

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

ზურაბ კაპანაძე

ბზარების ამოცანების რიცხვითი ამოხსნები სინგულარული  
ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებით

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სადოქტორო პროგრამა „მშენებლობა“. შიფრი 0406

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

თბილისი, 0175, საქართველო

2015 წელი

საავტორო უფლება © 2015- წელი, ზურაბ კაპანაძე

სამშენებლო ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემოთ ხელისმომწერი ვადასტურებთ, რომ გავაცანით ზურაბ კაპანაძის მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: „ზარების ამოცანების რიცხვითი ამოხსნები სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებით“ და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

თარიღი

ხელმძღვანელი: პროფესორი

მურმან კუბლაშვილი

რეცენზენტი: პროფესორი

ტარიელ კვიციანი

რეცენზენტი: პროფესორი

სეით ბლიაძე

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

2015

ავტორი: ზურაბ კაპანაძე

დასახელება: „ზარების ამოცანების რიცხვითი ამოხსნები  
სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების  
გამოყენებით“

ფაკულტეტი : სამშენებლო ფაკულტეტი

აკადემიური ხარისხი: დოქტორი

სხდომა ჩატარდა: თარიღი

ინდივიდუალური პიროვნებების ან ინსტიტუტების მიერ  
ზემომოყვანილი დასახელების დისერტაციის გაცნობის მიზნით მოთხოვნის  
შემთხვევაში მისი არაკომერციული მიზნებით კოპირებისა და გავრცელების  
უფლება მინიჭებული აქვს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტს.

---

ავტორის ხელმოწერა

ავტორი ინარჩუნებს დანარჩენ საგამომცემლო უფლებებს და არც მთლიანი ნაშრომის და არც მისი ცალკეული კომპონენტების გადაბეჭდვა ან სხვა რაიმე მეთოდით რეპროდუქცია დაუშვებელია ავტორის წერილობითი ნებართვის გარეშე.

ავტორი ირწმუნება, რომ ნაშრომში გამოყენებული საავტორო უფლებებით დაცული მასალებზე მიღებულია შესაბამისი ნებართვა (გარდა იმ მცირე ზომის ციტატებისა, რომლებიც მოითხოვენ მხოლოდ სპეციფიურ მიმართებას ლიტერატურის ციტირებაში, როგორც ეს მიღებულია სამეცნიერო ნაშრომების შესრულებისას) და ყველა მათგანზე იღებს პასუხისმგებლობას.

## რეზიუმე

### ბზარების ამოცანების რიცხვითი ამოხსნები სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებით

სამშენებლო მექანიკის მრავალი პრაქტიკული ტიპის ამოცანის ზუსტი ამოხსნის პოვნა მიიყვანება ისეთი ინტეგრალების დათვლაზე, ან ინტეგრალური განტოლებების ამოხსნაზე, რომლებიც ძალიან რთულია, ზოგიერთ შემთხვევებში შეუძლებელიც. ასეთ შემთხვევებში პრობლემის გადასაწყვეტად აუცილებელი ხდება რიცხვითი მეთოდების გამოყენება. თავის მხრივ, რიცხვითი ამონახსნების ალგორითმების დამუშავება და მათი კომპიუტერული რეალიზაცია გარკვეულ სირთულეებთან არის დაკავშირებული და მოიცავს რამდენიმე მნიშვნელოვან ეტაპს. პირველ რიგში, ამა თუ იმ ამოცანის რიცხვითი ამოხსნისათვის უნდა დამუშავდეს შესაბამისი მათემატიკური ალგორითმი. ბუნებრივია, ასეთი ალგორითმების დამუშავების დროს გათვალისწინებული უნდა იქნეს ამოსახსნელი ამოცანის თავისებურებანი: კერძოდ, ალგორითმი სრულად უნდა აღწერდეს ამოცანის ბუნებას და რაც შეიძლება ზუსტად გადმოსცემდეს მის შინაარსს. მეორე მხრივ, ალგორითმი უნდა იყოს რაც შეიძლება მაღალი სიზუსტის და გამოთვლითი პროცესების მიმართ მდგრადი.

სადისერტაციო ნაშრომი ეხება სწორედ ასეთი პრობლემების შესწავლას სამშენებლო მექანიკის ზოგიერთი ამოცანისათვის. კერძოდ, იგი მოიცავს ბზარების ამოცანებისათვის მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმების დამუშავებას და მათ კომპიუტერულ რეალიზაციას.

ნაშრომში განხილულია სამშენებლო მექანიკის პრაქტიკული ტიპის ამოცანებისთვის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდის გამოყენებით მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმების აგება და მათი კომპიუტერული რეალიზაცია.

წარმოდგენილ ნაშრომში დამუშავებულია თეორია, რომელიც საშუალებას გვაძლევს დავთვალოთ ძაბვების მნიშვნელობები ბზარის ბოლოების რაგინდ მცირე მიდამოში, რითაც საშუალება გვქმნება მოვახდინოთ ძაბვების ისეთი გადანაწილება, რომ თავიდან ავიცილოთ შენობის შემდგომი რღვევა. თუ ბზარის

შემდგომი გავრცელება გარდაუვალია, მაშინ დისერტაციაში დამუშავებული თეორიით შესაძლებელია პროგნოზირება გავუკეთოთ ბზარის მოსალოდნელი გავრცელების მიმართულებას.

გამოკვლევებმა აჩვენა, რომ სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებით, სხვა ცნობილი მეთოდებისაგან განსხვავებით, ზუსტად აღიწერება წარმოშობილი ამოცანების რთული ბუნება (განსაკუთრებით ბზარების ამოცანებში). ამიტომ, დისერტაციაში დამუშავებული ასეთი განტოლებებისათვის მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმების აგება წარმოადგენს აქტუალურ თემას.

ბზარების ამოცანებში ხშირად წირის ზუსტი პარამეტრული განტოლებით მოცემა რთულია (ხშირად შეუძლებელიც) და ცნობილია მხოლოდ ამ წირის გრაფიკული სახე. ასეთ შემთხვევებში, როგორც ექსპერიმენტმა აჩვენა, ეფექტურია სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდი.

ასეთი ტიპის ამოცანების რიცხვითი ამოხსნებისათვის, როცა ბზარს აქვს ნებისმიერი გლუვი ან უბან-უბან გლუვი წირის ფორმა, აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის სქემები და შექმნილია შესაბამისი კომპიუტერული პროგრამები.

სადოქტორო ნაშრომის ძირითადი მეცნიერული სიახლე მდგომარეობს შემდეგში:

სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებით აგებულია და კომპიუტერული პროგრამით უზრუნველყოფილია მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები სამშენებლო მექანიკის ზოგიერთი ამოცანისათვის.

## Abstract

# NUMERICAL SOLUTIONS OF CRACKS TASKS USING THE SINGULAR INTEGRATED EQUATIONS

The founding of exact solution of number of practical problems of structural mechanics is reduced to computation of such integrals, or to solution of integral equations that is rather complex and in some cases impossible. In such cases for solution of problem is necessary application of numerical methods. In turns, the development of algorithms numerical solutions and their computational realization is connected with certain complexity and includes several significant stages. Firstly for the numerical solution of certain problem would be developed according mathematical algorithm. Naturally at development of such algorithm would be provided the solved tasks features: in particular. The algorithm fully will describes the problem's nature and explain as exactly as its content. On the other hand would be as possible exact and stable regarding to computational process.

The dissertational work is concerned exactly to study of such problems for some tasks of structural mechanics. In particular, it includes development numerical solution algorithms for higher order of precision crack tasks and their computational realization.

In the presented work has been considered application of method of singular integral equations for practical problems of structural mechanics construction of high order precision numerical solutions algorithms and computational realization.

In the presented work is developed theory that gives the possibility to calculate the stresses values on arbitrary small neighborhood of cracks ends that gives the possibility to perform such distribution of stresses that gives the possibility to avoid further destruction of building. If the further cracks propagation is unavoidable, then building developed in dissertation theory is possible to forecast the cracks expected propagation direction.

As it is shown due investigations by singular integral equations, in comparison with other known methods, exactly are described complex nature of arisen problem (especially in crack tasks). Thus the developed in dissertation development construction of such equations high order precision numerical solution algorithms represents the actual theme.

In the crack tasks often is difficult to describe the straight lines by exact parametric equations (often it is impossible) and is known only graphical shape of this straight line. In such cases as it is indicated by experiments, is effective the method of singular integral equations.

For such type of numerical solutions of task's, when crack has arbitrary smooth or site-by-site smooth straight line shape, are constructed high order precision schemes and are developed according computer programs.

The scientific novelty of dissertational work is presented application of singular integral equations constructed and provided by computer program high order precision numerical solution algorithms for some problems of structural mechanics.

## შინაარსი

შესავალი-----1

**I თავი. წონიანი სინგულარული ინტეგრალების მიახლოებითი გამოთვლის ალგორითმების აგება**

**1.1. ხარისხობრივი ტიპის განსაკუთრებულობების მქონე სიმკვრივიანი სინგულარული ინტეგრალების მიახლოებითი გამოთვლის შესახებ -----16**

**1.2. სინგულარული ინტეგრალების მიახლოებითი გამოთვლა ს. ბელოცერკოვსკი-ლიფანოვის ალგორითმით-----17**

**1.3. დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდის**



მოდულიზებული მომატებული რიგის სიზუსტის გამოთვლითი სქემის აგების შესახებ-----	20
<b>1.4.</b> დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდის მოდიფიცირებული მომატებული რიგის სიზუსტის გამოთვლითი სქემის აგების შესახებ გახსნილი კონტურების შემთხვევაში-----	22
<b>1.5.</b> კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის ჩებიშევის ტიპის კვადრატურული ფორმულებისათვის მომატებული რიგის სიზუსტის შესახებ-----	29
<b>1.6.</b> კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის მომატებული რიგის სიზუსტის შესახებ კვადრატურული ფორმულებისათვის----- -----	33
<b>1.7.</b> კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის სიზუსტით გაუსის ტიპის მახლობელი კვადრატურული ფორმულების შესახებ-----	36
<b>1.8.</b> სანიკიმე-კუბლაშვილის კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის კვადრატურული ფორმულების მომატებული რიგის სიზუსტის შესახებ-----	42
<b>1.9.</b> მაღალი რიგის გამოთვლითი სქემები წონიანი სინგულარული ინტეგრალების მიახლოებითი გამოთვლისათვის-----	50
<b>II თავი. სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნები</b>	
<b>2.1.</b> პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმის აგება დისკრეტულ განსაკუთრებულებათა მეთოდის გამოყენებით-----	58
<b>2.2.</b> პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის შესახებ გახსნილი კონტურების შემთხვევები-----	60

2.3. პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამონახსნის შესახებ, გახსნილი კონტურებით, არანულოვანი ინდექსის შემთხვევაში-----	66
2.4. სრული ინტეგრალური განტოლების შემთხვევა-----	71
2.5. სრული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამონახსნის შესახებ მარკოვის ტიპის კვადრატურული ფორმულებით-----	78

### III თავი

3.1. დირიხლეს ამოცანის რიცხვითი ამონახსნა უცნობი გახსნილი სასაზღვრო წირის შემთხვევაში-----	79
3.2. დირიხლეს სახეშეცვლილი ამოცანის რიცხვითი ამონახსნის შესახებ გახსნილი კონტურების შემთხვევაში-----	90
3.3. დირიხლეს ამოცანის რიცხვითი ამონახსნის შესახებ არეებისათვის, რომელთა საზღვრის წირებს არ აქვთ მაღალი რიგის სიმრუდე-----	98
ლიტერატურა-----	103
დანართი-----	111

### ნახაზები

nax. 1-----	27
nax. 2-----	48
nax. 3-----	86
nax. 4-----	87
nax. 5-----	98

## ცხრილები

cxrili 1	28
cxrili 2	28
cxrili 3	28
cxrili 4	57
cxrili 5	71
cxrili 6	71
cxrili 7	71
cxrili 8	89
cxrili 9	89
cxrili 10	89
cxrili 11	95
cxrili 12	96
cxrili 13	96
cxrili 14	96
cxrili 15	96
cxrili 16	97

## შესავალი

უკანასკნელ წლებში სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორია სულ უფრო მეტ მნიშვნელობას იძენს. მექანიკის (აეროდინამიკის, დრეკადობის თეორიის, რღვევის თეორიის, ელექტროდინამიკის და სხვა)

მრავალი გამოყენებითი ტიპის ამოცანები ბუნებრივი გზით მიიყვანება ერთგანზომილებიან სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებზე, რომელთა შესახებაც საკმაოდ კარგად დამუშავებული სრული თეორია მოცემულია სხვადასხვა ავტორების ნაშრომებში (გახოვი, ივანოვი, მუსხელიშვილი, ლიფანოვი და სხვა).

თავის მხრივ სინგულარული ინტეგრალების დათვლა, ან ინტეგრალური განტოლებების ამოხსნა ძალიან რთულია, ზოგ შემთხვევაში შეუძლებელიც. ასეთ შემთხვევაში პრობლემის გადასაწყვეტად აუცილებელი ხდება რიცხვითი მეთოდების გამოყენება.

რიცხვითი ამონახსნების ალგორითმების დამუშავება და მათი კომპიუტერული რეალიზაცია გარკვეულ სირთულეებთან არის დაკავშირებული და მოიცავს რამოდენიმე მნიშვნელოვან ეტაპს. პირველ რიგში ამა თუ იმ ამოცანის რიცხვითი ამოხსნისათვის უნდა დამუშავდეს შესაბამისი ალგორითმები. ბუნებრივია ასეთი ალგორითმების დამუშავების დროს გათვალისწინებული უნდა იქნას ამოსახსნელი ამოცანების თავისებურებანი: კერძოდ, ალგორითმი სრულად უნდა აღწერდეს ამოცანის ბუნებას და რაც შეიძლება ზუსტად გადმოცემდეს მის შინაარსს. მეორე მხრივ, ალგორითმი უნდა იყოს მაღალი სიზუსტის და გამოთვლითი პროცესების მიმართ მდგრადი.

სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის მეთოდების განვითარება დაიწყო გაცილებით უფრო გვიან, ვიდრე თეორიული გამოკვლევები. პირველი შრომები გამოჩნდა მხოლოდ გასული საუკუნის ოცდაათიან წლებში. 1932 წელს გამოქვეყნებული მ. ლავრენტიევის ცნობილი სტატია ბიძგი გახდა 50-იან წლებში ამ მიმართულებით დაწყებული გამოთვლითი მეთოდების ინტენსიური დამუშავებისათვის. ამ მიმართულებით განსაკუთრებით აღნიშვნის ღირსია ს. ბელოცერკოვსკის შრომები აეროდინამიკაში, რომელიც საფუძვლად დაედო არსებითად ახალ, ამჟამად კარგად ცნობილ, სინგულარულ

ინტეგრალურ განტოლებათა რიცხვითი ამოხსნის მეთოდს- დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდს.

სინგულარული ინტეგრალების მიახლოებითი გამოთვლებისადმი მიძღვნილ სხვა ავტორთა შრომებიდან დასახელებული უნდა იქნას ს, ბელოცერკოვსკის, ი. ლიფანოვის, მუსაევის, ჯ. სანიკიძის, ა. ჯიშკარიანის, მ. კუბლაშვილის, ბ. გაბდულხაევის, ი. ბოიკოვისა და სხვათა შრომები.

მნიშვნელოვანია აღინიშნოს, რომ ინტეგრალური განტოლებების ამოხსნის რიცხვითი მეთოდების განვითარების ტენდენცია დაიწყო უფრო მეტად „კარგი“ გულის მქონე მეორე გვარის ფრედგოლმის განტოლებებზე. ასეთი განტოლებებისათვის აგებული იქნა რიცხვითი მეთოდები: ა) მაღალი რიგის სიზუსტის, საკმარისად ვიწრო კლასისი, განტოლებებისათვის, როცა საძებნი ფუნქციები ინტერპოლირდება სპეციალური მრავალწევრებით ან შესაბამისი ოპერატორების საკუთრივი ფუნქციებისგან შედგენილი მწკრივის კერძო ჯამებით. ბ) დაფუძნებული მართკუთხედის ტიპის ან ანალოგიური, საკმარისად ზოგადი, ტიპის ფორმულებზე.

სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის რიცხვითი ალგორითმების აგების დროს, ვაწყდებით პრობლემებს იმის გამო, რომ სინგულარული ინტეგრალი ჩვეულებრივი აზრით განშლადია და გაიგება გარკვეული სპეციალური აზრით (ე.წ. კოშის მთავარი მნიშვნელობით). ამიტომ ასეთი ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ალგორითმების აგების დროს წარმოიშობა დამატებითი სიძნელებები.

ასე მაგალითად განვიხილოთ ფრედგოლმის განტოლება:  $K\varphi = f$ , სადაც  $K$  ფრედგოლმის ოპერატორია,  $f$  ცნობილი, ხოლო  $\varphi$  საძებნი ფუნქცია. ვთქვათ  $K$  ოპერატორისათვის ავაგეთ  $K_n$  მიახლოებითი ოპერატორი ისეთი, რომ  $\|K - K_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , მაშინ როცა  $K\varphi = f$  განტოლებას აქვე ერთადერთი ამონახსნი  $\varphi$ ,  $K_n\varphi_n = f_n$  მიახლოებით განტოლებასაც გარკვეული  $n_0$ -დან დაწყებული ექნება ერთადერთი ამონახსნი  $\varphi_n$  და  $\|\varphi - \varphi_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . სინგულარულ

ინტეგრალურ განტოლებაში ასე არ ხდება: ვთქვათ ზუსტი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებაა  $S\varphi = f$ , ხოლო აპროქსიმაციის შედეგად მიღებული მიახლოებითი განტოლება იყოს  $S_n\varphi_n = f_n$ . დაუშვათ, რომ ზუსტ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და  $\|S - S_n\| \rightarrow 0$ , აქედან არ გამომდინარეობს, რომ  $\|\varphi - \varphi_n\| \rightarrow 0$ ; სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებში, ყოველ განტოლებას სჭირდება ინდივიდუალური შესწავლა. ამიტომ ასეთ შემთხვევაში რთულდება მიახლოებითი პროცესების დაფუძნება. ამის გამო, მიუხედავად იმისა, რომ სინგულარული ინტეგრალური განტოლებები კარგად აღწერენ მექანიკის ამოცანების რთულ ბუნებას, თავის მხრივ, მიახლოებითი პროცესების შესწავლა ბევრ სირთულეთანაა დაკავშირებული.

საყოველთაოდ ცნობილია,

რომ ბზარების ამოცანები თვლესართულ ამოცანებად.

განსაკუთრებით აქტუალურია ისეთი მეთოდების დამუშავება,

რომლებიც საშუალებას მოგვცემს ადვილად განისაზღვროს ბზარების ბოლოებ ისრაგინდმცირედი დამოშიმაბვეების მნიშვნელობები, რაც, თავის მხრივ, ბზარის შემდგომი გავრცელების მიმართულების პროგნოზირების გაკეთების საშუალებას მოგვცემს. როგორც გამოკვლევებმა აჩვენა,

ასეთი ამოცანებისათვის ძალიან ეფექტური აღმოჩნდა სინგულარული ინტეგრალური განტოლებები.

სადისერტაციონაშრომი ეხება სწორედ ასეთი პრობლემების შესწავლას სამშენებლო მექანიკის ზოგიერთი ამოცანისათვის. იგი მოიცავს ბზარების ამოცანებისათვის მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმების დამუშავებას და მათ კომპიუტერულ რეალიზაციას.

**ნაშრომის პირველ თავში** განხილულია წონიანი სინგულარული ინტეგრალისათვის სხვადასხვა ავტორების და დისერტანტის მიერ დამუშავებული რიცხვითი გამოთვლების ალგორითმები და მათი კრებადობის რიგის შეფასებები.

პირველი თავის §1.1-ში მოყვანილია ხარისხობრივი ტიპის განსაკუთრებულობების მქონე სიმკვრივიანი სინგულარული ინტეგრალის თვისებები.

$$S(\varphi; t_0, \eta) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{(t-c)^\eta (t-t_0)} \quad (t_0 \in L)$$

სადაც  $L \equiv ab$  წარმოადგენს გლუვ გახსნილ კონტურს  $a$  და  $b$  ბოლოებით, რომელიც მოცემულია განტოლებით  $t = t(s), (s_a \leq s \leq s_b)$ . ამასთან, დადებითი მიმართულება აიღება  $s$  პერიმეტრის ზრდის მიხედვით.  $c$  არის  $a$  ან  $b$ ,  $\eta = \lambda + i\beta$ ,  $(0 \leq \lambda < 1)$ ,  $(t-c)^\lambda$ -ს ქვეშ იგულისხმება ამ მრავალსახა ფუნქციის ნებისმიერი ფიქსირებული შტო.

პირველი თავის §1.2-ში განხილულია ს. ბელოცერკოვსკისა და ი. ლიფანოვის მიერ აგებული რიცხვითი გამოთვლის ალგორითმები შემდეგი სახის სინგულარული ინტეგრალისათვის

$$I(t_0) = \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0}$$

სადაც  $L$  ერთეულრადიუსიანი წრეა ცენტრით კოორდინატა სათავეში, ხოლო  $\varphi(t)$  ფუნქცია აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას  $L$  კონტურზე (ჰელდერის კლასის ფუნქციაა  $L$ -ზე). აღნიშნული ინტეგრალი შეცვლილია

$$s_n(t_{0j}) \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k) \Delta t_k}{t_k - t_{0j}} \quad j = 1, \dots, n \quad \text{კვადრატული ჯამით. } \varphi(t) \in H(\alpha) \text{ კლასის}$$

ფუნქციებისთვის მიღებულია შემდეგი შეფასება

$$\begin{aligned} |I(t_{0j}) - s_n(t_{0j})| &\leq \theta(t_{0j}), \quad j = 1, \dots, n, \\ \theta(t_{0j}) &= O\left(\frac{1}{n^\alpha} \ln n\right) + |\varphi(t_{0j})| O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

იმავე სახის სინგულარული ინტეგრალი განხილულია  $L = [a, b]$  მონაკვეთისთვის, რომლის მიახლოებითი გამოთვლისათვის აგებულია

$$\text{კვადრატული ფორმულა } \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k) h}{t_k - t_{0j}} \text{ და მოყვანილია შეფასება}$$

$$I \equiv \left| \int_a^b \frac{\varphi(t)dt}{t-t_{0j}} - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k)h}{t_k-t_{0j}} \right| \leq \theta(t_{0j}), \quad j = 0, 1, \dots, n$$

სადაც  $\theta(t_{0j})$  მნიშვნელობა აკმაყოფილებს შემდეგს:

1) ყველა წერტილისთვის  $t_{0j} \in [a + \delta, b - \delta]$ ,  $\delta > 0$  უსასრულოდ მცირე რიცხვია

$$\theta(t_{0j}) \leq O_\delta(h^{\lambda_1}), \quad 0 < \lambda_1 \leq 1;$$

2) ყველა წერტილისთვის  $t_{0j} \in [a, b]$

$$\sum_{j=0}^n \theta(t_{0j}) |\Delta t_{0j}| \leq O(h^{\lambda_2}), \quad 0 < \lambda_2 \leq 1,$$

$$\text{აქ } \Delta t_{0j} = h, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

პირველი თავის §1.3-ში გადმოცემულია ჯ. სანიკიძის მიერ აგებული დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდის მოდიფიცირებული მომატებული რიგის სიზუსტის გამოთვლითი სქემა.

განხილულია შემდეგი სახის სიგულარული ინტეგრალი

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}$$

სადაც შეკრული გლუვი  $L$  კონტური წერტილთა ორი სისტემის საშუალებით,  $2n$  კვანძით  $\{\tau_j\}_{j=1}^{2n}$ , იყოფა  $2n$  ტოლ ნაწილად.

ინტეგრალისათვის აგებულია მიახლოება:

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} \approx \varphi(t_0) + \sum_{\sigma=1}^n (P_{\nu+2\sigma-1} + P_{\nu+2\sigma+1}) \frac{\varphi(\tau_{\nu+2\sigma+1}) - \varphi(t_0)}{\tau_{\nu+2\sigma+1} - t_0}$$

იმ პირობით, რომ  $t_0 \in \tau_{\nu-1}, \tau_{\nu+1}$  ( $t_0 \neq \tau_{\nu-1}, \tau_{\nu+1}$ ),

სადაც

$$P_{\nu+2\mu-1} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{\nu+2\mu-1}}^{\tau_{\nu+2\mu+1}} l_{\nu\mu}^{(0)}(t) dt = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{\nu+2\mu-1}}^{\tau_{\nu+2\mu+1}} l_{\nu\mu}^{(1)}(t) d(t),$$



$$\text{ამასთან, } l_{\nu\mu}^{(0)}(t) = \frac{t - \tau_{\nu+2\mu+1}}{\tau_{\nu+2\mu-1} - \tau_{\nu+2\mu+1}}, l_{\nu\mu}^{(0)}(t) = \frac{t - \tau_{\nu+2\mu-1}}{\tau_{\nu+2\mu+1} - \tau_{\nu+2\mu-1}}$$

$t_0$  პარამეტრისათვის  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{2n}$  მნიშვნელობების მიცემით მივიღებთ  $(S_\varphi)(t_0)$  სინგულარული ინტეგრალისათვის გარკვეულ აპროქსიმაციის სქემას.

თუ  $\varphi(t)$  ფუნქციას  $L$ -ზე გააჩნია მეორე რიგის შემოსაზღვრული წარმოებული, მაშინ აღნიშნული კვადრატურული ფორმულისათვის მიღებულია ცდომილების შეფასება  $O(n^{-2} \ln n)$ .

პირველი თავის §1.4-ში განხილულია მ. კუბლაშვილის მიერ აგებული დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდის მოდიფიცირებული მომატებული რიგის სიზუსტის გამოთვლითი სქემა გახსნილი კონტურების შემთხვევაში.

განხილულია შემდეგი სახის სინგულარული ინტეგრალი:

$$S^{(p,q)}(\varphi; t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L (t-a)^p (t-b)^q \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0}$$

სადაც  $L \equiv ab$  კომპლექსურ სიბრტყეზე რაიმე გახსნილი გლუვი კონტურია  $a$  და  $b$  ბოლოებით, რომელიც მოცემულია პარამეტრული სახით  $t = t(s) (s_a \leq s \leq s_b)$ . აქ  $\rho(t) = (t-a)^p (t-b)^q$

წონითი ფუნქციაა, სადაც  $p$  და  $q$  პარამეტრები იღებს ერთ-ერთ მნიშვნელობას  $\pm 1/2$  რიცხვებიდან.

ასეთი სინგულარული ინტეგრალისათვის იგება კვადრატურული ფორმულა

$$S^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t) \approx \varphi(t_0) + \sum_{\sigma=1}^n \int_{\tau_{2\sigma-1}}^{\tau_{2\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \left[ \frac{t - \tau_{2\sigma-1}}{\tau_{2\sigma+1} - \tau_{2\sigma-1}} \chi(\tau_{2\sigma+1}, t_0) + \frac{t - \tau_{2\sigma+1}}{\tau_{2\sigma-1} - \tau_{2\sigma+1}} \chi(\tau_{2\sigma+1}, t_0) \right] =$$

$$= \varphi(t_0) + p_1 \chi(\tau_1, t_0) + \sum_{\sigma=1}^{n-1} (q_1^{(1/2; -1/2)} + q_1^{(1/2; -1/2)}) \chi(\tau_{2\sigma+1}, t_0) + q_1^{(1/2; -1/2)} \chi(\tau_{2n-1}, t_0),$$

სადაც

$$q_1^{(1/2;-1/2)}_{2\sigma-1} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{2\sigma-1}\tau_{2\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{t-\tau_{2\sigma-1}}{\tau_{2\sigma+1}-\tau_{2\sigma-1}} dt, q_{2\sigma+1}^{(1/2;-1/2)} =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{2\sigma-1}\tau_{2\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{t-\tau_{2\sigma-1}}{\tau_{2\sigma-1}-\tau_{2\sigma+1}} dt \quad (\sigma = 1, 2, \dots, n)$$

ინტერპოლაციის ლუწი ინდექსის წერტილებში

$$D_n^{(1/2;-1/2)}(\varphi, t_0) = \varphi(t_0) + q_2^{(1/2;-1/2)} \chi(\tau_2; t_0) + \sum_{\sigma=1}^{n-1} q_1^{(1/2;-1/2)}_{2\sigma} +$$

$$+ q_{2\sigma+2}^{(1/2;-1/2)} \chi(\tau_{2\sigma+2}, t_0) + q_{2n-2}^{(1/2;-1/2)} \chi(\tau_{2n}, t_0)$$

სადაც

$$q_1^{(1/2;-1/2)}_{2\sigma} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{2\sigma}\tau_{2\sigma+2}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{t-\tau_{2\sigma}}{\tau_{2\sigma+2}-\tau_{2\sigma}} dt, q_{2\sigma+2}^{(1/2;-1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{2\sigma}\tau_{2\sigma+2}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{t-\tau_{2\sigma+2}}{\tau_{2\sigma}-\tau_{2\sigma+2}} dt$$

$$(\sigma = 1, 2, \dots, n-1)$$

ანალოგიურად აიგება  $D_n^{(-1/2;-1/2)}(\varphi, t_0)$  და  $D_n^{(1/2;1/2)}(\varphi, t_0)$ .

$\tau_\nu$  კვანძებში  $D_n^{(\pm 1/2; \pm 1/2)}(\varphi; \tau_\nu)$  ჯამების საშუალებით შეიძლება ავაროთ მიახლოებითი ფორმულა შესაბამისად  $S^{(\pm 1/2; \pm 1/2)}(\varphi; t_0)$  სინგულარული ინტეგრალებისათვის, რომლებსაც აზრი ექნებათ ნებისმიერი  $t_0 \in L$ -სთვის, ამასთან ექნებათ სიზუსტის იგივე რიგი, რაც  $\tau_\nu$ -კვანძით წერტილებში.

ვთქვათ  $R_n^{(\pm 1/2; \pm 1/2)}(\varphi; t_0) = S^{(\pm 1/2; \pm 1/2)}(\varphi, t_0) - S_n^{(\pm 1/2; \pm 1/2)}(\varphi, t_0)$  ნაშთითი წევრია.

მტკიცდება, რომ, როდესაც  $\varphi(t)$  ფუნქციას გააჩნია მეორე რიგის შემოსაზღვრული წარმოებული, სამართლიანია შემდეგი შეფასება:

$$\|R_n^{(1/2;-1/2)}(\varphi; t_0)\|_{H_\beta} \leq \frac{M \ln n}{n^{3/2+\alpha-\phi}} \quad (n > 1, \beta < \alpha - 1/2),$$

$$\|R_n^{(-1/2;-1/2)}(\varphi; t_0)\|_{H_\beta} \leq \frac{A \ln n}{n^{3/2+\alpha-\phi}} \quad (n > 1, \beta < \alpha - 1/2)$$

$$\|R_n^{(1/2;1/2)}(\varphi; t_0)\|_{H_\beta} \leq \frac{B \ln n}{n^{3/2+\alpha-\phi}} \quad (n > 1, \beta < \alpha - 1/2)$$

სადაც  $M, A, B$  მუდმივებია, რომლებიც დამოკიდებულია მხოლოდ  $L$ -ზე და  $\varphi^{(2)}$  ფუნქციის ჰელდერის მაჩვენებელზე.

პირველი თავის §1.5-ში განხილულია ჯ. სანიკიდის და კ. ნინიძის მიერ კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის ჩებიშევის ტიპის მომატებული რიგის სიზუსტის კვადრატურული ფორმულები. მოყვანილია სინგულარული ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის ფორმულა ჩებიშევის კვანძებისათვის  $\pm t_1, \pm t_2$ .

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt \approx \frac{1}{2} \left\{ \frac{\varphi(-t_1)}{-t_1-t_0} + \frac{\varphi(t_1)}{t_1-t_0} + \frac{\varphi(-t_2)}{-t_2-t_0} + \frac{\varphi(t_2)}{t_2-t_0} \right\},$$

სადაც  $t_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{3\sqrt{5}}}$ ,  $t_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}}}$ ,  $t_{01} = -0.970411$ ,  $t_{02} = -0.494516$ ,  
 $t_{03} = 0.494516$ ,  $t_{04} = 0.970411$

პირველი თავის §1.6-ში გადმოცემულია მ. კუბლაშვილისა და ჯ. სანიკიდის მიერ განხილული კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის კვადრატურული ფორმულების მომატებული რიგის სიზუსტის შესახებ. განხილულია შემდეგი სახის კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრალი

$$\int_{-1}^1 \rho(t) \frac{\varphi(t) dt}{t-x} \quad (-1 < x < 1)$$

სადაც  $\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ , რომელიც აკმაყოფილებს ასეთი ინტეგრალების თეორიაში ზოგადად მიღებულ პირობებს. ასეთი წონითი ფუნქცია უფრო ხშირია გამოყენებითი ტიპის ამოცანებში. მივიღებთ

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{1-t^2} (t-x)} \quad (-1 < x < 1)$$

აგებულია კვადრატურული ფორმულა

$$\int_{-1}^1 \rho(t) \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\varphi(t_k)}{t_k-x}; x \in (-1, +1), x \neq t_k,$$

სადაც  $\{t_k\}, \{A_k\}$  - შესაბამისად, გაუსის ჩვეულებრივი კვადრატურული ფორმულის კვანძები და წონებია, თანაც ნაგულისხმევია, რომ წონითი ფუნქცია  $\rho(t)$  აკმაყოფილებს ცნობილ სტანდარტულ პირობებს.

$2n-1$ -თან ყველაზე ახლოს მდგომ  $r_n$  მნიშვნელობებს, ბუნებრივია, მივყავართ სინგულარული ინტეგრალებისათვის კვადრატურულ ფორმულებამდე, რომლის სიზუსტე უახლოვდება გაუსის კვადრატურული ფორმულების სიზუსტეს.

$n$  კვანძების რაოდენობების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის ჩატარებულმა ექსპერიმენტებმა დაადასტურა ამ მიმართულებით წარმოქმნილი თეორიული მოსაზრებები

პირველი თავის §1.7-ში გადმოცემულია ჯ. სანიკიძის და მ.კუბლაშვილის მიერ განხილული კომის გულიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის სიზუსტით გაუსის ტიპის მახლობელი კვადრატურული ფორმულების შესახებ. აქაც, როგორც წინა პარაგრაფში, განხილულია კომის გულიანი შემდეგი სახის სინგულარული ინტეგრალი

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t - x} dt \quad (-1 < x < 1)$$

ინტეგრალისათვის განხილულია გაუსის კვადრატურული ფუნქცია  $t_k$  კვანძებით და  $\{A_k\}$  კოეფიციენტებით:

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t - x} dt \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\varphi(t_k) - \varphi(x)}{t_k - x} \quad (-1 < x < 1)$$

იგულისხმება, რომ  $\varphi(t)$  -ს გააჩნია შესაბამისი სიგლუვე. თუ  $x \in (-1 < x < 1)$  მნიშვნელობები შერჩეულია ისე, რომ ამ უკანასკნელისათვის შესრულდეს ტოლობა

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{dt}{t - x} - \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{t_k - x} = 0,$$

მაშინ  $x$ -ის შესაბამისი მნიშვნელობებისათვის მოცემული პირობის მიხედვით შემდეგი სინგულარული ინტეგრალისათვის

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \quad (-1 < x < 1):$$

გვექნება კვადრატურული ფორმულა

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\varphi(t_k)}{t_k-x} \quad (-1 < x < 1),$$

ასეთი სტრუქტურის კვადრატურული ფორმულები, რომლებიც ლიტერატურაში ცნობილია სინგულარული ინტეგრალისათვის გაუსის კვადრატურული ფორმულების სახელწოდებით, განისაზღვრება სავსებით ერთმნიშვნელოვნად მოცემული  $\rho(t)$ -სათვის  $\{x_k\}_{k=1}^{n-1}$  სინგულარობის წერტილების მნიშვნელობებით.

