(t^2; t_0)$	$R_n^{(1/2; -1/2)} = S - S_n^*$
5	-1	-0,5	-0,496551	-0,003449
	1	1,5	1,48621	0,01379
10	-1	-0,5	-0,499256	-0,00074424
	1	1,5	1,49405	0,0059532
30	-1	-0,5	-0,499962	-0,0000380375
	1	1,5	1,49893	0,00106505
50	-1	-0,5	-0,49999	-0,0000101642
	1	1,5	1,49951	0,00048789

ცხრილი 3.3

$n$	$t_0$	$S^{(-1/2;-1/2)}(t^2;t_0)$	$S_n^{*(-1/2;-1/2)}(t^2;t_0)$	$R_n^{(-1/2;-1/2)} = S - S_n^*$
5	-1	-1	-0,99233	-0,00766977
	1	1	0,969321	0,0306791
10	-1	-1	-0,997012	-0,00298762
	1	1	0,976099	0,023901
30	-1	-1	-0,999507	-0,000492854
	1	1	0,9862	0,0137999
50	-1	-1	-0,999777	-0,000222581
	1	1	0,989316	0,0106839

ცხრილი 3.4

$n$	$t_0$	$S^{(-1/2;-1/2)}(t^2;t_0)$	$S_n^{*(-1/2;-1/2)}(t^2;t_0)$	$R_n^{(-1/2;-1/2)} = S - S_n^*$
5	-1	-1,5	-1,49471	-0,00529483
	1	1,5	1,47882	0,0211793
10	-1	-1,5	-1,4987	-0,00129719
	1	1,5	1,48962	0,0103775
30	-1	-1,5	-1,49993	-0,000073049
	1	1,5	1,49795	0,00204537
50	-1	-1,5	-1,49998	-0,0000198499
	1	1,5	1,49905	0,000952797

როგორც ცხრილებიდან ჩანს (3.4.10), (3.4.12), (3.4.13)-ის სიზუსტე იზრდება  $n$ -ის ზრდასთან ერთად და  $n = 50$ -ზე აღწევს  $10^{-4}$ -ს.

ეხლა განვიხილოთ პირველი გვარის სინგულარული განტოლება, რომელზეც მიიყვანება ზემოთ ნახსენები სიმეტრიულად განლაგებული პარალელური ბზარების ამოცანა [30]:

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L K(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0), \quad (3.4.14)$$

სადაც  $f(t)$ ,  $K(t_0, t)$  ( $L \equiv ab$ ) ჰელდერის კლასის ფუნქციებია.

(3.4.14) განტოლების ამონახსნი ვეძებთ შემდეგი სახით

$$\varphi_0(t) = \sqrt{(t-a)/(t-b)} \varphi(t).$$

ე.ი. ვგულისხმობთ, რომ (3.4.14) განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი  $\aleph = 0$ .

(3.4.14) განტოლების მახასიათებელი ნაწილის შებრუნებით მივიღებთ:

$$K^0 \varphi = I\varphi + \kappa\varphi = f_0(t_0) \quad (3.4.15)$$

სადაც

$$\begin{aligned} \kappa\varphi &\equiv \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \left[ \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t_1-b}{t_1-a}} \frac{K(t_1; t)}{t_1-t_0} dt_1 \right] \varphi_0(t) dt, \\ f_0(t) &\equiv \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-b}{t-a}} \frac{f(t) dt}{t-t_0}, \end{aligned}$$

ხოლო  $I$  ერთეულოვანი ოპერატორია. როგორც ვხედავთ, თავისუფალი გული წარმოადგენს სინგულარულ ინტეგრალს

$$(k\varphi)(t_0; t) = \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \left[ \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t_1-b}{t_1-a}} \frac{K(t_1; t)}{t_1-t_0} dt_1 \right] \varphi_0(t) dt.$$

გული ინტეგრალურ ოპერატორში

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t_1 - b}{t_1 - a}} \frac{K(t_1, t)}{t_1 - t_0} dt_1$$

შეცვალთ ზემოთ აგებული კვადრატურული ფორმულით. მივიღებთ

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t_1 - b}{t_1 - a}} \frac{K(t_1, t)}{t_1 - t_0} \approx L_n \left[ (S_n^{(1/2; -1/2)} K); t_0, t \right], t_0 \in ab,$$

სადაც

$$L_n \left[ (S_n^{(1/2; -1/2)} K); t_0, t \right] = L_{n_j} \left[ (S_n^{(1/2; -1/2)} K); t_0, t \right], t_0 \in \tau_j \tau_{j+1} (j = \overline{1, n})$$

$$L_{n_j} \left[ (S_n^{(1/2; -1/2)} K); t_0, t \right] = \sum_{k=1}^m \frac{\omega_j(t_0)}{(t_0 - t_{jk}) \omega_j'(t_{jk})} S_n^{(1/2; -1/2)}(K; t_{jk}; t), t_0 \in \tau_j \tau_{j+1}.$$

ანალოგიურად,

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t - a}{t - b}} \frac{f(t) dt}{t - t_0} \approx L_n \left[ (S_n^{(1/2; -1/2)} f); t_0 \right]$$

$$\left[ K_n^0 [L_n [\varphi_n; t_0]] \right]_{t_0=t_{vj}} = \left[ L_n \left[ (S_n^{(1/2; -1/2)} f); t_0 \right] \right]_{t_0=t_{vj}} (v = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}).$$

(3.4.15)-სთან ერთად  $L_n [\varphi_n; t_0]$  ფუნქციასა ქვესიმრავლეში განვიხილოთ განტოლება

$$\left[ K_n^0 [L_n [\varphi_n; t_0]] \right]_{t_0=t_{vj}} = \left[ L_n \left[ (S_n^{(1/2; -1/2)} f); t_0 \right] \right]_{t_0=t_{vj}} (v = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}). \quad (3.4.16)$$

თუ (3.4.16) განტოლებაში  $t_0$ -ს მივანიჭებთ მნიშვნელობებს  $T(v; j) = \{t_{vj}\}$  ( $v = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$ ) სიმრავლიდან მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას  $T(v; j)$  წერტილებში  $\varphi_n(t_{vj})$  უცნობების მიმართ.

უფრო კონკრეტულად, მიღებულ სისტემას აქვს შემდეგი სახე:

$$\varphi_n(t_{vj}) + \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m q_{ie} A_n(t_{ie}, t_{vj}) \varphi_n(t_{ie}) = f_0(t_{vj}), \quad (3.4.17)$$



სადაც

$$A_n(t_{ie}, t_{vj}) = \left[ 1 + \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{k=1}^m \frac{p_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{\sigma k} - t_{vj}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{p_{vk}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vk} - t_{vj}} - p_{vj}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{vk}(t_{vj}) \right] K(t_{vj}; t_{il}) - \\ - \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{k=1}^m \frac{p_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{\sigma k} - t_{vj}} K(t_{\sigma k}, t_{ie}) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{p_{vk}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vk} - t_{vj}} K(t_{vk}, t_{ie}) + p_{vj}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{vk}(t_{vj}) K(t_{vk}, t_{ie}),$$

$\varphi_n(t_{vj})$  - საძიებელი სიდიდეებია,

$$f_0(t_{vj}) = [1 + \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{k=1}^m \frac{p_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{\sigma k}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{p_{vk}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{vk}} - p_{vj}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{vk}(t_{vj})] f(t_{vj}) - \\ - \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{k=1}^m \frac{p_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{\sigma k}} f(t_{\sigma k}) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{p_{vk}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{vk}} f(t_{vk}) + p_{vj}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{vk}(t_{vj}) f(t_{vj}) \\ (v = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m),$$

$$p_{\sigma k}^{(1/2; -1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-b}{t-a}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{t-t_{\sigma j}}{t_{\sigma k} - t_{\sigma j}} dt, \quad q_{il}^{(-1/2; 1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_i \tau_{i+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{t-t_{ij}}{t_{ie} - t_{ij}} dt,$$

$$p_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)} = \begin{cases} p_{\sigma k}^{(1/2; -1/2)}, & k = \overline{2, m-1}; \sigma = \overline{1, n}, \\ p_{\sigma 1}^{(1/2; -1/2)} + p_{\sigma-1m}^{(1/2; -1/2)}; & k = 1; \sigma = \overline{1, n}; \end{cases} \quad d_{vk} = \frac{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k, j}}^m (t_{vj} - t_{vj_0})}{\prod_{\substack{j=1 \\ j_0 \neq k}}^m (t_{vk} - t_{vj_0})}.$$

იგულისხმება, რომ (3.4.17) განტოლებაში  $K(t_0, t), f(t_0) \in H_\alpha^{(r)}(L)$ .

მტკიცდება, რომ თუ (3.4.14) განტოლებას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი რომელსაც აქვს შემდეგი სახე  $\varphi_0 = \sqrt{(t-a)/(t-b)}$ , მაშინ გარკვეული  $n = n_0$  - დან დაწყებული (3.4.16) განტოლებასაც აქვს ერთადერთი ამონახსნი და ამასთან, თუ  $L_n[\varphi_n; t_0]$  არის (3.4.16) განტოლების ამონახსნი, მაშინ ზემოთ მიღებულ დაშვებებში საძიებელი ამონახსნის მიმართ სამართლიანია შეფასება

$$\|\varphi(t) - L_n[\varphi_n; t]\|_{H_\beta} \leq \frac{C_r \ln n}{n^{r+\alpha-\beta-1/2}} \quad (m > r+1, \beta < \alpha-1/2).$$

ქვემოთ მოყვანილია (3.4.14) განტოლების ამოხსნის ცხრილები, აგებული მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ალგორითმით რამდენიმე კონკრეტულ შემთხვევაში. შესაბამისი პროგრამა შედგენილია Wolfram Mathematica სიმბოლურ ენაზე.

ინტეგრალური განტოლების ზუსტი ამონახსნია  $\varphi(t) = 1$ .

$\varphi_{00}$	0,98437	$\varphi_{21}$	0,9955	$\varphi_{42}$	0,99942	$\varphi_{63}$	0,99695
$\varphi_{01}$	0,98641	$\varphi_{22}$	0,99734	$\varphi_{43}$	0,99891	$\varphi_{70}$	0,99695
$\varphi_{02}$	0,98811	$\varphi_{23}$	0,99769	$\varphi_{50}$	0,99891	$\varphi_{71}$	0,99856
$\varphi_{03}$	0,98955	$\varphi_{30}$	0,99769	$\varphi_{51}$	0,99077	$\varphi_{72}$	0,99879
$\varphi_{10}$	0,98955	$\varphi_{31}$	0,99802	$\varphi_{52}$	0,99184	$\varphi_{73}$	0,99899
$\varphi_{11}$	0,99356	$\varphi_{32}$	0,99830	$\varphi_{53}$	0,99277	$\varphi_{80}$	0,99899
$\varphi_{12}$	0,99431	$\varphi_{33}$	0,99919	$\varphi_{60}$	0,99277	$\varphi_{81}$	0,99963
$\varphi_{13}$	0,99496	$\varphi_{40}$	0,99919	$\varphi_{61}$	0,99606	$\varphi_{82}$	0,99860
$\varphi_{20}$	0,99496	$\varphi_{41}$	0,99931	$\varphi_{62}$	0,99653	$\varphi_{83}$	1,10160

$$k(t_0, t) = (t + t_0 + 4 \cos \pi / 3) / ((t + t_0 + 4 \cos \frac{\pi}{3})^2 + 16 \sin^2 \frac{\pi}{3}), f = 2, n = 10.$$

ინტეგრალური განტოლების ზუსტი ამონახსნია  $\varphi(t) = 2$ .

$\varphi_{00}$	2,03931	$\varphi_{21}$	1,95791	$\varphi_{42}$	1,86391	$\varphi_{63}$	1,93347
$\varphi_{01}$	2,03231	$\varphi_{22}$	1,92563	$\varphi_{43}$	1,85699	$\varphi_{70}$	1,93347
$\varphi_{02}$	2,0469	$\varphi_{23}$	1,91797	$\varphi_{50}$	1,85699	$\varphi_{71}$	1,89614
$\varphi_{03}$	2,01678	$\varphi_{30}$	1,91797	$\varphi_{51}$	2,00858	$\varphi_{72}$	1,88928
$\varphi_{10}$	2,01678	$\varphi_{31}$	1,91049	$\varphi_{52}$	2,00021	$\varphi_{73}$	1,88826
$\varphi_{11}$	1,98325	$\varphi_{32}$	1,90321	$\varphi_{53}$	1,99175	$\varphi_{80}$	1,88826
$\varphi_{12}$	1,97474	$\varphi_{33}$	1,87622	$\varphi_{60}$	1,99175	$\varphi_{81}$	1,85258
$\varphi_{13}$	1,96663	$\varphi_{40}$	1,87622	$\varphi_{61}$	1,94963	$\varphi_{82}$	1,84524
$\varphi_{20}$	1,96663	$\varphi_{41}$	1,86991	$\varphi_{62}$	1,941481	$\varphi_{83}$	1,87185

როგორც მოყვანილი ცხრილებიდან ჩანს  $n = 10$ -სათვის მიიღწევა  $10^{-3}$  სიზუსტის რიგი.

**3.5. ნახევარსიბრტყის საზღვრის პერპენდიკულარული ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა**

დრეკად ნახევარსიბრტყეში მოცემულია სასრული სიგრძის ბზარი, რომელიც სიბრტყის საზღვრის მართობულია, ბზარის ნაპირზე მოცემულია თვითგაწონასწორებადი დატვირთვა. აღნიშნული ამოცანა მიიყვანება (3.5.1) სახის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე:

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L K(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0), \quad (3.5.1)$$

სადაც

$$K(\tau, y) = \frac{y^2 + 6y + 4\tau y + 2\tau - \tau^2 + 4}{(\tau + y + 2)^3}, \quad (3.5.2)$$

ხოლო  $f$  ბზარის ნაპირებზე მოდებული დატვირთვაა.  $k(\tau, y)$  გულს, გარდა განსაკუთრებულობისა,  $\tau = y = -1$  წერტილში აქვს უძრავი სინგულარობა. ასეთი გულით (3.5.1) განტოლების რიცხვითი ამოხსნისათვის, გარკვეულ ფუნქციონალურ სივრცეში აგებულია დაფუძნებადი ალგორითმი.

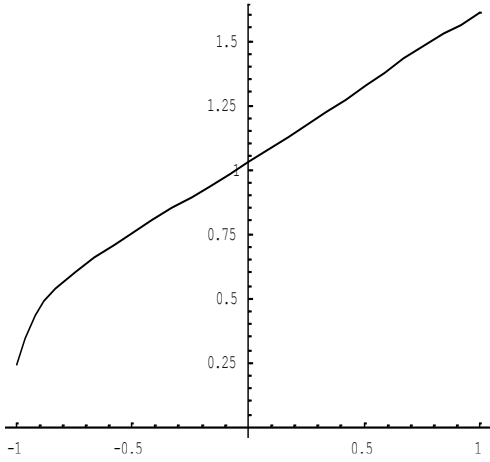
მაგალითისათვის განხილულია შემთხვევა, როცა ბზარის ნაპირზე მოდებულია მუდმივი ნორმალური  $f_k = -1$  დატვირთვა.

ქვემოთ მოყვანილია (3.5.1) განტოლების (3.5.2) გულით რიცხვითი ამოხსნის საფუძველზე მიღებული ინტენსივობის კოეფიციენტების ცხრილი  $n$ -ის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის.

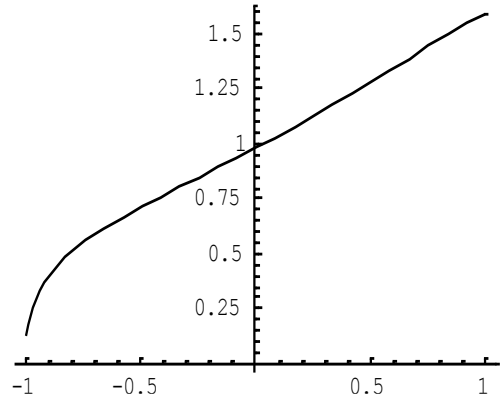
$n$	6	10	20	40	60	80	120
$f \cdot k_1 / \sqrt{l}$	1,1392	1,1248	1,1224	1,1224	1,1219	1,1217	1,1216
	1,1138	1,1182	1,12064	1,12129	1,12142	1,12146	1,1218

$n$	6	10	20	40	60	80	120
$f \cdot k_1 / \sqrt{l}$	1,25457	1,2539	1,25384	1,25298	1,25281	1,25275	1,25279
	1,25362	1,25319	1,25285	1,25279	1,25276	1,25278	1,25277

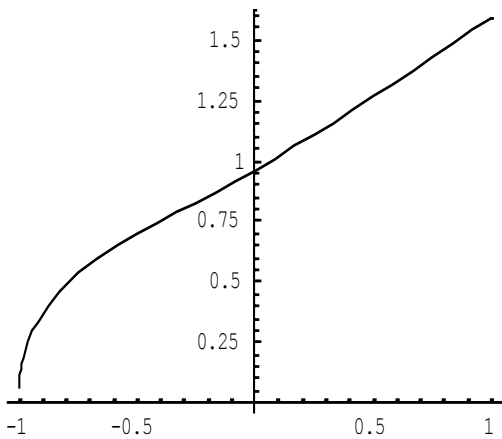
23-28 სურათებზე წარმოდგენილი გრაფიკები ასახავს ცხრილის შესაბამისად ინტენსივობის კოეფიციენტების გადახრის ეპიურებს  $n = 10, 20, 40, 60, 80, 120$  მნიშვნელობებისათვის.



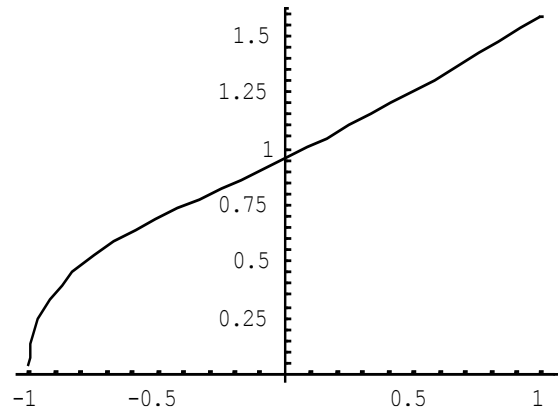
სურ. 23



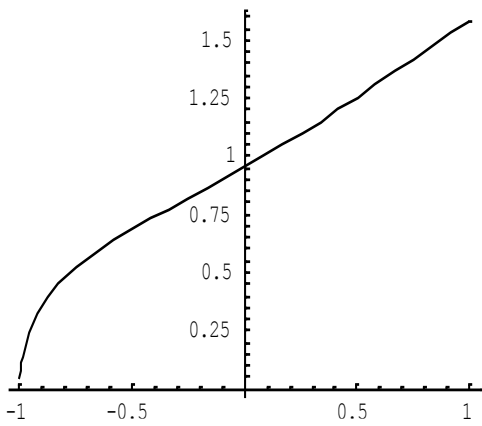
სურ. 24



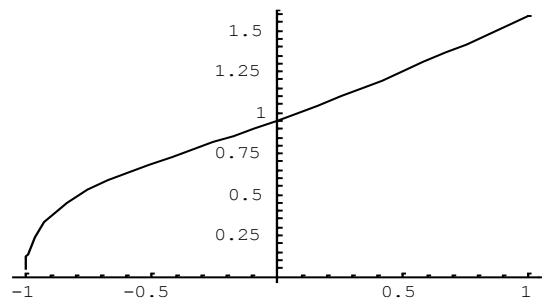
სურ. 25



სურ. 26



სურ. 27



სურ. 28

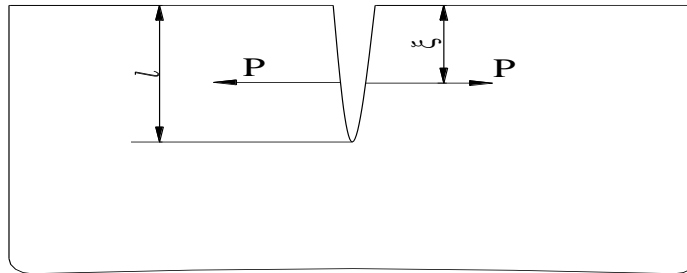
ახლა განვიხილოთ (3.5.1) განტოლების რიცხვითი ამოხსნა იმ შემთხვევაში, როცა ბზარის ნაპირებზე  $x = \xi$  წერტილში მოდებულია შეყურსული  $p$  ძალა (სურ. 29). ამ შემთხვევაში  $p(x) = -p\delta(x - \xi)$  და (3.5.1) განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(\tau) \left[ \frac{1}{\tau - y} + K(\tau, y) \right] d\tau = -\frac{2p}{\pi l} \sqrt{1 - \eta^2} \int_{-1}^{+1} \frac{K(\tau, y) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2} (\eta - \tau)}, \quad |y| < 1, \quad (3.5.3)$$

სადაც

$$\delta(y, x) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y. \end{cases}$$

$$\eta = \frac{2\xi}{l} - 1$$

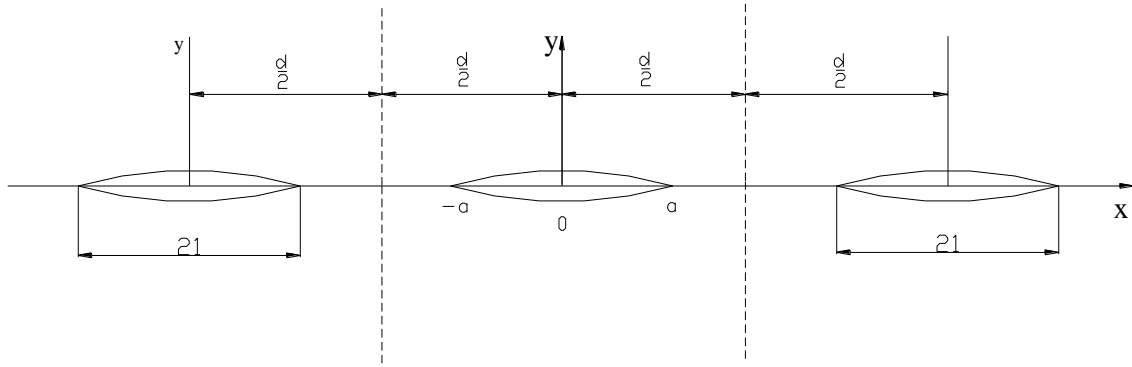


სურ. 29

(3.5.3)-ში მარჯვნივ გვაქვს ფუნქცია, რომელიც შემოსაზღვრულია ყოველი  $|y| < 1$  და  $|\eta| < 1$  მნიშვნელობებისათვის, ამიტომ (3.5.3) განტოლების რიცხვითი ამოხსნა შეიძლება განვახორციელოთ ზემოთ მოყვანილი მეთოდით.

### 3.6. კოლინეარული ბზარების ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა

ვთქვათ, უსასრულო სიბრტყის  $Ox$  ღერძზე მოთავსებულია კოლინეარული ბზარების პერიოდული სისტემა (სურ. 30), რომლის ნაპირები დატვირთულნი არიან ნებისმიერი არათვითგაწონასწორებადი გარე დატვირთვით.



სურ. 30

მაშინ, ბზარის ეს ამოცანა მიიყვანება შემდეგი სახის პირველი გვარის მახასიათებელ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{R_1(\tau) d\tau}{\tau - y} = -\frac{iR}{d} \cdot \frac{y}{(1+y^2)} + \frac{P_1(y)}{1+y^2}, \quad |y| < a, \quad (3.6.1)$$

სადაც  $R$  განისაზღვრება პირობიდან

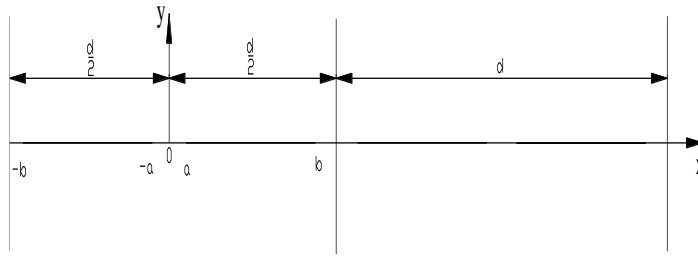
$$\int_{-l}^{+l} R(t) dt = i \frac{\aleph - 1}{\aleph + 1} \int_{-l}^{+l} q(t) dt = iR.$$

იმ შემთხვევაში, როცა უსასრულო სიბრტყე შესუსტებულია ორი ტოლი ნახევარღერძის მიმართ სიმეტრიულად განლაგებული ბზარით (სურ. 31), მიიღება კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრალური განტოლება:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-c_0}^{+c_0} \varphi(\eta) \frac{d\eta}{\eta - y} = p(y), \quad |y| < c_0, \quad (3.6.2)$$

სადაც

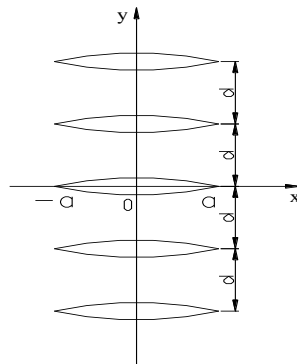
$$P(y) = p(x); \quad c_0 = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{2\pi a}{d} - \cos \frac{2\pi b}{d} \right).$$



სურ. 31

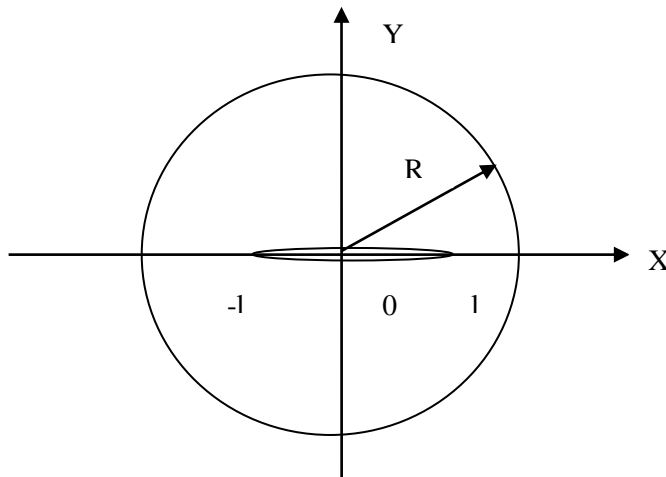
ახლა, ვთქვათ უსასრულო სიბრტყეზე ბზარები განლაგებული არიან სურ. 32-ის შესაბამისად. მაშინ აღნიშნული ამოცანა მიიყვანება შემდეგ განტოლებაზე:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - y} = f(y) + \frac{ABy}{(1 - y^2)\pi}, \quad |y| < a, \quad (3.6.3)$$



სურ. 32

განვიხილოთ  $R$  რადიუსიანი წრიული დისკვი, რომელსაც ცენტრში გააჩნია  $2l$  სიგრძის ბზარი (სურ. 33).