პირველი თავის §1.8-ში ხორციელდება დისერტანტის მიერ კომის გულიანი სინგულარული ინტეგრალისათვის მარკოვის ტიპის მომატებული რიგის სიზუსტის კვადრატურული ფორმულების აგება  $n=7$  კვანძისათვის. მოყვანილია სინგულარული ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის ფორმულა მარკოვის კვანძებისათვის  $t_k, k=1, 2, \dots, 12$ . მარკოვის 12 კვანძისათვის ვღებულობთ 7 სინგულარობის წერტილს  $t_{0j}, j=1, 2, \dots, 7$ . მიღებული სინგულარობის წერტილებში სინგულარული ინტეგრალის დასათვლელად ვიყენებთ კვადრატურულ ფორმულას

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt \approx 2 \left\{ \frac{\varphi(t_1)}{t_1-t_0} + \frac{\varphi(t_2)}{t_2-t_0} + \dots + \frac{\varphi(t_{12})}{t_{12}-t_0} \right\} = 2 \sum_{k=1}^{12} \frac{\varphi(t_k)}{t_k-t_0}$$

განხილული საკითხი წარმოადგენს მეტად მნიშვნელოვანს, იმ თვალსაზრისით, რომ აღნიშნული ტიპის სინგულარული ინტეგრალისათვის გვეძლევა საშვალეა ერთნაირი რიცხვითი კოეფიციენტებიანი კვადრატურული ფორმულების გამოყენებისა.

პირველი თავის §1.9-ში განხილულია მ. კუბლაშვილის მიერ აგებულ მაღალი რიგის გამოთვლითი სქემებს წონიანი სინგულარული ინტეგრალისათვის.

$$S(\varphi; t_0, \eta) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{(t-c)^\eta (t-t_0)} \quad (t_0 \in L)$$

აგებულია კვადრატურული ფორმულა მოცემული ინტეგრალისათვის

$$\begin{aligned} S_n^{*(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) = & [1 + \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\sigma k}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\nu k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\nu k}} - P_{\nu j}^{*(-1/2; -1/2)} \sum_{k=1}^m d_{\nu k}(t_{\nu j})] \varphi(t_{\nu j}) - \\ & - \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\sigma k}} \varphi(t_{\sigma k}) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\nu k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\nu k}} \varphi(t_{\nu k}) + P_{\nu j}^{*(-1/2; -1/2)} \sum_{k=1}^m d_{\nu k}(t_{\nu j}) \varphi(t_{\nu k}) \end{aligned}$$

სადაც

$$d_{\nu k} = \frac{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k, j}}^m t_{\nu j} - t_{\nu j_0}}{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k}}^m t_{\nu k} - t_{\nu j_0}},$$

$$P_{\sigma k}^{(1/2; -1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \sqrt{\frac{(t-a)}{(t-b)}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{t - t_{\sigma j}}{t_{\sigma k} - t_{\sigma j}} dt$$

$$P_{\sigma k}^{*(-1/2; -1/2)} = \begin{cases} P_{\sigma 1}^{(1/2; -1/2)} + P_{\sigma-1 m}^{(1/2; -1/2)}; & \sigma = 1, 2, 3, \dots, n; \\ P_{\sigma k}^{(1/2; 1/2)}, & k = 2, 3, \dots, m-1; \sigma = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$(\sigma = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m), \quad (t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}; \quad \nu = 1, 2, \dots, n)$$

ანალოგიურად ამოიწერება კვადრატული ფორმულების შესაბამისი გამოსახულებები  $S_n^{*(-1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$  და  $S_n^{*(1/2; 1/2)}(\varphi; t_0)$ -ის შემთხვევაში.

მტკიცდება, რომ როცა  $\varphi(t) \in H_r^\alpha$  ადგილი აქვს შეფასებას

$$\|S^{(\pm 1/2; \pm 1/2)}(\varphi; t_0) - S_n^{*(\pm 1/2; \pm 1/2)}(\varphi; t_0)\|_{H_\beta} \leq \frac{C \ln n}{n^{r+\alpha-1/2}}, \quad \text{სადაც } C \text{ რაიმე მუდმივი}$$

სიდიდეა.

ნაშრომის II თავში ნაჩვენებია I თავში აგებული მიახლოებითი ფორმულების გამოყენება ერთი კლასის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნებისათვის. ამ კლასის განტოლებებზე მიიყვანება სხვადასხვა სახის გამოყენებითი (მათ შორის სამშენებლო მექანიკის) ტიპის, დირიხლეს (შესაბამისად გრეხის) და დრეკადობის თეორიის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები, რომელთა შესაბამისი ინტეგრალური განტოლებები იწერება კოშის გულიან სინგულარულ ინტეგრალებში.

მეორეთავის §2.1-ში პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის ს. ბელოცერკოვსკისა და ი. ლიფანოვის მიერ რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმის აგება დისკრეტულ განსაკუთრებულებათა მეთოდის გამოყენებით. განიხილება შემდეგი სახის პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლება ინტერვალზე

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{t_0 - t} + \int_{-1}^1 K(t_0, t) \varphi(t) dt = f(t_0)$$

სადაც  $f(t)$  და  $K(t_0, t)$  ფუნქციები ეკუთვნიან ჰელდერის კლასს შესაბამისად  $[-1; 1]$  და  $[-1; 1] \times [-1; 1]$  სიმრავლეზე და ამ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი შესაბამისი მოცემული ინდექსისათვის, მაშინ გამოყენებულია შემდეგი სახის მიახლოებითი გამოთვლის ალგორითმი

$$\sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k) h}{t_{0j} - t_k} + \sum_{k=1}^n K(t_{0j}, t_k) \varphi_n(t_k) h = f(t_{0j}), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k) h}{t_{0j} - t_k} + \sum_{k=1}^n K(t_{0j}, t_k) \varphi_n(t_k) h = f(t_{0j}), \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\sum_{k=1}^n \varphi_n(t_k) h = C$$

$$\gamma_{0n} + \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k) h}{t_{0j} - t_k} + \sum_{k=1}^n K(t_{0j}, t_k) \varphi_n(t_k) h = f(t_{0j}), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

შეფასებულია ამონახსნი შემდეგი უტოლობით:

$$|\varphi(t_k) - \varphi_n(t_k)| \leq \theta_n(t_k) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

სადაც მნიშვნელობა  $\theta(t_k)$  აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობებს:

1) ყელა წვერტილისათვის  $t_k \in [a + \delta, b + \delta]$ , სადაც  $\delta > 0$

$$\theta_n(t_k) \leq O_\delta(h^{\lambda_1}), \quad \lambda_1 > 0$$

2) ყელა წვერტილისათვის  $t_k \in [a, b]$

$$\sum_{k=1}^n \theta_n(t_k) \leq O(h^{\lambda_2}), \quad \lambda_2 > 0$$

მეორეთავის §2.2-შიგანიხილება

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L K(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0), \quad (t_0 \in L)$$

პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის საკითხი, სადაც  $L \equiv ab$  წარმოადგენს გახსნილ გლუვ კონტურს. რომელსაც ჩვენ კვლავ ჩავთვლით, რომ მოცემულია პარამეტრული სახით  $K(t_0, t)$  და  $f(t)$   $L$  – ზემოცემული ფუნქციებია, რომლებიც აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას. მოცემულ §-ში განხილული სქემა გამოიყენება პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნისთვის, ნებისმიერი გახსნილი კონტურის შემთხვევაში, იმ დაშვებით, რომ მოცემულ ზუსტ განტოლებას ამონახსნების განსახილველ კლასში აქვს ერთადერთი ამონახსნი. მარჯვენა მხარისა და გულის მიმართ გარკვეულ დაშვებებში შეგვიძლია მივალწიოთ საკმარისად მაღალ რიგს,  $O\left(\frac{1}{n^{r+1/2-\varepsilon}}\right)$ , სადაც  $\varepsilon$  რაგინდ მცირე დადებითი რიცხვია.

მეორეთავის §2.3-შიგანიხილება

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L K(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0) \quad (t_0 \in L)$$

პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნა იმ შემთხვევაში, როცა მისი ამონახსნი ცალსახად არ განისაზღვრება ან განტოლების ამოხსნადობისათვის  $f$  მარჯვენა მხარეს მოეთხოვება დამატებითი პირობა. ასეთი განტოლებების რიცხვითი ამოხსნისათვის მოყვანილია მაღალი რიგის სიზუსტის სქემები.



§2.4-ში ანალოგიურად აიგება მიახლოებითი პროცესები სრული სახის პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლებისათვის

მეორეთავის §2.5-ში განხილულია ჩვენს მიერ აგებული მარკოვის ტიპის კვადრატურული ფორმულებით პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალების ამოხსნა.

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L K(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0) \quad (t_0 \in L)$$

კვლავ ვგულისხმობთ, რომ  $f(t), K(t_0, t) \in H$ . ინტეგრალური განტოლებისათვის ვიყენებთ კვადრატურულ ფორმულას

$$\frac{1}{\pi i} \sum_{k=1}^{12} \frac{\varphi(t_k)}{t_k - t_{0j}} + \frac{1}{\pi i} \sum_{k=1}^{12} K(t_{0j}, t_k) \varphi(t_k) = f(t_{0j})$$

სადაც  $j=1,2,\dots,7$ . აქ  $t_k$  და  $t_{0j}$ ,  $j=1,2,\dots,7$ ,  $k=1,2,\dots,12$  §1.8-ში ჩვენს მიერ მოძებნილი კვანძითი და სინგულარობის წერტილებია. მიღებული კვადრატურული ფორმულიდან ჩანს, რომ იგი წარმოადგენს განტოლებათა სისტემას 12 უცნობითა და შვიდი განტოლებით, რომლის ამოხსნაც ცალსახად შეუძლებელია.

### ნაშრომის

III

თავში წარმოდგენილია სამშენებლო მექანიკის მეტადაქტუალურისაკითხი, ბზარების ზოგიერთი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებით. ცნობილია,

რომ როცა ბზარს აქვს გლუვი ან უბან-უბან გლუვი წირის ფორმა,

იგი მიიყვანება დირიხლეს ამოცანაზე. დასმულია და განხილულია დირიხლეს ამოცანების რიცხვითი ამოხსნა სხვადასხვა შემთხვევებისათვის.

კერძოდ:

§-3.1-ში განხილულია დირიხლეს ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა უცნობი გახსნილი სასაზღვრო წირის შემთხვევაში.

§-3.2-ში განიხილება დირიხლეს სახეშეცვლილი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა გახსნილი კონტურების შემთხვევაში.

§-3.3-ში განიხილება დირიხლეს ამოცანა ისეთი არეებისათვის, რომელთა საზღვრის წირებს არ აქვთ მაღალი რიგის სიმრუდე.

სამივე ამოცანა მიიყვანება სხადასხვა ტიპის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებზე, რომელთა რიცხვითი ამოხსნისათვის ვიყენებთ წინა თავებში აგებულ მაღალი რიგის რიცხვითი გამოთვლის სქემებს.

## წონიანი სინგულარული ინტეგრალების მიახლოებითი გამოთვლის ალგორითმების აგება

### §1.1. ხარისხობრივი ტიპის განსაკუთრებულობების მქონე სიმკვრივიანი სინგულარული ინტეგრალების მიახლოებითი გამოთვლის შესახებ

განვიხილოთ შემდეგი სახის სინგულარული ინტეგრალი

$$S(\varphi; t_0, \eta) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{(t-c)^\eta (t-t_0)} \quad (t_0 \in L) \quad (1.1.1)$$

სადაც  $L \equiv ab$  წარმოადგენს გლუვ გახსნილ კონტურს  $a$  და  $b$  ბოლოებით, რომელიც მოცემულია განტოლებით  $t = t(s), (s_a \leq s \leq s_b)$ . ამასთან, დადებითი მიმართულება აიღება  $s$  პერიმეტრის ზრდის მიხედვით.  $c$  არის  $a$  ან  $b, \eta = \lambda + i\beta, (0 \leq \lambda < 1)$ ,  $(t-c)^\lambda$ -ს ქვეშ იგულისხმება ამ მრავალსახა ფუნქციის ნებისმიერი ფიქსირებული შტო.

ცნობილია (იხ. [1], §22), რომ, როცა  $\eta = \lambda + i\beta \neq 0$ , მაშინ

$$S(\varphi; t_0, \eta) = \pm \frac{ctg \eta \pi}{2i} \frac{\varphi(c)}{(t_0 - c)^\eta} + \phi^*(t_0),$$

ამასთან, თუ  $\lambda = 0$ , მაშინ  $\phi^*(t_0)$  ეკუთვნის  $H$  კლასს (აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას)  $c$  წერტილის მიდამოში.

როცა  $\lambda > 0$ , მაშინ

$$\phi^*(t_0) = \frac{\phi^{**}(t_0)}{|t_0 - c|^{\lambda_0}}, \quad 0 < \lambda_0 < \lambda$$

სადაც  $\phi^{**}(t_0)$  ეკუთვნის  $H$ -ს  $c$  წერტილის მიდამოში, ზედა ნიშანი აიღება, როცა  $c = a$ , ქვედა კი, როცა  $c = b$ . ამ მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ, როცა  $\text{Re } \eta \neq 0$ ,  $S(\varphi; t_0, \eta)$ , სინგულარული ინტეგრალი  $a$  ან  $b$  წერტილების მახლობლობაში შემოსაზღვრული შეიძლება იყოს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა  $\eta = 1/2 + i\beta$  ( $\beta$  - ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია). ამასთან, ეს

შემთხვევა საინტერესოა იმითაც, რომ წონიანი სინგულარული ინტეგრალები, წონით, რომლებსაც აქვთ კვადრატული ფესვის სახის განსაკუთრებულობები, ხშირად გვხვდება გამოყენებებში. ასეთ ინტეგრალებზე მიიყვანება გახსნილი კონტურებიანი სინგულარული ინტეგრალების შებრუნების ფორმულები და ამით, როგორც ცნობილია, სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების ზოგადი თეორიიდან (იხ. [1] თავი V), ზოგადი სახის პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების ამოხსნების სტრუქტურა ინტეგრების წირის ბოლოებში წინასწარ განისაზღვრება აღნიშნული ტიპის განსაკუთრებულობებით.

თავის მხრივ, განტოლებების ეს კლასი ძალიან მნიშვნელოვანია იმ თვალსაზრისით, რომ მათზე მიიყვანება ძალიან ბევრი მნიშვნელოვანი გამოყენებითი ტიპის პრაქტიკული ამოცანა (იხ. [1], [2], [3], [4]).

## §1.2. სინგულარული ინტეგრალების მიახლოებითი გამოთვლა ს.

### ბელოცერკოვსკი-ლიფანოვის ალგორითმით

განვიხილოთ შემდეგი სახის სინგულარული ინტეგრალი

$$I(t_0) = \int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} \quad (1.2.1)$$

სადაც  $L$  ერთეულრადიუსიანი წრეა ცენტრით კოორდინატთა სათავეში, ხოლო  $\varphi(t)$  ფუნქცია აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას  $L$  კონტურზე (ჰელდერის კლასის ფუნქციაა  $L$ -ზე).

მოსახერხებელია დაწყება ინტეგრალით

$$I_0(t_0) = \int_L \frac{dt}{t-t_0} \quad (1.2.2)$$

რომლისთვისაც [2] ცნობილია, რომ

$$I_0(t_0) = \pi$$

ავიღოთ  $L$ -ზე წერტილთა ორი სიმრავლე:

$$E = (t_k, k = 1, \dots, n)$$

$$E_0 = (t_{0k}, k = 1, \dots, n)$$

ისეთები, რომ წერტილებმა  $(t_k, k = 1, \dots, n)$  მოცემული წრე დაყოს  $n$  ტოლ ნაწილად, ხოლო წერტილები  $t_{0k}$  წარმოადგენს  $t_k$   $t_{k+1}$  რკალის შუაწერტილებს. ჩავთვალოთ, რომ  $t_{n+1} = t_k$ . მომავალში ასეთნაირად აღებულ სიმრავლეს  $E$ -ს და  $E_0$ -ს ვუწოდოთ  $L$  კონტურის კანონიკური დაყოფა.

ლემა: ნებისმიერი  $t_{0j} \in E_0$  წერტილისათვის სრულდება უტოლობა

$$\left| \int_L \frac{dt}{t-t_0} - \sum_{k=1}^n \frac{\Delta t_k}{t_k - t_{0j}} \right| \leq O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (1.2.3)$$

სადაც  $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k, k = 1, \dots, n$ .

ახლა განვიხილოთ ანალოგიური კვადრატურული ჯამი (1.2.1)-ი სახის სინგულარული ინტეგრალისათვის. დაუშვათ  $E$  და  $E_0$  სიმრავლეები ქმნიან  $L$  კონტურის კანონიკური დაყოფას. ავღნიშნოთ

$$\left| s_n(t_{0j}) = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k) \Delta t_k}{t_k - t_{0j}} \right|, \quad j = 1, \dots, n \quad (1.2.4)$$

მაშინ სამართლიანია შემდეგი თეორემა: დაუშვათ  $\varphi(t)$  აკმაყოფილებს ჰელდერის ( $H(\alpha)$ ) პირობას  $L$ -ზე. მაშინ შესრულდება შემდეგი უტოლობა

$$\left| I(t_{0j}) - s_n(t_{0j}) \right| \leq \theta(t_{0j}), \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\theta(t_{0j}) = O\left(\frac{1}{n^\alpha} \ln n\right) + |\varphi(t_{0j})| O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (1.2.5)$$

ახლა ჩავთვალოთ, რომ  $L = [a, b]$  ნამდვილი რიცხვითი ღერძის მონაკვეთია, ხოლო  $\varphi(t) \in H$   $L$ -ზე. მაშინ მივიღებთ

$$\varphi(t) = \frac{\psi(t)}{(t-a)^{\nu}(b-t)^{\mu}} \quad (1.2.6)$$

სადაც  $\psi(t) \in H_{\alpha}$   $L = [a, b]$ -ზე,  $0 \leq \mu, \nu < 1$

დაუშვათ წერტილები  $t_0 = a, t_1, t_2, \dots, t_{n+1} = b$  დაყოფს  $[a, b]$  მონაკვეთს  $n+1$  ტოლ ნაწილად ბიჯით  $h = (b-a)/(n+1)$ , ხოლო  $t_{0j}$  წარმოადგენს მონაკვეთების  $[t_j, t_{j+1}]$ ,  $j = 1, \dots, n$  შუაწერტილებს. ვიტყვი, რომ  $E = (t_k, k = 1, \dots, n)$  და  $E_0 = (t_{0k}, k = 1, \dots, n)$  სიმრავლეები ქმნიან  $L = [a, b]$  მონაკვეთის კანონიკური დაყოფას  $h$ -ბიჯით.

ლემა: ნებისმიერი  $t_{0j} \in E_0$  წერტილისათვის სრულდება უტოლობა

$$\left| \int_a^b \frac{dt}{t-t_{0j}} - \sum_{k=1}^n \frac{h}{t_k-t_{0j}} \right| \leq \frac{hB}{(t_{0j}-a)(b-t_{0j})} \quad (1.2.7)$$

სადაც  $B$  რაიმე მუდმივი სიდიდეა. აღვნიშნოთ, რომ ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\sum_{k=1}^n \frac{h}{t_k-t_{0j}} \leq O(|\ln h|) \quad (1.2.8)$$

თეორემა: დაუშვათ  $\varphi(t)$  აკმაყოფილებს ჰელდერის ( $H(\alpha)$ ) პირობას  $L = [a, b]$ -ზე, ხოლო  $E = (t_k, k = 1, \dots, n)$  და  $E_0 = (t_{0k}, k = 1, \dots, n)$  სიმრავლეები ქმნიან  $L = [a, b]$  მონაკვეთის კანონიკური დაყოფას  $h$ -ბიჯით.

მაშინ შესრულდება შემდეგი უტოლობა

$$I \equiv \left| \int_a^b \frac{\varphi(t)dt}{t-t_{0j}} - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k)h}{t_k-t_{0j}} \right| \leq \theta(t_{0j}), \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (1.2.9)$$

სადაც  $\theta(t_{0j})$  მნიშვნელობა აკმაყოფილებს შემდეგს:

- 3) ყველა წერტილისთვის  $t_{0j} \in [a + \delta, b - \delta]$ ,  $\delta > 0$  უსასრულოდ მცირე რიცხვია

$$\theta(t_{0j}) \leq O_{\delta}(h^{\lambda_1}), \quad 0 < \lambda_1 \leq 1; \quad (1.2.10)$$

4) ყველა წერტილისთვის  $t_{0j} \in [a, b]$

$$\sum_{j=0}^n \theta(t_{0j}) |\Delta t_{0j}| \leq O(h^{\lambda_2}), \quad 0 < \lambda_2 \leq 1, \quad (1.2.11)$$

აქ  $\Delta t_{0j} = h, \quad j = 0, 1, \dots, n$ .

### §1.3 დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდის მოდიფიცირებული მომატებული რიგის სიზუსტის გამოთვლითი სქემის აგების შესახებ

შესავალში აღნიშნული იყო [5-9] შრომების შესახებ, რომლებიც შეეხებოდა მომატებული სიზუსტის რიგის დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდის მოდიფიცირებული სქემების აგებასა და დაფუძნებას ლიაპუნოვის შეკრული კონტურების შემთხვევაში. აღნიშნულ სქემებში, (0.1) ინტეგრალისათვის, ისევე როგორც კლასიკურ დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდის შემთხვევაში (იხ. [4]), შეკრული გლუვი  $L$  კონტური წერტილთა ორი სისტემის საშუალებით,  $2n$  კვანძით  $\{\tau_j\}_{j=1}^{2n}$ , იყოფა  $2n$  ტოლ ნაწილად. ამასთან,  $\tau_m \tau_q$  რკალის ქვეშ იგულისხმება  $L$  კონტურის უმცირესი რკალი  $\tau_m \tau_q$  ბოლოებით, რომლებიც განლაგებულია  $L$ -ის დადებითი მიმართულების შესაბამისად. ამასთან ერთად,  $\tau_m$  კვანძის აღნიშვნაში, უარყოფით ან  $n$ -ზე მეტი ინდექსის შემთხვევაში იგულისხმება დაყოფის წერტილები შესაბამისად  $m \pm 2n$  ინდექსით.

[6]-ში განხილულია

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} \approx \varphi(t_0) + \sum_{\sigma=1}^n (P_{\nu+2\sigma-1} + P_{\nu+2\sigma+1}) \frac{\varphi(\tau_{\nu+2\sigma+1}) - \varphi(t_0)}{\tau_{\nu+2\sigma+1} - t_0}$$

მიახლოება იმ პირობით, რომ  $t_0 \in \tau_{v-1}, \tau_{v+1} (t_0 \neq \tau_{v-1}, \tau_{v+1})$ ,

სადაც

$$P_{v+2\mu-1} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{v+2\mu-1}}^{\tau_{v+2\mu+1}} l_{v\mu}^{(0)}(t) dt = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{v+2\mu-1}}^{\tau_{v+2\mu+1}} l_{v\mu}^{(1)}(t) d(t),$$

$$\text{ამასთან, } l_{v\mu}^{(0)}(t) = \frac{t - \tau_{v+2\mu+1}}{\tau_{v+2\mu-1} - \tau_{v+2\mu+1}}, l_{v\mu}^{(1)}(t) = \frac{t - \tau_{v+2\mu-1}}{\tau_{v+2\mu+1} - \tau_{v+2\mu-1}}$$

აქ  $v$  ინდექსი შეესაბამება იმ ნომერს, რომლისთვისაც  $t_0$  პარამეტრის მოცემული მნიშვნელობა მოთავსებულია  $\tau_{v-1}, \tau_{v+1}$  რკალში.

როგორც ვხედავთ, სინგულარული ინტეგრალის აპროქსიმაციის აღწერილი პროცესი დაფუძნებულია  $\varphi(t, t_0)$  გაყოფილი სხვაობის მიახლოებაზე, რომელიც უფრო გლუვია ( $\varphi(t)$  ფუნქციის საკმარისად გლუვობის შემთხვევაში), ვიდრე ცნობილ კლასიკურ დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდში სააპროქსიმირებული  $\varphi(t)$  ფუნქცია (ამ საფუძველზე აგებული კვადრატული ფორმულა, როგორც ადვილი სანახავია, ზუსტია, როცა  $\varphi(t)$  წარმოადგენს მრავალწევრს, რომლის ხარისხი  $\leq 2$ ).

$t_0$  პარამეტრისათვის  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{2n}$  მნიშვნელობების მიცემით მივიღებთ  $(S_\varphi)(t_0)$  სინგულარული ინტეგრალისათვის გარკვეულ აპროქსიმაციის სქემას. აღნიშნულ სქემაში, კლასიკურისაგან განსხვავებით, სათვლელი და საკონტროლო კვანძები (იხ. მაგ. [4]) ერთხელ და სამუდამოდ არ არის განსხვავებული, არამედ ცვლის ერთმანეთს  $t_0 \in \left\{ \tau_j \right\}_{j=1}^{2n}$  -ის ნებისმიერი მნიშვნელობიდან უახლოეს კვანძზე გადასვლის დროს (ინდექსზე, რომელსაც აქვს სხვა ლუწკენტოვანება).

მთლიანობაში, [99]-ში, ნებისმიერი  $t_0 \in L$ -სთვის,  $(S_\varphi)(t_0)$ -ის აპროქსიმაციისთვის, გამოიყენება უბან-უბან გლუვი კვადრატული



ინტერპოლაცია, რომელიც დაწყებული რომელიმე ფიქსირებული კვანძიდან აიგება სამ მომდევნო კვანძზე.

[99]-ში ნაჩვენებია, რომ, თუ  $\varphi(t)$  ფუნქციას  $L$ -ზე გააჩნია მეორე რიგის შემოსაზღვრული წარმოებული, მაშინ აღნიშნული კვადრატურული ფორმულით მიახლოება გვაძლევს კრებადობის  $O(n^{-2} \ln n)$  რიგს. თუ დამატებით  $\varphi''(t)$   $L$ -ზე აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას  $\alpha (0 < \alpha \leq 1)$  მაჩვენებლით, მაშინ [6]-ში მოყვანილი მსჯელობების საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ  $O(n^{-2} \ln n)$  შეფასებაში შეგვიძლია მოვაცილოთ, მხოლოდ ლოგარითმული მამრავლი. შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ  $O(n^{-2} \ln n)$  შეფასება, სიზუსტის რიგის მცირე დანაკარგით, შენარჩუნებული იქნება იმ შემთხვევაშიც, როცა აღნიშნული უბან-უბან კვადრატული მიახლოების ნაცვლად გამოვიყენებთ უფრო მარტივ უბან-უბან წრფივ აპროქსიმაციას.

#### §1.4 დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდის

მოდულიზირებული მომატებული რიგის სიზუსტის გამოთვლითი

სქემის აგების შესახებ გახსნილი კონტურების შემთხვევაში

წარმოიშობა ბუნებრივი საკითხი აიგოს ანალოგიური სქემები გახსნილი კონტურების შემთხვევაში. ბუნებრივია, ამ დროს წარმოიშობა გაცილებით უფრო რთული დამატებითი სიმწიფეები, სინგულარული ინტეგრალების წირის ბოლოებში ყოფაქცევის გამო (იხ. [1]), ასევე შესაბამისი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების ამონახსნების თვისებების გამო, საჭირო ხდება გარკვეული წონიანი სინგულარული ინტეგრალების აპროქსიმაცია და მათი შესაბამისი გამოყენება აღნიშნულ განტოლებებში.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს სინგულარული ინტეგრალი

$$S^{(p;q)}(\varphi; t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L (t-a)^p (t-b)^q \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0}, \quad (1.4.1)$$

სადაც  $L \equiv ab$  კომპლექსურ სიბრტყეზე რაიმე გახსნილი გლუვი კონტურია  $a$  და  $b$  ბოლოებით, რომელიც მოცემულია პარამეტრული სახით  $t = t(s)(s_a \leq s \leq s_b)$ .

$$\rho(t) = (t-a)^p (t-b)^q,$$

წონითი ფუნქციაა, სადაც  $p$  და  $q$  პარამეტრები იღებს ერთ-ერთ მნიშვნელობას  $\pm 1/2$  რიცხვებიდან. ამ მრავალსახა ფუნქციის ქვეშ იგულისხმება რომელიმე ფიქსირებული შტო. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, მრავალი პრაქტიკული გამოყენებითი ტიპის ამოცანები (იხ. [4], [1-2], [3]) მიიყვანება ასეთი ტიპის ინტეგრალების შემცველ სინგულარულ განტოლებებზე, ამიტომ უდიდესი მნიშვნელობა ენიჭება ასეთი ინტეგრალების აპროქსიმაციის საკითხებს, რომელსაც ქვემოთ განვახორციელებთ.

ნებისმიერი ნატურალური  $n$ -სთვის  $[s_a, s_b]$  შუალედი დავყოთ  $2n$  ტოლ ნაწილად წერტილებით:

$$s_\sigma = \frac{s_b - s_a}{2n} (\sigma - 1) \quad (\sigma = 1, 2, \dots, 2n + 1)$$

და აღვნიშნოთ  $\tau_\sigma = t(s_\sigma)$  ( $\sigma = 1, 2, \dots, 2n + 1$ )

სიცხადისა და მსჯელობის გამარტივების მიზნით ვიგულისხმეთ, რომ  $p = -q = 1/2$

$$\begin{aligned} S^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) &= \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} = \varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt = \\ &= \varphi(t_0) + \sum_{\sigma=1}^n \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{2\sigma-1} \tau_{2\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

მოვახდინოთ  $\chi(t, t_0) = \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}$  ფუნქციის წრფივი ინტერპოლაცია

$\tau_{2\sigma-1}, \tau_{2\sigma+1}$  კვანძით წერტილებში,

$$\chi(t, t_0) \approx \frac{t - \tau_{2\sigma-1}}{\tau_{2\sigma+1} - \tau_{2\sigma-1}} \chi(\tau_{2\sigma+1}, t_0) + \frac{t - \tau_{2\sigma+1}}{\tau_{2\sigma-1} - \tau_{2\sigma+1}} \chi(\tau_{2\sigma-1}, t_0) \quad (1.4.3)$$

შევიტანოთ (1.4.3) ფორმულა (1.4.2)-ში, გვექნება

$$\begin{aligned} S^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t) &= \varphi(t_0) + \sum_{\sigma=1}^n \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{2\sigma-1} \tau_{2\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} dt \approx \varphi(t_0) + \\ &+ \sum_{\sigma=1}^n \int_{\tau_{2\sigma-1} \tau_{2\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \left[ \frac{t - \tau_{2\sigma-1}}{\tau_{2\sigma+1} - \tau_{2\sigma-1}} \chi(\tau_{2\sigma+1}, t_0) + \frac{t - \tau_{2\sigma+1}}{\tau_{2\sigma-1} - \tau_{2\sigma+1}} \chi(\tau_{2\sigma-1}, t_0) \right] = \\ &= \varphi(t_0) + p_1 \chi(\tau_1, t_0) + \sum_{\sigma=1}^{n-1} (q_1^{(1/2; -1/2)}_{2\sigma-1} + q_1^{(1/2; -1/2)}_{2\sigma+1}) \chi(\tau_{2\sigma+1}, t_0) + q_1^{(1/2; -1/2)}_{2\sigma-1} \chi(\tau_{2n-1}, t_0), \end{aligned}$$

სადაც

$$\begin{aligned} q_1^{(1/2; -1/2)}_{2\sigma-1} &= \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{2\sigma-1} \tau_{2\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{t - \tau_{2\sigma-1}}{\tau_{2\sigma+1} - \tau_{2\sigma-1}} dt, q_2^{(1/2; -1/2)}_{2\sigma+1} = \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{2\sigma-1} \tau_{2\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{t - \tau_{2\sigma+1}}{\tau_{2\sigma-1} - \tau_{2\sigma+1}} dt \quad (\sigma = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

თუ ინტერპოლაციის წერტილებად მივიღებთ ლუწი ინდექსის წერტილებს, მაშინ წინა მსჯელობის ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} D_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi, t_0) &= \varphi(t_0) + q_2^{(1/2; -1/2)} \chi(\tau_2; t_0) + \sum_{\sigma=1}^{n-1} q_1^{(1/2; -1/2)}_{2\sigma} + \\ &+ q_2^{(1/2; -1/2)}_{2\sigma+2} \chi(\tau_{2\sigma+2}, t_0) + q_1^{(1/2; -1/2)}_{2n-2} \chi(\tau_{2n}, t_0) \end{aligned}$$

სადაც

$$\begin{aligned} q_1^{(1/2; -1/2)}_{2\sigma} &= \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{2\sigma} \tau_{2\sigma+2}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{t - \tau_{2\sigma}}{\tau_{2\sigma+2} - \tau_{2\sigma}} dt, q_2^{(1/2; -1/2)}_{2\sigma+2} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{2\sigma} \tau_{2\sigma+2}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{t - \tau_{2\sigma+2}}{\tau_{2\sigma} - \tau_{2\sigma+2}} dt \\ &(\sigma = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

ანალოგიურად აიგება კვადრატული ფორმულები:

$$D_n^{(1/2;1/2)}(\varphi, t_0) = t_0 \varphi(t_0) + q_1^{(1/2;1/2)} \chi(\tau_1; t_0) + \sum_{\sigma=1}^{n-1} q_1^{(1/2;1/2)} +$$

$$+ q_1^{(1/2;1/2)} \chi(\tau_{2\sigma+1}, t_0) + q_1^{(1/2;1/2)} \chi(\tau_{2n+1}, t_0)$$

$$D_n^{(-1/2;-1/2)}(\varphi, t_0) = q_1^{(-1/2;-1/2)} \chi(\tau_1; t_0) + \sum_{\sigma=1}^{n-1} (q_1^{(-1/2;-1/2)} +$$

$$+ q_1^{(-1/2;-1/2)}) \chi(\tau_{2\sigma+1}, t_0) + q_1^{(-1/2;-1/2)} \chi(\tau_{2n+1}, t_0)$$

სადაც

$$q_1^{(1/2;1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{2\sigma-1}\tau_{2\sigma+1}} \sqrt{(t-a)(t-b)} \frac{t - \tau_{2\sigma-1}}{\tau_{2\sigma+1} - \tau_{2\sigma-1}} dt, q_1^{(1/2;1/2)} =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{2\sigma-1}\tau_{2\sigma+1}} \sqrt{(t-a)(t-b)} \frac{t - \tau_{2\sigma+1}}{\tau_{2\sigma-1} - \tau_{2\sigma+1}} dt$$

$$q_1^{(-1/2;-1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{2\sigma-1}\tau_{2\sigma+1}} \sqrt{\frac{1}{(t-a)(t-b)}} \frac{t - \tau_{2\sigma-1}}{\tau_{2\sigma+1} - \tau_{2\sigma-1}} dt, q_1^{(-1/2;-1/2)} =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{2\sigma-1}\tau_{2\sigma+1}} \sqrt{\frac{1}{(t-a)(t-b)}} \frac{t - \tau_{2\sigma+1}}{\tau_{2\sigma-1} - \tau_{2\sigma+1}} dt$$

$(\sigma = 1, 2, \dots, n)$

მოცემულ შემთხვევაში კვანძით წერტილებად აღებულია კენტინდექსიანი დაყოფის წერტილები. თუ კვანძით წერტილებად ლუწინდექსიან წერტილებს ავიღებთ, მაშინ შესაბამისად მივიღებთ

$$D_n^{(1/2;1/2)}(\varphi, t_0) = t_0 \varphi(t_0) + q_2^{(1/2;1/2)} \chi(\tau_2; t_0) + \sum_{\sigma=1}^{n-1} q_1^{(1/2;1/2)} +$$

$$+ q_2^{(1/2;1/2)} \chi(\tau_{2\sigma+2}, t_0) + q_1^{(1/2;1/2)} \chi(\tau_{2n}, t_0),$$

$$D_n^{(-1/2;-1/2)}(\varphi, t_0) = q_2^{(-1/2;-1/2)} \chi(\tau_2; t_0) + \sum_{\sigma=1}^{n-1} (q_1^{(-1/2;-1/2)} +$$

$$+ q_2^{(-1/2;-1/2)}) \chi(\tau_{2\sigma+2}, t_0) + q_1^{(-1/2;-1/2)} \chi(\tau_{2n}, t_0)$$

სადაც

$$\begin{aligned}
q_{2\sigma}^{(1/2;1/2)} &= \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{2\sigma}\tau_{2\sigma+2}} \sqrt{(t-a)(t-b)} \frac{t-\tau_{2\sigma}}{\tau_{2\sigma+2}-\tau_{2\sigma}} dt, q_{2\sigma+2}^{(1/2;1/2)} = \\
&= \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{2\sigma}\tau_{2\sigma+2}} \sqrt{(t-a)(t-b)} \frac{t-\tau_{2\sigma+2}}{\tau_{2\sigma}-\tau_{2\sigma+2}} dt \\
q_{2\sigma}^{(-1/2;-1/2)} &= \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{2\sigma}\tau_{2\sigma+2}} \sqrt{\frac{1}{(t-a)(t-b)}} \frac{t-\tau_{2\sigma}}{\tau_{2\sigma+2}-\tau_{2\sigma}} dt, q_{2\sigma+2}^{(-1/2;-1/2)} = \\
&= \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{2\sigma}\tau_{2\sigma+2}} \sqrt{\frac{1}{(t-a)(t-b)}} \frac{t-\tau_{2\sigma+2}}{\tau_{2\sigma}-\tau_{2\sigma+2}} dt \quad (\sigma = 1, 2, \dots, n)
\end{aligned}$$

$\tau_\nu$  კვანძებში  $D_n^{(\pm 1/2; \pm 1/2)}(\varphi; \tau_\nu)$  ჯამების საშუალებით შეიძლება ავსოთ მიახლოებითი ფორმულა შესაბამისად  $S^{(\pm 1/2; \pm 1/2)}(\varphi; t_0)$  სინგულარული ინტეგრალისათვის, რომლებსაც აზრი ექნებათ ნებისმიერი  $t_0 \in L$ -სთვის, ამასთან ექნებათ სიზუსტის იგივე რიგი, რაც  $\tau_\nu$ -კვანძით წერტილებში.