სურ. 33

ბზარის წირის გასწვრივ სიმეტრიული დატვირთვის დროს მიიღება განტოლება

$$\int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\eta - \xi} + M_1(\eta, \xi) \right] v'(\eta) d\eta = \pi \sigma(\xi), \quad |\xi| < 1 \quad (3.6.4)$$

და ანტისიმეტრიული დატვირთვის დროს

$$\int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\eta - \xi} + M_2(\eta, \xi) \right] v'(\eta) d\eta = \pi \tau(\xi), \quad |\xi| < 1, \quad (3.6.5)$$

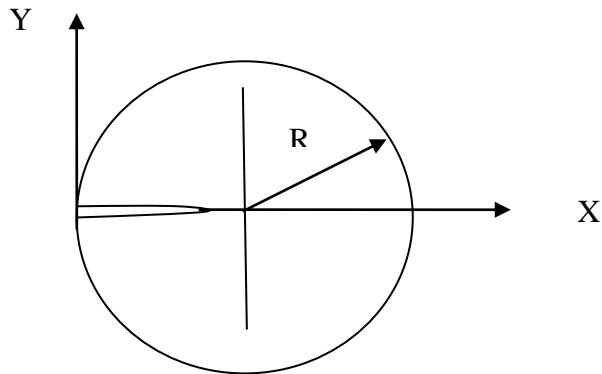
$$M_1(\eta, \xi) = K(\eta, \xi) + L(\eta, \xi); \quad M_2(\eta, \xi) = K(\eta, \xi) - L(\eta, \xi);$$

$$K(\eta, \xi) = \frac{\lambda^2}{2(1 - \lambda^2 \eta \xi)^2} \left[ 4\xi - 5\eta + \lambda^2 \eta (\xi \eta + 3\eta^2 - 3\xi^2) + \lambda^4 \xi \eta^2 (\xi \eta + \xi^2 - \eta^2) - \lambda^6 \eta^4 \xi^3 \right];$$

$$L(\eta, \xi) = \frac{\lambda^2}{2(1 - \lambda^2 \eta \xi)^2} \left[ 2\xi - \eta + \lambda^2 \eta (\eta^2 - 2\eta \xi - \xi^2) + \lambda^4 \xi \eta^2 (\xi \eta + \xi^2 - \eta^2) + \lambda^4 \eta^3 \xi^2 \right];$$

$$\lambda = l/R, \quad \eta = t/l, \quad \xi = x/l.$$

განვიხილოთ  $R$  რადიუსიანი წრიული დისკი, რომელსაც საზღვარზე აქვს  $l$  სიგრძის რადიალური ბზარი (სურ. 34).



სურ. 34

ბზარის ნაპირებზე სიმეტრიული დატვირთვის დროს მიიღება განტოლება

$$\int_0^1 K(\eta, \xi) v'(\eta) d\eta = \pi \sigma(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (3.6.6)$$

და ანტისიმეტრიული დატვირთვის დროს



$$\int_0^1 L(\eta, \xi) v'(\eta) d\eta = \pi \tau(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (3.6.7)$$

სადაც

$$\begin{aligned} K K(\eta, \xi) &= R(\eta, \xi) + S(\eta, \xi), \quad L(\eta, \xi) = R(\eta, \xi) - S(\eta, \xi), \\ R(\eta, \xi) &= \frac{1}{\eta - \xi} + \frac{1}{2(\eta + \xi - \lambda \eta \xi)^2} [2(\xi^2 + 4\xi\eta - \eta^2) - 2\lambda\eta(3\xi^2 + 7\xi\eta + 2\eta^2) + \\ & 2\lambda^2\eta(\xi^2 + 6\xi^2\eta + 7\xi\eta^2 + \eta^2) - \lambda^2\eta^2\xi(5\xi^2 + 11\xi\eta + 4\eta^2) + \lambda^4\eta^3\xi^2(4\xi + 3\eta) - \lambda^5\eta^4\xi^3] \\ S(\eta, \xi) &= \frac{\lambda\eta}{2(\eta + \xi - \lambda\eta\xi)^2} [-4\eta + 2\lambda(\xi + \eta)^2 - \lambda^2\eta\xi(3\xi + 2\eta) + \lambda^3\xi^2\eta^2] \\ \xi &= x/l, \quad \eta = t/l, \quad \lambda = l/R. \end{aligned}$$

(3.6.1)-(3.6.7) განტოლებები წარმოადგენს პირველი გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებს, რომელთა რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები 3.4 პარაგრაფში იქნა განხილული.

თუმცა, უნდა ითქვას, რომ კოლინეარულ ბზარებთან დაკავშირებულ ზოგიერთ შემთხვევაში, ჩვენს მიერ დამუშავდა ახალი, გამარტივებული და მაღალი სიზუსტის ალგორითმები. მაგალითად, შესავალში დასახელებულ ნაშრომში „კოლინეარული ბზარების რიცხვითი ამოხსნის შესახებ“ აგებულია ახალი რიცხვითი სქემა, რომელიც (3.6.1) სინგულარული ინტეგრალური განტოლების მიახლოებით ამოხსნას ეხება, როცა განტოლების ინდექსი ნულის ტოლია. როგორც ცნობილია, ასეთ შემთხვევაში მოცემული განტოლების ამონახსნი ერთ-ერთ ბოლოზე შემოსაზღვრულია, ხოლო მეორეზე - შემოუსაზღვრელი [30].

ვიგულისხმობთ, რომ (3.6.1) განტოლებაში  $R_1$  შემოსაზღვრულია  $-a$  ბოლოზე და შემოუსაზღვრელია  $a$ -ზე. მაშინ მას ექნება შემდეგი სახე:

$$R_1(\tau) = \sqrt{\frac{\tau+a}{\tau-a}} R_0(\tau), \quad (3.6.8)$$

სადაც  $R_0 \in [-a, a]$ .

(3.6.8)-ის (3.6.1) განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{\tau+a}{\tau-a}} \frac{R_0(\tau)}{\tau-y} d\tau = f(y). \quad (3.6.9)$$

(3.6.9) განტოლება შევცვალოთ შემდეგი სახის წრფივ განტოლებათა სისტემით:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n A_{i,n} \frac{R_0(\tau_i)}{\tau_i - y_k} = f(y_k). \quad (3.6.10)$$

სადაც

$$\tau_i = \cos\left(\pi \frac{2i-1}{2n+1}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$y_k = \cos\left(\pi \frac{2k}{2n+1}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

$$A_{i,n} = 2\pi \frac{1+\tau_i}{2n+1}.$$

(3.6.10) სისტემის ამოხსნა გვაძლევს საძიებელი  $R_0$  ამონახსნის მნიშვნელობას  $\{y_k\} (k = \overline{1, n})$  კვანძით წერტილში, შემდეგ ინტერპოლაციის საშუალებით ვპოულობთ  $R_1(\tau)$  ამონახსნს.

აღწერილი ალგორითმი საკმარისად მაღალი სიზუსტისაა, რასაც ადასტურებს სათანადო პროგრამით ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტები.

საზოგადოდ, სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამონახსნის სქემების გამარტივებასთან დაკავშირებული საკითხები დაწვრილებით იქნება განხილული მომდევნო პარაგრაფში.

აქვე შევნიშნოთ, რომ მოცემულ თავში მოყვანილი იქნა ტიპიური ამოცანები ბზარებზე, რომლებიც მიიყვანება პირველი გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ

განტოლებებზე. აღნიშნული ალგორითმებით შესაძლებელია უფრო ფართო კლასის გამოყენებითი ტიპის ამოცანების რიცხვითი ამოხსნა.

### 3.7. სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამონახსნა გამარტივებული სქემების გამოყენებით

განვიხილოთ პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლება

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\varphi_0(t) dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} k(t_0; t) \varphi_0(t) dt = f(t_0), \quad (3.7.1)$$

სადაც  $f(t)$ ,  $K(t_0; t)$  განსაზღვრულნი არიან  $L = ab$  კონტურზე და ეკუთვნის  $H_r(\alpha; L)$  კლასს [88].

როგორც ცნობილია [30], იმისდა მიხედვით, ამონახსნს ფუნქციათა რომელ კლასში ვეძებთ - წირის ერთ ბოლოზე შემოსაზღვრული, მეორეზე შემოუსაზღვრელი (ინდექსი  $\aleph = 0$ ); ორივე ბოლოზე შემოუსაზღვრელი ( $\aleph = 1$ ); ორივეზე შემოსაზღვრული ( $\aleph = -1$ ) - შესაბამისად, (3.7.1) განტოლების ზუსტ ამონახსნებს აქვთ სხვადასხვა სახე.

ჯერჯერობით ვიგულისხმობთ, რომ  $\aleph = 0$ . ე.ი. ვეძებთ ამონახსნს, რომელიც შემოსაზღვრულია ერთ ბოლოზე და შემოუსაზღვრელია მეორე ბოლოზე [30]:

$$\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \varphi(t).$$

შევიტანოთ  $\varphi_0(t)$ -ს მნიშვნელობა (3.7.1) განტოლებაში. მივიღებთ:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\varphi_0(t) dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} k(t_0; t) \varphi_0(t) dt = f(t_0). \quad (3.7.2)$$

შევნიშნოთ, რომ ასეთი განტოლებების ამოხსნასთან დაკავშირებული საკითხები მრავალ ნაშრომშია შესწავლილი (იხ., მაგ., [74, 109, 116]), მაგრამ იქ განხილული განტოლებებისთვის ძირითადად გამოიყენება ნახევრად რეგულარიზაციის მეთოდი, რაც კიდევ უფრო ართულებს (3.7.2) განტოლების სტრუქტურას [43,44].

აღვნიშნოთ

$$S(\varphi; t_0; \pm \frac{1}{2}) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\varphi_0(t) dt}{t-t_0}.$$

ვთქვათ  $n$  ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია. დავყოთ  $[a, b]$  შუალედი  $n$  ტოლ ნაწილად წერტილებით

$$S_\sigma = a + \frac{b-a}{n} (\sigma - 1), \quad \sigma = 1, 2, \dots, n+1.$$

შემდეგ, მოცემული ფიქსირებული  $m$  ნატურალური რიცხვისათვის ყოველი  $[S_\sigma, S_{\sigma+1}]$  სეგმენტი დავყოთ ნაწილებად წერტილებით

$$S_\sigma = S_\sigma + hx_k \left( h = \frac{b-a}{n} \right), \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

სადაც  $\{x_k\}_{k=1}^m$   $[0, 1]$  შუალედიდან აღებული წერტილებია. შემდეგში ვიგულისხმობთ, რომ  $x_1, x_2, \dots, x_m$  რიცხვები გადანომრილია ზრდის მიხედვით.

აღვნიშნოთ

$$\tau_\sigma = t(S_\sigma), \quad \tau_{\sigma k} = t(S_{\sigma k}), \quad (\sigma = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m).$$

$S(\varphi; t_0; \pm \frac{1}{2})$ -ის მიახლოებით მნიშვნელობად განვიხილოთ გამოსახულება

$$S_n(\varphi; t_0; \pm \frac{1}{2}) = L_\nu(\varphi; t_0) + \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{P_{\sigma k}}{t-t_{\sigma k}} [L_\nu(\varphi; t_0) - \varphi(t_{\sigma k})]$$

$$(t_0 \in \tau_\nu, \tau_{\nu+1}; t_0 \neq t_{\sigma k}; \nu = 0, 1, \dots, n-1),$$

სადაც  $L_\nu(\varphi; t_0)$  ლაგრანჟის მრავალწევრია  $t_{\nu k}$  ( $\nu = 0, n-1; k = 0, m-1$ ) კვანძით წერტილებში,

$$P_{\sigma k} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\omega_\sigma(t) d(t)}{(t-t_{\sigma k}) \omega'_\sigma(t_{\sigma k})}, \quad \omega_\sigma(t) = \prod_{k=0}^{m-1} (t-t_{\sigma k}).$$

$t_0 = t_{\sigma k}$  წერტილებში  $S_n(\varphi; t_0; \pm \frac{1}{2})$  განისაზღვრება როგორც ზღვრული მნიშვნელობა.

წინა პარაგრაფში მოყვანილი მსჯელობების ანალოგიურად მტკიცდება, რომ თუ  $\varphi \in H_z(\alpha; L)$ , მაშინ ნებისმიერი  $t_0 \in ab$ -თვის სამართლიანია შეფასება

$$|S(\varphi; t_0; \pm 1/2) - S_n(\varphi; t_0; \pm 1/2)| \leq (c_1 + c_2 l_{mn}) \frac{1}{n^{z+\alpha-1/2}},$$

სადაც  $c_1, c_2$  მუდმივები არ არის დამოკიდებული  $t_0$  -ზე.

შეიძლება ითქვას, ჩვენს მიერ სინგულარული ინტეგრალებით აგებული მიახლოებითი სქემა გაცილებით მარტივი სტრუქტურისაა, ვიდრე სხვა, ასევე ჩვენს მიერ ადრინდელ ნაშრომებში განხილული სქემები, მაგრამ შენარჩუნებული აქვს სიზუსტის მაღალი რიგი.

(3.7.2) განტოლებაში  $\frac{1}{\pi i} \int_{\sigma\tau\sigma+1} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} k(t_0, t) \varphi(t) d(t)$  მიახლოებით შევცვალოთ

ჩვეულებრივი კვადრატურული ფორმულით

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} k(t_0, t) \varphi(t) d(t) \approx \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} P_{\sigma k} k(t_0, t_{\sigma k}) \varphi(t_{\sigma k}).$$

საბოლოოდ (3.7.2) ზუსტი სინგულარული განტოლება შეიცვლება მიახლოებითი განტოლებით

$$S_n(\varphi; t_0; \pm 1/2) + \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} P_{\sigma k} k(t_0, t_{\sigma k}) \varphi(t_{\sigma k}) = f(t_0).$$

გაშლილი სახით, კომპიუტერზე სარეალიზაციოდ, ეს სქემა წარმოიდგინება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} & \left[ \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{\kappa=1}^m \frac{P_{\sigma \kappa}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\sigma \kappa}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\nu k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\nu k}} - p_{\nu j}^{*(-1/2; -1/2)} \sum_{k=1}^m d_{\nu k}(t_{\nu j}) \right] \varphi(t_{\nu j}) - \\ & - \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\sigma k}} \varphi(t_{\sigma k}) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\nu k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\nu k}} \varphi(t_{\nu k}) + p_{\nu j}^{*(-1/2; -1/2)} \sum_{k=1}^m d_{\nu k}(t_{\nu j}) \varphi(t_{\nu k}) + \\ & + \sum_{\sigma=1}^n \sum_{k=1}^m P_{\sigma k} k(t_0, t_{\sigma k}) \varphi(t_{\sigma k}) = f(t_0) \end{aligned}$$

სადაც

$$d_{\nu\kappa} = \frac{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k, j}}^m (t_{\nu j} - t_{\nu j_0})}{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k}}^m (t_{\nu\kappa} - t_{\nu j_0})}, \quad p_{\sigma\kappa}^{(1/2; -1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{t - t_{\sigma j}}{t_{\sigma k} - t_{\sigma j}} dt$$

$$p_{\sigma\kappa}^{*(1/2; -1/2)} = \begin{cases} p_{\sigma 1}^{(1/2; -1/2)} + p_{\sigma -1m}^{(1/2; -1/2)} & \sigma = 1, 2, 3, \dots, n; \\ p_{\sigma\kappa}^{(1/2; -1/2)} & \kappa = 2, 3, \dots, m-1; \sigma = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$(\sigma = 1, 2, \dots, n; \quad \kappa = 1, 2, \dots, m), \quad (t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}; \quad \nu = 1, 2, \dots, n)$$

თუ ამ უკანასკნელში ჩავსვამთ  $t_{\nu j}$  ( $\nu = \overline{0, n}; j = \overline{0, m}$ ) კვანძით წერტილებს, მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას  $\varphi(t_{\nu\kappa})$  ( $\nu = \overline{0, n}; j = \overline{0, m}$ ) უცნობების მიმართ.

წინა პარაგრაფებში მოყვანილი მსჯელობების ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ თუ  $\varphi_n$ -არის უბან-უბან საინტერპოლაციო ფუნქცია, აგებული  $\varphi(t_{\nu\kappa})$  ( $\nu = \overline{0, n}; j = \overline{0, m}$ ) სისტემის ამონახსნის მნიშვნელობებზე, მაშინ ადგილი აქვს შეფასებას

$$\|\varphi(t) - \varphi_n(t)\|_{H_\beta} \leq \frac{Al_{nn}}{n^{z+\alpha-\beta-\frac{1}{2}}} (m > z+1, \beta < \alpha - \frac{1}{2}),$$

სადაც  $A$  - გარკვეული მუდმივი რიცხვია.

როგორც ვხედავთ, (3.7.2) სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნის სათვლელი სქემა საკმარისად გამარტივდა, მაგრამ მიახლოების მაღალი სიზუსტის რიგი კვლავ შენარჩუნებულია.

იმ შემთხვევაში, როცა (3.7.1) განტოლების ინდექსი  $\lambda=1$ , განტოლების ამონახსნი ორივე ბოლოზე შემოსაზღვრულია. მას აქვს  $\varphi_0(t) = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)}}$  [30] სახე და იგი

ცალსახად არ განისაზღვრება. ამისათვის უნდა შესრულდეს დამატებითი პირობა

$$\int_{ab} \varphi_0(t) d(t) = c, \text{ სადა } c \text{ რაიმე მუდმივი რიცხვია.}$$

ასევე, როცა განტოლების ინდექსი უარყოფითია,  $\kappa = -1$ , ყოველთვის არ არსებობს აღნიშნული ზუსტი ამონახსნი. ამისათვის მარჯვენა მხარე  $f(t_0)$  უნდა აკმაყოფილებდეს დამატებით პირობას

$$\int_{ab} \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} = 0.$$

აქედან გამომდინარე, (3.7.1) განტოლების მიახლოებითი ამოხსნის დროს ყოველთვის უნდა იქნას გათვალისწინებული აღნიშნული დამატებითი პირობა. როგორც ცნობილია [30], როცა ეს პირობა სრულდება, (3.7.1) განტოლებას ყოველთვის აქვს ამონახსნი და იგი ერთადერთია.

ეს დამატებითი პირობები, რომლებიც განხილული იქნა წინა პარაგრაფებში განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის სისტემების შედგენის დროს, ანალოგიურად იქნება გათვალისწინებული ჩვენს შემთხვევაშიც, გამარტივებული სქემების გამოყენებისას.

ამგვარად, ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის საფუძველზე შეგვიძლია მივიჩნიოთ, რომ საბოლოოდ (3.7.1) განტოლებისათვის, ნებისმიერი ინდექსის შემთხვევაში, აგებულია საგრძნობლად გამარტივებული რიცხვითი ამოხსნის სქემა, რომელიც ინარჩუნებს სიზუსტის მაღალ რიგს.

მეორე მხრივ, ასეთ განტოლებებზე მიიყვანება ისეთი მნიშვნელოვანი ამოცანები როგორებიცაა, მაგალითად, დირიხლეს ამოცანა სიბრტყეზე ჭრილების [30, §107] შემთხვევაში (შესაბამისად, კომფორმულად გადამსახავი ფუნქციის აგების დროს (დეროს და ძელის გრების ამოცანები)), სიბრტყის ტემპერატურული სტაციონალური ამოცანა ნებისმიერად განლაგებული ბზარების შემთხვევაში [30, თ. VII], ასევე დრეკადობის თეორიის სასაზღვრო ამოცანები.

## დანართი

ქვემოთ მოყვანილია ნაშრომში განხილული გამოთვლითი სქემების რიცხვითი რეალიზაციისთვის Wolfram Mathematica სიმბოლურ ენაზე შედგენილი პროგრამები და მათი გამოყენებით მიღებული შედეგები სხვადასხვა პრაქტიკული შემთხვევებისთვის.

საკონტაქტო ძაბვების გამოთვლა ლითონური სრიალის საკისრის შემთხვევაში.

$$\text{ა) } e_1 = 10^{-5} E_1 = 2,1 \text{ მპა, } e_2 = 10^{-5} E_2 = 2,1 \text{ მპა, } \mu_1 = 0,3, \mu_2 = 0,3, r_1 = 0,03 \text{ მ, } r_2 = 0,035 \text{ მ,} \\ \omega_0 = \pi/6.$$

აქ და ყველგან, შესაბამისად,  $r_1$  და  $r_2$ -ით აღნიშნულია სრიალის საკისრის ლილვისა და კორპუსის რადიუსები;  $\mu_1, \mu_2$  - მათი პუასონის კოეფიციენტები, ხოლო  $E_1, E_2$  დრეკადობის მუდმივებია ნორმალური ტემპერატურის ( $20^\circ\text{C}$ ) პირობებში;  $\omega_0$  წარმოადგენს საკონტაქტო კუთხეს.

აღნიშნული შემთხვევისთვის შესაბამისი კომპიუტერული პროგრამა წარმოდგენილია სრული სახით. დანარჩენ შემთხვევებში მოცემულია მხოლოდ საკონტაქტო ძაბვების რიცხვითი მნიშვნელობები და მათი გრაფიკული გამოსახულება.

სრიალის საკისრის გაანგარიშების პროგრამა

ძირითადი მუდმივების განსაზღვრა

---

$$\{n=12, \mu_1=0.3, \mu_2=0.3, e_1=2.1, e_2=2.1, r_1=0.03, r_2=0.035, \omega_0=\pi/6//N\};$$

$$\{\theta_1=(1-\text{Subscript}[\mu, 1])^2 / (\pi e_1), \theta_2=(1-\text{Subscript}[\mu, 2])^2 / (\pi e_2), ka_1=((1-2 \mu_1) (1+\mu_1)) / (2 e_1), ka_2=((1-2 \mu_2) (1+\mu_2)) / (2 e_2)\} \\ \{1.37934, 1.37934, 1.2381, 1.2381\}$$

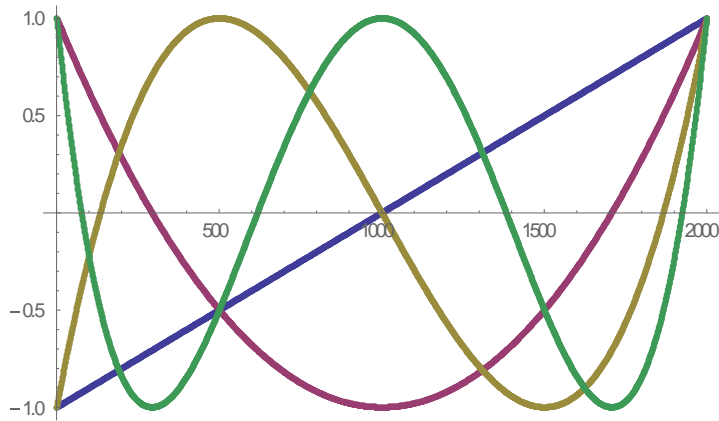
$$\epsilon=10^{-9}/N;$$



## ძირითადი ფორმულების განსაზღვრა

```
T[τ_,n_]:=Cos[n ArcCos[τ]]//N
```

```
ListPlot[Table[T[τ,n],{n,1,4},{τ,-1,1,0.001}]]
```



```
tau[n_]:=
```

```
Table[
  τk= Cos[(2 k-1)/(2n) π]//N
  ,{k,n}]
```

```
tau[n];
```

```
Omeega[n_]:=
```

```
Table[
  ωk=ω0 Cos[(2 k-1)/(2n) π]
  ,{k,n}]
```

```
omega=Omeega[n];
```

```
c[tau_,k_]:=((-1)k-1 √(1-τk2))/(n (tau-τk)) T[tau,n]//N
```

```
a1[tau_,k_]:=c[tau,k]/√(1-τk2)//N;
```

```
a2[x_,tau_]:=Cos[ω0 tau-x]Log[Tan[Abs[ω0 tau-x]/2]]-Cos[x]
Cos[ω0 tau] Log[Tan[(ω0 Abs[tau])/2]];
```

```
a3[x_,tau_]:=Cos[x] Sin[ω0 Abs[tau]]-Sin[Abs[ω0 tau-x]];
```

```
f1[tau_,x_,k_]:=a1[tau,k];
```

```
f2[tau_,x_,k_]:=a1[tau,k] a2[x,tau];
```

```
f3[tau_,x_,k_]:=a1[tau,k] a3[x,tau];
```

განსაზღვრავს ბიჯების რაოდენობას ინტეგრალების დასათვლელად. ბიჯების რაოდენობა განისაზღვრება ისე, რომ ბიჯის სიგრძე იყოს მუდმივი.

```
ff1[x_,k_]:=NIntegrate[f1[z,x,k],{z,-1,1}];
```

```
ff2[x_,k_]:=NIntegrate[f2[z,x,k],{z,-1,1}];
```

```
ff3[x_,k_]:=NIntegrate[f3[z,x,k],{z,-1,1}];
```

```
A1[x_,k_]:=2 θ1 r1 (1-Cos[x]) ff1[x,k]//Chop;
```

```
A2[x_,k_]:=2 (θ1 r1+θ2 r2) ff2[x,k]//Chop;
```

```
A3[x_,k_]:=- (ka1 r1+ka2 r2) ff3[x,k]//Chop;
```

```
A[x_,k_]:=A1[x,k]+A2[x,k]+A3[x,k]
```

## შემოწმება

---

```
a1[τ,5]
```

```
(0.07699 Cos[12. ArcCos[τ]])/((-0.382683+τ) √(1.-1.τ2))
```

```
f1[τ,x,5]
```

```
(0.07699 Cos[12. ArcCos[τ]])/((-0.382683+τ) √(1.-1.τ2))
```

```
f2[τ,x,5]
```

```
(0.07699 Cos[12. ArcCos[τ]] (Cos[x-0.523599 τ]  
Log[Tan[1/2 Abs[-x+0.523599 τ]]]-Cos[x] Cos[0.523599 τ]  
Log[Tan[0.261799 Abs[τ]]]))/((-0.382683+τ) √(1.-1.τ2))
```

```
a1[τ,5] a2[x,τ]
```

```
(0.07699 Cos[12. ArcCos[τ]] (Cos[x-0.523599 τ]  
Log[Tan[1/2 Abs[-x+0.523599 τ]]]-Cos[x] Cos[0.523599 τ]  
Log[Tan[0.261799 Abs[τ]]]))/((-0.382683+τ) √(1.-1.τ2))
```

```
f3[τ,x,5]
```

```
(0.07699 Cos[12. ArcCos[τ]] (-Sin[Abs[-x+0.523599
```

```

τ]]+Cos[x] Sin[0.523599 Abs[τ]]))/((-0.382683+τ)√1-1.τ²)

a1[τ,5] a3[x,τ]
(0.07699 Cos[12. ArcCos[τ]] (-Sin[Abs[-x+0.523599
τ]]+Cos[x] Sin[0.523599 Abs[τ]]))/((-0.382683+τ)√1-1.τ²)

a1[τ,5]/.τ->T2

(0.07699 Cos[12. ArcCos[T2]])/((-0.382683+T2)√1-1.T₂²)

a1[τ,5] a3[x,τ]/.{τ->T1,x->omega[[3]]}

(0.07699 Cos[12. ArcCos[T1]] (-Sin[Abs[-0.415399+0.523599
T1]]+0.914955 Sin[0.523599 Abs[T1]]))/((-0.382683+T1)
√1-1.T₁²)

ff11[x_,k_,eps_]:=NIntegrate[f1[z,x,k],{z,-1+eps,1-eps}];
ff12[x_,k_,eps_]:=NIntegrate[f2[z,x,k],{z,-1+eps,1-eps}];
ff13[x_,k_,eps_]:=NIntegrate[f3[z,x,k],{z,-1+eps,1-eps}];

{ff1[omega[[1]],5],ff2[omega[[1]],5],ff3[omega[[1]],5]}
{0.261799,0.0152009,-0.0358193}

Limit[ff11[omega[[1]],5,eps],eps->0]

Limit[NIntegrate[f1[z,0.519119,5],{z,-1+eps,1-eps}],eps->0]
Limit[ff12[omega[[1]],5,eps],eps->0]

Limit[NIntegrate[f2[z,0.519119,5],{z,-1+eps,1-eps}],eps->0]

xx1=0.00000000000000000000000001;
{ff11[omega[[1]],5,xx1],ff12[omega[[1]],5,xx1],ff13[omega[[1]],5,xx1]}
{0.261799,0.0152009,-0.0358193}

{0.26687026490460636`,-0.014304955589403333`,
-0.03073961375236057`}
{0.25607230240294315`,`0.07383053404544376`,
-0.042242271793134896`}
{0.2608276729938059`,`0.02473691654313464`,
-0.0369102092259302`}
{0.26170176132805123`,`0.016158335030092584`,
-0.03592887247022264`}