ვთქვათ  $L_n$  უბან-უბან პოლინომიალური საინტერპოლაციო ფუნქციაა, რომელიც აგებულია  $\tau_{2\sigma-1}\tau_{2\sigma+1}$  რკალზე ( $\sigma = 1, 2, \dots, n$ ) სამ მომდევნო  $\tau_{2\sigma-1}, \tau_{2\sigma+1}$  კვანძზე  $D_n$ -ის შესაბამისი მნიშვნელობების საშუალებით.

აღვნიშნოთ

$$S^{(\pm 1/2; \pm 1/2)}(\varphi; t_0) \approx \varphi(t_0) + L_n \left[ \left( D_n^{(\pm 1/2; \pm 1/2)} \varphi \right); t_0 \right], t_0 \in L \quad (1.4.5)$$

სადაც  $L_n$ , როგორც აღვნიშნეთ უბან-უბან პოლინომიალური ოპერატორია, რომელიც ყოველ რკალზე წარმოადგენს საინტერპოლაციო მრავალწევრს, რომლის ხარისხი ნაკლებია ან ტოლია სამზე. მაშინ ცხადია, რომ ასეთნაირად განსაზღვრული (1.4.5) კვადრატურული ფორმულა აკმაყოფილებს ზემოთ მოთხოვნილ თვისებებს, კერძოდ, მას აზრი აქვს ნებისმიერი  $t_0 \in L$ , ამასთან,  $L$ -საზღვარზე ინარჩუნებს სიზუსტის იგივე რიგს, რასაც  $\{\tau_\nu\}$  კვანძებში.

მტკიცდება, რომ (1.4.5) ფორმულის ნაშთითი წევრისათვის, როდესაც  $\varphi(t)$  ფუნქციას გააჩნია მეორე რიგის შემოსაზღვრული წარმოებული, სამართლიანია შემდეგი შეფასება:

$$\|R_n^{(1/2;-1/2)}(\varphi; t_0)\|_{H_\beta} \leq \frac{M \ln n}{n^{3/2+\alpha-\phi}} \quad (n > 1, \beta < \alpha - 1/2), \quad (1.4.6)$$

$$\|R_n^{(-1/2;-1/2)}(\varphi; t_0)\|_{H_\beta} \leq \frac{A \ln n}{n^{3/2+\alpha-\phi}} \quad (n > 1, \beta < \alpha - 1/2) \quad (1.4.7)$$

$$\|R_n^{(1/2;1/2)}(\varphi; t_0)\|_{H_\beta} \leq \frac{B \ln n}{n^{3/2+\alpha-\phi}} \quad (n > 1, \beta < \alpha - 1/2) \quad (1.4.8)$$

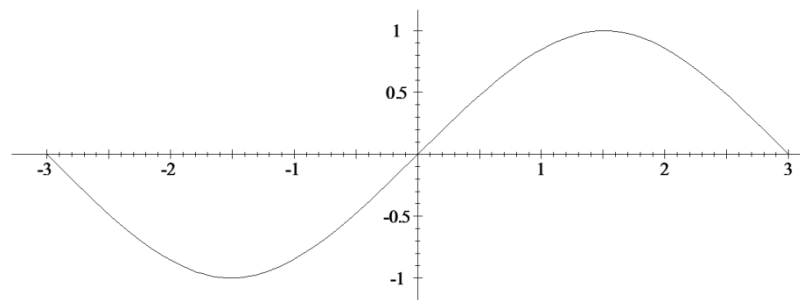
სადაც  $M, A, B$  მუდმივებია, რომლებიც დამოკიდებულია მხოლოდ  $L$ -ზე და  $\varphi^{(2)}$  ფუნქციის ჰელდერის მაჩვენებელზე.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ჩვენ  $\int_{\tau_{2\sigma-1}\tau_{2\sigma+1}}^{\tau_{2\sigma-1}\tau_{2\sigma+1}} \sqrt{(t-a)/(t-b)} \chi(t, t_0) dt$  ინტეგრალის

აპროქსიმაციის დროს  $\tau_{2\sigma-1}\tau_{2\sigma+1}$  რკალზე გამოვიყენეთ წრფივი ინტერპოლაცია,  $\tau_{2\sigma-1}\tau_{2\sigma+1}$  კვანძით წერტილებზე. იმ შემთხვევაში, თუ საჭიროა აპროქსიმაციის მომატება  $\tau_{2\sigma-1}\tau_{2\sigma+1}$  რკალზე უნდა გამოვიყენოთ უფრო მაღალი რიგის სიზუსტის ინტერპოლაცია, კერძოდ, უნდა გამოვიყენოთ კვანძებად  $\tau_{2\sigma-1}, \tau_{2\sigma}, \tau_{2\sigma+1}$  წერტილები და მაშინ თუ  $\varphi(t)$ -ს ექნება შესაბამისი სიგლუვე, კრებადობის რიგი გაიზრდება ერთით.

ქვემოთ მოყვანილია (1.4.1) ტიპის წონიანი სინგულარული ინტეგრალების გამოთვლის ცხრილები, ჩვენ მიერ ზემოთ აგებული კვადრატურული ფორმულების საშუალებით  $\varphi(t) = t^3$  ფუნქციისათვის,  $p(t)$  წონისა და  $L$  ინტეგრების წირის  $n$  დაყოფათა რიცხვის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის, როცა ინტეგრების წირი წარმოადგენს სინუსოიდას  $[-\pi, \pi]$  შუალედში (სურ.

1)



ნახ. 1

ცხრილი 1

$$p(t) = \sqrt{(\pi + t)/(\pi - t)}$$

$n$	$t_0$	$S^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$	$D_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$	$R_n = S^{(1/2; -1/2)} - D_n^{(1/2; -1/2)}$
5	-2.51327-0.475581	-19.3329+13.33071	-19.00531+13.241251	0.3276+0.08941
	2.51327+0.475581	4.3144+55.94281	4.594+55.85331	-0.2796+0.8951
	-2.827-0.29381	-25.6417+19.3711	-25.5499+19.31671	0.0918+0,06431
	2.827+0.293891	15.1995+61.32281	15.2914+61.26851	-0.0919+0.5431
20	-2.9845-0.1545081	-28.5052+24.55821	-28.479+24.54191	0.0262+0.01631
	2.98451+0.1545081	22.70104+62.26441	22.7365+62.2481	-0.03546+0.01641

ცხრილი 2

$$p(t) = 1/\sqrt{(\pi + t)/(\pi - t)}$$

$n$	$t_0$	$S^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$	$S_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$	$R_n = S^{(1/2; -1/2)} - D_n^{(1/2; -1/2)}$
5	-2.51327-0.47551	-2.39027+11.02521	-2.30122+10.99671	0.08905+0.02521
	2.51327+0.47581	-2.39027+11.02521	-2.30122+10.99671	0.08905+0.02521
10	-2.82743-0.2931	-1.66192+12.84281	-1.63269+12.82551	0.02923+0,01731
	2.82743+0.29381	-1.66192+12.84281	-1.63269+12.82551	0.02923+0,01731
20	-2.98451-0.15451	-0.922265+13.8181	-0.913948+13.8131	0.00832+0.00511
	2.98451+0.15481	-0.922265+13.81821	-0.913948+13.8131	0.00832+0.00511

ცხრილი 3

$$p = \sqrt{(\pi - t)/(\pi + t)}$$

$n$	$t_0$	$S^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$	$S_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$	$R_n = S^{(1/2; -1/2)} - D_n^{(1/2; -1/2)}$
5	-2.51327-0.47558	-43.1753+13.11571	-43.6396+12.60231	-0.5643+0.51341
	2.51327+0.47551	-43.1753+13.11571	-43.6396+12.60231	-0.5643+0.51341
10	-82743-0.293891	-67.9758+24.91561	-68.1006+24.75151	-0.1248+0,16411
	2.82743+0.29381	-67.9758+24.91561	-68.1006+24.75151	-0.1248+0,16411
20	-2.98451-0.15451	-82.6162+39.62841	-82.6482+39.58511	-0.0198+0.04331
	2.98451+0.15451	-82.6162+39.62841	-82.6482+39.58511	-0.0198+0.04331

როგორც 1,2,3 ცხრილებიდან ჩანს, აღნიშნულ კვადრატურულ ფორმულებს გააჩნიათ სიზუსტის საკმაოდ მაღალი რიგი, წირის ბოლოებში

(განსაკუთრებულ წერტილებში)  $n=20$ -სათვის უკვე მიიღწევა მიახლოების ცდომილება  $10^{-2}$  რიგი.

ცხადია, თუ საჭიროა კიდევ უფრო მეტი სიზუსტე, უნდა გაიზარდოს კონტურის დაყოფათა რიცხვი.

### **§1.5 კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის ჩებიშევის ტიპის კვადრატურული ფორმულებისათვის მომატებული რიგის სიზუსტის შესახებ**

დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდი (დგმ) კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნებისათვის ცნობილი გახდა გასული საუკუნის 80-იან წლებში, განსაკუთრებით კი [4] ცნობილი მონოგრაფიის გამოქვეყნებისას. მიუხედავად ამჟამად არსებულ ლიტერატურაში (დგმ) გამოჩენისა, ცნობილი იყო ბევრი სხვა მიდგომაც სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნისადმი, რომლებიც ამჟამად გადმოცემულია ცალკეულ შრომებსა და მონოგრაფიებში (იხ. მაგ., მონოგრაფია [12]), (დგმ) გამოირჩევა იმ თავისებურებით, რომ ამოცანების კლასის მთელ რიგ შემთხვევებში ეს მეთოდი იძლევა წრფივი ალგებრული განტოლებების სისტემების უშუალო ამოხსნების შესაძლებლობას, ეს განტოლებები კი მიიღება განსახილველი სინგულარული ინტეგრალური განტოლების დისკრეტიზაციის შედეგად. ეს გარემოება, ასეთი სახის სქემების პრაქტიკულ ეფექტურობასთან ერთად, წარმოადგენს მნიშვნელოვან თეორიულ ინტერესსაც, რადგანაც, როგორც ეს ნაჩვენებია [12]-ში მარტივი მახასიათებელი სინგულარული ინტეგრალური განტოლების მაგალითზე, ასეთი განტოლებების საუკეთესო აპროქსიმაციაც



კი არ არის იმ ალგებრული სისტემის ცალსახა ამოხსნის გარანტი, რომელიც მიიღება საწყისი სინგულარული ინტეგრალური განტოლების აპროქსიმაციის შედეგად.

მეორეს მხრივ, უნდა აღინიშნოს, რომ დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდი დაფუძნებულია მართკუთხედების ტიპის კვადრატურების ფორმულების გამოყენებაზე ( ზოგადად გართულებული სტრუქტურის - ს.მ. ნიკოლსკის ტერმინოლოგიით [67]), და ამიტომაც, მისი სიზუსტე არცთუ ისე დიდია. და ამიტომაც გარკვეულ ინტერესს წარმოადგენს დისკრეტული განსაკუთრებულობის ტიპის კვადრატურული ფორმულების აგების საკითხი, რომლებსაც სიზუსტის მაღალი ხარისხიც გააჩნიათ. ამასთან დაკავშირებით, (დგმ)-ს გამოყენებით გამომავალი გამოთვლითი სქემების ანალიზისას შეინიშნება, რომ ამ უკანასკნელთა გამოყენებითი ეფექტურობა განპირობებულია კვადრატურული კოეფიციენტების თანასწორობით ერთმანეთთან ტოლობით. ისინი შედიან გართულებული სტრუქტურის კვადრატურულ სქემებში, რომლებიც გამოიყენება ამოცანის გადაწყვეტის საბოლოო ეტაპზე. ამით გათვალისწინებულია ზემოთ მოხსენიებული (დგმ)-ს გამოყენებადი ეფექტურობა, ხოლო მეორეს მხრივ, იქვე გამოთქმული აზრი გამოყენებული კვადრატურული ფორმულების სიზუსტის თაობაზე, - რომლებიც ახორციელებენ პრაქტიკულად შესაბამის მეთოდს, - დიდ ინტერესს წარმოადგენს საკითხი ამ მეთოდის სიზუსტის ამაღლების შესაძლებლობაზე ისე, რომ შენარჩუნებული იყოს ამ კვადრატურული ფორმულების სიმარტივე.

ზემოთ აღნიშნულის თანახმად, ასეთი ამოცანის განხორციელების ძირითად ფაქტორს შესაძლოა წარმოადგენდეს სინგულარული ინტეგრალებისათვის იმ კვადრატურული ფორმულების აგებისა და გამოყენების შესაძლებლობა, რომლებიც შეიცავენ ერთნაირ რიცხვით კოეფიციენტებს. ქვემოთ ნაჩვენები იქნება, რომ ასეთი ფორმულები სინგულარული ინტეგრალებისათვის შესაძლოა აიგოს ჩებიშევის კვადრატურული ფორმულების საფუძველზე (იხ. მაგ., [20], [68]). როგორც ცნობილია, ასეთი ფორმულები  $n$  რიცხვით

ორდინატების შესაძლებელია  $n \leq 7$ . და  $n = 9$ . მნიშვნელობებისას. გადმოცემის დაკონკრეტებისათვის უფრო დეტალურად განვიხილავთ კვადრატურულ ფორმულას სინგულარული ინტეგრლებისათვის, რომლის დასკვნა დაფუძნებულია ჩებიშევის კვადრატურული ფორმულის გამოყენებაზე კვანძების რაოდენობით  $n = 4$ . ამისათვის (ფუნქციის სათანადო სიგლუვის პირობისას  $\varphi(t)$ ) გამოვალთ შემდეგი კვადრატურული ფორმულიდან ჩებიშევის კვანძებითურთ  $\pm t_1, \pm t_2$  (იხ. მაგ.,

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} dt \approx \frac{1}{2} \left\{ \frac{\varphi(-t_1) - \varphi(t_0)}{-t_1 - t_0} + \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_0)}{t_1 - t_0} + \frac{\varphi(-t_2) - \varphi(t_0)}{-t_2 - t_0} + \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_0)}{t_2 - t_0} \right\},$$

$$t_0 \in (-1, 1), \quad t_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 2}{3\sqrt{5}}}, \quad t_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 2}{3\sqrt{5}}},$$

(1.5.1)

ახლა, შესაბამისი (1.5.1) ზუსტი ტოლობიდან გამომდინარე, ნულს გაუტოლოთ მასში არსებული (მოცემულ ტოლობაში)  $\varphi(t_0)$  მამრავლის სახით გამოსახულება, რაც საბოლოოდ მიგვიყვანს ტოლობასთან

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{t - t_0} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{-t_1 - t_0} + \frac{1}{t_1 - t_0} + \frac{1}{-t_2 - t_0} + \frac{1}{t_2 - t_0} \right\}, \quad t_0 \in (-1, 1). \quad (1.5.2)$$

აქედან, რადგან შესაბამისი სინგულარული ინტეგრალი ლოგარითმით გამოისახება (იხ. მაგ., [1]), (1.5.2)-დან ვიღებთ ტოლობას:

$$\ln \frac{1 - t_0}{1 + t_0} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{-t_1 - t_0} + \frac{1}{t_1 - t_0} + \frac{1}{-t_2 - t_0} + \frac{1}{t_2 - t_0} \right\} = 0, \quad t_0 \in (-1, +1). \quad (1.5.3)$$

ეს უკანასკნელი შესაძლოა განვიხილოთ როგორც პირობა დისკრეტული განსაკუთრებულობათა ტიპის კვადრატული ფორმულის  $t_0 \in (-1, +1)$  სინგულარობის წერტილების მნიშვნელობების განსაზღვრისათვის რომელსაც ასეთი წერტილის (წერტილების) არსებობისას აქვს  $t_0$  სახე.

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt \approx \frac{1}{2} \left\{ \frac{\varphi(-t_1)}{-t_1 - t_0} + \frac{\varphi(t_1)}{t_1 - t_0} + \frac{\varphi(-t_2)}{-t_2 - t_0} + \frac{\varphi(t_2)}{t_2 - t_0} \right\}, \quad (1.5.4)$$

თანაც წინასწარაა ცნობილი, რომ სინგულარობის წერტილების ერთ-ერთ მნიშვნელობას წარმოადგენს  $t_0 = 0$ . ხოლო სხვა მნიშვნელობები  $t_0$  (ისინი გამოთვლილია ქვემოთ ექვსი ათეული ნიშნის სიზუსტით (1.5.3)-ის საშუალებით):

-0.970411, -0.494516, 0.494516, 0.970411.

კვადრატურული ფორმულის აგების ზემოთ მოცემული (1.5.4) პროცესის თანახმად, ცხადია, რომ მისი სიზუსტის ალგებრული ხარისხი უდრის ოთხს (ანუ ფორმულა (1.5.4) ნაშთი წევრის გარეშე სწორია  $\leq 4$  ხარისხის ნებისმიერი მრავალწევრებისათვის). ასეთი ტიპის (1.5.4) ანალოგიური ფორმულების აგება თეორიის თანახმად, ანალოგიური (1.5.4) ფორმულების აგება  $n$  ორდინატების დიდი რაოდენობით, შესაძლოა განხილული იყოს შემდეგში მხოლოდ  $n = 5, 6, 7, 9$  მნიშვნელობებისათვის.

ამასთანავე, ზემოთ გადმოცემულის (იხ.[20], [68]) თანახმად, ჩებიშევის კვადრატურულ ფორმულებთან მიმართებაში, რეგულარული ფუნქციებისათვის მიღებული შედეგების სიზუსტის თვალსაზრისით, უფრო ეფექტური შესაძლოა აღმოჩნდეს შესაბამისი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის სქემები, რომლებიც აგებულია ჩებიშევის უფრო მაღალი რიგის ზუსტი ფორმულების გამოყენების საფუძველზე.

და ბოლოს, ვუბრუნდებით რა (1.5.3) განტოლების ნულების საკითხს, აღვნიშნავთ, რომ (1.5.4) კვადრატურული ფორმულის აგებისას გამოყენებულ ნულებთან  $t_0 = 0$  მნიშვნელობის მიერთებას მიყვავართ განტოლებების ხელახლა განსაზღვრულ სისტემასთან, რომელიც, მთელ რიგ შემთხვევებში, შესაძლოა განუსაზღვრელიც კი აღმოჩნდეს, თუმცა ეს ხელს არ უშლის აქ განხილული კვადრატურული ფორმულის აგებას ხსენებული ნულისაგან განსხვავებული სინგულარობის პარამეტრის მნიშვნელობების საფუძველზე. ხოლო ასეთი მიდგომისას მიღებული

წრფივი ალგებრული სისტემების ამოხსნა შესაძლებელია ნაჩვენები იყოს შესაბამისი მატრიცების დეტერმინანტების პირდაპირი გამოთვლის გზით.

### §1.6 კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის მომატებული რიგის სიზუსტის შესახებ კვადრატურული ფორმულებისათვის

სხვადასხვა გამოყენებებში, კერძოდ, ფუნქციათა თეორიის სასაზღვრო ამოცანებში, არსებითია კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრალების როლი

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\phi(t) dt}{t-x} \quad (-1 < x < 1)$$

(რომლებიც განიხილება კოშის მთავარი მნიშვნელობის აზრით). ნავარაუდევია, რომ წონითი ფუნქცია  $\rho(t)$  აკმაყოფილებს ასეთი ინტეგრალის თეორიაში ზოგადად მიღებულ პირობებს. მოცემულ შემთხვევაში ძირითადი შედეგები შეეხება ჩებიშევის  $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$  წონითი ფუნქციას, რომელიც უფრო ხშირად გვხვდება გამოყენებებში, ანუ ჩვენ განვიხილავთ

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\phi(t) dt}{\sqrt{1-t^2} (t-x)} \quad (-1 < x < 1)$$

სახის ინტეგრალებს.

[66] შენიშვნაში შემოთავაზებული იყო განსაზღვრული კვადრატურული ფორმულა მოცემული ინტეგრალისათვის. რომლისთვისაც კვანძებად აღებულია  $T_n(x)T_{n+1}(x)$ -ის ნულები, სადაც  $T_m(x)$  ( $m = n, n+1$ ) შესაბამისი ხარისხების ჩებიშევის პოლინომია არსია  $c$   $om\alpha$  ( $r$   $c$   $x$ ). ხსენებული

კვადრატული ფორმულა განსაკუთრებით მოსახერხებელია იმ შემთხვევებში, როდესაც საჭიროა იმ შედეგების ხელახალი გამოთვლა და შედარება, რომლებიც მიიღება  $n$ -ის სხვადასხვა მომდევნო მნიშვნელობებისას. მიუხედავად ამისა, ასეთი სახის კვადრატული ფორმულების გამოყენებისას განსაკუთრებით აღსანიშნავია ის გარემოება, რომ  $x(-1, +1)$  სინგულარობის პარამეტრის სათანადო შერჩევისას შესაძლოა მივიღოთ ცალკეული კვადრატული ფორმულები სინგულარული ინტეგრალებისათვის, რომლებსაც გააჩნიათ  $2n$  სიზუსტის მაღალი ალგებრული ხარისხი. აქ განხილული წონითი ფუნქციის შემთხვევაში,  $x$ -ის ასეთ მნიშვნელობებად ითვლება  $n-1$  ხარისხის მეორე რიგის ჩებიშევის მრავალწევრის ნულები (იხ.მაგ., [20]). ამასთან, როგორც ცნობილია [64], მოცემული ხარისხით სიზუსტისათვის  $x$  პარამეტრის მნიშვნელობები განისაზღვრება ერთმნიშვნელოვნად შესაბამის ფორმულებში.

მეორეს მხრივ, მაღალი სიზუსტის სინგულარული ინტეგრალებისათვის კვადრატული ფორმულების დანართებში ეფექტურობიდან გამომდინარე, ბუნებრივია, შეძლებისდაგვარად, ვცადოთ გავაფართოვოთ  $x$  სინგულარობის პარამეტრების იმ მნიშვნელობების სიმრავლე, რომელთა საშუალებითაც შესაძლებელია მივაღწიოთ სინგულარული ინტეგრალებისათვის შესაბამისი კვადრატული ფორმულების სიზუსტის ასე თუ ისე მაღალ ხარისხს. ზოგად თეორიული და ექსპერიმენტული განხილვებიდან გამომდინარე, აქ ქვემოთ მითითებულია ზოგიერთი საერთო მიდგომა წონითი ფუნქციების მქონე სინგულარული ინტეგრალებისათვის მთელი რიგი ასეთი კვადრატული ფორმულების ასაგებად:

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\varphi(t_k)}{t_k-x}; x \in (-1, +1), x \neq t_k,$$

სადაც  $\{t_k\}, \{A_k\}$  - შესაბამისად, გაუსის ჩვეულებრივი კვადრატული ფორმულის კვანძები და წონებია, თანაც ნაგულისხმევია, რომ წონითი

ფუნქცია  $\rho(t)$  აკმაყოფილებს ცნობილ (იხ. მაგ., [20]) სტანდარტულ პირობებს. იმ პირობით, რომ მოცემული მიახლოებული ტოლობები გადავა ზუსტში, როდესაც  $\varphi(t)$  არის  $\leq 2n$  ხარისხის ნებისმიერი მრავალწევრი. [64]-ში აგებული სინგულარული ინტეგრალებისათვის უმაღლესი ალგებრული სიზუსტის ხარისხის (გაუსის ფორმულა) კვადრატურული ფორმულები. ხოლო თუკი ჩავთვლით, რომ ანალოგიურ ტოლობებს ადგილი აქვს მხოლოდ  $r_n$  ხარისხების მრავალწევრებისათვის, სადაც ბუნებრივი  $r_n$ -თვის ადგილი აქვს  $n < r_n \leq 2n - 1$ , მაშინ ასეთ შემთხვევაში ვისაუბრებთ ზოგადად კვადრატურულ ფორმულებზე სიზუსტის ხარისხით, რომელიც ინტერპოლაციურზე მაღალია.  $2n - 1$ -თან ყველაზე ახლოს მდგომ  $r_n$  მნიშვნელობებს, ბუნებრივია, მივყავართ სინგულარული ინტეგრალებისათვის კვადრატურულ ფორმულებამდე, რომლის სიზუსტე უახლოვდება გაუსის კვადრატურული ფორმულების სიზუსტეს.

$n$  კვანძების რაოდენობების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის ჩატარებულმა ექსპერიმენტებმა დაადასტურა ამ მიმართულებით წარმოქმნილი თეორიული მოსაზრებები

## §1.7 კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის სიზუსტით გაუსის ტიპის მახლობელი კვადრატურული

### ფორმულების შესახებ

კოშის მთავარი მნიშვნელობის მიხედვით სინგულარული ინტეგრალების მიახლოებით გამოთვლებისადმი მისი დიდი ინტერესიდან გამომდინარე ამჟამად მიძღვნილია სხვადასხვა ავტორებისაგან ნაშრომების სოლიდური რაოდენობა. გამოყენებითი ხასიათის მთელი რიგი ამოცანების ამოხსნისას ასეთი ინტეგრალების გამოყენების შესაძლებლობამ განაპირობა როგორც მათემატიკოს-მკვლევარების, ისე გამომყენებლების ფართო ინტერესი ასეთი ინტეგრალებისათვის ეფექტური კვადრატურული ფორმულების აგებისა და კვლევისადმი. ასეთი ხასიათის ფორმულებთან მუშაობისას სპეციფიკურ საკითხებთან ერთად წარმოიშვება ჩვეულებრივ ინტეგრალებთან დაკავშირებული ანალოგიური საკითხებიც, რომლებიც რაღაც ოდენობით მაინც განპირობებულია განსახილველი ამოცანის ამა თუ იმ სპეციფიკით. ასეთებს განეკუთვნება, მაგალითად, კვადრატურული ფორმულების სიზუსტის შეფასების საკითხები ინტეგრების წირის ბოლოების მახლობლობაში, სინგულარული ინტეგრალებისათვის ინტეგრების ინტერვალზე კონკრეტული კვადრატურული ფორმულების სიზუსტის საკითხები სინგულარობის წერტილების განლაგების მიხედვით და ა.შ.

აქ წამოჭრილი განსახილველი საკითხის სიცხადის მიზნით ჯერ განვიხილოთ შემდეგი ინტეგრალი

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t - x} dt \quad (-1 < x < 1) \quad (1.7.1)$$

წონითი ფუნქციით  $\rho(t)$  რომელიც ზოგადად აკმაყოფილებს წონითი ფუნქციებისათვის მიღებულ პირობებს (მაგ. იხ. [20], ხოლო  $\varphi(t)$  ეკუთვნის გლუვი ფუნქციების ამა თუ იმ კლასს, რომლებიც უზრუნველყოფენ მოცემული ინტეგრალის არსებობას განსახილველი  $x \in [-1; +1]$  შუალედზე

(1.7.1) ინტეგრალისათვის განვიხილოთ გაუსის კვადრატურული ფუნქცია  $t_k$  კვანძებით და  $\{A_k\}$  კოეფიციენტებით:

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t - x} dt \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\varphi(t_k) - \varphi(x)}{t_k - x} \quad (-1 < x < 1) \quad (1.7.2)$$

იგულისხმება, რომ  $\varphi(t)$  -ს გააჩნია შესაბამისი სიგლუვე, ამასთან, როცა  $t_k = x$  (1.7.2)-ე გამოსახულებაში იგულისხმება შესაბამისი ზღვარი.

როდესაც  $\varphi(t)$  წარმოადგენს  $\leq 2n$  მრავალწევრს, ცხადია, ნებისმიერი  $x \in (-1; +1)$  -ისათვის მოცემული კვადრატურული ფორმულა, არის ზუსტი, ხოლო თუ  $x \in (-1 < x < 1)$  მნიშვნელობები (1.7.2)-ში შერჩეულია ისე, რომ ამ უკანასკნელისათვის შესრულდეს ტოლობა

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{dt}{t - x} - \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{t_k - x} = 0, \quad (1.7.3)$$

მაშინ  $x$ -ის შესაბამისი მნიშვნელობებისათვის (1.7.3)-ე პირობის მიხედვით შემდეგი სინგულარული ინტეგრალისათვის

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t)}{t - x} dt \quad (-1 < x < 1):$$

გვექნება კვადრატურული ფორმულა

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t)}{t - x} dt \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\varphi(t_k)}{t_k - x} \quad (-1 < x < 1), \quad (1.7.4)$$

რომელიც ზუსტია  $x (x \neq t_k)$  მნიშვნელობებისათვის, როცა  $\varphi(t)$  არის  $\leq 2n$  ხარისხის ნებისმიერი მრავალწევრი. ამასთან, როგორც ცნობილია (იხ. [64]), სინგულარობის  $x$  წერტილების სიმრავლე, რომლების დროსაც (1.7.4)-ეში მიიღწევა სიზუსტის უმაღლესი ალგებრული ხარისხი, შედგება  $(n-1)$   $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  მნიშვნელობებისაგან, რომლებიც შეადგენენ ე. წ. მეორე რიგის ფუნქციის ნულებს (იხ. [3], [65]). ამრიგად, ასეთი სტრუქტურის კვადრატურული ფორმულები, რომლებიც ლიტერატურაში ცნობილია სინგულარული ინტეგრალისათვის გაუსის კვადრატურული



ფორმულების სახელწოდებით, განისაზღვრება სავსებით ერთმნიშვნელოვნად მოცემული  $\rho(t)$ -სათვის  $\{x_k\}_{k=1}^{n-1}$  სინგულარობის წერტილების მნიშვნელობებით. ამით შეიძლება ითქვას, რომ  $x$  სინგულარობის პარამეტრის იმ მნიშვნელობების რაოდენობა, რომელთა დროსაც მიიღწევა (1.7.4)-ე კვადრატურული ფორმულების უმაღლესი ალგებრული სიზუსტე, მკაცრად შეზღუდულია.

ამასთან დაკავშირებით, იმ კვადრატურული ფორმულების პრაქტიკული ეფექტურობის გათვალისწინებით, რომლებსაც გააჩნიათ სიზუსტის ასე თუ ისე მაღალი ხარისხი, ბუნებრივია ვცადოთ რაღაც ოდენობით სინგულარობის ასეთი წერტილების  $x$  რაოდენობის გაზრდა, რაც მე- (1.7.4) სახის ფორმულებთან მიმართებაში შესაძლოა განხორციელდეს ასეთი ფორმულების სიზუსტის შედარებით დაწვევის ხარჯზე, მაგრამ ისე კი, რომ შესაბამის კვადრატურულ ფორმულებს გააჩნდეთ სიზუსტის მნიშვნელოვნად უფრო მაღალი ხარისხი, ვიდრე გაცილებით ხშირად გამოყენებად (ანდა მათთან მიახლოებულ) ინტერპოლაციური სიზუსტის ფორმულებს.  $(\sqrt{1-t^2})^{-1}$  ჩებიშევისკის წონის შემთხვევაში, კერძო სახის ზოგიერთი ასეთი ფორმულა მოყვანილია [66]-ში. მოცემულ შემთხვევაში ამ საკითხის შემდგომი განხილვა მდგომარეობს  $x$  -ის მთელი რიგი სხვა, ზემოთ მითითებული  $\{x_v\}_{v=1}^{n-1}$  მნიშვნელობების პოვნაში, რაც გამოიხატება (1.7.3)-ის მარცხენა ნაწილში გამოსახულების გათანაბრებით განსაზღვრულად შერჩეულ,  $n$  -ზე დამოკიდებულ რიცხვთან, რომელიც მიისწრაფის ნულისაკენ სათანადო სიჩქარით, როცა  $n \rightarrow \infty$ . ამასთანავე  $r = 2n$  შემთხვევა შეესაბამება [64]-ში მოცემულ კვადრატურულ ფორმულას ჩებიშევის წონიანი სინგულარული ინტეგრალისათვის.