```

```

{0.2617896246963331`,0.015296666445734599`,
 -0.035830225991188853`}
{0.26179841257773945`,0.01521049578495929`,
 -0.035820360674371984`}
{0.26179929072036967`,0.015201878700576552`,
 -0.035819371081646`}
{0.2617993874746135`,0.015200921250284239`,
 -0.03581926468407158`}
{0.2617993780025325`,0.015201019010754956`,
 -0.03581927655573893`}
{0.26179938478893006`,0.015200945233486194`,
 -0.035819267627045355`}
{0.2617993874746135`,0.015200928153789983`,
 -0.03581926614262641`}
0.2617993874746135`,0.015200921250284239`
 -0.03581926468407158`
{0.2617993874746135`,0.015200928153789983`,
 -0.03581926614262641`}
{0.2617993874746135`,0.015200928153789983`,
 -0.03581926614262641`}

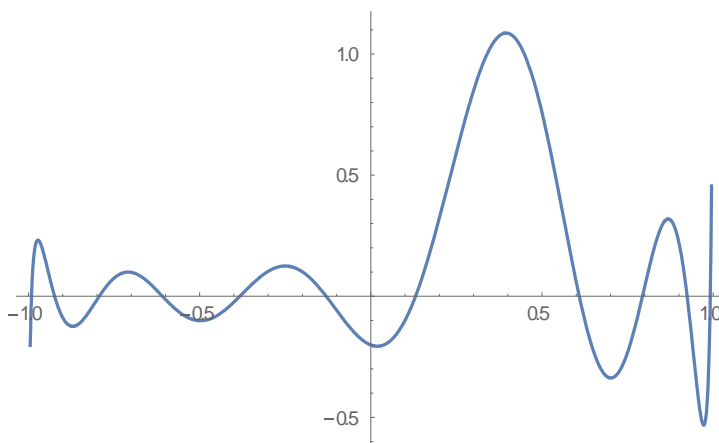
```

```

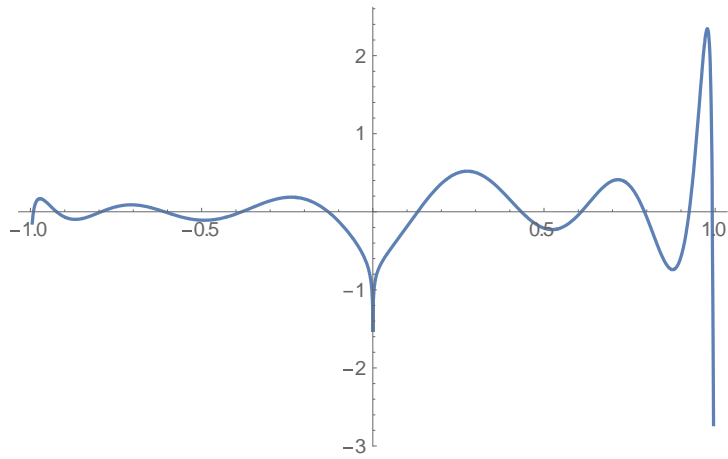
{0.26687,-0.014305,-0.0307396}
{0.256072,0.0738305,-0.0422423}
{0.260828,0.0247369,-0.0369102}
{0.261702,0.0161583,-0.0359289}
{0.26179,0.0152967,-0.0358302}
{0.261798,0.0152105,-0.0358204}
{0.261799,0.0152019,-0.0358194}
{0.261799,0.0152009,-0.0358193}
{0.261799,0.015201,-0.0358193}
{0.261799,0.0152009,-0.0358193}
{0.261799,0.0152009,-0.0358193}

```

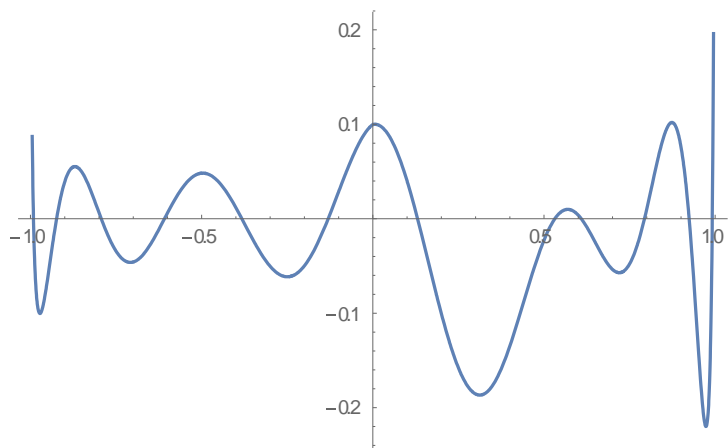
```
Plot[f1[x,omega[[1]],5],{x,-0.995,0.995},PlotRange->All]
```



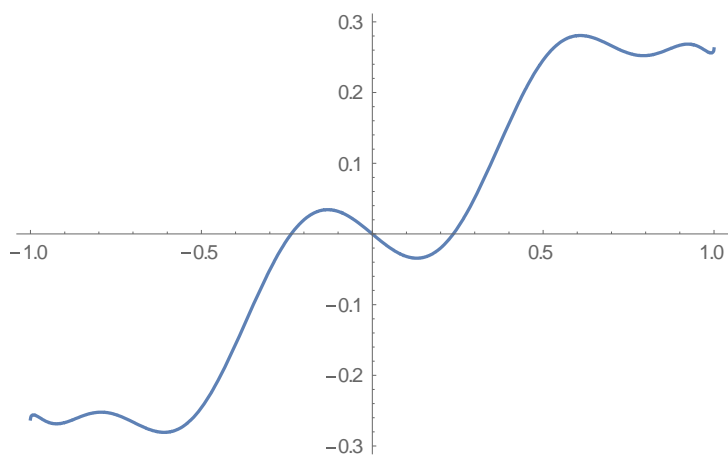
```
Plot[f2[x, omega[[1]], 5], {x, -0.995, 0.995}, PlotRange->All]
```



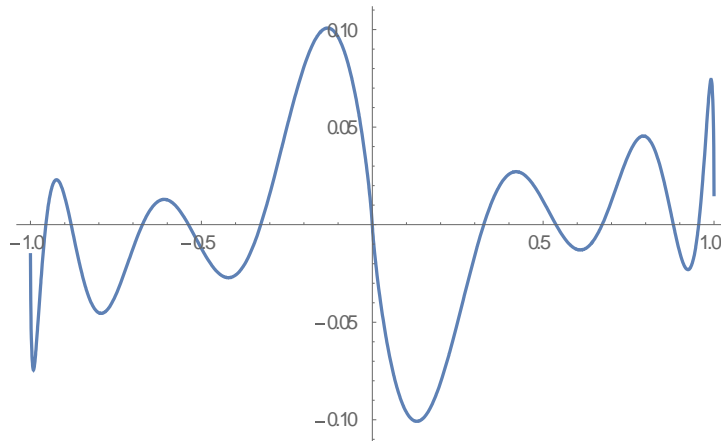
```
Plot[f3[x, omega[[1]], 5], {x, -0.995, 0.995}, PlotRange->All]
```



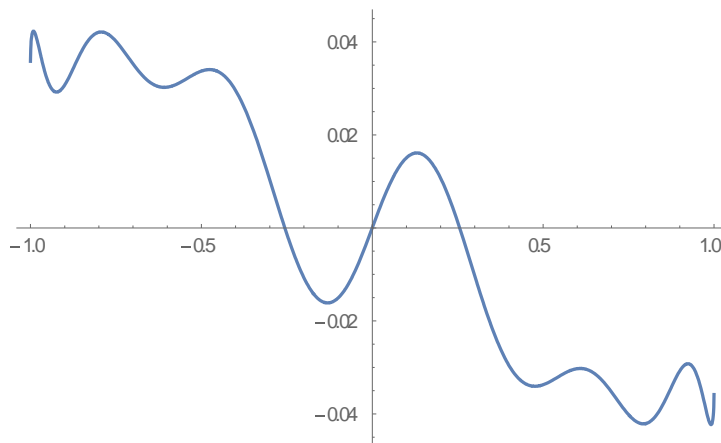
```
Plot[NIntegrate[f1[z, omega[[1]], 5], {z, -TT, TT}],  
{TT, -1, 1.}, PlotRange->All]
```



```
Plot[NIntegrate[f2[z, omega[[1]], 5], {z, -TT, TT}], {TT, -1, 1.}, PlotRange->All]
```



```
Plot[NIntegrate[f3[z, omega[[1]], 5], {z, -TT, TT}], {TT, -1, 1.}, PlotRange->All]
```



## განტოლებათა სისტემის განსაზღვრა და ამოხსნა

---

```
matr=Table[A[omega[[i]],k],{i,n},{k,n}];
matr//MatrixForm
({
  {-0.0265375, -0.0144713, -0.00844217, -0.00294977,
0.000846279, 0.0105039, 0.0123144, 0.00625788, 0.0062483,
0.00488064, 0.00488383, 0.0045066},
  {-0.0150338, -0.0205291, -0.0108354, -0.00378716,
0.000219063, 0.010264, 0.0121347, 0.0060266, 0.00603448,
0.00467591, 0.0046925, 0.00432064},
```

```

{-0.00941247, -0.0112305, -0.017725, -0.00679394,
-0.00100713, 0.00953575, 0.0117357, 0.00546861,
0.00558234, 0.00421275, 0.00428059, 0.00391103},
{-0.00597127, -0.00625265, -0.00891782, -0.0140182,
-0.00436731, 0.00829209, 0.0107601, 0.00456645,
0.00475338, 0.00345835, 0.00356929, 0.00322614},
{-0.0032137, -0.00328419, -0.00419063, -0.00539639,
-0.0118699, 0.00486032, 0.00917692, 0.00300254,
0.00353731, 0.00228528, 0.00252301, 0.00219853},
{-0.00100827, -0.000827038, -0.00148159, -0.000826964,
-0.00346907, -0.00280023, 0.00531664, 0.000847505,
0.00164117, 0.000718206, 0.00104397, 0.000801628},
{0.000801628, 0.00104397, 0.000718206, 0.00164117,
0.000847505, 0.00531664, -0.00280023, -0.00346907,
-0.000826964, -0.00148159, -0.000827038, -0.00100827},
{0.00219853, 0.00252301, 0.00228528, 0.00353731,
0.00300254, 0.00917692, 0.00486032, -0.0118699,
-0.00539639, -0.00419063, -0.00328419, -0.0032137},
{0.00322614, 0.00356929, 0.00345835, 0.00475338,
0.00456645, 0.0107601, 0.00829209, -0.00436731,
-0.0140182, -0.00891782, -0.00625265, -0.00597127},
{0.00391103, 0.00428059, 0.00421275, 0.00558234,
0.00546861, 0.0117357, 0.00953575, -0.00100713,
-0.00679394, -0.017725, -0.0112305, -0.00941247},
{0.00432064, 0.0046925, 0.00467591, 0.00603448,
0.0060266, 0.0121347, 0.010264, 0.000219063, -0.00378716,
-0.0108354, -0.0205291, -0.0150338}, {0.0045066,
0.00488383, 0.00488064, 0.0062483, 0.00625788, 0.0123144,
0.0105039, 0.000846279, -0.00294977, -0.00844217,
-0.0144713, -0.0265375}})

```

```
Det[matr]
```

```
2.25977*10-28
```

```
marjvenamxare[k_] := (r2-r1) (1-Cos[ωk])
```

```
b=Table[marjvenamxare[k], {k, n}]
```

```
{0.000658718, 0.000573697, 0.000425223, 0.000251855, 0.0001000
38, 0.0000116725, 0.0000116725, 0.000100038, 0.000251855, 0.000
425223, 0.000573697, 0.000658718}
```

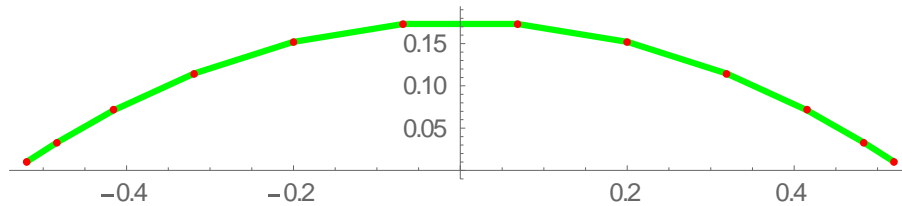
```
xx=LinearSolve[matr, b]
```

```
{0.00150658, 0.00470341, 0.0101706, 0.0163916, 0.0217115, 0.024
7572, 0.0247572, 0.0217115, 0.0163916, 0.0101706, 0.00470341, 0.
00150658}
```

```
pts=Table[{omega[[k]],7 xx[[k]]},{k,n}]
```

```
{{0.519119,0.0105461},{0.483742,0.0329239},{0.415399,0.0711945},
{0.318747,0.114741},{0.200373,0.15198},{0.0683434,0.1733},
{-0.0683434,0.1733},{-0.200373,0.15198},{-0.318747,0.114741},
{-0.415399,0.0711945},{-0.483742,0.0329239},{-0.519119,0.0105461}}
```

```
Graphics[{Thickness[0.007],Green,Line[pts],Red,Point[pts]},
,Axes->True]
```



ბ)  $e_1 = 10^{-5} E_1 = 2,1$  მპა,  $e_2 = 10^{-5} E_2 = 2,1$  მპა,  $\mu_1 = 0,3$ ,  $\mu_2 = 0,3$ ,  $r_1 = 0,03$  მ,  $r_2 = 0,035$  მ,

$$\omega_0 = \frac{\pi}{3}.$$

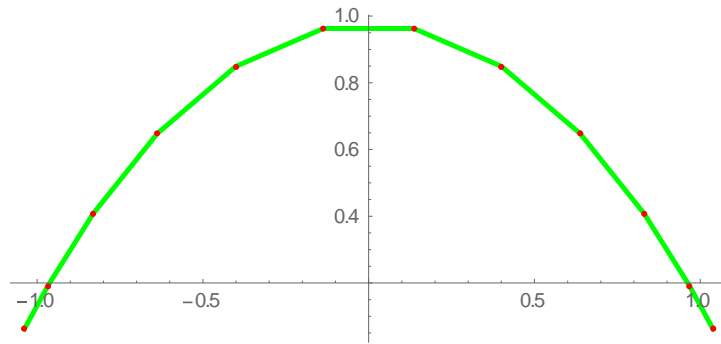
საკონტაქტო ძაბვების რიცხვითი მნიშვნელობები:

```
{0.0089003,0.027335,0.0582359,0.0925622,0.121303,
0.137527,0.137527,0.121303,0.0925622,0.0582359,0.027335,
0.0089003}
```

მაქსიმალური საკონტაქტო ძაბვების განაწილების გრაფიკი:

```
{{1.03824,0.0623021},{0.967484,0.191345},{0.830798,
0.407651},{0.637493,0.647935},{0.400745,0.849119},
{0.136687,0.962689},{-0.136687,0.962689},{-0.400745,
0.849119},{-0.637493,0.647935},{-0.830798,0.407651},
{-0.967484,0.191345},{-1.03824,0.0623021}}
```





საკონტაქტო დაბევის გამოთვლა პლასტმასოვანი (პოლიმერული) სრიალის საკისრის შემთხვევაში.

1. პირდაპირი წყვილი (იხ. პარაგრაფი 1.1)

ა)  $e_1 = 10^{-4} E_1 = 21$  მპა,  $e_2 = 10^{-4} E_2 = 0,22$  მპა,  $\mu_1 = 0,3$ ,  $\mu_2 = 0,4$ ,  $r_1 = 0,03$  მ,  $r_2 = 0,035$  მ,

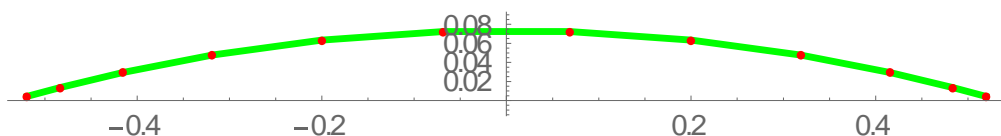
$$\omega_0 = \pi/6.$$

საკონტაქტო დაბევის რიცხვითი მნიშვნელობები:

{0.000619759, 0.00194309, 0.00421759, 0.00682059, 0.0090575,  
0.0103424, 0.0103424, 0.0090575, 0.00682059, 0.00421759,  
0.00194309, 0.000619759}

მაქსიმალური საკონტაქტო დაბევის განაწილების გრაფიკი:

{{0.519119, 0.00433831}, {0.483742, 0.0136016}, {0.415399,  
0.0295231}, {0.318747, 0.0477441}, {0.200373, 0.0634025},  
{0.0683434, 0.0723965}, {-0.0683434, 0.0723965},  
{-0.200373, 0.0634025}, {-0.318747, 0.0477441},  
{-0.415399, 0.0295231}, {-0.483742, 0.0136016},  
{-0.519119, 0.00433831}}



ბ)  $e_1 = 10^{-4} E_1 = 21$  მპა,  $e_2 = 10^{-4} E_2 = 0,22$  მპა,  $\mu_1 = 0,3$ ,  $\mu_2 = 0,4$ ,  $r_1 = 0,03$  მ,  $r_2 = 0,035$  მ,

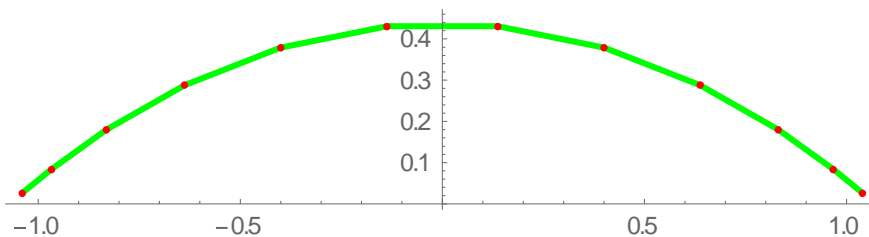
$$\omega_0 = \frac{\pi}{3}.$$

საკონტაქტო ძაბვების რიცხვითი მნიშვნელობები:

{0.00387793, 0.0119879, 0.0257083, 0.0411131, 0.0541295, 0.061522, 0.061522, 0.0541295, 0.0411131, 0.0257083, 0.0119879, 0.00387793}

მაქსიმალური საკონტაქტო ძაბვების განაწილების გრაფიკი:

{{1.03824, 0.0271455}, {0.967484, 0.0839155}, {0.830798, 0.179958}, {0.637493, 0.287792}, {0.400745, 0.378907}, {0.136687, 0.430654}, {-0.136687, 0.430654}, {-0.400745, 0.378907}, {-0.637493, 0.287792}, {-0.830798, 0.179958}, {-0.967484, 0.0839155}, {-1.03824, 0.0271455}}



2. შექცეული წყვილი (იხ. პარაგრაფი 1.1)

ა)  $e_1 = 10^{-4} E_1 = 0,22$  მპა,  $e_2 = 10^{-4} E_2 = 21$  მპა,  $\mu_1 = 0,4$ ,  $\mu_2 = 0,3$ ,  $r_1 = 0,03$  მ,  $r_2 = 0,035$  მ,

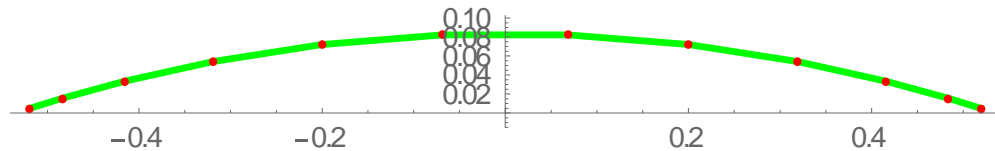
$$\omega_0 = \frac{\pi}{6}.$$

საკონტაქტო ძაბვების რიცხვითი მნიშვნელობები:

{0.000704208, 0.00220779, 0.00479203, 0.00774938, 0.0102907, 0.0117504, 0.0117504, 0.0102907, 0.00774938, 0.00479203, 0.00220779, 0.000704208}

მაქსიმალური საკონტაქტო ძაბვების განაწილების გრაფიკი:

{0.519119, 0.00492946}, {0.483742, 0.0154545}, {0.415399, 0.0335442}, {0.318747, 0.0542456}, {0.200373, 0.072035}, {0.0683434, 0.0822528}, {-0.0683434, 0.0822528}, {-0.200373, 0.072035}, {-0.318747, 0.0542456}, {-0.415399, 0.0335442}, {-0.483742, 0.0154545}, {-0.519119, 0.00492946}



ბ)  $e_1 = 10^{-4} E_1 = 0,22$  მპა,  $e_2 = 10^{-4} E_2 = 21$  მპა,  $\mu_1 = 0,4$ ,  $\mu_2 = 0,3$ ,  $r_1 = 0,03$  მ,  $r_2 = 0,035$  მ,

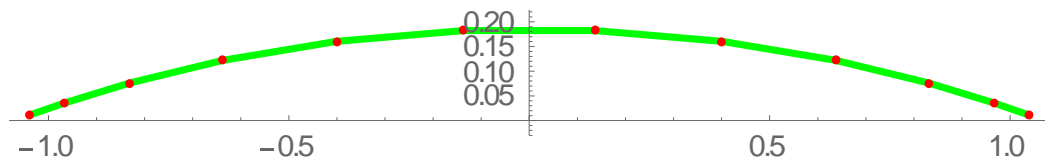
$$\omega_0 = \frac{\pi}{3}.$$

საკონტაქტო ძაბვების რიცხვითი მნიშვნელობები:

{0.00164268, 0.00507795, 0.0108895, 0.0174143, 0.0229273, 0.0260582, 0.0260582, 0.0229273, 0.0174143, 0.0108895, 0.00507795, 0.00164268}

მაქსიმალური საკონტაქტო ძაბვების განაწილების გრაფიკი:

{1.03824, 0.0114988}, {0.967484, 0.0355457}, {0.830798, 0.0762266}, {0.637493, 0.1219}, {0.400745, 0.160491}, {0.136687, 0.182408}, {-0.136687, 0.182408}, {-0.400745, 0.160491}, {-0.637493, 0.1219}, {-0.830798, 0.0762266}, {-0.967484, 0.0355457}, {-1.03824, 0.0114988}



ბზარების არსებობის შემთხვევაში, სათანადო სინგულარული ინტეგრალებისა და შესაბამისად, ინტენსივობის კოეფიციენტების გამოთვლის შედეგები მოცემულია მესამე თავში მოცემულ ცხრილებში.

მათი რიცხვითი რეალიზაცია განხორციელებული იქნა ქვემოთ მოყვანილი პროგრამების საშუალებით:

**პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების გამოსათვლელი პროგრამა:**

n=3  
3

u1[x\_,y\_] := (y^2+6y+4x y+2x-x^2+4) / (x+y+2)^3

u1[x\_,y\_] = 1

$$s1[v_,j_,n_,m_] := \sum_{\sigma=1}^{v-1} \left( \sum_{k=1}^{m-1} pp[\sigma, k] / (\lambda_{v,j} - \lambda_{\sigma,k}) \right) \sum_{\sigma=v+1}^n \left( \sum_{k=1}^{m-1} pp[\sigma, k] / (\lambda_{v,j} - \lambda_{\sigma,k}) \right)$$

$$s2[v_,j_,m_] := \sum_{k=1}^{j-1} pp[v, k] / (\lambda_{v,j} - \lambda_{v,k})$$

$$\sum_{k=j+1}^{m-1} pp[v, k] / (\lambda_{v,j} - \lambda_{v,k})$$

$$s3[v_,j_,m_] := pp[v, j] \left( \sum_{k=1}^{j-1} dd[v, j, k, m] \right)$$

$$\sum_{k=j+1}^m dd[v, j, k, m]$$

$$s4[v_,j_] := pp[v, j] u1[\lambda_{v,j}, \lambda_{v,j}];$$

$$s5[v_,j_,m_] :=$$

$$\sum_{k=1}^{j-1} (pp[v, k] / (\lambda_{v,j} - \lambda_{v,k}) - pp[v, k] u1[\lambda_{v,j}, \lambda_{v,k}]) \varphi[\lambda_{v,k}]$$

$$\sum_{k=j+1}^{m-1} (pp[v, k] / (\lambda_{v,j} - \lambda_{v,k}) - pp[v, k] u1[\lambda_{v,j}, \lambda_{v,k}]) \varphi[\lambda_{v,k}]$$

$$s6[v_,j_,m_] := \left( \sum_{k=1}^{j-1} pp[v, j] dd[v, j, k, m] \varphi[\lambda_{v,k}] \right)$$

$$\sum_{k=j+1}^m pp[v, j] dd[v, j, k, m] \varphi[\lambda_{v,k}]$$

```

s7[v_, j_, n_, m_] :=
Sum[Sum[pp[σ, k] / (λv,j - λσ,k) - pp[σ, k] u1[λv,j, λσ,k] φ[λσ,k]
σ=1 k=1
+
Sum[Sum[pp[σ, k] / (λv,j - λσ,k) - pp[σ, k] u1[λv,j, λσ,k] φ[λσ,k]
σ=v+1 k=1
Do[τσ = -1 + 2(σ-1)/n, {σ, 1, n}]
m = 2
2
Do[xk = (k-1)/(m-1), {k, 1, m}]
Table[xk, {k, 1, m}]
{0, 1}
h = 2/n
2/3
Do[λσ,k = τσ + h xk, {σ, 1, n}, {k, 1, m}]

Table[N[λσ,k], {σ, 1, n}, {k, 1, m}]

{{-1., -0.333333}, {-0.333333, 0.333333}, {0.333333, 1.}}

ω[t_, v_, m_] := Product[t - λv,k, {k, 1, m}]

τn+1 = 1

Do[p[σ_, k_] := (1/(π D[ω[t, σ, m], t] /. t -> λσ,k))
Integrate[ω[t, σ, m] / √((1+t)/(1-t)), {t, τσ, τσ+1},
{σ, 1, n}, {k, 1, m}]
1
pp[1, 1] = N[p[1, 1]]
pp[n, m] = N[p[n, m]]
0.473088
0.0354013
Do[pp[σ, m-1] = pp[σ, 0], {σ, 1, n-1}]
Do[pp[σ, k] = p[σ, k], {σ, 1, n}, {k, 1, m-1}]
Do[pp[σ, 1] = p[σ-1, m] + p[σ, 1], {σ, 2, n-1}]
Do[pp[σ-1, m] = pp[σ, 1], {σ, 2, n}]
Do[pp[n, k] = N[p[n, k]], {k, 1, m}]
Table[N[pp[σ, k]], {σ, 1, n}, {k, 1, m}]

{{0.473088, 0.339224}, {0.339224, 0.0563198}, {0.0563198, 0.035
4013}}

```

```

dd[v_, j_, k_, m_] := (Delete[∏i=1m (λv,j - hv,i), {k}]) /. h -> λ /
∏i=1m (λv,k - hv,i)

```

```

(Delete[
, {{k}}] /. h -> λ)

Do[Print[N[(1+s1[v, j, n, m]+s2[v, j, m]-
s3[v, j, m]+s4[v, j]) φ[λv,j]-s5[v, j, m]+s6[v, j, m]-
s7[v, j, n, m]]==2],
{v, 1, n-1}, {j, 1, m-1}]
Do[Print[N[(1+s1[n, j, n, m]+s2[n, j, m]-
s3[n, j, m]+s4[n, j]) φ[λn,j]-s5[n, j, m]+s6[n, j, m]-
s7[n, j, n, m]]==2],
{j, 1, m}]
0.212379 φ[-1.] + 1.55769 φ[-0.333333] + 0.0985596 φ[0.333333] == 2
-0.236544 φ[-1.] + 1.45554 φ[-0.333333] + 0.649636 φ[0.333333] == 2
0.118272 φ[-1.] - 0.169612 φ[-0.333333] + 1.83549
φ[0.333333] + 0.0844797
φ[1.] == 2
0.236544 φ[-1.] + 0.0848061 φ[-0.333333] - 0.0812619
φ[0.333333] + 1.66395 φ[1.] == 2
NSolve[{0.2123792602423965` φ[-1.`] + 1.5576937918775713`
φ[-0.3333333333333333`] + 0.09855962478515816`
φ[0.3333333333333333`] == 2,
-0.23654421820322308` φ[-1.`] + 1.4555407487688103` φ[-
0.3333333333333333`] + 0.6496361463395387`
φ[0.3333333333333333`] == 2,
0.11827210910161154` φ[-1.`] - 0.16961222745358046` φ[-
0.3333333333333333`] + 1.8354931168698165`
φ[0.3333333333333333`] + 0.08447967838727842` φ[1.`] == 2,
0.23654421820322308` φ[-1.`] + 0.0848061137267902` φ[-
0.3333333333333333`] - 0.08126188437583878`
φ[0.3333333333333333`] + 1.6639455570710042` φ[1.`] == 2}, {
φ[-1.`], φ[-
0.3333333333333333`], φ[0.3333333333333333`], φ[1.`]}]
{{φ[-1.] -> 1.07152, φ[-0.333333] -> 1.07007, φ[0.333333] -
> 1.07125, φ[1.] -> 1.04741}}