რიცხვითი მაგალითების სახით ქვემოთ მოყვანილია (1.7.4) კვადრატურული ფორმულით ჩატარებული გამოთვლების რამდენიმე შედეგი ჩებიშევის წონიანი ფუნქციის  $p(t) = (\sqrt{1-t^2})^{-1}$  შემთხვევაში  $r$ -ის განსხვავებული მნიშვნელობებისას. ამასთან დაკავშირებით პირველ რიგში

აღნიშნოთ, რომ  $r = 2n$  შემთხვევაში, როგორც ეს მოსალოდნელი იყო, შესაბამისი შედეგები მნიშვნელოვანი სიზუსტით ემთხვევა მოსალოდნელ შედეგებს [64]-დან. ხოლო მიღებული შედეგები  $2n-1, 2n-2, 2n-3$ -ს დროს, იძლევა  $x$  სინგულარობის საძიებო წერტილების მიახლოებით მნიშვნელობას, რომლებიც განსხვავდება [64]-დან მიღებულისაგან და ამასთან ერთად მათი ანალოგიური თვისებების მატარებელიცაა სიზუსტის უფრო მაღალი ხარისხის მიღწევის თვალსაზრისით, ვიდრე სიზუსტის ინტერპოლაციური ხარისხის კვადრატურული ფორმულების შემთხვევაში. ქვემოთ მოცემულია შესაბამისი რიცხვითი ექსპერიმენტის ზოგიერთი შედეგი, შედარებისათვის ზემოთ მოხსენიებულ [64]-ში რიცხვითი მონაცემების გათვალისწინებით, რომლებიც განეკუთვნება (1.7.4)-ე ცნობილ კვადრატურულ ფორმულას სინგულარობის  $x$  პარამეტრის მნიშვნელობებისათვის

$$\begin{aligned} &\{x = 0.951057\}, \{x = -0.951057\}, \{x = 0.809017\}, \\ &\{x = -0.809017\}, \{x = -0.587785\}, \{x = 0.587785\}, \\ &\{x = 0.309017\}, \{x = -0.309017\}, \{x = 0\}. \end{aligned}$$

ეს უკანასკნელი შეესაბამება ზემოთ მოყვანილ შედეგს უკვე მოხსენიებული ნაშრომიდან [64]. ხოლო ქვედა ცხრილში მოცემული შედეგები შეესაბამება  $r$  პარამეტრის ოთხ სხვადასხვა მნიშვნელობას, რომლების დროსაც მიიღწევა გაუსის სიზუსტესთან თანმიმდევრულად მიახლოებული მნიშვნელობები, რომლებიც განსაზღვრულია პირობებით:

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{dt}{t-x} - \sum_{k=1}^n A_k \frac{A_k}{t_k - x} = O\left(\frac{1}{(2n)^r}\right): \quad (1.7.5)$$

$$r = 2n$$

$$\begin{aligned} &\{x = 0.951051\}, \{x = -0.951166\}, \{x = 0.808964\}, \\ &\{x = -0.809508\}, \{x = -0.58757\}, \{x = -0.588612\}, \{x = -0.308519\}, \end{aligned}$$

$$\{x = -0.309959\}, \{x = -0.000796391\}, \{x = -0.000796391\}$$

$$r = 2n - 1$$

$$\{x=0.951278\}, \{x=-0.9464\}, \{x=0.811053\}, \{x = -0.789402\},$$

$$\{x = 0.595877\}, \{x = -0.556487\}, \{x = 0.327475\},$$

$$\{x=-0.274258\}, \{x=0.0292467\}, \{x= 0.0292467\}$$

$$r = 2n - 2$$

$$\{x=0.951503\}, \{x=-0.940935\}, \{x=0.813065\}, \{x=-0.771394\},$$

$$\{x=0.603542\}, \{x = -0.531103\}, \{x=0.343939\},$$

$$\{x = -0.246632\}, \{x= 0.0535829\}, \{x = -0.0535829\}$$

$$r = 2n - 3$$

$$\{x = 0.951725\}, \{x = -0.935098\}, \{x = 0.815002\}, \{x = -0.757817\},$$

$$\{x=0.610537\}, \{x=-0.513714\}, \{x=0.35771\},$$

$$\{x=-0.227433\}, \{x=0.0719113\}, \{x=-0.0719113\}.$$

$r = 2n$ -ის შესაბამისი შედეგები, როგორც ეს მოსალოდნელი იყო, მნიშვნელოვნად უახლოვდება [66]-ში მიღებულ შედეგებს, სადაც

შესაბამისი სხვაობის მარცხენა ნაწილი გათანაბრებულია  $O\left(\frac{1}{(2n)^r}\right)$ -ს

ნაცვლად ნულთან. როგორც რიცხვითი ექსპერიმენტიდან ცხადი ხდება,  $r$ -ის მნიშვნელობის თანდათანობითი შემცირებისას მოცემულ საზღვრებში ჩვენ ვიღებთ კვადრატურულ ფორმულებს რამდენადმე შემცირებული, მაგრამ მაინც გაუსის სიზუსტისადმი მიახლოებული სიზუსტით.

ზემოთ განხილული მიდგომის გამოყენებისას ანალოგიური სინგულარული ინტეგრალებისათვის კვადრატურული ფორმულების ასაგებად, მოცემული და სხვა სახის წონითი ფუნქციებით, ჩვენ რამდენადმე ვაფართოებთ სინგულარობის იმ წერტილების მნიშვნელობების სიმრავლეს (აქ მოცემულ აღნიშვნებში  $x$ - წერტილები, რომლებითაც მიიღწევა კოშის

გულიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის კვადრატული ფორმულების სიზუსტის გარკვეულწილად მაღალი ალგებრული ხარისხი.

ცხადია, რომ საკითხი  $r$  პარამეტრის მნიშვნელობების რამდენადმე ოპტიმალური შერჩევის თაობაზე შესაბამისი კვადრატული ფორმულების სიზუსტესთან მიმართებაში, გარკვეულწილად გართულებულია. ამით, (1.7.4) სახის სინგულარული ინტეგრალების ყველაზე უფრო ეფექტური სიზუსტის ფორმულების აგების მიზნით ძალიან არსებითია გამოთვლითი ექსპერიმენტის როლი. ამასთან დაკავშირებით კიდევ ერთხელ უნდა აღინიშნოს მომატებული სიზუსტის სინგულარული ინტეგრალებისათვის კვადრატული ფორმულების გამოყენების ცნობილი ეფექტურობა იმ ამოცანების რიცხობრივ ამოხსნით, რომლებიც დაკავშირებულია კომის გულიან სინგულარული ინტეგრალების შემცველი ინტეგრალური განტოლებების გადაწყვეტის საკითხთან.

### **§1.8სანიკიძე-კუბლაშვილის კომის გულიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის კვადრატული ფორმულების**

#### **მომატებული რიგის სიზუსტის შესახებ**

ჩებიშევის ნაშრომის გამოჩენამ მნიშვნელოვნად გაზარდა კვლევების რიცხვი. ზოგიერთ მათგანში აგებულია ჩებიშევისეულის მსგავსი ფორმულები, ზოგიერთში კი ჩებიშევის ფორმულებისა ან მათი მონათესავე ფორმულების არსებობის აუცილებელი პირობები და საკმარისი პირობები. ჩვენ აქ შევჩერდებით ცნობილი მათემატიკოსის ა.ა. მარკოვის შესანიშნავ

სტატიაზე „ უწყვეტი წილადების ახალი დანართები“, რომელიც გამოქვეყნდა 1896 წელს მეცნიერებათა აკადემიის ჩანაწერებში.

მარკოვმა განიხილა (50) სახის კვადრატული ფორმულები, რომლებიც ზუსტია  $\leq 2m$  ხარისხის მრავალწევრებისათვის. გარდა ამ ფორმულებისა, მარკოვმა ააგო და შეისწავლა შემდეგი სახის კვადრატული ფორმულები:

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\varphi(x)dx = k \left\{ \sum_{i=1}^{m+1} \varphi(x_i) - \sum_{i=m+2}^{2m+1} \varphi(x_i) \right\},$$

რომლებიც ზუსტია  $\leq 2m+1$  ხარისხის ნებისმიერი  $\varphi(x)$  მრავალწევრისა და  $F(x)$  ფუნქციისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\int_{-1}^{+1} F(x)dx \neq 0.$$

მარკოვის ფორმულები სიმარტივით არ ჩამორჩება ჩებიშევის ფორმულებს.

მარკოვის კვადრატული ფორმულების არსებობისათვის აუცილებელი და საკმარისი პირობები მოგვცეს ნ.ი. ახიეზერმა და მ.გ. კრეინმა [1].  $F(x)=1$ -სათვის მარკოვის ფორმულები არსებობენ ნებისმიერი  $m$ -თვის. ქვემოთ განხილული იქნება მარკოვის კვადრატული ფორმულები მხოლოდ  $F(x)=1$ -თვის.

მარკოვის კვადრატული ფორმულების მისაღებად  $F(x)=1$ -თვის საერთო ფორმულიდან ჩვენ დავუშვებთ ამ ფორმულაში, რომ  $a=0, h=1, t_\beta=1, n=1, t_0=0, A_0=A, A_\nu=(-1)^{r+\nu} A (\nu=1,2,\dots,r)$ ,

სადაც  $A$  – ჯერ კიდევ უცნობი მუდმივაა.

ამრიგად, ჩვენ მივედით კვადრატულ ფორმულამდე

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = (-1)^r 2A \left\{ f(0) + \sum_{\nu=1}^r (-1)^\nu [f(t_\nu) + f(-t_\nu)] \right\} + 2 \int_0^1 tP(t)f(\pm t, 0, \dots, \pm t_r)dt$$

აქ რიცხვები  $t_\nu (\nu = 1, 2, \dots, r)$ . და კოეფიციენტი  $A$  აკმაყოფილებენ განტოლებების ალგებრულ სისტემას:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 \frac{P_0(t)}{P_0(0)} dt &= (-1)^r A, \\ \int_0^1 \frac{t P_\nu(t)}{t_\nu P_\nu(t)} dt &= (-1)^{r+\nu} 2A, \end{aligned} \right\} \quad (1.8.1)$$

სადაც  $\nu$  იღებს მნიშვნელობებს  $1, 2, \dots, r$

მიღებული ტოლობების შეჯამებისას, ჩვენ ვხედავთ, რომ

$$(-1)^r A \left\{ 1 + 2 \sum_{\nu=1}^r (-1)^\nu \right\} = 1.$$

ანუ  $A=1$ . რჩება  $t_\nu (\nu = 1, 2, \dots, r)$  რიცხვების განსაზღვრისათვის ამოვხსნათ ერთობლივად განსხვავებული განტოლებების  $r$ , რომელიც აღებულია სისტემიდან (1.8.1).

მაგალითისათვის  $r=1$ . აქ  $T_0 = 0$ , ხოლო  $t_1$ -თვის ჩვენ უნდა ავიღოთ განტოლების ფესვი

$$\int_0^1 t^2 dt = 2t_1^2.$$

ამრიგად, ვხედავთ, რომ  $t_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}$  და, ამის შესაბამისად, მარკოვის ფორმულას

ექნება შემდეგი სახე:

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = 2 \left\{ f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) - f(0) + f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \right\} + 2 \int_0^1 t^2 \left(t^2 - \frac{1}{6}\right) f\left(\pm t, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right) dt.$$

$t$ -ს შეცვლისას  $-t$ -ზე ჩვენ მიღებული ფორმულის ნაშთითი წევრისათვის ვპოულობთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$2 \int_{-1}^0 t^2 \left(t^2 - \frac{1}{6}\right) f\left(\pm t, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right) dt.$$

ნაწილობითი ინტეგრირების დახმარებით ის შესაძლოა მნიშვნელოვნად გამარტივდეს. ამისათვის განვიხილოთ ფუნქცია

$$Q(t) = \int_{-1}^1 \left( t^2 - \frac{1}{6} \right) dt,$$

რომელიც არ არ უდრის ნულს  $(-1,0)$  მონაკვეთის შიგნით. გვექნება:

$$\begin{aligned} 2 \int_{-1}^0 \left( t^2 - \frac{1}{6} \right) f \left( \pm t, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \right) dt &= \int_{-1}^0 \left[ f \left( t, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \right) - f \left( -t, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right] dQ = \\ &= - \int_{-1}^0 Q(t) \left\{ f \left( t, t, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \right) + f \left( -t, -t, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\} dt, \end{aligned}$$

რადგანაც  $Q(-1) = 0$ . თუ გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის თეორემას, დავრწმუნდებით, რომ

$$\int_{-1}^0 Q(t) \left\{ f \left( t, t, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \right) + f \left( -t, -t, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\} dt = 2 \frac{f^{(4)}(\xi)}{41} \int_{-1}^0 Q(t) dt.$$

კვლავ ნაწილობითი ინტეგრირებისას ვიღებთ:

$$\int_{-1}^0 Q(t) dt = - \int_{-1}^0 \left( t^2 - \frac{1}{6} \right) dt = - \frac{13}{90}$$

და ამით საბოლოოდ ვპოულობთ ზემოთ მოცემული ფორმულის ნაშთით

$$\text{წევრს } \frac{13}{1080} f^{(4)}(\zeta) \text{ სახით.}$$

საბოლოოდ, როცა  $r = 2$  და  $t_1$  და  $t_2$  განტოლებების ფესვებია,

$$\int_0^1 (t^2 - t_1^2) dt = 2t_2^2 (t_2^2 - t_1^2),$$

$$\int_0^1 (t^2 - t_2^2) dt = -2t_1^2 (t_1^2 - t_2^2),$$

ჩვენ მივიღებთ მარკოვის მიერ ნაპოვნ ფორმულას.

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = 2 \left\{ f\left(\sqrt{\frac{23}{60}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{23}{60}}\right) - f\left(\sqrt{\frac{13}{60}}\right) - f\left(-\sqrt{\frac{13}{60}}\right) + f(0) \right\} + \frac{3821}{36075600} f^{(VI)}(\zeta),$$

როგორც ბოლო ფორმულიდან ჩანს მარკოვმა შეძლო თავის კვადრატული ფორმულის აგება  $n=4$  კვანძისათვის, რაც შეესაბამება (1.8.1) სისტემის ამოხსნას  $r=2$ -შემთხვევისათვის. როცა  $r > 2$  მიიღება რთული არაწრივი განტოლებათა სისტემა, რომლის ამოხსნაც მან ვერ შეძლო. როგორც ჩვენმა თეორიულმა და კომპიუტერულმა კვლევებმა აჩვენა, აღნიშნულ შემთხვევაში კვანძები თითქმის ერთმანეთს ემთხვევა (ერთიდაიგივე დაგროვების წერტილი აქვს). ცნობილია, რომ ასეთი სისტემების ამოხსნის დროს წარმოიშობა ორი არსებითი პრობლემა: 1) ეს არის ფესვების იზოლირება. 2) ამ ფესვების მიახლოებითი პოვნა. უნდა აღინიშნოს, რომ პირველი პრობლემის გადაჭრა ძალიან რთულია და ზოგჯერ შეუძლებელიც მითუმეტეს ისეთი სისტემებისთვის, როგორცაა (1.8.1).

თანამედროვე კომპიუტერების გამოყენებით ჩვენ შევძელით ამ პრობლემის დაძლევა.  $r=3$ -ის შემთხვევაში (1.8.1) სისტემის ამოხსნით მივიღეთ 12 კვანძი, რომელიც აუმჯობესებს მ. კუბლაშვილისა და ჯ. სანიკიძის შედეგს [70]. აღსანიშნავია ის გარემოება, რომ ჩვენს მიერ აიგო მარკოვის ტიპის ანალოგიური კვადრატული ფორმულა სინგულარული ინტეგრალებისათვის.

ასევე უნდა აღინიშნოს, რომ მნიშვნელოვან საკითხს წარმოადგენს სინგულარული ინტეგრალებისათვის ისეთი კვადრატული ფორმულების აგებისა და გამოყენების შესაძლებლობა, რომლებიც შეიცავენ ერთნაირ რიცხვით კოეფიციენტებს [4].



ვთქვათ მოცემული გვაქვს შემდეგი სახის სინგულარული ინტეგრალი

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} \quad (1.8.2)$$

სადაც  $\varphi(t) \in H$ . ეს ინტეგრალი შეიძლება წარმოდგეს შემდეგი სახით.

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} = \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt + \varphi(t_0) \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{t-t_0} \quad (1.8.3)$$

(1.8.3)-ში პირველი შესაკრები წარმოადგენს სუსტი განსაკუთრებულობის სინგულარულ ინტეგრალს. მართლაც

$$\int_{-1}^{+1} \left| \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} \right| dt \leq \int_{-1}^{+1} \frac{C |t-t_0|^\alpha}{|t-t_0|} dt = \int_{-1}^{+1} \frac{C}{|t-t_0|^{1-\alpha}} dt \quad (1.8.4)$$

ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია მისი შეცვლა მარკოვის კვადრატურული ფორმულით

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt &\approx 2 \left\{ \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_0)}{t_1 - t_0} + \frac{\varphi(-t_1) - \varphi(t_0)}{-t_1 - t_0} - \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_0)}{t_2 - t_0} - \frac{\varphi(-t_2) - \varphi(t_0)}{-t_2 - t_0} + \right. \\ &+ \dots + (-1)^{n-1} \frac{\varphi(t_n) - \varphi(t_0)}{t_n - t_0} + (-1)^{n-1} \frac{\varphi(-t_n) - \varphi(t_0)}{-t_n - t_0} + (-1)^{n-1} \frac{\varphi(0) - \varphi(t_0)}{t_0} \left. \right\} = \quad (1.8.5) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n (-1)^{n-1} \frac{\varphi(t_k) - \varphi(t_0)}{t_k - t_0} + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^{n-1} \frac{\varphi(-t_k) - \varphi(t_0)}{-t_k - t_0} + (-1)^{n-1} \frac{\varphi(0) - \varphi(t_0)}{t_0}, \\ &t_0 \in (-1; 1). \end{aligned}$$

აქ  $t_k$ ,  $k=1, \dots, n$  მნიშვნელობებს ვპოულობთ (1.8.1) სისტემიდან. ჩვენს შემთხვევაში  $r=3$ ,  $v=1, 2, 3$ . ვღებულობთ:

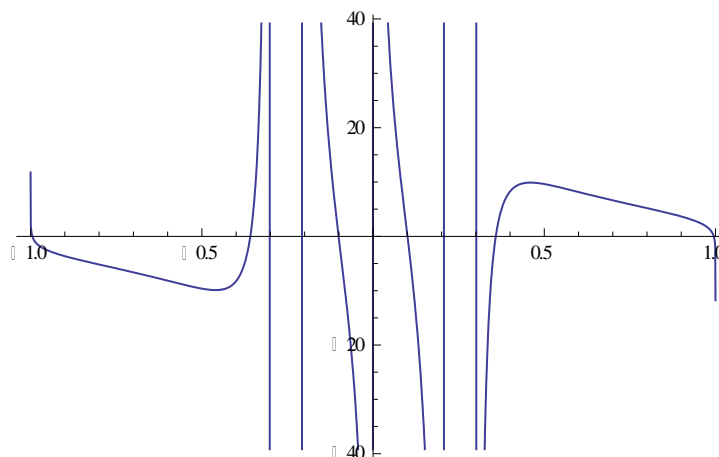
$$\begin{aligned} v=1; & \int_0^1 t^2 (t^3 - t_2^3)(t^3 - t_3^3) = 2t_1^2 (t_1^3 - t_2^3)(t_1^3 - t_3^3) \\ v=2; & \int_0^1 t^2 (t^3 - t_1^3)(t^3 - t_3^3) = 2t_2^2 (t_2^3 - t_1^3)(t_2^3 - t_3^3) \quad (1.8.6) \\ v=3; & \int_0^1 t^2 (t^3 - t_1^3)(t^3 - t_2^3) = 2t_3^2 (t_3^3 - t_1^3)(t_3^3 - t_2^3) \end{aligned}$$

ეს უკანასკნელი წარმოადგენს არაწრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას  $t_1, t_2, t_3$  ცვლადების მიმართ, რომელსაც შესაძლებელია ქონდეს როგორც ნამდვილი ასევე კომპლექსური ამონახსნები. (1.8.6)-ის ამოხსნა განვახორციელეთ კომპიუტერის საშუალებით პროგრამული პაკეტი „Mathematika“-ს გამოყენებით, რის შედეგადაც აღმოჩნდა, რომ (1.8.6) განტოლებათა სისტემას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში გააჩნია 12 ამონახსნი (ფესვი). ესეიგი მივიღეთ  $t_k, k = 1, 2, \dots, 12$  მნიშვნელობები. ჩვენთვის საინტერესოა როგორც მიღებული  $t_k, k = 1, 2, \dots, 12$  მნიშვნელობები, ასევე მათი ნოლის მიმართ სიმეტრიული წერტილები და თვით  $t = 0$  წერტილი. ესეიგი სულ მივიღეთ 25 კვანძითი წერტილი. თუ კლებადობის მიხედვით დალაგებულ  $t_k, k = 1, 2, \dots, 12$  -ის მნიშვნელობებს შვეიცანთ შემგებ განტოლებაში (იხ. § 1.5)

$$\ln \frac{1-t_0}{1+t_0} - 2 \left\{ \frac{1}{-t_1-t_0} + \frac{1}{t_1-t_0} - \frac{1}{-t_2-t_0} - \frac{1}{t_2-t_0} + \dots + \right. \quad (1.8.7)$$

$$\left. (-1)^{n-1} \frac{1}{-t_n-t_0} + (-1)^{n-1} \frac{1}{t_n-t_0} + (-1)^n \frac{1}{t_0} \right\} = 0, \quad t_0 \in (-1, +1).$$

და ამოვხსნით ამ განტოლებას  $t_0$  ცვლადის მიმართ, მივიღებთ სინგულარობის წერტილების მნიშვნელობებს. (1.8.7) განტოლების ამოხსნა განვახორციელეთ პროგრამული პაკეტი „Mathematika“-ს გამოყენებით, გრაფიკულად, რის შედეგადაც აღმოჩნდა, რომ მას  $t_0 \in (-1, +1)$  არეში გააჩნია შვიდე ფესვი (იხილეთ ნახაზი-1).



(ნახ.-2)

უნდა აღინიშნოს,  $t_0$  ფესვების მოძებნა მოხერხდა მხოლოდ მას შემდეგ, რაც (1.8.6) განტოლებისათვის განვახორციელეთ ამონახსნის მოძებნა 22 ნიშნის სიზუსტით. ეს კი განპირობებული იყო იქედან, რომ (1.8.6) არაწრფივ განტოლებათა სისტემას აქვს ამონახსნის მიმართ დაგროვების წერტილები, რის შესახებაც მსჯელობის დასაწყისში იყო საუბარი.

ესეიგი მივიღეთ, რომ როცა  $r=3$ , მაშინ მოიძებნა 25 კვანძითი  $t_k, k=1, 2, \dots, 25$  წერტილი და შესაბამისი 7 სინგულარობის  $t_{0j}, j=1, 2, \dots, 7$  წერტილი. მაშასადამე, მოცემული (1.8.2) განტოლებისავის ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი მიახლოებითი ფორმულა

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} \approx 2 \sum_{k=1}^{12} \left( \frac{\varphi(t_k)}{t_k-t_{0j}} + \frac{\varphi(-t_k)}{-t_k-t_{0j}} \right) + 2 \frac{\varphi(0)}{-t_{0j}}, \quad j=1, 2, \dots, 7$$

ესეიგი შესაძლებელია მიახლოებით გამოვთვალოთ მოცემული სინგულარული ინტეგრალი სინგულარობის 7 წერტილისათვის. ქვემოთ მოცემულია  $t_k, k=1, 2, \dots, 12$  და  $t_{0j}, j=1, 2, \dots, 7$  -ის მნიშვნელობები:

$t_1 = 0.8748906074186820253805$	
$t_2 = 0.8748906074186820253766$	
$t_3 = 0.8748906074186820184239$	$t_{01} = -0.994987$
$t_4 = 0.8748906074186820145221$	$t_{02} = -0.358476$
$t_5 = 0.7779343185075440422565$	$t_{03} = -0.100635$
$t_6 = 0.7779343185075439912877$	$t_{04} = 0$
$t_7 = 0.7277150731016115605432$	$t_{05} = 0.994987$
$t_8 = 0.7277150731016114968030$	$t_{06} = 0.358476$
$t_9 = 0.3017517031835172963083$	$t_{07} = 0.100635$
$t_{10} = 0.3017517031835172156894$	
$t_{11} = 0.2068648544348662732937$	
$t_{12} = 0.2068648544348662732845$	

## §1.9 მაღალი რიგის გამოთვლითი სქემები წონიანი სინგულარული

### ინტეგრალების მიახლოებითი გამოთვლისათვის

წონიანი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის მაღალი რიგის გამოთვლითი სქემები აგებული აქვს მრავალ ავტორს (ივანოვი, მუსაევი, ჯიშკარიანი, ბოიკოვი და სხვა). ჩვენ ამ თავში განვიხილავთ მ. კუბლაშვილის მიერ აგებულ მაღალი რიგის გამოთვლით სქემებს წონიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის.

განვიხილოთ შემდეგი სახის სინგულარული ინტეგრალი

$$S(\varphi; t_0, \eta) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{(t-c)^\eta (t-t_0)} \quad (t_0 \in L) \quad (1.9.1)$$

აღვნიშნოთ

$$S^{(\nu; \delta)}(\varphi; t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{ab} (t-a)^\nu (t-b)^\delta \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0}, \quad (\nu, \delta \in \{\pm 1/2\})$$

კონკრეტულობისთვის და მსჯელობის გამარტივებისთვის ჩვენ ყველგან ამ §-ში განვიხილავთ შემდეგი სახის სინგულარული ინტეგრალების აპროქსიმაციის საკითხებს:

$$S^{(1/2;-1/2)}(\varphi; t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0}, \quad (t_0 \in ab, t_0 \neq a, b) \quad (1.9.2)$$

ქვემოთ მოყვანილ კვადრატულ ფორმულებში, სინგულარული ინტეგრალების აპროქსიმაციისათვის, კვანძითი წერტილების სისტემა აიგება ისევე, როგორც ეს მოცემულია გართულებული კვადრატული ფორმულების აგებისას შემოსაზღვრული ინტეგრებადი ფუნქციისთვის.

ვთქვათ  $n$ -ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, გავყოთ  $[a, b]$  შუალედი  $n$  ტოლ ნაწილად წერტილებით

$$S_\sigma = a + \frac{b-a}{n}(\sigma-1), \quad \sigma = 1, 2, \dots, n+1$$

შემდეგ მოცემული ფიქსირებული  $m$  ნატურალური რიცხვისთვის ყოველი  $[S_\sigma, S_{\sigma+1}]$  სეგმენტი გავყოთ ნაწილებად წერტილებით

$$S_{\sigma k} = S_\sigma + h \cdot x_k \quad \left( h = \frac{b-a}{n} \right), \quad k = 1, 2, \dots, m$$

სადაც  $\{x_k\}_{k=1}^m \subset [0, 1]$  შუალედიდან აღებული მოცემული წერტილთა სისტემაა. შემდეგში გარკვეულობისათვის ვიგულისხმობთ, რომ  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$  რიცხვები გადანომრილია ზრდის მიხედვით

$$\text{აღვნიშნოთ } \tau_\sigma = t(S_\sigma), \quad t_{\sigma k} = t(S_{\sigma k}) \quad (\sigma = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m)$$

ვიგულისხმობთ, რომ  $\sigma, \nu$ -ნებისმიერია  $1, 2, \dots, n$  რიცხვთაგან და  $t_0$  წერტილი განსხვავებულია  $t_{\sigma k}$  კვანძებისგან. განვიხილოთ გამოსახულება

$$\psi_{\sigma\nu}(\varphi; t, t_0) = \varphi(t_0) + \sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t-t_0}{t_{\sigma k}-t_0} \cdot \varphi(t_{\sigma k}) + \sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t-t_0}{t_0-t_{\sigma k}} \cdot L_\nu(\varphi; t_0),$$

სადაც

$$L_\nu(\varphi; t_0) = \sum_{k_0=1}^m l_{\nu k_0}(t_0) \varphi(t_{\nu k_0}), \quad l_{\sigma k}(t) = \frac{\omega_\sigma(t)}{(t-t_{\sigma k})\omega'_\sigma(t_{\sigma k})}, \quad \omega_\sigma(t) = \prod_{k=1}^m (t-t_{\sigma k}),$$

ხოლო  $\varphi, L$ -ზე მოცემულია ჰელდერის კლასის ფუნქცია ( $\varphi \in H$ ). შევნიშნოთ, რომ  $\Psi_{\sigma\nu}(\varphi; t, t_0)$  გამოსახულებას შეიძლება მივანიჭოთ სრულიად გარკვეული აზრი, როცა  $t_0 = t_{\sigma k}$  (ამ შემთხვევაში უნდა ვიგულისხმოთ, რომ  $t_0 \rightarrow t_{\sigma k}$ ). მართლაც, ვიგულისხმოთ, რომ ნატურალური  $\nu$  რიცხვი ყოველთვის შერჩეულია ისე, რომ მოცემული  $t_0$ -სათვის აღმოჩნდეს  $t_0 \in \tau_\nu, \tau_{\nu+1}$ . ჩვენ ვხედავთ, რომ  $t_0 - t_{\sigma k_1} = 0$  ( $1 \leq k_1 \leq m$ ) შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა  $\sigma \in \nu, \nu \pm 1$  (და თუ ერთდროულად  $x > 0$   $x_m < 1$ , როცა  $\sigma = \nu$ ). ადვილად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ, მაგალითად,  $\sigma = \nu$ -სათვის შესაბამისი გამოსახულება

$$L_\nu(\varphi; t_0) - \varphi(t_{\nu k_1})$$

$\Psi_{\nu\nu}(\varphi; t, t_0)$ -ში უნაშთოდ იყოფა  $t_0 - t_{\nu k_1}$  ( $t_0 \neq t_{\nu k_1}$ )-ზე. ანალოგიურ გარემოებას აქვს ადგილი მაშინაც, როცა  $\sigma = \nu - 1$ ,  $\sigma = \nu + 1$  (თუ შესაბამისად  $x_1 = 0, x_m = 1$ ).

აღვნიშნოთ ახლა

$$\Phi_n(\varphi; t, t_0) = \Psi_{\sigma\nu}(\varphi; t, t_0), \quad t \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1}, \quad t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}$$

$$\sigma = 1, 2, \dots, n; \quad \nu = 1, 2, \dots, n.$$

ზემოთ მოყვანილი შენიშვნის საფუძველზე  $\Phi_n(\varphi; t, t_0)$  გამოსახულება განსაზღვრულია ნებისმიერი  $t, t_0 \in L$  მნიშვნელობისათვის. ამასთან, ცხადია  $\Phi_n(\varphi; t, t_0)$ -ის სემდეგი სტრუქტურული წარმოდგენა

$$\Phi_n(\varphi; t, t_0) = \varphi(t_0) + (t - t_0)H_n(\varphi; t, t_0)$$

სადაც

$$H_n(\varphi; t, t_0) = \sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \frac{L_\nu(\varphi; t_0) - \varphi(t_{\sigma k})}{t_0 - t_{\sigma k}}, \quad t \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1}$$

$$t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}, \quad \sigma, \nu = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$(H_n(\varphi; t, t_{\sigma k_1}) = \lim_{t_0 \rightarrow t_{\sigma k_1}} H_n(\varphi; t, t_0)),$$

ნებისმიერი  $k_1$ -სთვის ( $1 \leq k_1 \leq m$ ).

სინგულარული ინტეგრალი  $S^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$  შევცვალოთ  $S_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$ -ით

$$S_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\Phi_n(\varphi; t, t_0) dt}{t-t_0} = \varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{H_n(\varphi; t, t_0)} dt \quad (1.9.3)$$

(მიახლოებითი ფორმულის მისაღებად გამოყენებული იქნა ტოლობა

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \cdot \frac{dt}{t-t_0} = 1,$$

რომელიც ადვილად მტკიცდება, კოშის თეორემისა და პლემელი-სოხოცკის ფორმულების გამოყენებით [1]).

(1.9.3) გამოსახულების მარჯვენა მხარე ცხადი სახით წარმოიდგინება

$$P_{\sigma k}^{(1/2; -1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \cdot l_{\sigma k}(t) dt, \quad (\sigma = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m)$$

რიცხვებით და  $\varphi$  ფუნქციის მნიშვნელობებით  $t_{\sigma k}$  კვანძებში.

როგორც ზემოთ მოყვანილი მსჯელობებიდან ჩანს (1.9.2), ინტეგრალს აზრი აქვს, როცა  $t_0 \rightarrow c$  ( $c$ -არის  $a$  ან  $b$ ), თუ  $\varphi$  აკმაყოფილებს  $ab$  წირზე ( $a$  და  $b$  ბოლოების ჩათვლით) ჰელდერის პირობას  $1/2$ -ზე მეტი მაჩვენებლით. როგორც შემდეგში გამოირკვევა, ეს გარემოება არსებითია იმ სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნებისთვის, რომლებიც (1.9.2) ტიპის ინტეგრალს შეიცავს. აქედან გამომდინარე, განსახილველი ინტეგრალი  $t_0 = a, b$  წერტილებში განვმარტოთ როგორც შესაბამისი ზღვრული მნიშვნელობები. ჩვენ მივიღებთ შეფასებებს, რომლებიც სამართლიანი იქნება ნებისმიერი  $t_0 \in a, b$ , თვით  $a$  და  $b$

ბოლოების ჩათვლით. ეს უკანასკნელი გარემოება, როგორც ქვემოთ აღმოჩნდა, ეფექტურად გამოიყენება შესაბამისი (იხ. თავი II) სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნებისთვის.

ვიტყვი, რომ  $\varphi \in H_\alpha^{(r)}(L)$ , , თუ  $\varphi$  ფუნქცია უწყვეტია მოცემულ  $L$ (გლუვ) კონტურზე თავის წარმოებულებთან ერთად  $r$  რიგამდე ჩათვლით, ამასთან  $r$ -ური რიგის წარმოებულები  $\varphi^{(r)} \in H_\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) მაჩვენებლით. როცა  $r = 0$   $H_\alpha^{(0)}(L)$  ( $1/2 < \alpha \leq 1$ )-ის ნაცვლად ჩავწერთ  $H_\alpha(L)$ .

თავიდანვე შევნიშნოთ, რომ როგორც ცნობილი მტკიცებულებებიდან გამომდინარეობს ([1], §18-22) თუ  $\varphi \in H_\alpha(L)$  ( $1/2 < \alpha \leq 1$ ), მაშინ

$$S^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) \in H$$

მტკიცდება, რომ აგებული მიახლოებითი სქემისათვის, როდესაც  $\varphi \in H_\alpha^{(r)}(L)$  ( $1/2 < \alpha \leq 1$ ,  $r \leq m$ ), სამართლიანია შეფასება

$$\left| S^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) - S_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) \right| \leq \frac{C_{m_1} \ln n}{n^{r+\alpha-1/2}}, \quad (n > 1)$$

$$\left| S^{(-1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) - S_n^{(-1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) \right| \leq \frac{C_{m_2} \ln n}{n^{r+\alpha-1/2}}, \quad (n > 1) \quad (1.9.4)$$

$$\left| S^{(1/2; 1/2)}(\varphi; t_0) - S_n^{(1/2; 1/2)}(\varphi; t_0) \right| \leq \frac{C_{m_3} \ln n}{n^{r+\alpha-1/2}}, \quad (n > 1)$$

სადაც  $C_{m_1}$ ,  $C_{m_2}$ ,  $C_{m_3}$  მუდმივები დამოკიდებულია მხოლოდ  $L \equiv ab$  კონტურზე,  $\{x_k\}_{k=1}^m$  კვანძებზე და  $\varphi^{(r)}$  ფუნქციის ჰელდერის მაჩვენებელზე.