```

### კოშის ტიპის ინტეგრალის გამოსათვლელი პროგრამა

```

n=5
L:
Do[τσ = -1 + 2(σ-1)/n, {σ, 1, n}]
τn+1 = 1
5
L: Null

```

```

1
x=1
a=-1
b=1
z=1+0.005I
t0=1
v=n
1
-1
1
1+0.005 I
1
5
φ[t_]:=Re[t]+Im[t]
L: 1[v_,0_,t_]:= (t-τv+1) / (τv-τv+1)
      1[v_,1_,t_]:= (t-τv) / (τv+1-τv)
      L[v_,φ_,t_]:= 1[v0+1,φ[τ0]+1][v1+1,φ[τ1]+1]
χ[z_,a_,b_]:=√(z-a)(b-z) ∫ab φ[t] χ[t,a,b] / ((t-z)) dt
F[φ_,z_,a_,b_]:= (1/(π*I χ[z,a,b]))
F[φ,z,a,b]
-3.60173+3.46915 I
L:
Do[p[σ,k,x,z]:= (1/(π*I)) *
      ∫τστσ+1 (t-x) χ[t,a,b] 1[σ,k,t] / ((t-z)) dt
, {σ,1,n}, {k,0,1}]
N[(1/(π*I χ[z,a,b])) ∫b (χ[t,a,b] / (t-z)) dt
(1/χ[z,a,b]) (+ ∑σ=1n-2 ∑k=01 p[σ,k,x,z] (φ[τσ+k] - φ[t0]) / (τσ+k - z)
p[v,0,1,z] (φ[τv]-L[v,φ,t0]) / (τv-z) +
p[v,1,1,z] (φ[τv+1]-L[v,φ,t0]) / (τv+1-z) +
p[v-1,1,1,z] (φ[τv]-L[v,φ,t0]) / (τv-z) +
p[v-1,0,1,z] (φ[τv-1]-φ[t0]) / (τv-1-z))
L:Null
-3.8148+3.66829 I
x=-1
a=-1
b=1
z=-1+0.005I
t0=-1
v=1
-1
-1
1

```

$$\begin{aligned}
& -1+0.005 \text{ I} \\
& -1 \\
& 1 \\
& -1-0.005 \text{ I} \\
& -1-0.005 \text{ I} \\
& N[(1/(\pi \cdot I \chi[z, a, b])) \int_a^b (\chi[t, a, b] / (t - z)) dt] + \\
& (1/\chi[z, a, b]) \left( \sum_{\sigma=3}^n \sum_{k=0}^1 p[\sigma, k, x, z] (\varphi[\tau_{\sigma+k}] - \varphi[t_0]) / (\tau_{\sigma+k} - z) \right. \\
& p[v, 0, -1, z] (\varphi[\tau_v] - L[v, \varphi, t_0]) / (\tau_v - z) + \\
& \quad p[v, 1, -1, z] (\varphi[\tau_{v+1}] - L[v, \varphi, t_0]) / (\tau_{v+1} - z) + \\
& \quad p[v+1, 0, -1, z] (\varphi[\tau_{v+1}] - L[v, \varphi, t_0]) / (\tau_{v+1} - z) + \\
& \quad \left. p[v+1, 1, -1, z] (\varphi[\tau_{v+2}] - \varphi[t_0]) / (\tau_{v+2} - z) \right) \\
& 3.8148 + 3.66829 \text{ I}
\end{aligned}$$

სადისერტაციო ნაშრომის დანართში მოყვანილი პროგრამული უზრუნველყოფა მოიაზრება როგორც ერთიანი გამოთვლითი პაკეტი. განსხვავებულ ამოცანებზე ჩატარებულმა მრავალჯერადმა ექსპერიმენტმა ცხადყო, რომ აღნიშნული პროგრამული პაკეტი ხასიათდება უნივერსალურობით და საკმარისად მარტივია გამოსაყენებლად. მისი საშუალებით შესაძლოა მიღებული იქნას მართლზომიერი შედეგები, როგორც ბზარებით შესუსტებული სხვადასხვა ტიპისა და დანიშნულების დეტალებისა და კონსტრუქციების გაანგარიშების შემთხვევაში, ასევე საინჟინრო მექანიკის სხვა მნიშვნელოვანი პრაქტიკული ამოცანების რიცხვითი ამოხსნისას.



## კვლევის ეტაპები და ძირითადი შედეგები

### ნაშრომში ეტაპობრივად განხილული და შესწავლილია შემდეგი საკითხები:

- ძაბვების განაწილების განსაზღვრა კონტაქტის ზედაპირზე სხეულების სხვადასხვა დრეკადი მახასიათებლების შემთხვევაში.
- ძაბვების გამოთვლა შიგა და გარე ცილინდრულ ზედაპირებზე კონკრეტული კონფიგურაციის ბზარების გასწვრივ.
- წრფივი ჭრილის მქონე დრეკადი სიბრტყის დამაბულ-დეფორმირებადი მდგომარეობის განსაზღვრა
- თერმოიზოლირებული ბზარების, დრეკად სხეულზე გრძივი გადაადგილების მქონე ბზარის, უსასრულო ფირფიტაზე მოცემული ორი თანაბარი სიგრძის სიმეტრიულად განლაგებული ბზარის, ნახევარსიბრტყის საზღვრის პერპენდიკულარული ბზარის, კოლინიალური ბზარების შემთხვევების განხილვა.
- ინტენსივობის კოეფიციენტების გამოთვლა ბზარების ამოცანებში.
- რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმების დამუშავება და სათვლელი პროგრამული პაკეტის შექმნა ბზარებიანი საკონტაქტო ამოცანისათვისა და სხვადასხვა კონფიგურაციის ბზარების მქონე კონსტრუქციების გაანგარიშებისათვის.

### მიღებული ძირითადი შედეგები:

- აიგო ახალი, მარტივად რეალიზებადი კვადრატურული ფორმულები შესაბამისი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისთვის.
- დამუშავდა რიცხვითი ალგორითმები როგორც ბზარებით გართულებული საკონტაქტო ამოცანისათვის, ასევე სხვადასხვა ბზარებიანი სამშენებლო კონსტრუქციებისა და დეტალების გაანგარიშებისათვის.
- დამუშავებული ალგორითმების საფუძველზე შეიქმნა გამოთვლითი პაკეტი საინჟინრო-პრაქტიკული გამოთვლებისათვის მექანიკის მნიშვნელოვან ამოცანებში.

გამოყენებული ლიტერატურა:

1. Штаерман И.Я., Контактная задача теории упругости, М.-Л.: Гостехиздат, 1949.
2. Галин Л.А., Контактные задачи теории упругости. — М.: Гостехиздат, 1953.
3. Мусхелишвили Н.И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, М.: Наука, 1966.
4. Puttock M., Thwaite E., Elastic Compression of Spheres and Cylinders at Point and Line Contact, 1969.
5. Александров В.М., Ромалис Б.Л., Контактные задачи в машиностроении, М.: Машиностр., 1986.
6. Atanackovic T., Guran A. Theory of Elasticity for Scientists and Engineers, 1999.
7. Александров В.М., Аналитические методы в контактных задачах теории упругости, Физматлит, 2004.
8. Морозов Е.М., Зернин М.В., Контактные задачи механики разрушения, 2-е изд., М.: Либроком, 2012.
9. McEvily Arthur J., Metal Failures: Mechanisms, Analysis, Prevention, 2nd Edition, 2013
10. Sanikidze Z. On some questions of an approximate solution of a contact problem of the theory of elasticity, Reports of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, 9, 1-3, 1994.
11. Sanikidze Z. Numerical solution of one problem of interaction of two elastic cylinders, Reports of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, 10, 3, 1995.
12. Sanikidze Z. One approximate solution of one first kind integral equation by regularization method, Bull. Georgian Acad. Sci., 153, 1, 1996.
13. Sanikidze Z. On approximate representation of one integral operator and its application, Bull. Georgian Acad. Sci., 153, 3, 1996.

14. Колосов Г.В. Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости. Тип. К. Маттисева, Юрьев, 1909.
15. Griffith A. A. The phenomenon of rupture and flow in solids, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., 221, 1920.
16. Griffith A. A. The theory of rupture, proc. First Int. Congress of Applied. Mech., Delft, 1924.
17. England A.H. A note on cracks under longitudinal shear, Matematika, 1963.
18. Irwin G.R., Wells A.A. A continuum mechanics view of crack propagation, Metallurg. Revs, 1965.
19. Orowan E.O. Fundamentals of brittle behavior of metals, Fatigue & Fracture of Metals, Wiley, NY, 1952.
20. Морозов. Н.Ф. Математические вопросы теории трещин, М.:Наука, 1984.
21. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами, Киев: Наукова думка, 1981.
22. Smith. E. The extension of two parallel non-coplanar cracks by an applied stress, Int. J. Eng., Sci., 9, 1971.
23. Ohashi M., Ichikawa M., Yokobori T. The extension of two parallel elastic cracks not perpendicular each other, Repts., Res. Inst. Strength Mater, Tohoku Univ., 1,2,1965.
24. Sneddon I. N. Lowengrub M., Crack problems in the classical theory of elasticity, Wiley, NY,1969.
25. Саникидзе Д.Г. О численном решении граничных задач методом аппроксимации сингулярных интегралов, Дифференц. уравнения, 29, 9, 1993.
26. Саникидзе Д.Г. К вопросу обоснования метода граничных интегральных уравнений в случае областей с негладкими границами, Дифференц. уравнения, 32,9, 1996.

27. Саникидзе Д.Г. О некоторых схемах аппроксимации сингулярных интегралов с ядром Коши и некоторых их применениях, Труды XII международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», Харьков-Херсон, 2005.
28. Kublashvili M. Approximate calculation of Cauchy type integrals in opened contour case using the corrective parameter, proc. International Conference "Internet-Education- Science", Vinnytsa, Ukraine, 2010.
29. Kublashvili M., Sanikidze J. On some questions of accuracy of quadrature formulas for singular integral equation with the Cauchy kernel, Proceedings of the Ninth international scientific-practical conference, Vinnytsia, Ukraine, 2014.
30. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения, М.:Наука, 1968.
31. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях, М.:Наука, 1985.
32. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния, М.: Мир, 1987.
33. Екобори Т. Физика и механика разрушения и прочности твердых тел, Металлургия, М.,1971.
34. Krenk S. Polynomial Solutions to Singular Integral Equations, Riso National Laboratory, DK-4000 Rosialde, Denmark, 1981.
35. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракций., Киев:Наукова думка, 1984.
36. Бережницкий Л.Т. О предельном равновесии пластины, ослабленной системой трещин, расположенных вдоль прямой под углом в направлении растяжения, В кн.: Концентрация напряжений, 1, Киев: Наукова думка, 1965.
37. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами, Киев: Наукова думка, 1968.
38. Erdogan F.E., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations.-In: Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973, 368-425.

39. Партон В.З., Морозов Е. М. Механика упруго-пластического разрушения, М.:Наука,1974.
40. Кублашвили М. Д. О численном решении некоторых задач бесконечны пластин с трещинами, Сб. трудов международного симпозиума, посвященного проблемемам тонкостенных пространственных систем, Тбилиси, 2001.
41. Кублашвили М. Д. О численном решении задачи термоизолированной трещины, Проблемы прикладной механики, 4(9) 2002.
42. Kublashvuli M., Tsikarishvili M., Magradze T., Babilodze K. Determination of Crack-Resistance Degree of Constructions, Scientific-Technical Journal "Building", 2006.
43. Kublashvili M.D., Kublashvili M.M. Numerical solution of singular integral equation with opened Contour in the nonzero index case, Scientific-technical journal "Building", 3 (18), 2010. 19-27.
44. Kublashvili M.D., Kublashvili M.M. On numerical solution of the first kind singular integral equation, Proceedings of the International Scientific Conference "Information and Computer Technologies, Modelling, Control", GTU, Tbilisi, 2011.
45. Kublashvili M.D., Filfani N., Kapanadze Z., Kublashvili M.M. Numerical Solution of the Crack Problem on the Circular Disc, Scientific-Technical Journal "Building", 4(27), 2012.
46. Абрамов Б.Д., Матвеев А.Ф. О редукции краевых задач теории переноса нейтронов к сингулярным интегральным уравнениям.- Препринт ИТЭФ.- М.- 1987.-№46.-32с.
47. Бабкин В.И., Белоцерковский С.М., Гуляев В.В., Дворак А.В. Струи и несущие поверхности. Моделирование на ЭВМ. М.: Наука, 1989, 208с.
48. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью.-М.:Наука. 1978. 352с.
49. Белоцерковский С.М., Ништ М.И., Пономарев А.Т., Рысев О.В. Исследование парашютов и дельтопланов на ЭВМ.-М.: Машиностроение, 1987.-240с.

50. Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. М.:Наука. 1988, 232с.
51. Белоцерковский С.М. Подковообразный вихрь при неустановившемся движении. // Изв. АН СССР, ПММ.-1955.-т. XIX, вып. 2.
52. Белоцерковский С.М. Пространственное неустановившееся движение несущей поверхности. // Изв. АН СССР, ПММ.-1955.-т. XIX, вып.4.
53. Белоцерковский С.М. Исследования по аэродинамике современных несущих поверхностей. Дис. Д-ра техн. наук.-М.: 1955.
54. Белоцерковский С.М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа.- М.: Наука, 1965.-244с.
55. Белоцерковский С.М. Расчет обтекания крыльев произвольной формы в плане в широком диапазоне углов атаки., Изв. АН СССР, МЖГ.-1968.-№4.
56. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К. Аэродинамические производные летательного аппарата и крыла при дозвуковых скоростях.-М.: Наука, 1975.-424с.
57. Белоцерковский О.М., Белоцерковский С.М., Давыдов Ю.М., Ништ М.И. Моделирование отрывных течений на ЭВМ.-М.: 1984.-122 с.
58. Панасюк В.В., Бережницкий Л.Т., Ковчик С.Е. О развитии произвольно ориентированной прямолинейной трещины при растяжении пластины.-ПМ, 1965, 1, 2, 48-55.
59. Банцури Р.Д. Решение первой основной задачи и одной смешанной задачи теории упругости для бесконечной полосы, разрезанной вдоль полупрямой.- Сообщ.АН ГрузССР, 1965, 37, 2, 275-281.
60. Банцури Р.Д. Решение первой основной задачи теории упругости для клина, имеющего конечный разрез. –ДАН СССР, 1966, 167, 6, 1256-1259.
61. Баренблатт Г. И, Черепанов Г.П. О хрупких трещинах прольного сдвига,- ПММ, 1961,25,6,1110-1119.

62. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О влиянии границ тела на развитие трещин хрупкого разрушения.-Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, 3, 79-88. Замечание к этой работе.-Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение, 1962, 1, 153.
63. Черепанов Г.П. Одна задача о вдавливании индентора с образованием трещин.-ПММ, 1963, 27,1, 150-153.
64. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. // << Наука >>, М., 1974
65. Белокопытова Л.В., Фильштинский Л.А. Двумерная краевая задача электроупругости для пьезоэлектрической среды с разрезами / / ПММ. 1979, 43, №1. с. 138-143.
66. Бойков И.В. Пассивные и адаптивные алгоритмы приближенного вычисления сингулярных интегралов ч.1-2., Изд-во Пенз. гос.тех.ун-та,Пенза, 1995.
67. Браун У., Сроули Дж. Испытания высокопрочных металлических материалов на вязкость разрушения при плоской деформации Мир, М., 1972
68. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.- Казань: Казан. ун-т.-1980.-232 с.
69. Гандель Ю.В., Лифанов И.К., Матвеев А.Ф. Численное решение смешанных краевых задач математической физики, сводящихся к сингулярному интегральному уравнению на системе отрезков. Препринт ИТЕФ, №174. М. 1984. 55с.
70. Гандель Ю.В., Лифанов И.К. О приложении идей метода дискретных вихрей к задачам электродинамики. Научно-методические материалы по численным методам. Москва, ВВИА им. Н.Е. Жуковского. 1985, с.3-13.
71. Гандель Ю.В., Лифанов И.К. О решении сингулярных интегральных уравнений задачи Робен. ТФФА и их приложения, Харьков, Вища школа. 1986, вып 46. с. 18-21.

72. Лифанов И.К. Полонский Я.Е. Обоснование численного метода дискретных вихрей решения сингулярных интегральных уравнений. // ПММ, 1975, т.39, №4, с.742-746.
73. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.// М: ТОО “ Янус”, 1995-504с.
74. Лифанов И.К. О сингулярных интегральных уравнениях с одномерными и кратными интегралами типа Коши. ДАН СССР, 1978, 239, №2, с. 265-268.
75. Лифанов И.К. О методе дискретных вихрей, - Прикл. Мат. И мех. 1979, 43, №1, с. 184-188.
76. Гахов Ф.Д. Краевые задачи.-М: Издательство Физико-математической литературы, 1963, 639 с.
77. Голубев В.В. Лекции по теории крыла.-М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.-480 с.
78. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики.-Москва: Изд-во МГУ, 1987.-168 с.
79. Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Численный анализ дифракции радиоволн- М.:Радио и связь, 1982.-184 с.
80. Дудучава Р.В., Шаргородский Е.М. О некоторых сингулярных интегральных операторах с неподвижными особенностями. // Тр. Тбилисского математического института им. А.М.Размадзе. Т.93, Граничные задачи теории функций компресной переменной и особые интегральные уравнения. 1, 1990, с.1-32.
81. Душков П.Н. О прямых методах решения сингулярных интегральных уравнений первого рода-Изв. Вузов. Мат., 1973, №7; с. 12-24.
82. Иванов В.В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. //Киев:Наукова думка, 1968, 286 с.
83. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости.// М.<<Наука >>, 1973, 303 с.



84. Канторович Л.В. Акилов Г.П. Функциональный анализ. // М.:Наука. 1977, 744с.
85. Корнейчук А.А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов. // В кн.: "Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурных формул". -М.:Наука, 1964.-с. 64-74.
86. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов.// М.:Наука, 1967, 500 с.
87. Кублашвили М. Д. К вопросу устойчивости некоторых квадратурных формул для сингулярных интегралов. // Всесоюзный симпозиум. "Метод дискретных особенностей в задачах математической физики". Тезисы докладов. Харьков-1985г. с. 55.
88. Кублашвили М.Д. Замечание к одной схеме численного решения сингулярных интегральных уравнений с разомкнутыми контурами интегрирования.// Тр. ИВМ АН ГССР, Т.ХХV:1, 1985, 67-73 с.
89. Кублашвили М. Д. О равномерных оценках аппроксимации сингулярных интегралов при разомкнутых контурах кусочно-интерполяционными функциями.// Грузинский политехнический институт им В И Ленина. Научные труды. Математический анализ. Тбилиси. 1989 г. с. 98-106.
90. მ. კუბლაშვილი. პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნის შესახებ. // პროფესორ-მასწავლებელთა და სტუდენტთა პირველი რესპუბლიკური სამეცნიერო კონფერენცია. აბასთუმანი, 1995 წ, 18-20 მაისი, გვ. 29.
91. მ. კუბლაშვილი. ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის შესახებ. // საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია "მართვის ავტომატიზირებული სისტემები". სამეცნიერო შრომები ქ. თბილისი, 27-28 სექტემბერი, 1996 წ., გვ. 28-31
92. Кублашвили М. Д. Приближенное вычисление сингулярных интегралов с кусочно-дифференцируемыми плотностями. // Сборник трудов международного симпозиума посвященного проблемам тонкостенных пространственных систем. Тбилиси. 4-5. 07. 2001 г. с.125-131.

93. Кублашвили М. Д. О численном решении некоторых задач бесконечны пластин с трещинами // Сборник трудов международного симпозиума посвященного проблемам тонкостенных пространственных систем. Тбилиси. 4-5. 07. 2001 г. с.132-136.
94. Кублашвили М. Д. О численном решении задачи термоизолированной трещины. // Международный научный журнал. “Проблемы прикладной механики”. №4 (9), 2002 г. с. 89-91.
95. მ. კუბლაშვილი. კომის ტიპის ინტეგრალების მიახლოებითი გამოთვლა გახსნილი კონტურების შემთხვევაში მაკორექტირებელი პარამეტრის საშუალებით და მათი ზოგიერთი გამოყენება. // მეცნიერება და ტექნოლოგიები, თბილისი. #10-12, 2002. გვ. 54-58.
96. მ. კუბლაშვილი. ჭრილების მქონე ძელის გრების ამოცანის რიცხვითი ამოხსნების შესახებ. // სტუ-ს 80 წლისთავისადმი მიძღვნილი პროფესორ-მასწავლებელთა ღია საიუბილეო სამეცნიერო-ტექნიკური კონფერენციის მოხსენებათა თეზისები. თბილისი, 2002, გვ. 20.
97. მ. კუბლაშვილი. პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნა დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდით გახსნილი კონტურებით. // სტუ-ს 80 წლისთავისადმი მიძღვნილი პროფესორ-მასწავლებელთა ღია საიუბილეო სამეცნიერო-ტექნიკური კონფერენციის მოხსენებათა თეზისები. თბილისი, 2002, გვ. 20.
98. მ. კუბლაშვილი. კომის ტიპის ინტეგრალების აპროქსიმაცია გახსნილი კონტურების შემთხვევაში და მათი ზოგიერთი გამოყენება. // სტუ-ს 80 წლისთავისადმი მიძღვნილი პროფესორ-მასწავლებელთა ღია საიუბილეო სამეცნიერო-ტექნიკური კონფერენციის მოხსენებათა თეზისები. თბილისი, 2002, გვ. 214.
99. Кублашвили М.Д. Численное решение задачи тонкого профиля с помощью сингулярного интегрального уравнения. //Международный научный журнал. “ Проблемы прикладной механики”. №2(11) / 2003 г. с. 119-122.
- 100.Кублашвили М.Д. О Численном решении одного класса сингулярных интегральных уравнений. // Международный научный журнал . GEN , No. 1, 2003, p. 38-40

101. Кублашвили М.Д. Численное решение задачи трещины продольного сдвига в упругом теле // Международный научный журнал . GEN , No. 1,2003. p. 41-43
102. Кублашвили М.Д. О построении вычислительной схемы повышенного порядка точности метода дискретных вихрей в случае разомкнутых контуров // Международный научный журнал . GEN , No. 1,2003. p. 44-46
103. Купрадзе В.Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. М.: Гостехиздат, 1950.
104. Лаврентьев М.А. О построении потока, обтекающего дугу заданной формы // Тр.цаги, в.118, 1932, с.1-56. ГИТТЛ, 1950.-280 с.
105. Макклиток Ф., Аргон А. деформация и разрушение материалов. // Мир, М., 1970.
106. Михлин С.Г. Интегральные уравнения. // М.-Л., Огиз, Гос., издат., Тех.-теоретич. лит., 1949, 378 с.
107. Мусаев Б.И. О приближенном решении сингулярных уравнений.-Препринт / Ин-т физики Ан АзССР.-Баку, 1986.-№ 17 , 48 с.
108. Мусаев Б.И. К приближенному решению сингулярных интегральных уравнений // В сб.: Сингулярные интегральные операторы, Азерб. гос. ун-т, Баку, 1986.- с.33-61.
109. Мусаев Б.И. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений при отрицательном индексе методом механических квадратур. Докл. АН СССР. 1988. т. 298, №2 с. 286-290.
110. Назарчук З.Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических труктурах.-Киев: Изд-во Наукова Думка. 1989.-256с.
111. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. <<Наукова думка>> Киев, 1968.
112. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. // Киев, Наукова думка, 1976, 443 с.

113. Партон В.З. Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости.// М: Наука, 1977, 312 с.
114. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. - М.:Наука, 1981.- 688 с.
115. Полонский Я. Е. Обоснование численного метода “Дискретных вихрей” решения сингулярных интегральных уравнений. Прикл. матем. и мех., 1975, 39, №4, с. 742-746.
116. Пыхтеев Г. Н. О вычислении некоторых сингулярных интегралов с ядром тира Коши. Прикл. матем. и мех., 1959, 23, вып. 6. с. 1078-1082.
117. Пыхтеев Г. Н. О вычислении некоторых интегралов с регулярным с ядром тира Коши. Прикл. матем. и мех. , 1960, 24, вып. 6. с. 1114-1122.
118. Пыхтеев Г. Н. О квадратурных формулах для интегралов типа Коши по прямолинейному разомкнутому контуру и методах оценки их погрешности. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1969, № 5, с. 55-63.
119. Пыхтеев Г. Н. О построении квадратурных формул для интегралов типа Коши по прямолинейному разомкнутому контуру. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1970, № 2, с. 61-69.
120. Саникидзе Д.Г. О приближенном вычислении криволинейных сингулярных интегралов.-Аннотации Докл. семинара Ин-та прикл. матем. Тбилисского гос. ун-та, 3, 1970, с. 15-17.
121. Саникидзе Д.Г. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений в случае замкнутых контуров интегрирования. – Аннотации докл. семинара И-та прикл. матем. Тбилисского гос. ун-та, 5, 1971, с.31-35.
122. Саникидзе Д.Г. О порядке приближения сингулярных интегралов для одного класса плотностей суммами усложненного типа.-Сооб. АН ГССР, 68, №3, 1972, с.533-536.
123. Саникидзе Д.Г., Мирианашвили М.Г. О применении метода дискретных вихрей к численному решению сингулярных интегральных уравнений с

- гладкими замкнутыми контурами, // Сб. научн. Тр. Прикладная матем. и матем. моделирование, ВВА им. Н.Е. Жуковского, 1997, с. 178-180.
124. Саникидзе Д.Г. О методе дискретных вихрей повышенной точности для численного решения одного класса сингулярных интегральных уравнений. Дифф.уравнения. М.34, №9, 1998.
125. Саникидзе Д.Г. О некоторых оценках в модифицированной схеме метода дискретных вихрей, // Сб. VII Международного симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах матем. физ." Украина, 1999, 118-120.
126. Саникидзе Д.Г., Хубежты Ш.С. К вопросу применения внешних узлов в модифицированных схемах дискретных вихрей. // Труды IX Международного симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах математической Физики." (МДОЗМФ-2000) Орел. 2000. с. 395-398.
127. Саникидзе Д.Г., Нинидзе К.Р. Метод свободных параметров в приближенном вычислении интегралов типа Коши. // Труды X Международного симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах матем. физ." (МДОЗМФ-2001). с. 299-302.
128. Сарен В.Э. О сходимости метода дискретных вихрей. Сиб. Мат. Ж., 1978, 19, №2, с. 385-395.
129. Седов Л. И. Механика сплошной среды // 2. << Наука >>, М., 1973.
130. Си (Sih G. C.) О сингулярном характере температурных напряжений у вершины трещины. // Прикладная механика (перевод Трудов Американского общества инженеров-механиков), 1962, 296 E, 3, с.157-159.
131. Старк И. Обобщенная квадратурная формула для интегралов Коши. // Ракетная техника и космонавтика. 1971, 9. с.244-245.
132. Шешко М.А. К численному решению сингулярных интегральных уравнений первого рода. Дифф. Уравнения, 1977, 13, №8, с. 1493-1502.
133. Bansturi R. One one mixed type bounday value problem of the theory of analitic functions. Proceedings of A. Razmadze matematical institute. Vol. 121, 3-9, 1999.

134. შილაკაძე მ. სამშენებლო მანქანების საიმედოობის საფუძვლები, თბილისი, სტუ, 1998.
135. Dang Dac Q., Nurrie D. H. A finite element method for the solution of singular integral equations, Comput. And Math. 1978, 4, №3 pp. 219-224.
136. Erdogan F.E., Gupta G.D. On the numerical solution of singular integral equations. // Quart. Appl. Math. 1972, V29, p. 525-534.
137. Prössdorf S., Schmidt G. A Finite Element Collocation Method for Singular Integral Equations. Berlin Eingegangen am 16.10.1980. p. 33-60.
138. Theocaris P.S., Ioakimidis N.I. Numerical integration methods for the solution of singular integral equations. // Quarterly of Applied Mathematics, Vol.35, p. 173-183, 1977.