შევნიშნოთ, რომ  $S_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$  გამოსახულება შეიცავს  $\varphi$  ფუნქციის მნიშვნელობას  $t_0$  ცვლად წერტილში, ამიტომ თვითონ ამ გამოსახულების სინგულარული ინტეგრალის მიახლოებით მნიშვნელოზად მიღება შეიძლება არ იყოს მიზანშეწონილი. ამთვალსაზრისით სავსებით მისაღებია მიახლოებითი ფორმულა



$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} \approx S_n^{*(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0), \quad t_0 \in \tau_v \tau_{v+1}, \quad (v=1, \dots, n)$$

სადაც

$$S_n^{*(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) = L_v(\varphi; t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \lambda_n(\varphi; t; t_0) dt$$

ცხადია, რომ  $t_{vk}$  კვანძებში  $S_n$  და  $S_n^*$  ემთხვევა ერთმანეთს. ასევე მარტივი შესამჩნევია, რომ

$$\left| \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} - S_n^{*(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) \right|$$

გამოსახულებისათვის,  $\varphi$ -ის შესაბამის დაშვებებში სამართლიანია (1.9.4) სახის შეფასება

ამოვწეროთ  $S_n^{*(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$ -ის გამოსახულების სახე გაშლილი ფორმით (გარკვეულობისთვის ვიგულისხმობთ, რომ  $x_{1=0}$  და  $x_m = 1$ )

$$S_n^{*(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) = \left[ 1 + \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq v}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{\sigma k}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{vk}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{vk}} - P_{vj}^{*(-1/2; -1/2)} \sum_{k=1}^m d_{vk}(t_{vj}) \right] \varphi(t_{vj}) - \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq v}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{\sigma k}} \varphi(t_{\sigma k}) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{vk}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{vk}} \varphi(t_{vk}) + P_{vj}^{*(-1/2; -1/2)} \sum_{k=1}^m d_{vk}(t_{vj}) \varphi(t_{vk}) \quad (1.9.5)$$

სადაც

$$d_{vk} = \frac{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k, j}}^m t_{vj} - t_{vj_0}}{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k}}^m t_{vk} - t_{vj_0}}, \quad P_{\sigma k}^{(1/2; -1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \sqrt{\frac{(t-a)}{(t-b)}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{t-t_{\sigma j}}{t_{\sigma k} - t_{\sigma j}} dt$$

$$P_{\sigma k}^{*(-1/2;-1/2)} = \begin{cases} P_{\sigma 1}^{(1/2;-1/2)} + P_{\sigma-1m}^{(1/2;-1/2)}; & \sigma = 1, 2, 3, \dots, n; \\ P_{\sigma k}^{(1/2;1/2)}, & k = 2, 3, \dots, m-1; \sigma = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$(\sigma = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m), \quad (t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}; \quad \nu = 1, 2, \dots, n)$$

ანალოგიურად ამოიწერება კვადრატული ფორმულების შესაბამისი გამოსახულებები:

$$\begin{aligned} S_n^{*(-1/2;-1/2)}(\varphi; t_0) = & \left[ \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(-1/2;-1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\sigma k}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\nu k}^{*(-1/2;-1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\nu k}} - P_{\nu j}^{*(-1/2;-1/2)} \sum_{k=1}^m d_{\nu k}(t_{\nu j}) \right] \varphi(t_{\nu j}) - \\ & - \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(-1/2;-1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\sigma k}} \varphi(t_{\sigma k}) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\nu k}^{*(-1/2;-1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\nu k}} \varphi(t_{\nu k}) + P_{\nu j}^{*(-1/2;-1/2)} \sum_{k=1}^m d_{\nu k}(t_{\nu j}) \varphi(t_{\nu k}) \quad (1.9.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n^{*(1/2;1/2)}(\varphi; t_0) = & \left[ t_{\nu j} + \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(1/2;1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\sigma k}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\nu k}^{*(1/2;1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\nu k}} - P_{\nu j}^{*(1/2;1/2)} \sum_{k=1}^m d_{\nu k}(t_{\nu j}) \right] \varphi(t_{\nu j}) - \\ & - \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(1/2;1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\sigma k}} \varphi(t_{\sigma k}) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\nu k}^{*(1/2;1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\nu k}} \varphi(t_{\nu k}) + P_{\nu j}^{*(1/2;1/2)} \sum_{k=1}^m d_{\nu k}(t_{\nu j}) \varphi(t_{\nu k}) \quad (1.9.7) \end{aligned}$$

სადაც

$$d_{\nu k} = \frac{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k, j}}^m t_{\nu j} - t_{\nu j_0}}{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k}}^m t_{\nu k} - t_{\nu j_0}} P_{\sigma k}^{*(-1/2;-1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{1}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{t - t_{\sigma j}}{t_{\sigma k} - t_{\sigma j}} dt$$

$$P_{\sigma k}^{*(1/2;1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \sqrt{(t-a)(t-b)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{t - t_{\sigma j}}{t_{\sigma k} - t_{\sigma j}} dt$$

$$P_{\sigma k}^{*(-1/2;-1/2)} = \begin{cases} P_{\sigma 1}^{(-1/2;-1/2)} + P_{\sigma-1m}^{(-1/2;-1/2)}; & \sigma = 1, 2, 3, \dots, n; \\ P_{\sigma k}^{(-1/2;-1/2)} & k = 2, 3, \dots, m-1; \sigma = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$P_{\sigma k}^{*(1/2;1/2)} = \begin{cases} P_{\sigma 1}^{(1/2;1/2)} + P_{\sigma-1m}^{(1/2;1/2)}; & \sigma = 1,2,3,\dots,n; \\ P_{\sigma k}^{(1/2;1/2)} & k = 2,3,\dots,m-1; \sigma = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

$$(\sigma = 1,2,\dots, n; \quad k = 1,2,\dots, m), \quad (t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}; \quad \nu = 1,2,\dots, n)$$

უნდა აღინიშნოს, რომ  $S_n^*$  ჯამებს მივყავართ ერთიან გამოთვლით სქემამდე  $t_0 \in L \equiv ab$  პარამეტრის ყველა მნიშვნელობისათვის (კერძოდ, როცა  $t_0$  რანგით ახლოს არის  $L \equiv ab$  წირის კვანძით წერტილებთან  $a$  და  $b$  ბოლოებთან). ამ თვისებების გამო ისინი მოხერხებულად შეიძლება გამოვიყენოთ პრაქტიკულ გამოთვლებში.

ქვემოთ მოყვანილია სინგულარული ინტეგრალების მიახლოებითი გამოთვლის ცხრილები, ზემოთ აგებული (1.9.5), (1.9.6), (1.9.7) კვადრატული ფორმულების გამოყენებით, განსაკუთრებულ  $t_0 = \pm 1$  (ბოლო) წერტილებში, როცა ინტეგრების წირი ნამდვილი  $[-1;1]$  მონაკვეთია. ამ შუალედის სხვადასხვა  $n$  დაყოფათა რიცხვისთვის (შიგა დანაყოფები ყოველთვის ფიქსირებულია  $m = 4$ ). ხოლო სიმკვრივე  $\varphi(t) = t^2$ , თავის მხრივ, ასეთი წერტილები არსებით როლს თამაშობს მექანიკის პრაქტიკულ გამოყენებითი ტიპის ამოცანებში. მაგალითად, ბზარების ამოცანების რიცხვითი ამოხსნების დროს (იხ. თავი IV) საჭირო ხდება დაითვალოს ინტენსივობის კოეფიციენტი ამ წერტილებში, რომლის საშუალებითაც, თავის მხრივ, განისაზღვრება ბზარის გავრცელების შემდეგი მიმართულება [82].

#### ცხრილი 4

n	$t_0$	$S^{(1/2;-1/2)}(t^2; t_0)$	$S_n^{*(1/2;-1/2)}(t^2; t_0)$	$R_n^{(1/2;-1/2)} = S - S_n$
10	-1	-0,5	-0,499256	-0,00074424
	1	1,5	1,49405	0,0059532
30	-1	-0,5	-0,499962	-0,0000380375
	1	1,5	1,49893	0,00106505

50	-1	-0,5	-0,49999	-0,0000101642
	1	1,5	1,49951	0,00048789

როგორც ცხრილიდან ჩანს  $n$ -ის ზრდასთან ერთად იზრდება სიზუსტე და  $n = 50$ -ისთვის აღწევს  $10^{-4}$ -ს

## II თავი

### სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების

#### რიცხვითი ამოხსნები

ამ თავში ნაჩვენებია I თავში აგებული მიახლოებითი ფორმულების გამოყენება ერთი კლასის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნებისათვის. ამ კლასის განტოლებებზე მიიყვანება სხვადასხვა სახის გამოყენებითი (მათ შორის სამშენებლო მექანიკის) ტიპის, დირიხლეს (შესაბამისად გრეხის) და დრეკადობის თეორიის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები, რომელთა შესაბამისი ინტეგრალური განტოლებები იწერება კოშის გულიან სინგულარულ ინტეგრალებში.

**§2.1. პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმის აგება დისკრეტულ განსაკუთრებულებათა მეთოდის გამოყენებით**

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ პირველი გვარის სრული სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვით ამოხსნას ინტერვალზე

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{t_0 - t} + \int_{-1}^1 K(t_0, t) \varphi(t) dt = f(t_0) \quad (2.1.1)$$

დაუშვათ, რომ ფუნქცია  $f(t_0)$  და  $K(t_0, t)$  მიეკუთვნება  $H$  კლასს თავის განსაზღვრის არეში. (2.1.1) განტოლების ამოხსნისას მისი მახასიათებელი ნაწილის მიმართ, ჩვენ მივიღებთ, რომ იგი ეკვივალენტურია  $k$  ინდექსის შესაბამისი მნიშვნელობისათვის მეორე რიგის ფრედგოლმის ტიპის განტოლების [1,2], [10,52]

$$\varphi(t) + \int_{-1}^1 N_k(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = f_{1,k}(t) \quad (2.1.2)$$

სადაც

$$N_k(t, \tau) = -\frac{1}{\pi^2} R_k(t) \int_{-1}^1 R_k^{-1}(t_0) \frac{K(t_0, \tau)}{t - t_0} dt_0,$$

$$f_{1,k}(t) = -\frac{1}{\pi^2} R_k(t) \left[ \int_{-1}^1 R_k^{-1}(t_0) \frac{f(t_0) dt_0}{t - t_0} - T_k C \right],$$

ამასთან  $T_1 = \pi$ ,  $T_0 = T_{-1} = 0$  და  $k = -1$ -ისთვის უნდა შესრულდეს დამატებითი პირობა

$$\int_{-1}^1 R_{-1}^{-1}(t) f(t) dt = \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^1 R_{-1}^{-1}(t) k(t, \tau) dt \right) \varphi(\tau) d\tau. \quad (2.1.3)$$

$N_k(t, \tau)$  გულს აქვს შემდეგი სახე:

$$N_k(t, \tau) = \frac{\Phi(t, \tau)}{(1-t)^\alpha (1+t)^\beta}, \quad (2.1.4)$$

სადაც  $\alpha$  და  $\beta$  იღებს მნიშვნელობას  $0$ -ს ან  $\frac{1}{2}$ -ს. ხოლო ფუნქცია  $\Phi(t, \tau)$  უწყვეტია  $[-1; 1] \times [-1; 1]$  სიმრავლეზე. უნდა აღინიშნოს, რომ როცა  $N_k(t, \tau)$  -ს აქვს (2.1.4) სახე, მაშინ (2.1.2) ტიპის მეორე გვარის ინტეგრალური განტოლებისათვის მართებულია ფრედგოლმის თეორია, თუმცა (2.1.2) განტოლება შესაბამისი ცვლადთა გარდაქმნით შეიძლება უშუალოდ მივიყვანოთ ფრედგორმის მეორე გვარის განტოლებაზე უწყვეტი გულით.

**თეორემა:** ვთქვათ (2.1.1) განტოლებაში  $f(t)$  და  $K(t_0, t)$  ფუნქციები ეკუთვნიან ჰელდერის კლასს შესაბამისად  $[-1; 1]$  და  $[-1; 1] \times [-1; 1]$  სიმრავლეზე და ამ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი შესაბამისი მოცემული ინდექსისათვის. მაშინ

$$\sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j} - t_k} + \sum_{k=1}^n K(t_{0j}, t_k)\varphi_n(t_k)h = f(t_{0j}), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.1.5)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j} - t_k} + \sum_{k=1}^n K(t_{0j}, t_k)\varphi_n(t_k)h = f(t_{0j}), \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.1.6)$$

$$\sum_{k=1}^n \varphi_n(t_k)h = C$$

$$\gamma_{0n} + \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j} - t_k} + \sum_{k=1}^n K(t_{0j}, t_k)\varphi_n(t_k)h = f(t_{0j}), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.1.7)$$

(2.1.5), (2.1.6), -(2.1.7) სისტემების ამონახსნებსა და (2.1.1) განტოლების ამოხსნებს შორის ადგილი აქვს დამოკიდებულებას:

$$|\varphi(t_k) - \varphi_n(t_k)| \leq \theta_n(t_k) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

სადაც მნიშვნელობა  $\theta(t_k)$  აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობებს:

3) ყელა წვერტილისათვის  $t_k \in [a + \delta, b + \delta]$ , სადაც  $\delta > 0$

$$\theta_n(t_k) \leq O_\delta(h^{\lambda_1}), \quad \lambda_1 > 0$$

4) ყელა წვერტილისათვის  $t_k \in [a, b]$

$$\sum_{k=1}^n \theta_n(t_k) \leq O(h^{\lambda_2}), \quad \lambda_2 > 0$$

აქ სიმრავლე  $E = \{t_k, k = 1, 2, \dots, n\}$  და  $E_0 = \{t_{0j}, j = 0, 1, \dots, n\}$  ანხორციელებს [-1.1] მონაკვეთის კანონიკურ დაყოფას.

როგორც ამ ფორმულებიდან ჩანს, ბელოცერკოვსკის მიერ აგებული სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმი საკმაოდ მარტივია, მაგრამ მათ არ აქვთ სიზუსტის მაღალი რიგი.

## §2.2. პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის შესახებ გახსნილი კონტურების შემთხვევები

ამ პარაგრაფში განიხილება პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L K(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0), \quad (t_0 \in L) \quad (2.2.1)$$

რიცხვითი ამოხსნის საკითხები გახსნილი კონტურების შემთხვევაში გარკვეულ დაშვებებში საძებნი ამონახსნის ფუნქციათა კლასის მიმართ. ასეთ განტოლებებზე მიიყვანება ისეთი მნიშვნელოვანი ამოცანები, როგორცაა, მაგალითად, დირიხლეს ამოცანა სიბრტყეზე ჭრილების ([1] §107) შემთხვევაში (შესაბამისად, კონფორმულად გადამსახავი ფუნქციის აგების, ღეროსა და ძელის გრების ამოცანები), სიბრტყის ტემპერატურული სტაციონარული ამოცანა, ნებისმიერად განლაგებული ბზარების შემთხვევაში ([2], თ. VII), ასევე დრეკადობის თეორიის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები.

მრავალი ავტორის მიერ განხილულია სხვადასხვა სქემები ასეთი განტოლებების რიცხვითი ამოხსნებისათვის, მათ შორის, უფრო რთულ შემთხვევებში, როცა განტოლების ინდექსი უარყოფითი რიცხვია. ამ მხრივ განსაკუთრებით აღსანიშნავია ა. ჯიშკარიანის [54-56], ი. ლიფანოვის [41-43], ბ. მუსაევის [48-52] შედეგები. მ. ლავრენტიევის, ა. კალანდიას, ი. ეფრემოვის შედეგების მიმოხილვა განხილულია [53] შრომაში. [57], [58], [42-43] შრომებში მოცემულია (2.2.1) სახის განტოლებებისათვის, ე.წ. დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდის დაფუძნება.

[60, 61, 62] შრომებში განხილულია ასეთი განტოლებების მიახლოებითი ამოხსნების სხვადასხვა მეთოდები.

მიუხედავად ამისა, აღნიშნულ შრომებში, როგორც წესი, განიხილება პირველი გვარის სინგულარული განტოლებების გულისა და

ინტეგრალების წირის მიმართ გარკვეული შეზღუდვები. ინტეგრების წირად აღებულია ნამდვილი ღერძის მონაკვეთი. ნებისმიერი კონტურის შემთხვევაში განტოლების გარდაქმნა მონაკვეთის შემცველ განტოლებაზე პრინციპულად შესაძლებელია, მაგრამ ხშირად ძალიან არასასურველია, განსაკუთრებით ისეთ განტოლებებში, რომლებიც უკავშირდება პრაქტიკულ ამოცანებს (იხ. მაგ. [3]). ხშირად ასეთი გარდაქმნები რთულია, რადგანაც გამოყენებებში (მაგალითად, ბზარების თეორიის ამოცანებში) უფრო ხშირად იძულებულნი ვართ გამოვიყენოთ გარკვეული საწყისი მონაცემები. მეორე მნიშვნელოვან საკითხს წარმოადგენს გამოთვლილი სქემების კრებადობის სისწრაფე.

მოცემულ §-ში განხილული სქემა გამოიყენება პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნებისათვის, ნებისმიერი გახსნილი კონტურების შემთხვევაში, იმ დაშვებით, რომ მოცემულ ზუსტ განტოლებას ამოხსნების განსახილველ კლასში აქვს ერთადერთი ამოხსნა.

მარჯვენა მხარისა და გულის მიმართ გარკვეულ დაშვებებში (იხ. ქვემოთ), მოცემული განტოლების მიმართ, შეგვიძლია მივადწიოთ კრებადობის საკმარისად მაღალ რიგს.

ამ პარაგრაფში მოყვანილი შედეგის საფუძველზე, რომელშიც მტკიცდება სინგულარული ინტეგრალებისათვის, გახსნილი კონტურებით,  $H_\beta$  მეტრიკით კვადრატული პროცესების კრებადობა, შესაძლებელია შესაბამისი გამოთვლითი პროცესების დაფუძნება. ამასთან გამოყენებული კვადრატული პროცესები საშუალებას გვაძლევს საკმარისად ადვილად ავაგოთ შესაბამისი რეალური გამოთვლითი სქემები.

ამგვარად, ჩავთვალოთ, რომ (2.2.1) განტოლებაში  $L \equiv ab$  წარმოადგენს გახსნილ გლუვ კონტურს, რომელსაც ჩვენ კვლავ ჩავთვლით, რომ მოცემულია პარამეტრული სახით  $t = t(s)$  ( $s_a \leq s \leq s_b$ ),  $K(t_0, t)$  და



$f(t)$   $L$ -ზემოცემული ფუნქცია, რომლებიც აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას (იხ. [1]).

ვეძებთ (2.2.1) განტოლების ამონახსნი, რომელიც შემოსაზღვრულია  $a$  ბოლოზე და შემოუსაზღვრელი  $b$  -ზე. ასეთ ამონახსნს, როგორც ცნობილია (იხ. [1] § 86), აქვს შემდეგი სახე

$$\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \varphi(t),$$

სადაც,  $K$  და  $f$  -ზე ზემოთ მოთხოვნილ დაშვებებში, ფუნქცია  $L$ -ზე აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას.

მახასიათებელი ნაწილის შებრუნებით, მოცემული განტოლება შეიძლება მოყვანილი იქნეს სახეზე (იხ. [62] § 42)

$$\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \left[ \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{t_1-b}{t_1-t_0} \frac{k(t_1,t)}{t_1-t_0} dt_1 \right] \varphi_0(t) dt = \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-b}{t-a}} \frac{f(t)}{t-t_0} dt \quad (2.13)$$

შემდეგში ამ უკანასკნელ განტოლებას განვიხილავთ, როგორც ოპერატიულ განტოლებას, გარკვეულ ფუნქციონალურ სივრცეში. ამასთან დაკავშირებით მას ჩავწერთ შემდეგი სახით

$$K^0 \varphi = I\varphi + k\varphi = f_0(t_0), \quad (2.2.3)$$

სადაც

$$K\varphi \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \left[ \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t_1-b}{t_1-a}} \frac{K(t_1;t)}{t_1-t_0} dt_1 \right] \varphi_0(t) dt$$

$$f_0(t) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-b}{t-a}} \frac{f(t) dt}{t-t_0}$$

ხოლო  $I$  ერთეულოვანი ოპერატორია. როგორც ვხედავთ, განტოლების თავისუფალი წევრი და გული წარმოადგენს სინგულარულ ინტეგრალს

$$(k\varphi)(t_0; t) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \left[ \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t_1 - b}{t_1 - a}} \frac{K(t_1; t)}{t_1 - t_0} dt_1 \right] \varphi_0(t) dt$$

ინტეგრალურ ოპერატორში გული

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t_1 - b}{t_1 - a}} \frac{K(t_1; t)}{t_1 - t_0} dt_1$$

შევცვალოთ ჩვენ მიერ აგებული კვადრატული ფორმულით, მივიღებთ:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t_1 - b}{t_1 - a}} \frac{K(t_1; t)}{t_1 - t_0} = L_n \left[ (S_n^{(1/2; -1/2)} K); t_0, t \right], \quad t_0 \in ab,$$

სადაც

$$L_n \left[ (S_n^{(1/2; -1/2)} K); t_0, t \right] = L_{nj} \left[ (S_n^{(1/2; -1/2)} K); t_0, t \right], \quad t_0 \in \tau_j \tau_{j+1} \quad (j = \overline{1, n}),$$

$$L_{nj} \left[ (S_n^{(1/2; -1/2)} K); t_0, t \right] = \sum_{k=1}^m \frac{\omega_j(t_0)}{(t_0 - t_{jk}) \omega_j(t_{jk})} S_n^{(1/2; -1/2)} K; t_{jk}; t), \quad t_0 \in \tau_j \tau_{j+1}$$

ანალოგიურად

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t - a}{t - b}} \frac{f(t) dt}{t - t_0} \approx L_n \left[ (S_n^{(1/2; -1/2)} f); t_0 \right]$$

(2.2.2)-თან ერთად  $L_n[\varphi_n; t_0]$  ფუნქციასა ქვესივრცეში განვიხილოთ განტოლება

$$K_n^0 [L_n[\varphi_n; t_0]] = L_n[\varphi_n; t_0] + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} L_n \left[ (S_n K)^{(1/2; -1/2)}; t_0, t \right] L_n[\varphi_n; t] dt = L_n \left[ (S_n^{(1/2; -1/2)} f); t_0 \right]$$

(2.2.3) თუ ამ განტოლებაში  $t_0$  პარამეტრს მივცემთ მნიშვნელობას

$$T(\nu; j) = \{t_{\nu j}\} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n; \quad j = \overline{1, m})$$

სიმრავლიდან, მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას  $T(\nu; j)$

წერტილებში  $\varphi_n(t_{\nu j})$  უცნობების მიმართ:

$$\left[ K_n^0 [L_n[\varphi_n; t_0]] \right]_{t_0=t_{\nu j}} = \left[ L_n \left[ (S_n^{(1/2; -1/2)} f); t_0 \right] \right]_{t_0=t_{\nu j}} \quad (\nu = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}).$$

უფრო დაწვრილებით ამ სისტემას ექნება შემდეგი სახე

$$\varphi_n(t_{vj}) + \sum_{i=1}^n \sum_e^m q_{ie} A_n(t_{ie}, t_{vj}) \varphi_n(t_{ie}) = f_0(t_{vj}), \quad (2.2.3//)$$

სადაც

$$A_n(t_{ie}, t_{vj}) = \left[ 1 + \sum_{\sigma \neq v}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{\sigma k} - t_{vj}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{vk}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vk} - t_{vj}} - P_{vj}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{vk}(t_{vj}) \right] K(t_{vj}; t_{ie}) - \\ - \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq v}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{\sigma k} - t_{vj}} K(t_{\sigma k}; t_{ie}) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{vk}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vk} - t_{vj}} K(t_{vk}; t_{ie}) + P_{vj}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{vk}(t_{vj}) K(t_{vk}; t_{ie}),$$

ხოლო  $\varphi_n(t_{vj})$ -სამივბელისიდიდებია.

$$f_0(t_{vj}) = \left[ 1 + \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq v}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{\sigma k}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{vk}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{vk}} - P_{vj}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{vk}(t_{vj}) \right] f(t_{vj}) - \\ - \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq v}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{\sigma k}} f(t_{\sigma k}) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{vk}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{vk}} f(t_{vk}) + P_{vj}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{vk}(t_{vj}) f(t_{vj}), \\ (v = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m)$$

$$P_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-b}{t-a}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{t - t_{\sigma j}}{t_{\sigma k} - t_{\sigma j}} dt \quad q_{ij}^{(-1/2; 1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_i \tau_{i+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq e}}^m \frac{t - t_{ij}}{t_{ie} - t_{ij}} dt$$

$$P_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)} = \begin{cases} P_{\sigma k}^{(1/2; -1/2)}, & k = \overline{2, m-1}; \quad \sigma = \overline{1, n}, \\ P_{\sigma 1}^{(1/2; -1/2)} + P_{\sigma-1, m}^{(1/2; -1/2)}; & k = 1; \quad \sigma = \overline{1, n}, \end{cases} \quad d_{vk} = \frac{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k, j}}^m (t_{vj} - t_{vj_0})}{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k}}^m (t_{vk} - t_{vj_0})}$$

ვიგულისხმობთ, რომ (2.2.1) განტოლებაში  $K(t_0, t), f(t_0) \in H_\alpha^r(L)$ .

დავამტკიცოთ, რომ თუ (2.2.1) განტოლებას აქვს ერთადერთი

$\varphi_0 = \sqrt{(t-a)/(t-b)} \varphi(t)$  სახის ამონახსნი, მაშინ გარკვეული  $n = n_0$ -დან

დაწყებული (2.2.3') განტოლება და (2.2.3'') სისტემა ცალსახად ამოხსნადია, ამასთან, თუ  $L_n[\varphi_n; t_0]$  არის (2.21.3') განტოლების ამონახსნი, მაშინ  $\varphi$ -ს მიმართ ზემოთ მიღებულ დაშვებებში სამართლიანია შეფასება

$$\|\varphi(t) - L_n[\varphi_n; t]\|_{H_\beta} \leq \frac{C_r \ln n}{n^{r+\alpha-\beta-1/2}} \quad (m > r+1, \beta < \alpha - 1/2), \quad (2.2.4)$$

სადაც  $\varphi$ -არის (2.2.3) განტოლების ამონახსნი, ხოლო  $C_r$ -რაიმე მუდმივია.

ამ თეორემის სამართლიანობა გამომდინარეობს ზოგადი მიახლოებითი თეორიის ცნობილი შედეგებიდან (იხ. [14] XIV თავი).

როცა  $\alpha = 1$ , (2.2.4) შეფასებიდან პლემელი პრივალოვის (იხ. [77] §18) ცნობილი თეორემის თანახმად, შესაბამის დაშვებებში  $K$ -სადა  $f$ -ის

მიმართ მტკიცდება, რომ  $\|\varphi - L_n \varphi\|$ -ის რიგი არის  $O\left(\frac{1}{n^{r+1/2-\varepsilon}}\right)$ , სადაც  $\varepsilon$

რაგინდ მცირე დადებითი რიცხვია.

### §2.3 პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამონახსნის შესახებ, გახსნილი კონტურებით, არანულოვანი ინდექსის შემთხვევაში

კვლავ განვიხილოთ განტოლება

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L K(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0) \quad (t_0 \in L) \quad (2.3.1)$$

კვლავ ვიგულისხმობთ, რომ  $f(t), K(t_0, t) \in H$  და განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ვეძებთ (2.3.1) განტოლების ამონახსნს, რომელიც შემოუსაზღვრელია ორივე  $a$  და  $b$  ბოლოებზე. როგორც ცნობილია (იხ. [1] §86), ამ შემთხვევაში (2.3.1) განტოლების ინდექსი 1-ის ტოლია და ამონახსნი ზოგადად ცალსახად არ განისაზღვრება.

(2.3.1) განტოლების მახასიათებელი ნაწილის მიმართ ამოხსნით (იხ. [62] §42) იგი მიიყვანება ეკვივალენტურ განტოლებაზე:

$$\begin{cases} \varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{K(t_1, t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} \frac{dt_1}{t_1 - t_0} \varphi_0(t) dt = \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-t_0)}} \\ \int_{ab} \varphi_0(t) dt = C \end{cases} \quad (2.3.2)$$

სადაც  $C$  მუდმივი რიცხვია.

მოცემულ შემთხვევაში (2.3.3) ოპერატორულ განტოლებას ექნება სახე:

$$V_\varphi = I_\varphi + k_1 \varphi = f_1 \quad (2.3.3)$$

სადაც

$$k_1 \varphi = \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \left[ \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{K(t_1, t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t_1-t)}} dt_1 \right] \varphi_0(t) dt$$

$$f_1(t_0) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{f(t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-t_0)}} + C$$

წინა მსჯელობის ანალოგიურად შევცვალოთ

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{K(t_1; t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-t_0)}} dt_1 \approx L_n \left[ (S_n^{(-1/2; -1/2)} K); t, t_0 \right], \quad t_0 \in ab$$

სადაც

$$L_n \left[ (S_n^{(1/2; 1/2)} k); t, t_0 \right] = L_{nj} \left[ (S_n^{(1/2; 1/2)} K); t, t_0 \right] \quad t_0 \in \tau_j \tau_{j+1} \quad (j \overline{1, n})$$

$$L_n \left[ (S_n^{(1/2; 1/2)} K); t, t_0 \right] = \sum_{k=1}^m \frac{\omega_j(t_0)}{(t_0 - t_{jk}) \omega_j(t_{jk})} S_n^{(-1/2; -1/2)} (K; t_{jk}, t), \quad t_0 \in \tau_j \tau_{j+1} \quad (j \overline{1, n})$$

ანალოგიურად

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{1}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} \frac{f(t)dt}{(t-t_0)} \approx L_n[(S_n^{(-1/2;-1/2)} f); t_0]$$

(2.3.1) განტოლებასთან ერთად  $L_n[\varphi_n; t_0]$  ფუნქციათა ქვეკლასზე განვიხილოთ განტოლება

$$V_n[L_n[\varphi_n; t_0]] \equiv L_n[\varphi_n; t_0] + \frac{1}{\pi i} L_n[(S_n^{(1/2;1/2)} K); t_0] L_n[\varphi_n; t_0] dt = L_n[(S_n^{(1/2;1/2)} f); t_0]$$

(2.3.1)

ეს განტოლება, თუ  $t_0$ -ს მივცემთ მნიშვნელობას

$$tT(\nu; j) = \{t_{\nu j}\} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$$

სიმრავლიდან, მოგვცემს წრფივ განტოლებათა სისტემას  $\varphi_n(t_{\nu j})$  უცნობების მიმართ:

$$\left\{ \begin{array}{l} [V_n[L_n[\varphi_n; t_0]]]_{t_0=t_{\nu j}} = [L_n[(S_n^{(-1/2;-1/2)} f); t_0]]_{t_0=t_{\nu j}} \\ (\nu = 1, 2, \dots, n-1; j = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{\sigma=1}^n \sum_{k=1}^m q_{\sigma k}^{*(1/2;1/2)} \varphi(t_{\sigma k}) = C; \quad \nu = n \end{array} \right.$$

ანუ

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_n(t_{\nu j}) + \sum_{\sigma=1}^n \sum_{e=1}^m q_{ie}^{*(1/2;1/2)} B_n(t_{ie}; t_{\nu j}) = f_{1n}(t_{\nu j}) \\ (\nu = 1, 2, \dots, n-1; j = 1, 2, \dots, m) \\ (\nu = n; j = 1, 2, \dots, m-1) \\ \sum_{\sigma=1}^n \sum_{k=1}^m q_{\sigma k}^{*(1/2;1/2)} \varphi(t_{\sigma k}) = C; \end{array} \right. \quad (2.3.3)$$

სადაც

$$B_n(t_{ie}, t_{\nu j}) = \left[ \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(-1/2;-1/2)}}{t_{\sigma k} - t_{\nu j}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\nu k}^{*(-1/2;-1/2)}}{t_{\nu k} - t_{\nu j}} - P_{\nu j}^{*(-1/2;-1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{\nu k}(t_{\nu j}) \right] K(t_{\nu j}, t_{ie}) -$$

$$- \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{\sigma k} - t_{\nu j}} K(t_{\sigma k}, t_{ie}) - \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq j}}^n \frac{P_{\nu k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{\nu k} - t_{\nu j}} K(t_{\nu k}, t_{ie}) + P_{\sigma j}^* \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{\nu k}(t_{\nu j}) K(t_{\nu k}, t_{ie})$$

$\varphi_n(t_{\nu j})$  - კვლავ საძებნი ფუნქციებია.

$$f_{\ln}(t_{\nu j}) = \left[ \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\sigma k}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\nu k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\nu k}} - P_{\nu j}^{*(-1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{\nu k}(t_{\nu j}) \right] f(t_{\nu j}) -$$

$$- \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\sigma k}} f(t_{\sigma k}) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\nu k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\nu k}} f(t_{\nu k}) + P_{\nu j}^{*(-1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{\nu k}(t_{\nu k}) f(t_{\nu k})$$

$$P_{\sigma k}^{*(-1/2; -1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{\sigma} \tau_{\sigma+1}} \frac{1}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{t - t_{\sigma j}}{t_{\sigma k} - t_{\sigma j}} dt$$

$$q_{il}^{(1/2; 1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_i \tau_{i+1}} \sqrt{(t-a)(t-b)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq e}}^m \frac{t - t_{ij}}{t_{ie} - t_{ij}}$$

$$P_{\sigma k}^{(-1/2; -1/2)} = \begin{cases} P_{\sigma k}^{(1/2; 1/2)}, & k = \overline{2, m-1}; \sigma = \overline{1, n}, \\ P_{\sigma 1}^{(-1/2; -1/2)} + P_{\sigma-1m}^{(-1/2; -1/2)}; & k = 1; \sigma = \overline{1, n}; \end{cases}$$

$$d_{\nu k} = \frac{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k, j}}^m t_{\nu j} - t_{\nu j_0}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j_0 \neq k}}^m t_{\nu k} - t_{\nu j_0}}$$

$$q_{\sigma k}^{*(1/2; 1/2)} = \begin{cases} q_{\sigma k}^{(1/2; 1/2)}, & k = \overline{2, m-1}; \sigma = \overline{1, n}, \\ q_{\sigma 1}^{(1/2; 1/2)} + P_{\sigma-1m}^{(1/2; 1/2)}; & k = 1; \sigma = \overline{1, n}; \end{cases}$$

კვლავ ვიგულისხმობთ, რომ  $K, f \in H_{\alpha}^{(\tau)}(L)$  მტკიცდება, რომ თუ (2.3.1) განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი (ამ შემთხვევაში უნდა

ვიგულისხმობთ, რომ ინტეგრალი საძიებელი ამონახსნიდან ცნობილია)

$$\int_{ab} \varphi_0(t) dt = C \quad \varphi_0(t) = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)}}, \quad \text{მაშინ გარკვეული } n=ni\text{-დან}$$

დაწყებული (2.3.1') განტოლებას და (2.3.3) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, ამასთან, თუ  $L_n(\varphi_n; t_0)$  არის (2.3.1') განტოლების ამონახსნი, მაშინ  $K$  და  $f$ -ის მიმართ ზემოთ მოყვანილ დაშვებებში ადგილი აქვს შეფასებებს

$$\|\varphi(t) - L_n[\varphi_n; t]\|_{H_\beta} \leq \frac{A_r \ln n}{n^{r+\alpha-\beta-1/2}}, \quad (m > r+1, \beta < \alpha - 1/2), \quad (2.3.4)$$

სადაც  $A_r$  მუდმივია, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ  $L$ -ზე და  $\varphi^{(r)}$ -ფუნქციის ჰელდერის მაჩვენებელზე.

ამ თეორემის სამართლიანობა გამომდინარეობს მიახლოების ზოგადი თეორიიდან (იხ. [14], XIV-თავი) და ჩვენ მიერ §1.4-ში მიღებული შეფასებებიდან

$$\|L_n[V[L_n \varphi_n]] - V[L_n \varphi_n]\|_{H_\beta} \leq \frac{b'_r \ln n}{n^{r+\alpha-\beta-1/2}} \|L_n \varphi_n\|_{H_\beta},$$

$$\|f_1 - L_n[(S_n^{-1/2; -1/2}) f]; t_0\|_{H_\beta} \leq \frac{a'_r \ln n}{n^{r+\alpha-\beta-1/2}} \|f_1\|_{H_\beta},$$

სადაც  $b'$  და  $a'$  მუდმივებია, როგორც ვხედავთ ამ სქემის დაფუძნებაშიც არსებით როლს თამაშობს §1.4-ის შეფასებები.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: იმ შემთხვევაში, როცა (2.3.1) განტოლების ინდექსი უარყოფითია  $\lambda = -1$ , ყოველთვის არ არსებობს აღნიშნული ზუსტი განტოლების ამონახსნი, ის რომ არსებობდეს მარჯვენა მხარე  $f(t_0)$  უნდა აკმაყოფილებდეს დამატებით პირობას

$$\int_{ab} \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} = 0$$

ამიტომ (2.3.1) განტოლების მიახლოებითი ამოხსნის დროს გათვალისწინებული უნდა იქნეს (2.3.5) დამატებითი პირობა. როგორც



ცნობილია (იხ. მაგ[1]) თუ სრულდება (2.3.5) პირობა, მაშინ (2.3.1) განტოლებას ყოველთვის აქვს ამონახსნი და იგი ერთადერთია.

ახლა განვიხილოთ ზემოთ მოყვანილი ალგორითმით შემდეგი სახის პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამოხსნა მასში შემავალი პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \varphi(t) \left[ \frac{1}{t-t_0} + \frac{t_0-t}{(t_0-t)^2 + 4H^2} \right] dx = f(t_0)$$

ცხრილი 5  $n = 3; m = 2; H = 1; f = 2$  (ზუსტი ამონახსნია  $\varphi = 2$ )

$t_{vj}$	-1	-0.3333	0.3333	1
$\varphi(t_{vj})$	1.85	1.98	2.08	2.13

ცხრილი 6  $n = 3; m = 4; H = 1; f = 2$

$t_{vj}$	-1	-0.778	-0.556	-0.333	-0.111	0.111	0.333	0.556	0.778	1
$\varphi(t_{vj})$	1.82	1.86	1.90	1.94	1.98	2.02	2.06	2.09	2.12	2.14

ცხრილი 7  $n = 5; m = 2; H = 1; f = 2$

$t_{vj}$	-1	-0.6	-0.2	-0.2	-0.6	1
$\varphi(t_{vj})$	1.82	1.902	1.981	0.050	2.104	2.138

## § 2. 4 სრული ინტეგრალური განტოლების შემთხვევა

განვიხილოთ სრული პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლება

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} + \int_L h(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0) \quad (2.4.1)$$

ქვემოთ ყველგან, ჯერჯერობით კვლავ ვიგულისხმობთ, რომ ვეძებთ (2.4.1) განტოლების  $a$  ბოლოებზე შემოსაზღვრულ და  $b$  ბოლოზე შემოყსაზღვრულ ამოხსნას, მაშინ როგორც არაერთხელ აღვნიშნეთ (2.4.1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{(t-b)}} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt + \frac{1}{\pi} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{(t-b)}} h(t_0, t) \varphi(t) dt = f(t_0)$$

$S^{(1/2; -1/2)}(\varphi, t_0)$  ინტეგრალისათვის გამოვიყენოთ §1.4-ში აგებული  $D_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$  აპროქსიმაცია

$$S^{(1/2; -1/2)}(\varphi, t_0) \approx D_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$$

რაც შეეხება რეგულარულ ნაწილს, მისთვის გამოვიყენოთ კვადრატული პროცესი, რომელიც დაფუძნებულია ინტეგრალქვეშა გამოსახულების უბან-უბან კვადრატულ  $L_n$ -ინტერპოლაციაზე (იგივე კვანძით წერტილებისათვის), ე.ი. დავუშვათ, რომ

$$\int_L h(t_0, t) \varphi_0(t) dt = \int_L L_n[h(t_0, t) \varphi_0, t] dt$$

რომელიც წარმოადგენს ცნობილი კოეფიციენტებით განსაზღვრულ კვადრატულ ჯამს. აქედან გამომდინარე, (2.4.2)-ის ეკვივალენტურ განტოლებასთან ერთად

$$\varphi(t_0) + [S^{(1/2; -1/2)}]^{-1} \int_L h(t_0, t) \varphi(t) dt = [S^{(1/2; -1/2)}]^{-1} f,$$

რომელსაც შემდეგში განვიხილავთ ცივრცეში. საწყისი განტოლების მარცხენა მხარე შევცვალოთ

$$D_n^{(1/2;-1/2)}(\varphi; t_0) + L_n \left[ \int_L (L_n(h(t_0, t)\varphi)(t) dt; t_0 \right].$$

გავითვალისწინოთ, რომ ზემოთ მიღებულ დაშვებებში  $D_n^{(1/2;-1/2)}$  შებრუნებადია, მაშინ თუ ვისარგებლებთ  $f$  ფუნქციისათვის ზემოთ გამოყენებული უბან-უბან საინტერპოლაციო აპროქსიმაციით, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\varphi(t_0) + [D_n^{(1/2;-1/2)}]^{-1} \left[ L_n \left[ \int_L (L_n h(t_0, t)\varphi_n, t_0) dt \right] \right] = [D_n^{(1/2;-1/2)}] (L_n f)(t_0).$$

თუ გავითვალისწინებთ  $D_n^{(1/2;-1/2)}$  ოპერატორის სტრუქტურას, ცხადი გახდება, რომ უკანასკნელი განტოლების მარცხენა მხარის ოპერატორი მოქმედებს უბან-უბან პოლინომიურ ქვესივრციდან (რომლის ხარისხი  $\leq 2$ ) იგივე ქვესივრცეში, რომელშიც ვიხილავთ განტოლებას. ვაჩვენოთ, რომ

$$D_n^{(1/2;-1/2)}(\varphi; t_0) + L_n \left[ \int_L (L_n h(t_0, t)\varphi_n(t) dt; t_0 \right] = L_n [f; t_0]$$

განტოლებას საკმარისად დიდი  $n$ -ებისათვის აქვს ერთადერთი ამონახსნი. აღვნიშნოთ

$$(H\varphi)(t_0) = \left( \int_L h(t_0, t)\varphi(t) dt \right) (t_0)$$

$$(H_n \varphi)(t_0) = \left( L_n \int_L (L_n h(t_0, t)\varphi)(t) dt \right) (t_0)$$

დავიწყოთ შემდეგი სხვაობის განხილვით:

$$\begin{aligned} & (S^{(1/2;-1/2)})^{-1}(H\varphi_n) - (D_n^{(1/2;-1/2)})^{-1}(H_n\varphi_n) = (D_n^{(1/2;-1/2)})^{-1}(H_{\varphi_n} - H_n\varphi_n) + (S^{(1/2;-1/2)})^{-1}(H\varphi_n) - \\ & - (D_n^{(1/2;-1/2)})^{-1}(H\varphi_n) = (D_n^{(1/2;-1/2)})^{-1}(H - H_n)\varphi_n + \\ & + (D_n^{(1/2;-1/2)})^{-1}(D_n^{(1/2;-1/2)} - S^{(1/2;-1/2)})(S^{(1/2;-1/2)})^{-1}(H\varphi_n) \end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ  $\|L\| = O(1)$  და გამოვიყენოთ მიღებული

$$\|(D_n^{(1/2;-1/2)})^{-1}\| = O(\ln^2 n) \quad (n \rightarrow \infty) \cdot h(t_0, t) \text{ ფუნქციის მიმართ ზემოთ მიღებულ}$$

დაშვებებში, მივიღებთ

$$\|(D_n^{(1/2;-1/2)})^{-1}(H_{\varphi_n} - H_n\varphi_n)\|_c \leq C_0(n^{-\alpha+1/2} \ln^2 n \|\varphi_n\|$$

$$(C_0 = \text{const}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

აღვნიშნოთ  $[D_n^{(1/2;-1/2)}]^{-1}(H\varphi_n)(t_0)$  ოპერატორ ფუნქცია  $\Psi_n(t_0)$ -ით.

ჩვენ ვხედავთ, რომ

$$(S^{(1/2;-1/2)} - D_n^{(1/2;-1/2)})[S^{(1/2;-1/2)}]^{-1}(H\varphi_n) = (S^{(1/2;-1/2)} - D_n^{(1/2;-1/2)})[S^{(1/2;-1/2)}](H\varphi_n)$$

წარმოადგენს ჩვენ მიერ §1.5-ში აგებული კვადრატული პროცესის ნაშთით წევრს

$$S^{(1/2;-1/2)}(\psi_n; t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{ab}^{\sqrt{t-a}} \frac{\psi_n(t)}{\sqrt{t-b} t-t_0} \text{ ამასთან, } \psi_n(t) \text{ ფუნქციის აგების}$$

სტრუქტურის თანახმად და კარგად ცნობილი მტკიცებით [1]

გამომდინარეობს, რომ  $\psi_n(t) \in H_{\alpha-1/2}$  ( $1/2 < \alpha \leq 1$ ). შევავსოთ ახლა

შესაბამისი ნაშთითი წევრი

$$R_n(\psi_n; t_0) = (S^{(1/2;-1/2)}(\psi_n; t_0) - D_n^{(1/2;-1/2)}(\psi_n; t_0))$$

გამოვიყენოთ  $(\psi_n; t) \in H_{\alpha-1/2}$  პირობა, წინა მსჯელობის ანალოგიურად ეს

შეფასება ძირითადად მიიყვანება  $R_n(\varphi; t_0)$  ნაშთითი წევრის შეფასებაზე

კვანძით  $\tau_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) წერტილებში:

$$R_n(\psi_n; \tau_v) = \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\psi_n(t) - \varphi_n(\tau_v)}{t - \tau_v} - D_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi_n; \tau_v),$$

ამ უკანასკნელს, თუ გავითვალისწინებთ  $D_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi_n; \tau_v)$  სტრუქტურას, შეგვიძლია წამოვიდგინოთ შემდეგი სახით

$$R_n(\psi_n; \tau_v) = \sum_{\sigma=1}^n \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{2\sigma-1} \tau_{2\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\psi_n(t) - \psi_n(\tau_v)}{t - \tau_v} dt - \left[ P_{2\sigma-1}^{(1/2; -1/2)} \frac{\psi_n(\tau_{2\sigma-1}) - \psi_n(\tau_v)}{\tau_{2\sigma-1} - \tau_v} + P_{2\sigma+1}^{(1/2; -1/2)} \frac{\psi_n(\tau_{2\sigma+1}) - \varphi_n(\tau_v)}{\tau_{2\sigma+1} - \tau_v} \right] \right\} \quad (2.4.3)$$

ფიგურულ ფრჩხილებში ყოველი შესაკრები, რომელსაც შემდეგში აღვნიშნავთ  $R_n(\psi_n; \tau_v)$ -ით, წარმოადგენს ნაშთს  $\tau_{2\sigma-1}$   $\tau_{2\sigma+1}$  რკალებზე, შესაბამისი ინტეგრალისათვის  $\frac{\psi_n(t) - \psi_n(\tau_v)}{t - \tau_v}$  სხვაობიანი დამოკიდებულებიდან. აღნიშნული ნაშთები მიიღება აღნიშნული ფუნქციის წრფივი ინტერპოლაციით შესაბამის რკალების ბოლო წერტილებით.

როგორც უკვე აღნიშნული იყო §1.5-ში, ასეთი აპროქსიმაცია გვაძლევს ზუსტ მნიშვნელობებს ისეთი  $\psi_n(t)$  ფუნქციისათვის, რომლებიც წარმოადგენს მრავალწევრს, რომლის ხარისხი ნაკლები ან ტოლია 2-ის, ამიტომ შესაბამისი შესაკრებები არ შეიცვლება, თუ მათში შემავალ გაყოფილ სხვაობებს რაიმე მუდმივ რიცხვით, კერძოდ, ნებისმიერ  $\sigma (1 \leq \sigma \leq n)$  შესაკრებ განსახილველ ჯამში შეიძლება ჩავწეროთ, მაგალითად, ასე:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{2\sigma-1} \tau_{2\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \left[ \frac{\psi_n(t) - \psi_n(\tau_v)}{t - \tau_v} - \frac{\psi_n(\tau_{2\sigma-1}) - \psi_n(\tau_v)}{\tau_{2\sigma-1} - \tau_v} \right] dt - P_{2\sigma+1}^{(1/2; -1/2)} \left[ \frac{\psi_n(\tau_{2\sigma+1}) - \psi_n(\tau_v)}{\tau_{2\sigma+1} - \tau_v} - \frac{\psi_n(\tau_{2\sigma-1}) - \varphi_n(\tau_v)}{\tau_{2\sigma-1} - \tau_v} \right]$$

$R_{n\sigma}$ -ში შემავალ ყოველ გაყოფილ სხვაობას ვაკლებთ  $[\psi_n(\tau_{2\sigma+1}) - \psi_n(\tau_\nu)]/(\tau_{2\sigma+1} - \tau_\nu)$  სახის მუდმივს. ეს უკანასკნელი წარმოვადგინოთ ასეთი სახით:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{2\sigma-1}\tau_{2\sigma+1}} \left[ \frac{\psi_n(t) - \psi_n(\tau_{2\sigma-1})}{t - \tau_\nu} + (\tau_{2\sigma-1} - t) \frac{\psi_n(\tau_{2\sigma-1}) - \psi_n(\tau_\nu)}{(t - \tau_\nu)(\tau_{2\sigma-1} - \tau_\nu)} \right] dt -$$

$$- P_{2\sigma+1}^{(1/2; -1/2)} \left[ \frac{\psi_n(\tau_{2\sigma+1}) - \psi_n(\tau_\nu)}{\tau_{2\sigma+1} - \tau_\nu} + (\tau_{2\sigma-1} - \tau_{2\sigma+1}) \frac{\psi_n(\tau_{2\sigma-1}) - \psi_n(\tau_\nu)}{(\tau_{2\sigma-1} - \tau_\nu)(\tau_{2\sigma+1} - \tau_\nu)} \right] \quad (2.4.4)$$

გამოვიყენოთ  $\psi_n \in H_{\alpha-1/2}$  პირობა;  $L \equiv ab$  კონტურის გლუვობა და აღვნიშნოთ  $h = e/n$ , სადაც  $l$  წირის სიგრძეა, მაშინ შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ მოცემული გამოსახულებიდან ინტეგრალი არ აღემატება  $O(h^{\alpha-1/2})\|\psi_n\|$ -ს. ანალოგიური შეფასებები გვექნება იმავე გამოსახულების ინტეგრალური წევრების მიმართ.

ახლა შევავსოთ  $\sum_{\sigma=1}^n R_{n\sigma}(\psi_n; \tau_\nu)$  ჯამი, ამასთან  $R_{n\sigma}(\psi_n; \tau_\nu)$ -ის ქვეშ ვიგულისხმობთ (2.4.4) ის სესაბამისი გამოსახულება. წინა მსჯელობის ანალოგიურად შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ

$$\sum_{\sigma=1}^n \int_{\tau_{2\sigma-1}\tau_{2\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\psi_n(t) - \psi_n(\tau_{2\sigma-1})}{(t - \tau_\nu)} dt = O(h^{\alpha-1/2})\|\psi_n\|_{H_{\alpha-1/2}}$$

$$\sum_{\sigma=1}^{n+1} \frac{1}{\sigma} = O(h^{\alpha-1/2} \ln n)\|\psi_n\|_{H_{\alpha-1/2}} \quad (n \rightarrow \infty)$$

რაც შეეხება ინტეგრალების ჯამს

$$(\tau_{2\sigma-1} - t) \frac{\psi_n(\tau_{2\sigma-1}) - \psi_n(\tau_\nu)}{(\tau_{2\sigma-1} - \tau_\nu)(t - \tau_\nu)}$$

ტიპის გამოსახულებებიდან, მათთვის გვექნება შეფასება

$$O(h^{\alpha-1/2})\|\psi_n\|_{H_{\alpha-1/2}} \sum_{\sigma=1}^{n+1} \frac{1}{\sigma^{\frac{2}{3}-\alpha}} \quad (1/2 < \alpha < 1)$$

საიდანაც ვიღებთ შეფასებას  $O(h^{\alpha-1/2})\|\psi_n\|_{H_{\alpha-1/2}}$ . ანალოგიური შეფასებები შეიძლება მივიღოთ შესაბამისი არაინტეგრალური წევრების ჯამიდან, ამასთან ყველა შეფასება თანაბარია  $\nu(1 \leq \nu \leq n+1)$ -ის მიმართ.

ამ შეფასებების საფუძველზე ვიღებთ  $\max_v |R_n(\psi_n; \tau_\nu)|$  შეფასებას, რომლის საფუძველზედაც ისევე, როგორც §1.5-ში, მივიღებთ შემდეგი სახის შეფასებას

$$\|(S^{(1/2;-1/2)} - D_n^{(1/2;-1/2)})\psi_n\| \leq \varepsilon_n \|\psi_n\|_{H_{\alpha-1/2}}$$

-ის სრულიად განსაზღვრული შეფასებით. აქ, როგორც წინა შემთხვევაში,

$$\psi_n(t_0) = [S^{(1/2;-1/2)}]^{-1}(H\varphi_n)(t_0) = S^{(1/2;-1/2)}(H\varphi_n)(t_0)$$

გვაქვს

$$\|\psi_n\|_{H_\beta} \leq C_0 \|H\varphi_n\|_{H_\beta} \leq C_1 \max_j |\varphi(\tau_j)|, \quad C_0, C_1 = const.$$

ამ უკანასკნელის გათვალისწინებით, ასევე  $\varepsilon_n$ -ის ცხადი შეფასებიდან და

$$\|[D_n^{(1/2;-1/2)}]^{-1}\| = O(n^{1/2} \ln^2 n) \text{ მივიღებთ საბოლოოდ}$$

$$\begin{aligned} & \|[D_n^{(1/2;-1/2)}]^{-1}(D_n^{(1/2;-1/2)} - S^{(1/2;-1/2)})[S^{(1/2;-1/2)}]^{-1}(H\varphi_n)\| \leq \\ & \leq \delta_n \|\varphi_n\|, \quad \delta_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

ამგვარად, ვისარგებლოდ  $\|[S^{(1/2;-1/2)}]^{-1}(H\varphi_n) - [D_n^{(1/2;-1/2)}]^{-1}(H_n\varphi_n)\|$  და

მხედველობაში მივიღოთ, რომ  $L_n[D_n^{(1/2;-1/2)}]^{-1} = [D_n^{(1/2;-1/2)}]^{-1}$  მივიღებთ

ისეთივე შეფასებას  $L_n[S^{(1/2;-1/2)}]^{-1}(H\varphi_n) - [D_n^{(1/2;-1/2)}]^{-1}(H_n\varphi_n)$ -სთვისაც.

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის საფუძველზე და მარტივი შეფასებებით (მხედველობაში მივიღოთ  $f \in H_\alpha$  ( $1/2 < \alpha \leq 1$ )) დავრწმუნდებით, რომ განხილული განტოლებისათვის სრულდება მიახლოების მეთოდის ზოგადი პირობები [38].

ჩვენ დაშვებებში, რომ კომპიუტერით მიღებული შესაბამისი მრავალწევრის ფესვები ემთხვევა  $t_{0j} = \frac{\tau_j + \tau_j + 1}{2}$  წერტილებს, გარდა ერთი ფესვისა, რომელიც მცირედ განსხვავდება  $t_{0n}$  წერტილისგან, შეიძლება ვამტკიცოთ, რომ (2.4.2') განტოლება ცალსახად ამოხსნადია გარკვეული  $n$ -დან დაწყებული და მიახლოებითი ამოხსნა მიისწრაფის ზუსტი ამონახსნისაკენ.  $h(t_0, t)$  და  $f(t_0)$  ფუნქციების შესაბამისი სიგლუვის შემთხვევაში მიიღება კრებადობის  $O(n^{-\frac{3}{2}} \ln n)$  რიგი.

ანალოგიური მსჯელობა შეგვიძლია ჩავატაროთ (შესაბამისი დაზუსტებებით), როცა (2.4.1) განტოლებისათვის ვეძებთ ორივე ბოლოზე შემოუსაზღვრელ ან ორივე ბოლოზე შემოსაზღვრულ ფესვს.

## § 2. 5სრული ინტეგრალური განტოლებისრიცხვითი ამოხსნის შესახებ

მარკოვის ტიპის კვადრატურული ფორმულებით.

განვიხილოთ სრული პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლება

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} + \int_L K(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0) \quad (2.5.1)$$

ვთქვათ (2.5.1) განტოლებაში  $f(t)$  და  $K(t_0, t)$  ფუნქციები ეკუთვნიან ჰელდერის კლასს თავიანთი განსაზღვრის არეში. მაშინ შესაძლებელია გამოვიყენოთ

$$\sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k) h}{t_{0j} - t_k} + \sum_{k=1}^n K(t_{0j}, t_k) \varphi(t_k) h = f(t_{0j}), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.5.2)$$



რომელსაც გამოვითვლით ჩვენს მიერ §1.8-ში განსაზღვრული მარკოვის 7 სინგულარობის წერტილისთვის და 25 კვანძითი წერტილისათვის. მივიღებთ:

$$\sum_{k=1}^{25} \frac{\varphi(t_k)h}{t_{0j} - t_k} + \sum_{k=1}^{25} K(t_{0j}, t_k)\varphi(t_k)h = f(t_{0j}), \quad j = 1, 2, \dots, 7 \quad (2.5.3)$$

ეს უკანასკნელი წარმოადგენს წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას  $\varphi(t_k)$  უცნობების მიმართ, 7 განტოლებითა და 25 უცნობით, რომლის ცალსახა ამოხსნა შეუძლებელია. ესეიგი §1.8-ში მიღებული შედეგით შესაძლებელია დავთვალოთ სინგულარული ინტეგრალის მნიშვნელობა 7 სინგულარობის წერტილში, მაგრამ შეუძლებელია სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ცალსახა ამონახსნის მოძებნა. აქედან გამომდინარეობს, რომ მნიშვნელოვანია მოიძებნოს ერთნაირი რაოდენობის ერთმანეთთან ურთიერთკავშირში მყოფი ისეთი კვანძითი და სინგულარობის წერტილები, რომ ერთდროულად დაკმაყოფილდეს §1.8-ში  $t_k$  კვანძითი და  $t_{0j}$  სინგულარობის წერტილებისთვის წაყენებული მოთხოვნებიც და ამავედროულად (2.5.3) გახდეს ცალსახად ამოხსნადი.

### III თავი

III თავში წარმოდგენილია სამშენებლო მექანიკის მეტადაქტუალურისაკითხი, ბზარების ზოგიერთი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებით. ცნობილია, რომ როცა ბზარს აქვს გლუვი ან უბან-უბან გლუვი წირის ფორმა, იგი მიიყვანება დირიხლეს ამოცანაზე. დასმულია და განხილულია დირიხლეს ამოცანების რიცხვითი ამოხსნა სხვადასხვა შემთხვევებისათვის.

#### §3.1. დირიხლეს ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა უცნობი

##### გახსნილი სასაზღვრო წირის შემთხვევაში

გამოყენებითი ხასიათის ამოცანებში (მაგალითად, ბზარების) მრუდ-წირის გამოსახვა ზუსტი პარამეტრული განტოლებით, ხშირად სიძნელეს წარმოადგენს, რიგ შემთხვევაში კი, შეუძლებელსაც. ცნობილია მხოლოდ ამ მრუდის გრაფიკის სახეობა. ასეთ შემთხვევებში, როგორც ექსპერიმენტებმა გვაჩვენა, ამ ამოცანების რიცხვითი ამოხსნისათვის ეფექტიანია სინგულარულ ინტეგრალური განტოლების მეთოდი, რამეთუ ამ დროს გათვალისწინებული სქემები მოითხოვს საძებნი ფუნქციის მნიშვნელობებს მხოლოდ საკვანძო წერტილებში. ამასთან, განტოლების დისკრეტიზაციის პროცესში, აპროქსიმაცია საჭიროა მხოლოდ საძიებელი ამოხსნისათვის.

აღნიშნოთ  $D$ -თი სიბრტყე, რომელიც გაჭრილია გლუვი ლიაპუნოვის  $L=ab$  წირის გასწვრივ (ბოლოებით  $a$  და  $b$ ), რომლის პარამეტრულ განტოლებას მივიღებთ უცნობად. განვიხილოთ დირიხლეს ამოცანა (ამ ამოცანამდე დაიყვანება გამოყენებითი ხასიათის პრაქტიკული ამოცანების დიდი რაოდენობა. აუცილებელია ჰოლომორფული  $\phi$  ფუნქციის მოძებნა უსასრულო  $D$ -ს არეში, რომელიც ქრება უსასრულობაში, რომელიც უწყვეტად გრძელდება მარცხნივ და მარჯვნივ მრუდის გასწვრივ, გარდა მრუდის  $a$   $b$  ბოლოებისა, სადაც იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$|\phi(z)| \leq \frac{const}{|z-c|^\alpha}; \quad 0 \leq \alpha < 1 \quad (3.1.1)$$

ე.ი. აქვსუსტიგანსაკუთრებულობა;

ემთხვევააანხ, შემდეგიზღვრულიპირობებით

$$\operatorname{Re} \phi^+(t_0) = \operatorname{Re} \phi^-(t_0) = f(t_0), \quad (3.1.2)$$

სადაც  $f(t_0)$   $LL$ -ზე მოცემული ნამდვილი უწყვეტი ფუნქციაა.

დავუშვათ

$$U(x, y) + iV(x, y) = \phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\phi(t) dt}{t-z}, \quad (z) \in D.$$

ამოხსნას ვეძებთ კოშისტიპის ინტეგრალის ნამდვილი ნაწილით:

$$U(x, y) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - z}, \quad (z \in D). \quad (3.1.3)$$

სადაც  $\varphi(t)$  – საძიებელი ნამდვილი ფუნქცია.

(3.1.3) ტოლობა ჩავსვით (3.1.2) სასაზღვრო ტოლობაში. მაშინ  $\varphi(t)$  - სმოძებნის ამოცანა დაიყვანება შემდეგის სახის სინგულარული ინტეგრალურ განტოლებაზე;

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} = f(t_0). \quad (3.1.4)$$

როგორც მუსხელიშვილის თეორიიდან ააცნობილი, (3.1.4)

განტოლებას შეიძლება აქონდეს სამიტიპის ამონახსნი:

1.  $\varphi(t)$  ამოხსნის მოსაძებნად,

რომელიც შემოსაზღვრულია ერთბოლოზე და არარის შემოსაზღვრული მეორეზე,

ვიყენებთ პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამოხსნის ცნობილ წარმოდგენებს. მასე ქნება შემდეგისაზე:

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \varphi_0(t),$$

სადაც  $\varphi_0(t) \in H$  (ჰელდერის კლასის ფუნქციაა).

ამ შემთხვევაში გულისხმობთ, რომ  $\varphi(t)$  ამოხსნა შემოსაზღვრულია  $a$ -ს ბოლოზე და არარის შემოსაზღვრული  $b$ -ს ბოლოზე. მაშინ (3.1.4)

განტოლებამ იღებს შემდეგისაზე:

$$\frac{1}{\pi} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \cdot \frac{\varphi_0(t)}{t-t_0} dt + \frac{1}{\pi i} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} k(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0);$$

$$k(t_0, t) = \frac{\partial \vartheta}{\partial \sigma} = \frac{1}{\pi i} \left\{ \frac{[y'(\sigma) \cos \vartheta - x'(\sigma) \sin \vartheta] e^{i\vartheta}}{|t'(\sigma)|} \right\} \frac{1}{|t'(\sigma)|} \cdot \frac{1}{t - t_0},$$

სადაც  $\vartheta = \vartheta(t_0, t) = \arg(t - t_0)$ , **ლ**რუდიპარამეტრულადჩაწერილია:

$t = t(\sigma)$  სახით, სადაც  $\sigma$  არისპარამეტრიმრუდისსიგრძესთანშეფარდებით.

როგორცცნობილია, ამგანტოლებასაქვს **ჰ**კლასისერთადერთიამოხსნა.

2. როცავეებთ  $\varphi(t)$  ამოხსნას, რომელიცშემოუსაზღვრულიაორივებოლოზე,

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} \varphi_0(t).$$

მაშინგანტოლებას (3.2.4) ექნებაშემდეგისახე:

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-t_0)}} + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{k(t_0, t) \varphi_0(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} = f(t_0).$$

ამშემთხვევაში, (1.1.4) განტოლებასრომპქონდესერთადერთიამონახსნი,  $\varphi(t)$  ამოხსნაუნდააკმაყოფილებდესდამატებითპირობას:

$$\int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} = c,$$

სადაც **C** – რაიმე დამატებითი მუდმივია.

3. როცა ვეებთ  $\varphi(t)$  ამოხსნას, რომელიცშემოსაზღვრულიაორივებოლოზე, მასექნებაშემდეგისახე:

$$\varphi(t) = \sqrt{(t-a)(t-b)} \varphi_0(t),$$

მაშინგანტოლება (1.1.4) ჩაიწერებაშემდეგიფორმით:

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)} \varphi_0(t) dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L \sqrt{(t-a)(t-b)} k(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0).$$

იმისათვის, რომ მიღებული განტოლება სკონდეს ამოხსნა, უნდა შესრულდეს პირობა

$$\int_L \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} = 0$$

ამასთან, ამ შემთხვევაში ამონახსნი იქნება ერთადერთი.

სიმარტივისა და გარკვეულობისათვის განტოლების ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \varphi_0(t),$$

ე.ი. ვეძებთ ისეთ ამოხსნას, რომელიც შემოსაზღვრულია  $L$  მრუდის  $a$  ბოლოზე და არარის შემოსაზღვრული  $b$  ბოლოზე (ასეთი შემთხვევების შირადგვხვდება გამოყენებითი ხასიათის პრაქტიკულ ამოცანებში [63]). ამ შემთხვევაში (3.1.4) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{1}{\pi} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\varphi_0(t)}{t-t_0} dt + \frac{1}{\pi i} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} k(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0). \quad (3.1.5)$$

რადგან აცრვენარვიცით  $L$  მრუდის განტოლება,

უმუალოდ მონიტორის ეკრანიდან შეგვყავს მრუდის წერტილები და შემდეგ ამოვიყენებთ უბან-უბანს კლაინ-

პოლინომიალურ მეთოდს ერისინტერპოლაციას.

`spline toolbars~ პაკეტის გამოყენებით იგება შესაბამისი კონტური.

მონიტორის ეკრანზე ხვდა პარამეტრებთან ერთად ჩნდება პარამეტრი,

რომელიც იმზავს მრუდის სიგრძეს. ამასთან, იგი შეიძლება განვიხილოთ,

როგორც რკალის პარამეტრის ანალოგი და ჩავიწეროთ  $L$  მრუდის განტოლება:

$t = t(\sigma)$ , სადაც  $\sigma$  პარამეტრია იმზავს შესაბამისი რკალის სიგრძეს.

ამოიჩვენა კონტურის დაყოფის რაღაც რიცხვი  $n$  და განისაზღვრება დაყოფის ბიჯი  $h = \sigma / n$ . აუცილებელია აღვნიშნოთ, რომ კონტურის

დანაწევრება კვანძებად  $\{\sigma_j\}_{j=1}^n$  მრუდის რკალზე აღმოჩნდება თანაბარი რკალის სიგრძის მიმართ, რომლის ბოლოებიც არის  $\sigma_j$  და  $\sigma_{j+1}$ . ამას არ აქვს ადგილი იმ შემთხვევაში, როცა მრუდის დანაწევრება ხდება ბუნებრივი პარამეტრების მიმართ.

დაყოფის შემდეგ (3.1.5) განტოლებაში  $\varphi_0(t)$  ფუნქციას ვცვლით მიახლოებითი ფუნქციით:

$$\psi_{\sigma\nu}(\varphi; t, t_0) = \varphi(t_0) + \sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t-t_0}{t_{\sigma k} - t_0} \cdot \varphi(t_{\sigma k}) + \sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t-t_0}{t_0 - t_{\sigma k}} \cdot L_\nu(\varphi; t_0), \quad (1.1.6)$$

$$\text{სადაც } L_\nu(\varphi; t_0) = \sum_{k_0=1}^m l_{\nu k_0}(t_0) \varphi(t_{\nu k_0}),$$

$$l_{\sigma k}(t) = \frac{\omega_\sigma(t)}{(t-t_{\sigma k})\omega'_\sigma(t_{\sigma k})}, \quad \omega_\sigma(t) = \prod_{k=1}^m (t-t_{\sigma k}),$$

$\psi_{\sigma\nu}(\varphi; t, t_0)$  უბან-უბანსაინტერპოლაციომრავალწევრია. თუ (3.1.6)-ეს ჩავსვამთ (3.1.5)-ში, მიიღება შემდეგი წრფივი განტოლებათა სისტემა  $\varphi_0(t_{\sigma k})$  უცნობების მიმართ.

$$\varphi_{0n}(t_{\nu j}) + \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m q_{ie} A_n(t_{ie}, t_{\nu j}) \varphi_{0n}(t_{ie}) = f_0(t_{\nu j}),$$

სადაც

$$\begin{aligned} A_n(t_{ie}, t_{\nu j}) = & \left[ 1 + \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{\sigma k} - t_{\nu j}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\nu k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{\nu k} - t_{\nu j}} - P_{\nu j}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{\nu k}(t_{\nu j}) \right] \times \\ & \times K(t_{\nu j}; t_{ie}) - \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{\sigma k} - t_{\nu j}} K(t_{\sigma k}; t_{ie}) - \\ & - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\nu k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{\nu k} - t_{\nu j}} K(t_{\nu k}; t_{ie}) + P_{\nu j}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{\nu k}(t_{\nu j}) K(t_{\nu k}; t_{ie}), \end{aligned}$$

ხოლო  $\varphi_{0n}(t_{vj})$  - სამეზნი სიდიდეებია.

$$f_0(t_{vj}) = \left[ 1 + \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq v}}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{\sigma k}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{vk}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{vk}} - P_{vj}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{vk}(t_{vj}) \right] f(t_{vj}) - \\ - \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq v}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{\sigma k}} f(t_{\sigma k}) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{vk}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{vk}} f(t_{vk}) + P_{vj}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{vk}(t_{vj}) f(t_{vj})$$

$$(v = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m)$$

$$P_{\sigma k}^{(1/2; -1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-b}{t-a}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{t - t_{\sigma j}}{t_{\sigma k} - t_{\sigma j}} dt \quad P_{il}^{(-1/2; 1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_i \tau_{i+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^m \frac{t - t_{ij}}{t_{ie} - t_{ij}} dt$$

$$P_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)} = \begin{cases} P_{\sigma k}^{(1/2; -1/2)}, & k = \overline{2, m-1}; \quad \sigma = \overline{1, n}, \\ P_{\sigma l}^{(1/2; -1/2)} + P_{\sigma-1m}^{(1/2; -1/2)}; & k = 1; \quad \sigma = \overline{1, n}; \end{cases}$$

$$d_{vk} = \frac{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k, j}}^m (t_{vj} - t_{vj_0})}{\prod_{\substack{j=1 \\ j_0 \neq k}}^m (t_{vk} - t_{vj_0})}$$

მტკიცდება, რომ აღნიშნულ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი,

ვპოულობთ ამონახსნებს, ამოვხსნით ამ სისტემას, ვიპოვით  $\{\varphi_0(t_{\sigma k})\}_{\sigma=1}^n$  ( $k=0, m$ )

მიშვნელობებს და ამ მიშვნელობებზე ვაგებთ ლაგრანჟის საინტერპოლაციოვ ორმულას.

$$L_v(\varphi; t_0) = \sum_{k_0=1}^m l_{vk_0}(t_0) \varphi_{0n}(t_{vk_0}),$$

$$l_{\sigma k}(t) = \frac{\omega_\sigma(t)}{(t - t_{\sigma k}) \omega'_\sigma(t_{\sigma k})}, \quad \omega_\sigma(t) = \prod_{k=1}^m (t - t_{\sigma k})$$

$$\sigma = 0, n-1; \quad k = 0, m-1.$$

მასშემდეგ,

რაც შესაბამისი მიახლოებითი სისტემიდან მოვპოვებით მნიშვნელობას  $\{\varphi_{0j}\}_{j=1}^n$ ,

ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნისათვის ვღებულობთ:

$$U_n(x, y) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \cdot \frac{\psi_n(t)}{t-z} dt, \quad (z \in D) \quad (3.1.7)$$

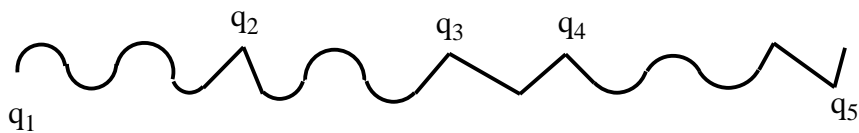
სადაც  $\psi_n(t)$  წარმოადგენს  $\{\sigma_{0j}\}_{j=1}^n$  მნიშვნელობაზე

აგებული ანგრანჟის ინტერპოლაციური მრავალწევრს,

$$\psi_n(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\omega(t)}{(t-t_{0j})\omega'(t_{0j})} \cdot \varphi_{0n}(t_{0j}).$$

როცა  $L$  წირი უბან-უბანგლუვია  $q_1, q_2, \dots, q_n$  კუთხითი წერტილებითან (იხ.

ნახ.1)  $f(t)$ -ს გააჩნია პირველი გვარის წყვეტები, მაშინ



ნახ.3

დირიხლეს ამოცანაში  $S^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$  სინგულარულ ინტეგრალს ვცვლით მ.

კუბლაშვილის მიერ აგებული  $S_{n, q_1, q_2, \dots, q_n}(\varphi; t_0)$  მაღალი სიზუსტის

მიახლოებითი მაპროქსიმირებელი ჯამით:



$$\begin{aligned}
s_{n,q_1,q_2,\dots,q_n}(\varphi;t_0) &= \sum_{\sigma=1}^n \left\{ \varphi(t_0) \lambda_{r\sigma}(t_0) + \sum_{k=1}^m \frac{p_{r\sigma k}}{t_0 - t_{r\sigma k}} [L_{r\nu}(\varphi;t_0) - \varphi(t_{r\sigma k})] + \right. \\
&+ \sum_{i=1}^l [\varphi(q_i) \lambda_{i\sigma}(t_0) + \sum_{k=1}^m \frac{\Omega_{i\sigma k}(t_0; q_i)}{q_i - t_{i\sigma k}}] + [L_{i,0}(\varphi; q_i) - \varphi(t_{i\sigma k})] + \varphi(q_r) \lambda_{r-1\sigma}(t_0) + \\
&\left. + \sum_{k=1}^m \frac{\Omega_{r-1\sigma k}(t_0; q_r)}{q_r - t_{r-1\sigma k}} \times [L_{r-1,n-1}(\varphi; q_r) - \varphi(t_{r-1\sigma k})] \right\},
\end{aligned}$$

სადაც

$$\Omega_{i\sigma k}(t_0, q_i) = p_{i\sigma k} + \frac{t_0 - q_i}{(t_0 - t_{i\sigma k}) \omega'_{i\sigma}(t_{i\sigma k})} \left[ \omega_{i\sigma}(t_0) [\gamma_{i\sigma}(t_0) + \lambda_{i\sigma}(t_0)] - p_{i\sigma k} \omega'_{i\sigma}(t_{i\sigma k}) \right]$$

$$\lambda_{i\sigma}(t_0) \equiv \frac{1}{\pi i} \ln \frac{\tau_{i\sigma+1} - t_0}{\tau_{i\sigma} - t_0}; \quad \gamma_{i\sigma}(t_0) \equiv \sum_{j=1}^m \frac{p_{i\sigma j}}{t_0 - t_{i\sigma j}},$$

$$p_{i\sigma k} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{i\sigma} \tau_{i\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\omega_{i\sigma}(t) dt}{(t - t_{i\sigma k}) \omega'_{i\sigma}(t_{i\sigma k})}$$

$$(i=1,2,3,\dots,r-1,r+1,\dots,l) \quad (t_0 \in q_r, q_{r+1})$$

$t_{i\sigma k} (i=1,2,\dots,l; \sigma=1,2,\dots,n; k=1,2,\dots,m)$  კვანძითი წერტილებია  $q_i, q_{i+1} \subset L$

რკალზე.

(3.1.7) ფორმულაში  $L$  მრუდთანახლოწერტილისთვის  $z = x + iy$  ვიყენებთ. კუბლაშვილის მიერ აგებულ მადალირიგის სიზუსტის კვადრატურულ ფორმულას:

$$\frac{1}{\pi} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \cdot \frac{\psi_n(t)}{t-z} \approx 2iL_\nu(\phi_\nu; t_0) + 2i \sum_{\sigma=1}^n \sum_{k=0}^1 P_{\sigma k}(\sigma; t; z) \cdot \frac{\psi_n(\tau_{\sigma+k}) - L_{\sigma k}}{\tau_{\sigma+k}}, \quad (1.1.8)$$

სადაც

$$P_{\sigma k}(p, t, z) = \frac{1}{2} p_\sigma(p) + \frac{(z-t_0)}{\pi i} \int_{\tau_{\sigma\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \cdot \frac{l_{\sigma k}(t) dt}{t-z} + \frac{(z-t_0)^2}{2\pi i} - \int_{\tau_{\sigma\sigma+2}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{l_{\sigma k}(t) dt}{(t-z)^2};$$

დანარჩენი წერტილებისთვის გამოვიყენოთ ჩვეულებრივი კვადრატული ფორმულა

$$\frac{1}{\pi} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \cdot \frac{\psi_n(t)}{t-z} \approx 2i \sum_{\sigma=1}^n \sum_{k=0}^1 P_{\sigma k} \cdot \frac{\psi_n(\tau_{\sigma+k}) - L_{\sigma k}}{\tau_{\sigma+k} - z}. \quad (3.1.9)$$

მაგალითისთვის,

Lკონტურის როლში იმივილოთ გრაფიკულად ფორმულირებული მრუდი

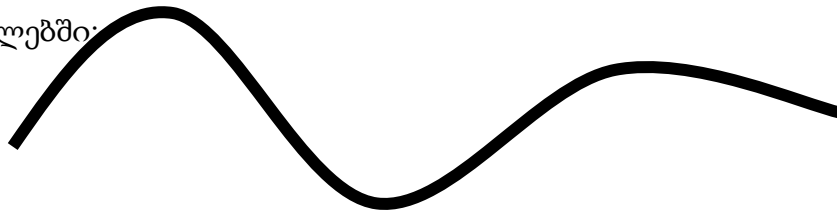
(ნახ.2),

ხოლო მარჯვენა მხარედ  $f(t) = \operatorname{Re}(t) + \operatorname{Im}(t)$

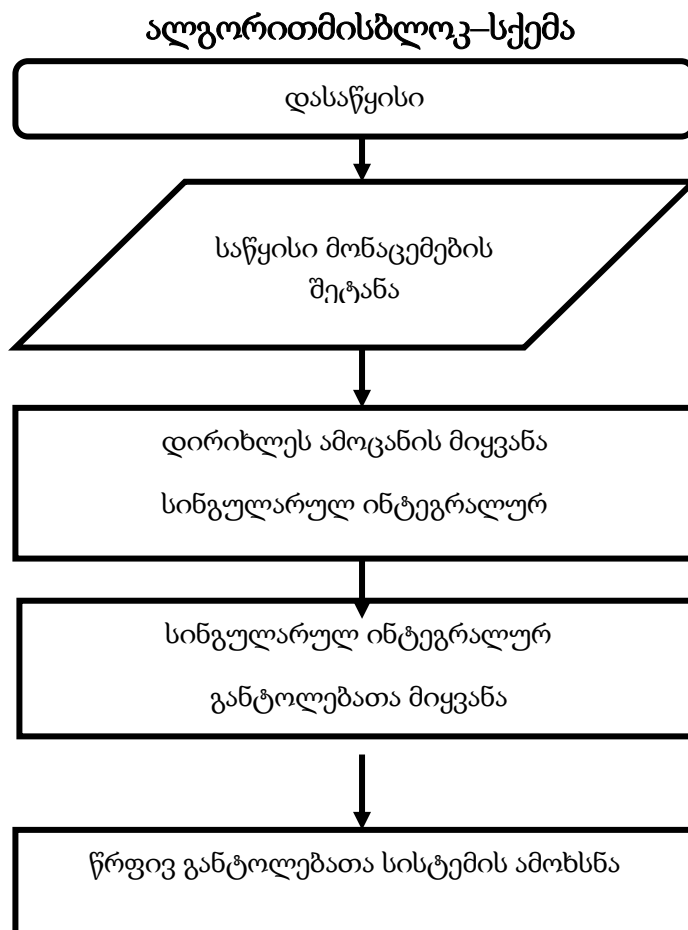
და გამოვთვალოთ დირიხლეს ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნა კონტურის დაყ

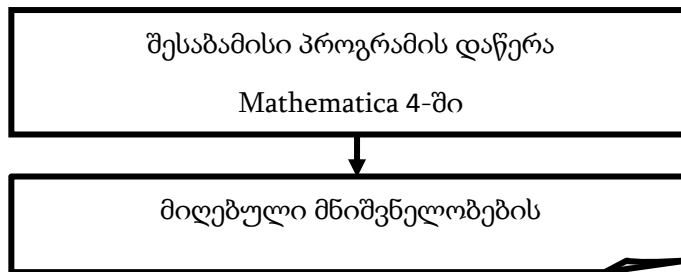
ოფათა  $n$ -ის სხვადასხვა მნიშვნელობისთვის. შედეგები წარმოდგენილია (3.2.3)

ცხრილებში:



ნახ. 4. გრაფიკულად ფორმულირებული მრუდი





პროგრამა დაწერეთ Mathematica-ში. ალსანიშნავიარომ,  
 როცასაქმეგვაქვსისეთარეებთან,  
 რომელშიაცკონტურიმოცემულიამხოლოდგრაფიკულად,  
 არსებითიმნიშვნელობააქვსშეფასდესამონახსნისნაზრდი,  
 რომელიცმიიღებაკონტურისმიახლოებითიშეცვლით.  
 ანალოგიურისაკითხებიდაგარკვეულიშედეგებიამმართულებაშიპირველა  
 დმიილოლაგრენტემა, მოგვიანებითსხვაავტორებმა.

n=10

ცხრილი8

$z$	$U(x, y)$	$U_n(x, y)$	$R_n =  U(x, y) - U_n(x, y) $
0.005i	$5.84648 \cdot 10^{-15}$	-0.00359624	0.00359624
$2\pi + 0.005i$	1.	0.866977	0.133003

n=50

ცხრილი9

$z$	$U(x, y)$	$U_n(x, y)$	$R_n =  U(x, y) - U_n(x, y) $
0.005i	$5.84648 \cdot 10^{-15}$	-0.00469624	0.0046966
$2\pi + 0.005i$	1.	0.93816	0.061804

n=100

ცხრილი 10

$z$	$U(x, y)$	$U_n(x, y)$	$R_n =  U(x, y) - U_n(x, y) $
0.005i	$5.84648 \cdot 10^{-15}$	-0.00959009	0.009004
$2\pi + 0.005i$	1.	0.95221	0.04779493

დირიხლეს ამოცანის ზუსტი ამოხსნა აღნიშნულია  $U(x, y)$ -ით,

ხოლო შესაბამისი მიახლოებითი ამოხსნა  $-U_n(x, y)$ .

ჩვენ შემთხვევაში არის საზღვარი მოცემულია არა ზუსტად,

არამედ გრაფიკულად (კონტურის წერტილების კოორდინატებით).

ასეთი ამოცანების მიახლოებითი ამოხსნების დროს კარგად ჩანს სინგულარულ ინტეგრალების აპროქსიმაციის ეფექტურობა,

რომ ასეთი რადაგებულს შემთხვევაში საჭიროა მხოლოდ კვანძითი წერტილების ცოდნა.

### §3.2. დირიხლეს სახეშეცვლილი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის

#### შესახებ გახსნილი კონტურების შემთხვევაში

როგორც ცნობილია, ბზარების, გრების, კონფორმულად გადამსახავი ფუნქციის პოვნის ამოცანა (ამ უკანასკნელზე, თავის მხრივ, მიიყვანება მრავალი გამოყენებითი ტიპის ამოცანები, რომელიც ფორმულირდება შემდეგი სახით):

ვთქვათ,  $L$ - აღნიშნავს გლუვ მარტივ, ლიპონოვის გახსნილ წირს. ავღნიშნოთ  $D$ -თი სიბრტყე, რომელიც გაჭრილია  $L$ -ის გასწვრივ. ამოცანა

მდგომარეობს შემდეგში: უნდა ვიპოვოთ  $D$ -არეში ისეთი უსასრულოებაში ქრობადი  $\Phi$  ჰოლომორფული ფუნქცია, რომელიც უწყვეტად გაგრძელებადია მარცხნიდან და მარჯვნიდან  $L$ - წირის გასწვრივ, გარდა  $a$  და  $b$  ბოლოებისა, სადაც ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$|\Phi(z)| < \frac{cont}{|z-c|^\alpha} \quad 0 < \alpha \leq cont < 1 \quad (3.2.1)$$

$c$  ემთხვევა  $a$ -ს ან  $b$ -ს, შემდეგი სასაზღვრო პირობით

$$Re\Phi^+(t_0) = Re\Phi^-(t_0) = f(t_0) + d, \quad (3.2.2)$$

სადაც  $f(t_0) - L$ -ზე მოცემული ნამდვილი უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო  $d$  განისაზღვრება ამოცანის ამოხსნის პროცესში.

დავუშვათ

$$U(x, y) + iV(x, y) = \phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t - z}, \quad (z \in D)$$

ვეძებთ ამონახსნი შემდეგი სახით

$$U(x, y) = Re \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t - z} \quad (z \in D) \quad (3.2.3)$$

სადაც  $\varphi_0(t)$  საძებნი ნამდვილი ფუნქციაა. მაშინ  $\varphi$  ფუნქციის მოძებნის ამოცანა მიიყვანება შემდეგი სახის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე

$$Re \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t - z} - \frac{1}{\pi} \int_L \varphi_0(t) ds = f(t_0) \quad (3.2.4)$$

( $s$ -არის  $L$  წირის რეალური აბცისა). ამასთან  $L$  კონტურზე დადებით მიმართულებად იგულისხმება  $L$  -ზე გადაადგილება  $s$ -პარამეტრის ზრდის მიხედვით.

როგორც ცნობილია (3.2.4) განტოლება ცალსახად ამოხსნადია და თუ  $\varphi(t)$  არის მისი ამოხსნა, მაშინ საძებნი  $u(x, y)$  ამოხსნა მოიცემა (3.2.3) ფორმულით, ამასთან, სასაზღვრო პირობაში შემავალი საძებნი მუდმივი

$$d = \frac{1}{\pi} \int_L \varphi(t) ds$$

(3.2.4) განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

ანუ

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi_0(t)}{t-t_0} dt + \frac{1}{\pi i} \int_L \varphi_0(t) \frac{\partial \vartheta}{\partial s} ds - \frac{1}{\pi} \int_L \varphi(t) ds = f(t_0), \quad (3.2.5)$$

სადაც

$$\vartheta = \arg(t - t_0), \quad \frac{\partial \vartheta(t_0, t)}{\partial s} \in H((L \times L))$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial s} &= \frac{y'(s)[x'(s) - x(s_0)] - x'(s)[y'(s) - y(s_0)]}{r^2} = \frac{y'(s)\cos\vartheta - x'(s)\sin\vartheta}{r} \\ &= \frac{y'(s)\cos\vartheta - x'(s)\sin\vartheta}{t - t_0} e^{i\vartheta} \end{aligned}$$

სადაც  $t = t(s) = x(s) + iy(s)$   $L$ -წირის განტოლებაა,  $r = |t - t_0|$ .

ამ გარდაქმნების საფუძველზე, (3.2.5) განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t-t_0} + \int_L \frac{k(t_0, t) \varphi_0(t)}{t-t_0} dt = f(t_0), \quad (3.2.6)$$

სადაც, გული

$$\frac{k(t_0, t)}{t_0 - t} (k(t_0, t) \in H, \quad k(t_0, t_0 = 0)):$$

$$k(t_0; t) = \frac{1}{\pi} \{ [y'(s)\cos\vartheta - x'(s)\sin\vartheta] e^{i\vartheta} - i(t - t_0) \} t'(s), \quad \left( \overline{t'(s)} = \frac{d}{ds} \overline{t(s)} \right).$$

ამასთან, გავითვალისწინოთ, რომ,  $x'(s) = \cos\vartheta$ ,  $y'(s) = \sin\vartheta$ , სადაც  $\vartheta$  არის კუთხე  $L$ -წირის  $x(s) + iy(s)$  წერტილში გამავალ მხეზსა და  $ox$  ღერძს შორის, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ  $k(t_0, t_0) = 0$ . მეორე მხრივ, კონკრეტული, პრაქტიკული, გამოყენებითი ტიპის ამოცანებში, ხშირ შემთხვევებში  $L$  წირის განტოლების წარმოდგენა რეალური აბსცისის საშუალებით რთულია, ამიტომ ასეთ შემთხვევაში  $k(t_0, t)$ -ის გამოსახულება გარდაექმნათ

ისე, რომ ის შეესაბამებოდეს  $L$  წირის ჩაწერას ნებისმიერ  $\sigma: t = t(\sigma)$  პარამეტრით.

როგორც უშუალო გამოთვლები გვიჩვენებს

$$y'(s)\cos(\vartheta - x'(s)\sin\vartheta) = [y'(\sigma)\cos\vartheta - x'(\sigma)\sin\vartheta] \frac{d\sigma}{ds},$$

სადაც, მიღებული აღნიშვნების საფუძველზე,  $x'(\sigma) = \frac{dx}{d\sigma}$ ,  $y'(\sigma) = \frac{dy}{d\sigma}$ .

გარდა ამისა, იმის გამო, რომ

$$\overline{t'(s)} = \frac{d\bar{t}}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{|t'(\sigma)|} \overline{t'(\sigma)}, \text{ გვაქვს } \frac{d\sigma}{ds} = \frac{\overline{t'(\sigma)}}{|t'(s)|}$$

და შეიძლება ჩავწეროთ

$$k(t_0, t) = \frac{1}{\pi i} \left\{ \frac{[y'(\sigma)\cos\vartheta - x'(\sigma)\sin\vartheta]e^{i\vartheta}}{|t'(\sigma)|} - i(t - t_0) \right\} \frac{\overline{t'(\sigma)}}{|t'(\sigma)|}.$$

ეს უკანასკნელი შეიძლება გარკვეულად შევცვალოთ. შევნიშნოთ (ისევ [2]-ში მოყვანილი მსჯელობის საფუძველზე), რომ (3.2.6) განტოლებაში ამოხსნის თვალსაზრისით  $\int_L \varphi(t) d\sigma$  ინტეგრალიდან შეიძლება გადავიდეთ ინტეგრალზე

$$\int_L \varphi(t) d\sigma = \int_L \varphi(t) \frac{dt}{t'(\sigma)}$$

საბოლოოდ, ამის გათვალისწინებით, საწყისი ამოცანა მიიყვანება შემდეგი სახის პირველი გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{[y'(\sigma)\cos\vartheta - x'(\sigma)\sin\vartheta]e^{i\vartheta} - i(t - t_0)}{t - t_0} \cdot \frac{\varphi_0(t) dt}{t'(\sigma)} = f(t_0) \quad (3.2.7)$$

ამ განტოლების (ნამდვილი)  $\varphi(t)$  ამოხსნის შემდეგ საძიებელ  $U(x, y)$  ჰარმონიულ ფუნქციას ვიპოვიოთ ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის საფუძველზე, ხოლო  $d$  მუდმივისათვის გვექნება

$$d = \frac{1}{\pi} \int_L \varphi_0(t) \frac{dt}{t'(\sigma)}.$$

გამოვიყენოთ პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამონახსნების ცნობილი წარმოდგენები, II-თავში მოყვანილი მსჯერლობები, მაშინ, თუ  $\varphi_0(t)$  ამონახსნს ვეძებთ  $\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \varphi(t)$  სახით, სადაც  $\varphi \in H$ , მაშინ (3.2.7) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{1}{\pi} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} k_1(t, t_0) \varphi(t) = f(t_0) \quad (3.2.8)$$

$$K(t_0, t) = \frac{[y'(\sigma) \cos \vartheta - x'(\sigma) \sin \vartheta]}{t - t_0} \cdot \frac{1}{t'(\sigma)}$$

როგორც ცნობილია, ამ განტოლებას აქვს  $H$  კლასის ერთადერთი ამონახსნი.

როცა ამონახსნს ვეძებთ  $\varphi_0(t) = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{(t-a)/(t-b)}}$  სახით, მაშინ (3.2.7)

განტოლებას ექნება სახე:

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-t_0)}} + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{k_1(t_0, t) \varphi(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} = f(t_0), \quad (3.2.9)$$

ასეთ შემთხვევაში (3.2.9) განტოლების ცალსახად ამოხსნისათვის, ამონახსნი უნდა აკმაყოფილებდეს დამატებით პირობას

$$\int_L \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} = C,$$

სადაც  $C$  რაიმე მუდმივია.

ბოლოს, როცა ამონახსნს ვეძებთ  $\varphi(t) = \sqrt{(t-a)(t-b)} \varphi_0(t)$  სახით, (3.2.7)

განტოლებას ექნება სახე:

$$\frac{1}{\pi} \int_L \sqrt{(t-a)(t-b)} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L \sqrt{(t-a)(t-b)} k_1(t_0, t) \varphi(t) dt = f(t_0) \quad (2.10)$$

(3.2.10) განტოლებას, რომ ჰქონდეს ამონახსნი უნდა სრულდებოდეს დამატებითი პირობა,  $\int_L \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} = 0$ , ამ დროს მას ექნება ერთადერთი ამონახსნი [1]. (3.2.7), (3.2.9), (3.2.10) განტოლების რიცხვით ამონახსნებზე



ჩვენ აქ აღარ შევჩერდებით, რადგან ეს საკითხი ჩვენ დაწვრილებით განვიხილეთ II თავში.

გამოვიყენოთ ზემოთ მოყვანილ განტოლებებზე II თავში ინტეგრალური განტოლებების მიახლოებითი ამოხსნის სქემები, მას შემდეგ რაც შესაბამისი მიახლოებითი სისტემიდან ვიპოვით  $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ -ს მნიშვნელობებს, ამოცანის მიახლოებით ამონახსნად მივიღოთ

$$U_n(x, y) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{ab} \rho(t) \frac{\psi_n(t)}{t-z} dt \quad (z \in D),$$

სადაც  $\psi_n(t)$ -წარმოადგენს  $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ -ის მნიშვნელობებზე აგებულ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრს, ხოლო  $\rho(t) = (t-a)^\alpha(t-b)^\beta$  წონითი ფუნქციაა.  $\alpha$  და  $\beta$  ლებულობს მნიშვნელობას იმის შესაბამისად, რომელი განტოლების ამონახსნს ვიხილავთ. კერძოდ, (2.8) განტოლებისათვის  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = -\frac{1}{2}$ ; (3.2.9) განტოლების შემთხვევაში  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ ; ხოლო (3.2.10)

განტოლებაში  $\alpha = \beta = 1/2$ ; (2.11)-ფორმულით მივიღებთ ამოხსნის მიახლოებით  $U_n(x, y)$  მნიშვნელობას  $D+L$  არეში, ამასთან, საჭიროა განისაზღვროს  $d$  მუდმივის მიახლოებითი მნიშვნელობა

$$d_n = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi_n(t)}{t'(s)} d(t).$$

აქ  $U_n(x, y)$  არის დირიხლეს სახეცვლილი ამოცანის ამოხსნა. თვითონ დირიხლეს ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნა იქნება  $U_n(x, y) - d_n$ .

(3.2.11) ფორმულაში  $L$ -წირის მიახლოებითი  $z = x + iy$  წერტილებისათვის გამოვიყენოთწინა თავში აგებული მიახლოებითი ფორმულა.

$$\frac{1}{\pi} \int_L \rho(t) \cdot \frac{\psi_n(t) dt}{t-z} \approx 2iL_v(\phi_v; t_0) + 2i \sum_{\sigma=1}^n \sum_{k=0}^1 P_{\sigma k}(\rho; t_0; z) \cdot \frac{\psi_n(\tau_{\sigma+k}) - L_{\sigma k}}{\tau_{\sigma+k} - z},$$

სადაც  $P_{\sigma k}(\rho; t_0; z)$  კოეფიციენტები განისაზღვრება წინა პარაგრაფის შესაბამისად. დანარჩენი  $z$  წერტილებისათვის გამოვიყენოთ ჩვეულებრივი კვადრატული ფორმულები

$$\frac{1}{\pi} \int_L \rho(t) \cdot \frac{\psi_n(t) dt}{t-z} \approx 2i \sum_{\sigma=1}^n \sum_{k=0}^1 P_{\sigma k} \frac{\psi_n(\tau_{\sigma+k}) - L_{\sigma k}}{\tau_{\sigma+k} - z},$$

ქვემოთ მოყვანილია დირიხლეს სახეცვლილი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის ცხრილები, როცა  $L \equiv [-1; +1]$  ნამდვილი ღერძის მონაკვეთია, ხოლო  $f(t) = f(t(s)) = \text{Re}(t) = t$ .

$U(x, y)$  და  $U_n(x, y)$ -ით აღნიშნულია შესაბამისი ამოცანის შესაბამისად ზუსტი და მიახლოებითი ამონახსნები.  $z$  წერტილი აღებულია კონტურის ბოლოების მცირე მახლობელ მიდამოდან.

n=10

cxrili 11

Z	$U(x, y)$	$U_n(x, y)$	$R_n =  U(x, y) - U_n(x, y) $
1+0.005	-36.2402	-36.981	0.641
-1 + 0.005	0.005	0.02525	0.02025

n=50

cxrili 12

Z	$U(x, y)$	$U_n(x, y)$	$R_n =  U(x, y) - U_n(x, y) $
1+0.005	-36.2402	-36.7524	0.5102
-1 + 0.005	0.005	0.007468	0.002468

n=100

cxrili 13

$Z$	$U(x, y)$	$U_n(x, y)$	$R_n =  U(x, y) - U_n(x, y) $
$1+0.005$	$-36.2402$	$-36.2961$	$0.0459$
$-1+0.005$	$0.005$	$0.005078$	$0.000078$

$n=10$

cxrili 14

$Z$	$U(x, y)$	$U_n(x, y)$	$R_n =  U(x, y) - U_n(x, y) $
$-1+0.005i$	$0.0000$	$0.0202361$	$0.0202361$
$1+0.005i$	$2$	$2.01375$	$0.01375$

$n=50$

cxrili 15

$Z$	$U(x, y)$	$U_n(x, y)$	$R_n =  U(x, y) - U_n(x, y) $
$-1+0.005i$	$0.0000$	$0.00427$	$0.00427$
$1+0.005i$	$2$	$2.00215$	$0.00215$

$n=100$

cxrili 16

$Z$	$U(x, y)$	$U_n(x, y)$	$R_n =  U(x, y) - U_n(x, y) $
$-1+0.005i$	$0.0000$	$0.00155$	$0.00155$
$1+0.005i$	$2$	$2.00052$	$0.00052$

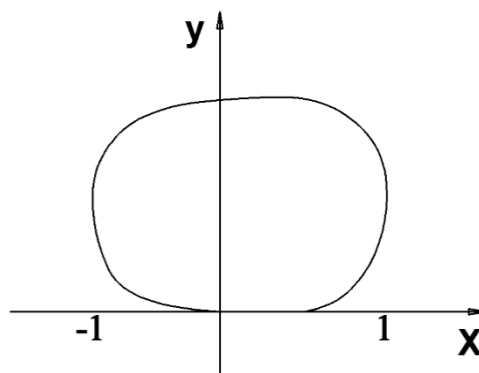
მოცემული ცხრილების მისაღებად ჯერ უნდა ამოიხსნას შესაბამისი (3.2.7) ინტეგრალური განტოლება, შემდეგ ამ ამონახსნების  $\{\varphi_n(\tau_j)\}_{j=1}^n$  საშუალებით ვაგებთ  $\psi_n(t)$  საინტერპოლაციო მრავალწევრს და (3.2.11) ფორმულით ვპოულობთ  $U_n(x, y)$  მიახლოებით ამონახსნს.

მიუხედავად რამდენიმეჯერ ჩატარებული მიახლოებითი პროცესისა, უკვე  $n=100$  წერტილისათვის მიიღწევა საკმარისად მაღალი,  $10^{-3}$  რიგის სიზუსტე. ეს უკანასკნელი ადასტურებს, რომ ჩვენს მიერ აგებული მიახლოებითი გამოთვლის ალგორითმი მდგრადია. დამრგვალების ცდომილება არსებით გავლენას ვერ ახდენს კრებადობის პროცესზე.

**§3.3. დირიხლეს ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის შესახებ არეებისათვის, რომელთა საზღვრის წირებს არ აქვთ მაღალი რიგის სიმრუდე**

წინამდებარე ნაშრომში გაუმჯობესებულია [1]-ში მოყვანილი კონკრეტული ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმი.

[1]-ის შესაბამისად განვიხილოთ სასრული არე  $L = ab$  საზღვრით, რომელიც შედგება  $y = x^3, -1 \leq x \leq 0, y = 0, 0 \leq x \leq 1$  და გარკვეული (გრაფიკულად მოცემული) გლუვი რკალისაგან, რომელიც გლუვად ეხება აღნიშნულ წირს  $T = -1 + i, t = t + 0i$  წერტილებში (და მთლიანად განლაგებულია  $y \geq 0$  ნახევარსიბრტყეში (ნახაზი).



(ნახ.-5)

ამ შემთხვევაში  $L$ -ის მეორე რიგის წარმოებული  $t=0$  წერტილში განიცდის წყვეტას. ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში:

უნდა ვიპოვოთ ისეთი (ნამდვილი)  $U(x,y)$  ფუნქცია, რომელიც ჰარმონიულია  $L$ -ით შემოსაზღვრულ  $D^+$  არეში, უწყვეტია  $D^+L$ -ზე და აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას

$$U(x, y)|_L = f(t) \quad (3.3.1)$$

სადაც  $f(t)$  ჰელდერის კლასის მოცემული ფუნქციაა ( $f \in H(L)$ ).

[2]-ის შესაბამისად დავუშვათ

$$U(x, y) + iV(x, y) = \phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - z} \quad (3.3.2)$$

სადაც  $\varphi(t)$  სამეზნი ნამდვილი ფუნქციაა  $H$  კლასიდან.

გადავიდეთ (3.3.2)-ში ზღვარზე, როდესაც  $z \rightarrow t_0$  ( $t_0 \in L$ ), პლემელი-სოხოცკის ფორმულით, მივიღებთ შემდეგ სასაზღვრო განტოლებას:

$$\varphi(t_0) + \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} = f(t_0) \quad (3.3.3)$$

ამ განტოლების ამოსახსნელად გამოვიყენოთ [1]-ში აგებული ალგორითმი, რომლის საშუალებითაც (3.3.3) განტოლება მიიყვანება წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემაზე  $\{\psi_n(\tau_{vj})\}$  ( $v = 0, 1, \dots, n-1; j = 0, 1, \dots, 3$ ) უცნობების მიმართ.

$$\begin{aligned} & \psi_n(\tau_{vj}) + \tau_{vj} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\tau_{vj}} \left[ 1 + \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^2 \frac{2\tau_{\sigma k} P_{\sigma k}^*}{\tau_{vj}^2 - \tau_{\sigma k}^2} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^2 \frac{2\tau_{vk} P_{vk}^*}{\tau_{vj}^2 - \tau_{vk}^2} + P_{vk}^* \left( \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^3 \frac{1}{\tau_{vj} - \tau_{vk}} - \frac{1}{\tau_{vk}} \right) \right] \right\} \psi_n(\tau_{vj}) - \\ & - \sum_{\substack{\sigma=0 \\ \sigma \neq k}}^{n-1} \sum_{k=0}^2 \frac{2\tau_{\sigma k} P_{\sigma k}^*}{\tau_{vj}^2 - \tau_{\sigma k}^2} \psi_n(\tau_{\sigma k}) - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^2 \frac{2\tau_{vj} P_{vk}^*}{\tau_{vj}^2 - \tau_{vk}^2} \psi_n(\tau_{vk}) + P_{vj}^* \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^3 d_{vk}(\tau_{vj}) \psi_n(\tau_{vk}) \} = g(\tau_{vj}) \end{aligned}$$

( $v = 0, 1, 2, \dots, n-1; j = 0, 1, 2, 3$ )

(3.3.4)

სადაც

$$P_{\sigma k}^* = \begin{cases} P_{\sigma k}^*; & \sigma = \overline{0, n-1}; k = 1, 2, 3 \\ P_{\sigma+1,0} + P_{\sigma 3}; & \sigma = \overline{0, n-1}; k = 1, 2, 3 \\ \sigma = n-1; & P_{n0} + P_{n-1,3} = P_{0,0+} P_{n-1,3} \end{cases}$$

$$\psi(\tau_{vj}) = \tau_{vj} \cdot \varphi(\tau_{vj}^2), \quad g(\tau_{vj}) = \tau_{vj} \cdot f(\tau_{vj}^2)$$

მას შემდეგ, რაც შესაბამისი (3.3.4) მიახლოებითი სისტემიდან ვიპოვით  $\{\psi_n(\tau_{vj})\}$  ( $v = 0, 1, \dots, n-1; j = 0, 1, \dots, 3$ ) მნიშვნელობებს და გავითვალისწინეთ გარდაქმნას  $t = \tau$  (იხ. [1]), ამოცანის მიახლოებით ამონახსნად მივიღოთ

$$U_n(x, y) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_n(t) dt}{t-z} = \operatorname{Re} \frac{2}{\pi i} \int_{L^0} \frac{\psi_n(\tau) d\tau}{\tau^2 - z} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{z} \left[ \frac{1}{\pi i} \int_{L^0} \frac{\psi_n(t) d\tau}{\tau - z} - \frac{1}{\pi i} \int_{L^0} \frac{\psi_n(\tau) d\tau}{\tau^2 - (-z)} \right] \right\} \quad (3.3.5)$$

სადაც  $\psi_n(\tau)$  წარმოადგენს (3.3.4) სისტემის ამონახსნებზე აგებულ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრს (3.3.5) ინტეგრალი მიახლოებით გამოვთვალოთ შემდეგნაირად:

ვთქვათ,  $L^0$  წირის პარამეტრული განტოლება  $\tau = \tau(s)$  ( $0 \leq s \leq e$ ). [3]-ის ანალოგიურად ნებისმიერი ნატურალური  $n$ -სთვის  $[0, e]$  შუალედი დავყოთ  $n$ -ტოლ ნაწილად წერტილებით  $S_\sigma = \frac{e}{n} \sigma$  ( $\sigma = 0, 1, 2, \dots, n$ ) და აღვნიშნოთ  $t_\sigma = \tau(S_\sigma)$ .

ვთქვათ,  $L_\nu(\varphi; \tau_0) = l_{\nu 0}(\tau_0) \psi_\nu(t_\nu) + l_{\nu 1}(\tau_0) \psi_\nu(t_{\nu+1})$  ლაგრანჟის წრფივი საინტერპოლაციო მრავალწევრია და, შესაბამისად,

$$l_{\nu 0}(\tau) = \frac{\tau - t_{\nu+1}}{t_\nu - t_{\nu+1}}, \quad l_{\nu 1}(\tau) = \frac{\tau - t_\nu}{t_{\nu+1} - t_\nu},$$

ვიგულისხმოთ, რომ  $\tau_0$  ნებისმიერი წერტილია  $\tau_0 \in L^0$  (შემდეგ იგი გარკვეული აზრით იქნება დაკავშირებული  $z$  წერტილთან).  $\nu(0 \leq \nu \leq n)$

არის ნომერი, რომლისთვისაც  $\tau_0 \in t_\nu t_{\nu+1}$ . ყოველ  $\tau \in t_\sigma t_{\sigma+1}$  რკალიდან  $\psi_n(\tau)$  ფუნქციას მიუახლოვდეთ შემდეგნაირად:

როდესაც  $\sigma = \nu - 1$

$$\psi_n(\tau) \approx L_\nu(\psi_n; \tau_0) + (\tau - \tau_0) \left\{ l_{\nu-10}(\tau) \frac{\psi_n(t_{\nu-1}) - \psi_n(\tau_0)}{t_{\nu-1} - \tau_0} + l_{\nu-11}(\tau) \frac{\psi_n(t_\nu) - L_n(\psi_n; \tau_0)}{t_\nu - \tau_0} \right\}$$

როდესაც  $\sigma = \nu$

$$\psi_n(\tau) \approx L_\nu(\psi_n; \tau_0) + (\tau - \tau_0) \left\{ l_{\nu 0}(\tau) \frac{\psi_n(t_\nu) - L_\nu(\psi_n; \tau_0)}{t_\nu - \tau_0} + l_{\nu 1}(\tau) \frac{\psi_n(t_{\nu+1}) - L_\nu(\psi_n; \tau_0)}{t_{\nu+1} - \tau_0} \right\}$$

როდესაც  $\sigma = \nu + 1$

$$\psi_n(\tau) \approx L_\nu(\psi_n; \tau_0) + (\tau - \tau_0) \left\{ l_{\nu+10}(\tau) \frac{\psi_n(t_{\nu+1}) - L_\nu(\psi_n; \tau_0)}{t_{\nu+1} - \tau_0} + l_{\nu+11}(\tau) \frac{\psi_n(t_{\nu+2}) - \psi_n(\tau_0)}{t_{\nu+2} - \tau_0} \right\}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$L_{\sigma k}(\psi_n; \tau_0) = \begin{cases} \psi_n(\tau_0), & \sigma + k \neq \nu, \nu + 1 \\ L_\nu(\psi_n; \tau_0), & \sigma + k = \nu, \nu + 1 \quad (\tau_0 \in t_\nu t_{\nu+1}) \end{cases}$$

მაშინ ზოგადად შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$\psi_n(\tau) \approx L_\nu(\psi_n; \tau_0) + (\tau - \tau_0) \sum_{k=0}^1 l_{\sigma k}(\tau) \frac{\psi_n(t_{\sigma+k}) - L_{\sigma k}(\psi_n; \tau_0)}{t_{\sigma+k} - \tau_0} \quad (3.3.6)$$

(3.3.5)-ში შემავალი კოშის ტიპის ინტეგრალის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ (3.3.6) ფორმულა. მივიღებთ:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{L^0} \frac{\psi_n(\tau) d\tau}{\tau - z} \approx 2L_\nu(\psi_n; \tau_0) + 2 \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^1 P_{\sigma k}(\tau_0, z) \frac{\psi_n(t_{\sigma+k}) - L_{\sigma k}(\psi_n; \tau_0)}{t_{\sigma+k} - z},$$

(3.3.7)

$$\frac{1}{\pi i} \int_{L^0} \frac{\psi_n(\tau) d\tau}{\tau - (-z)} \approx 2L_\nu(\psi_n; \tau_0) + 2 \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^1 P_{\sigma k}(\tau_0, -z) \frac{\psi_n(t_{\sigma+k}) - L_{\sigma k}(\psi_n; \tau_0)}{t_{\sigma+k} - (-z)}$$

სადაც

$$P_{\sigma k}(\tau, z) = \frac{t_{\sigma+1} - t_{\sigma}}{2} + \frac{z - \tau_0}{\pi i} \int_{l_{\sigma} l_{\sigma+1}} \frac{l_{\sigma k}(\tau) d\tau}{\tau - z} + \frac{(z - \tau_0)^2}{2\pi i} \int_{l_{\sigma} l_{\sigma+1}} \frac{l_{\sigma k}(\tau) d\tau}{(\tau - z)^2}$$

მაღალი სიზუსტის მისაღწევად მიზანშეწონილია (3.3.7) ფორმულები გამოვიყენოთ  $L^0$  წირის მახლობელ  $z = x + iy$  წერტილებისთვის, დანარჩენ  $z$  წერტილებისათვის კი - ჩვეულებრივი კვადრატული ფორმულები:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{L^0} \frac{\psi_n(\tau) d\tau}{\tau \pm z} \approx 2 \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^1 P_{\sigma k} \frac{\psi(t_{\sigma+k})}{t_{\sigma+k} \pm z}, \quad (3.3.8)$$

სადაც

$$P_{\sigma k} = \frac{1}{\pi i} \int_{l_{\sigma} l_{\sigma+1}} \frac{\omega_{\sigma}(\tau) d\tau}{(\tau - t_{\sigma k}) \omega'_{\sigma}(t_{\sigma k})}, \quad \omega_{\sigma}(\tau) = \prod_{k=0}^{m-1} (\tau - t_{\sigma k})$$

$$(\sigma = 0, 1, \dots, n-1; k = 0, 1, \dots, m-1)$$

ქვემოთ მოყვანილია კომპიუტერზე გათვლის შედეგები, როდესაც

$$f = x + y; \quad n = 20;$$

$$U_n(0.5; 0.5) \approx 0.987705;$$

$$U_n(0.9; 0.1) \approx 0.95231;$$

$$U_n(0.1; 0.9) \approx 1.0012;$$



## ლიტერატურა

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. // М.: Наука, 1968, 511 с.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1968 – 707 с.
3. Панасюк В. В., Саврюк М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. // Киев, «Наукова думка», 1976, с. 443.
4. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука, 1985. – 256 с.
5. Саникидзе Д. Г., Мирианашвили М. Г. О применении метода дискретных вихрей к численному решению сингулярных интегральных уравнений с гладкими замкнутыми контурами. // СБ.

- научн. Тр. Прикладная матем. и матем. моделирование, ВВА им. Н. Е. Жуковского, 1997, с. 178-180.
6. Саникидзе Д. Г. О методе дискретных вихрей повышенной точности для численного решения одного класса сингулярных интегральных уравнений. Дифф. уравнения. М. 34, №9, 1998.
  7. Саникидзе Д. Г. О некоторых оценках в модифицированной схеме метода дискретных вихрей. // Сб. VII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах матем. физ.» Украина, 1999, 118-120.
  8. Саникидзе Д. Г., Хубежты Ш. С. К вопросу применения внешних узлов в модифицированных схемах дискретных вихрей. // Труды IX Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах матем. физики» (МДОЗМФ-2000). Орел, 2000. с. 395-398.
  9. Саникидзе Д. Г., Нинидзе К. Р. Метод свободных параметров в приближенном вычислении интегралов типа Коши. // Труды X Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах матем. физ.» (МДОЗМФ-2001). с. 299-302.
  10. Екобори Т. Физика и механика разрушения и прочности твердых тел. // Металлургия, М., 1971.
  11. Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Численный анализ дифракции радиоволн – М.: Радио и связь, 1982. – 184 с.
  12. Иванов В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. // Киев: Наукова думка, 1968, 286 с.
  13. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. // М. «Наука», 1973, 303 с.
  14. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. // М.: Наука. 1977, 744 с.

15. გ. კაპანაძე. ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის ერთი შერეული ამოცანის შესახებ წრეწირის რკალების გასწვრივ გაჭრილი წრიული რგოლისათვის // სტუ, თხელკედლიანი სივრცითი სისტემების პრობლემებისადმი მიძღვნილი საერთაშორისო სიმპოზიუმის შრომები. 4-5. 07. 2001, თბილისი, გვ. 17-21.
16. Квеселава Д. А., Самсония З. В. О конформных модулях близких двусвязных областей. Сб. Труды ВЦ АН Гр. ССР, т. 1, 1960. с. 5-13.
17. Колосов Г. В. Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теорий упругости. Тип. К. Маттисева, Юрьев, 1909.
18. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. – М.: Мир. 1987. – 311 с.
19. Корнейчук А. А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов. // В кн.: «Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурных формула». – М.: Наука, 1964. – с. 64-74.
20. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. // М.: Наука, 1967, 500 с.
21. Кублашвили М. Д. К вопросу устойчивости некоторых квадратурных формул для сингулярных интегралов. // Всесоюзный симпозиум. «Метод дискретных особенностей в задачах математической физики». Тезисы докладов. Харьков – 1985. с. 55.
22. Кублашвили М. Д. Замечание к одной схеме численного решения сингулярных интегральных уравнений с разомкнутыми контурами интегрирования. // Тр. ИВМ АН ГССР, Т. XXV:1, 1985. с. 67-73.
23. Кублашвили М. Д. О равномерных оценках аппроксимации сингулярных интегралов при разомкнутых контурах кусочно-интерполяционными функциями. // Грузинский политехнический

ინსტიტუტ იმ. ვ. ი. ლენინა. Научные труды. Математический анализ. Тбилиси. 1989. с. 98-106.

24. მ. კუბლაშვილი. პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნის შესახებ. // პროფესორ-მასწავლებელთა და სტუდენტთა პირველი რესპუბლიკური სამეცნიერო კონფერენცია. აბასთუმანი, 1995, 18-20 მაისი, გვ. 29.
25. მ. კუბლაშვილი. ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის შესახებ. // საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია. „მართვის ავტომატიზირებული სისტემები“. სამეცნიერო შრომები. თბილისი, 27-28 სექტემბერი, 1996, გვ. 28-31.
26. Кублашвили М. Д. Приближенное вычисление сингулярных интегралов с кусочно-интерполяционными плотностями. // Сборник трудов международного симпозиума посвященного проблемам тонкостенных пространственных систем. Тбилиси. 4-5. 07. 2001. с. 125-131.
27. Кублашвили М. Д. О численном решении некоторых задач бесконечных пластин с трещинами // Сборник трудов международного симпозиума посвященного проблемам тонкостенных пространственных систем. Тбилиси. 4-5. 07. 2001. с. 132-136.
28. Кублашвили М. Д. О численном решении задачи термоизолированной трещины. // Международный научный журнал. «Проблемы прикладной механики». №4(9). 2002. с. 89-91.
29. მ. კუბლაშვილი. კოშის ტიპის ინტეგრალების მიახლოებითი გამოთვლა გახსნილი კონტურების შემთხვევაში მაკორექტირებელი პარამეტრის საშუალებით და მათი ზოგიერთი გამოყენება. // მეცნიერება და ტექნოლოგიები, თბილისი. #10-12, 2002. გვ. 54-58.
30. მ. კუბლაშვილი. ჭრილების მქონე ძელის გრეხის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნების შესახებ.// სტუ-ს 80 წლისთავისადმი მიძღვნილი

- პროფესორ-მასწავლებელთა ღია საიუბილეო სამეცნიერო-ტექნიკური კონფერენციის მოხსენებათა თეზისები. თბილისი. 2002. გვ. 20.
31. მ. კუბლაშვილი. პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნა დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდით გახსნილი კონტურებით. // სტუ-ს 80 წლისთავისადმი მიძღვნილი პროფესორ-მასწავლებელთა ღია საიუბილეო სამეცნიერო-ტექნიკური კონფერენციის მოხსენებათა თეზისები. თბილისი. 2002. გვ. 20.
32. მ. კუბლაშვილი. კოშის ტიპის ინტეგრალების აპროქსიმაცია გახსნილი კონტურების შემთხვევაში და მათი ზოგიერთი გამოყენება. // სტუ-ს 80 წლისთავისადმი მიძღვნილი პროფესორ-მასწავლებელთა ღია საიუბილეო სამეცნიერო-ტექნიკური კონფერენციის მოხსენებათა თეზისები. თბილისი. 2002. გვ. 214.
33. Кублашвили М. Д. Численное решение задачи тонкого профиля с помощью сингулярного интегрального уравнения. // Международный научный журнал. «Проблемы прикладной механики». №2(11). 2003. с. 119-122.
34. Кублашвили М. Д. О численном решении одного класса сингулярных интегральных уравнений. // Международный научный журнал. GEN, No. 1, 2003. p. 38-40.
35. Кублашвили М. Д. Численное решение задачи трещины продольного сдвига в упругом теле // Международный научный журнал. GEN, No. 1, 2003. p. 41-43.
36. Кублашвили М. Д. О построении вычислительной схемы повышенного порядка точности метода дискретных вихрей в случае разомкнутых контуров // Международный научный журнал. GEN, No.1, 2003. p. 44-46.
37. Купрадзе В. Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения – Л.:

38. Кутателадзе Г. А. Некоторые краевые задачи теории аналитических функции для круга с разрезами., Докл. расш. засед. семин. ин-та Прикл. мат. (ТГУ) им. И. Н. Векуа, Т. 5, №1, 1990, стр. 110-113.
39. Кутателадзе Г. А. О кручении круглого призматического бруса с продольными разрезами., Симпозиум по проблемам механики сплошных сред., Тбилиси, ТГУ.,1972, стр. 188-193.
40. Лаврентьев М. А. О построении потока, обтекающего дугу заданной формы. // Тр. цаги, в. 118, 1932, с. 1-56. ГИТТЛ, 1950. – 280 с.
41. Лифанов И. К., Полонский Я. Е. Обоснование численного метода дискретных вихрей решения сингулярных интегральных уравнений. // ПММ, 1975, т. 39, №4, с. 742-746.
42. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. // М.: ТОО «Янус», 1995, 504 с.
43. Лифанов И. К. О сингулярных интегральных уравнениях с одномерными и краткими интегралами типа Коши. ДАН СССР, 1978, 239, №2, с. 205-268.
44. Лифанов И. К. О методедискретных вихрей, - Прик. Мат. и мех. 1979, 43, №1, с. 184-188.
45. Макклинток Ф., Аргон А. Деформация и разрушение материалов. // Мир, М., 1970.
46. Мирианашвили Ф., Аргон А. Деформация и разрушение материалов. // Мир, М., 1970.
47. Михлин С. Г. Интегральные уравнения. // М. –Д., Огиз, Гос., издат., Тех. – теоретич. лит., 1949, 378 с.
48. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. Москва, «Наука», 1984, 255 с.
49. Мусаев Б. И. Приближенное решение полного сингулярного интегрального уравнения на отрезке // Инст. кибернетики АН АзССР, Баку. – 1985. -34 с., Деп. в ВИНТИ, 23. 10.85, 77-85.

50. Мусаев Б. И. О приближенном решении сингулярных уравнений. – Препринт / Ин-т физики АН АзССР. - Баку, 1986. – №17, 48 с.
51. Мусаев Б. И. К приближенному решению сингулярных интегральных уравнений // В сб.: Сингулярные интегральные операторы, Азерб. гос. ун-т, Баку, 1986. – с. 33-61.
52. Мусаев Б. И. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений при отрицательном индексе методом механических квадратур. Докл. АН СССР. 1988. т. 298, №2, с. 286-290.
53. Габдулхаев Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач – Казань: Казан. ун-е. – 1980. – 232 с.
54. Джишкариани А. В. К решению сингулярных интегральных уравнений приближёнными проекционными методами. // ЖВМ и МФ, 1979, т. 19, №5, с. 1149-1161.
55. Джишкариани А. В. Решению сингулярных интегральных уравнений приближёнными коллокационными методами. // ЖВМ и МФ, 1981, т. 21, №2, - с. 355-362.
56. Джишкариани А. В. К вопросу приближённого решения одного класса сингулярных интегральных уравнений. // Труды Тбилис. матем. ин-та. - 1986, т. 86, - с. 41-49.
57. Полонский Я. Е. Обоснование численного метода «Дискретных вихрей» решения сингулярных интегральных уравнений – Прикл. Мат. и мех., 1975, 39, №4, с. 742-746.
58. Сарен В. Э. О сходимости метода дискретных вихрей. – Сиб. Мат. Ж., 1978, 19, №2, с. 385-395.
59. Krenk S. Polynomial Solutions to Singular Integral Equations //Riso National Laboratory, DK-4000 Roskilde, Denmark, January 1981., 1269-1275 с.

60. S. Krenk Polinivial Solytion to Singular Integral Equations, with Applications to Elasticity Teory, Technical University of Denmark, Thesis of disertation for the Degree od Doctor Tecnicas, 1981.
61. S. Prossdorf and Schmidt. A finite Element Collocation Method for Singular Integral Equations. Berlin Eingegangen am 16.10.1980. p 33-60.
62. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 1963, 639 с.
63. Бережницкий Л. Т. Щ предельном равновесии пластины, ослабленной системой трещин, расположенных вдоль прямой под углом в направлении растяжения – В кн.: Концентрация напряжений, 1. «Наукова думка», Киев, 1965, 46-52.
64. Корнейчук, А. А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов. Вычислительная математика и математическая физика / А. А. Корнейчук. – М.: Наука, 1962.
65. Сеге Г. Ортогональные многочлены / Г. Сеге. – М.: Физматгиз. 1962.
66. Д. Г. Саникидзе, К. Р. Купатадзе, Ш. С. Хубежты. Об одном классе квадратурных формул повышенной точности для сингулярных интегралов с ядром Коши. Труды XVI Международного симпозиума МДОЗМФ, Харьков-Херсон, 2013, С. 345-348.
67. С. М. Никольский. Квадратурные формулы. Б., «Наука», 1979.
68. Ш. Е. Микеладзе. Численные методы математического анализа. М., Гостехиздат., 1953.
69. Б.А. Демидович, И.А.Марон. Основы вычислительной математики. Госндарственное Издательство Физико-математической литературы, Масква 1960.
70. Саникидзе Д. Г. Кублашвили М. Д.О Квадратурных формулах для сингулярных интегралов, близких по точности к гауссовским. Сборник



статей IX Международной научно-технической конференции, Россия,  
г. Пенза, 28-31 октября 2014 г.

## დისერტაციაში გამოყენებული პროგრამების დანართი

### fesvTagancalebisprograma

```

damxmarefunqciebi
r=4;
gantolebebi
R1=2√t0, 1 (t0[1]-t0[2])(t0[1]-t0[3])(t0[1]-t0[4]);
R2=2√t0, 2 (t0[2]-t0[1])(t0[2]-t0[3])(t0[2]-t0[4]);
R3=2√t0, 3 (t0[3]-t0[1])(t0[3]-t0[2])(t0[3]-t0[4]);
R4=2√t0, 4 (t0[4]-t0[1])(t0[4]-t0[2])(t0[4]-t0[3]);
A1=  $\begin{vmatrix} 1 & t^2 & t^4 & t0, 2 \\ t^4 & t0, 3 & t^4 & t0, 4 \\ t^4 & t0, 4 & t & \end{vmatrix}$  //Expand;
A2=  $\begin{vmatrix} 1 & t^2 & t^4 & t0, 1 \\ t^4 & t0, 3 & t^4 & t0, 4 \\ t^4 & t0, 4 & t & \end{vmatrix}$  //Expand;
A3=  $\begin{vmatrix} 1 & t^2 & t^4 & t0, 1 \\ t^4 & t0, 2 & t^4 & t0, 4 \\ t^4 & t0, 4 & t & \end{vmatrix}$  //Expand;
A4=  $\begin{vmatrix} 1 & t^2 & t^4 & t0, 1 \\ t^4 & t0, 2 & t^4 & t0, 3 \\ t^4 & t0, 3 & t & \end{vmatrix}$  //Expand;

```

```

badis ageba (aagebs n -ganzomilebian bades)
redukcja=#1→#2&;
SiatkaX[ls_,leftPoints_,NN_,k_]:=Module[{xx,n,Δx},
n=Length[ls];
xx=leftPoints;
If[(n-k)<0,Return[]];Δx=(ls[[k,2]]-ls[[k,1]])/NN;
Do[
xx[[k]]=leftPoints[[k]]+i Δx;
If[(k>1)&&(i≠0),, X0=Append[X0,xx]];
SiatkaX[ls,xx,NN,k+1];
,{i,1,NN-1}}
]
aamorCeva. amoiCeva is wertilebi (aseve funqciis mniSvnelobebi),
romelTaSic funqciis mniSvnelobebi naklebia winaswar mocemul efsilonze
amorCeva[φ_,x_,ε_]:=Module[{n,y,xx},
y={}; xx={};
n=Length[x]; m=Length[x[[1]]];
x0=Table[t0[k],{k,m}];
Do[
f0=Φ/.Thread[redukcja[x0,x[[k]]]];
If[f0≤ε, xx=Append[xx,x[[k]]];y=Append[y,f0]]
,{k,n}];
{xx,y}
]
aamorCeva. amoiCeva is wertilebi (mxolod wertilebi), romelTaSic funqciis
mniSvnelobebi naklebia winaswar mocemul efsilonze
amorCeva2[φ_,x_,ε_]:=Module[{n,y,xx},
xx={};
n=Length[x]; m=Length[x[[1]]];
x0=Table[t0[k],{k,m}];
Do[
f0=Φ/.Thread[redukcja[x0,x[[k]]]];
If[f0≤ε, xx=Append[xx,x[[k]]]];
,{k,n}];
xx
]
axali funqciebi
es funqcia aagebs bades da am badidan amoirCevs iseT wertilebs, romelTa
mniSvneloba naklebia efsilonze.
bade[Φ_,n_,ε_]:=Module[{Δx,xx,k,x0,y,f0},
Δx=1/n/NN; k=1;xx={}; y={};
x0=Table[t0[k],{k,r}];
Do[
f0=Φ;If[f0<ε,y=Append[y,f0];xx=Append[xx, x0]]
,{t0[1],Δx,1-Δx,Δx},{t0[2],t0[1]+Δx,1-Δx,Δx},{t0[3],t0[2]+Δx,1-
Δx,Δx},{t0[4],t0[3]+Δx,1-Δx,Δx}];
{xx,y}
]

```

es funçia aagebs bades iseve rogorc wina. im gansxvavebiT, rom ar gamoTvliS badeze funçiiS mniSvnelobebs.

```
bade2[Φ_,n_,ε_]:=Module[{Δx,xx,k,x0,f0},
Δx=1/n/N; k=1;xx={};
x0=Table[t0[k],{k,r}];
Do[
f0=Φ;If[f0<ε,xx=Append[xx, x0]]
,{t0[1],Δx,1-Δx,Δx},{t0[2],t0[1]+Δx,1-Δx,Δx},{t0[3],t0[2]+Δx,1-
Δx,Δx},{t0[4],t0[3]+Δx,1-Δx,Δx}];
xx
]
```

es funçia aagebs qvebades da am qvebadidan amoirCevs iseT wertilebs, romelTa mniSvneloba naklebia efsilonze.

qvebadis SerCeva xdeba Semdegnairad: aiReba wertili, romelSic funçiiS deskretuli mniSvneloba minimaluria da aviRebT am wertilis Δx midamo. es midamo

$$\{x_1-\Delta x, x_1+\Delta x\}, \{x_2-\Delta x, x_2+\Delta x\}, \dots, \{x_k-\Delta x, x_k+\Delta x\}$$

daiyofa Δ baded, ai ase:

```
subSet[Φ_,n_,ε_,x_,Δx_]:=Module[{Δ,k,xx,x0,f0},
Δ=(2 Δx)/n/N; k=1;xx={};
x11=x[[1]]-Δx;If[x11<0,x11=0];
x12=x[[1]]+Δx;
x21=x[[2]]-Δx;
x22=x[[2]]+Δx;
x31=x[[3]]-Δx;
x32=x[[3]]+Δx;
x41=x[[4]]-Δx;
x42=x[[4]]+Δx;
If[x42> 1,x42=1];
x0=Table[t0[k],{k,r}];
Do[
f0=Φ;If[f0<ε,xx=Append[xx, x0]]
,{t0[1],x11,x12,Δ},{t0[2],x21,x22,Δ},{t0[3],x31,x32,Δ},{t0[4],x41,x42,Δ}];
xx
]
```

klasterizacia

```
klasterizacja[x_,y_,ε_]:=Module[{xx,x0,xMas,i0,yy,masMas},
xx=x; yy=y; masMas={};
While[xx≠{ },
i0=minimalElementIndex[yy];
x0=xx[[i0]]; xMas={};
xx=Delete[xx,i0];
yy=Delete[yy,i0];
xMas=Append[xMas,x0];
While[(ind=Search2[xx,x0,ε];ind>0),
xMas=Append[xMas,xx[[ind]]];
xx=Delete[xx,ind];
yy=Delete[yy,ind];
];
```

```

masMas=Append[masMas,xMas];
];
masMas
];
minimalElementIndex[y_]:=Module[{a0},
a0=Min[y];
Position[y,a0]//Flatten//First
]
b
Search[xMas_,x_,ε_]:=Module[{ind},
ind=-1;Do[If[ $\sqrt{\text{Apply Plus, xMas, i}^2}$ 
<ε,ind=i;Break[]],{i,Length[xMas]}];ind
];
Search2[xMas_,x_,ε_]:=Module[{ind,m,n},
n=Length[xMas];m=Length[x];
ind=-1;
Do[
 $\text{If[Abs[x][k]-xMas[i,k],1,0]}$ 
a=k-1;
If[a<1,ind=i;Break[]]
,{i,n}];
ind
]
simZimis centri
Centro[φ_,x_]:=Module[{n,m,fmax,fmin,y},
n=Length[x];m=Length[x[[1]]];
y=Γ[φ,x]; fmax=Max[y];
Table[ $\frac{n}{k-1} \cdot x[k,i] \cdot fmax \cdot y[k]^{41} / \frac{n}{k-1} \cdot fmax \cdot y[k]^{41}$ ,{i,m}]
klasteris qvesimravleze funkcionalis mniSvnelobebis gamoTvla
Γ[Φ_,x_]:=Module[{n,y,m,f0},
y={};
n=Length[x]; m=Length[x[[1]]];
x0=Table[t0[k],{k,m}];
Do[
f0=Φ/.Thread[redukcja[x0,x[[k]]]];
y=Append[y,f0];
,{k,n}];
y
]
klasteridan erT da or elementiani jgufebis gadayra
gadayra[x_]:=Module[{xx,n},
xx=x; n=Length[x];
z={};
Do[
If[Length[xx[[k]]]>3, z=Append[z,xx[[k]]];
,{k,n}];
z
]

```

gantolebaTa sistemebi

eq={A1-R1=0,A2+R2=0,A3-R3=0,A4+R4=0};

$\Phi=(A1-R1)^2+(A2+R2)^2+(A3-R3)^2+(A4+R4)^2$ ;

gamoTvlebi

damxmare gamoTvlebi

$\epsilon=1/(5 \cdot 10^5)$ ;

sol2=bade2[ $\Phi$ ,120, $\epsilon$ ]/Timing;

{sol2[[1]],sol2[[2]]/Length}

{813.594 Second,441}

sol2>> "solution"

y= $\Gamma$ [ $\Phi$ ,sol2[[2]]];

{Min[y],Max[y],y/Length}

{ $1.26893 \cdot 10^{-7}$ , $1.99733 \cdot 10^{-6}$ ,441}

sol2[[2]]/Sort//MatrixForm

{0.3333333333333333`, 0.44166666666666665`, 0.625`,

0.64166666666666666`},

{0.3333333333333333`, 0.4499999999999999`, 0.6000000000037267`,

0.6083333333370599`},

{0.42500216826189496`, 0.45016101895750504`, 0.46619871399104595`,

0.47500012470908287`},

{0.34166666666666667`, 0.49166666666667036`, 0.5333332686597587`,

0.54999999999999998`},

{0.3416666484939132`, 0.45833333333333333`, 0.5750000000000001`,

0.58333333333333343`},

{0.3499999999999999`, 0.44166666666666667`, 0.7416669651979325`,

0.7666669651979325`},

{0.34166666666666667`, 0.4415164508142534`, 0.6834886845393566`,

0.7083384686869434`},

{0.341666666666666673`, 0.44166666666666667`, 0.6632890056767596`,

0.6799556723434262`},

}\_)

rezult=Table[sol=FindRoot[eq,MapThread[{{#1,#2}&,{tt,centrebi[[k]]}],WorkingPrecision→50],{k,Length[centrebi]}];

{rezult[[1]],rezult[[2]],rezult[[4]],rezult[[17]]}/MatrixForm

(\_{

{t0[1]→0.32503537910099493464624139648387133338844457513502,

t0[2]→0.40821735939635152005608404360551144869208484929146,

t0[3]→0.62402674528462708834965662759196843594442101832029,

t0[4]→0.62402674528462708834965662759196843594442101832029},

{t0[1]→0.34621633763864455599577235672639357873354637716981,

t0[2]→0.51098474048019049566459151494361690140454094773332,

t0[3]→0.51098474048019049566459151494361690140454094773332,

t0[4]→0.51098474048019049566459151494361690140454094773332},

{t0[1]→0.45390737912145485548765328122849337216896714380947,

t0[2]→0.45390737912145485548765328122849337216896714380947,

t0[3]→0.45390737912145485548765328122849337216896714380947,

t0[4]→0.45390737912145485548765328122849337216896714380947},

```

{t0[1]→0.16582609343052468857858807380728543757925016749750,
t0[2]→0.16582609343052468857858807380728543757925016749750,
t0[3]→0.76750723990280864475474525952604789575408316583584,
t0[4]→0.76750723990280864475474525952604789575408316583584}
}_)
rezult[[1]]
{t0[1]→0.32503537910099493464624139648387133338844457513502,t0[2]
→0.40821735939635152005608404360551144869208484929146,t0[3]→0.62
402674528462708834965662759196843594442101832029,t0[4]→0.6240267
4528462708834965662759196843594442101832029}
eq/.rezult[[1]]
{True,True,True,True}
Φ/.rezult[[1]]
0.4 10-100
meoreBade=Table[subSet[Φ,10,0.14,centrebi[[k]],0.01],{k,Length[centrebi]};
xy=meoreBade;
xy=Delete[xy,1];
{Table[xy[[k]]/Length,{k,Length[xy]}],Length[xy]}
{{16069,42268,178903,48118},4}
{yy/Length,centrebi/Length}
{99753,26}
centrebi2=Table[Centro[φ,xy[[k]]],{k,Length[xy]};
centrebi2//MatrixForm
mesameBade=Table[subSet[Φ,8,0.135,centrebi2[[k]],0.002],{k,Length[centre
bi2]};
Table[mesameBade[[k]]/Length,{k,Length[mesameBade]}]
{0,0,0,0}

```

**წონიანი კოშის ტიპის ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის პროგრამა  
მაღალი რიგის სიზუსტის კვადრატული ფორმულებით**

```

n=5
L:Do[τσ=-1+2(σ-1)/n,{σ,1,n}]
τn+1=1
5
L:Null
1
x=1
a=-1
b=1
z=1+0.005I
t0=1
v=n
1
-1

```

```

1
1+0.005 TM
1
5
φ[t_]:=Re[t]+Im[ t]
L:  l[v_,0_,t_]:= (t-τ_v+1)/(τ_v-τ_v+1)
      l[v_,1_,t_]:= (t-τ_v)/(τ_v+1-τ_v)
      L[v_,φ_,t_]:= l[v,0,t]φ[τ_v]+l[v,1,t]φ[τ_v+1]
χ[z_,a_,b_]:=√| z | a | b | z |

F[φ_,z_,a_,b_]:= (1/(π*I χ[z,a,b])) | a | b | t | | t, a, b | | | t | z | | t
F[φ,z,a,b]
-3.60173+3.46915 TM
L:
Do[p[σ_,k_,x_,z_]:= (1/(π*I)) | | | | | 1 | t | x | | | t, a, b | | | | | k, t | | | | t | z | | | t
, {σ,
1,n}, {k,0,1}]
N[(1/(π*I χ[z,a,b])) | a | b | t | | t, a, b | | | t | z | | t
| n | 1 | p | | , k, x, z | | | | | k | | | t_0 | | | | | k | z |
| | 1 k 0
]L[v,φ,t_0]+(1/χ[z,a,b])(
+p[v,0,1,z](φ[τ_v]-L[v,φ,t_0])/(τ_v-
z)+p[v,1,1,z](φ[τ_v+1]-L[v,φ,t_0])/(τ_v+1-z)+p[v-1,1,1,z](φ[τ_v]-L[v,φ,t_0])/(τ_v-z)+p[v-
1,0,1,z](φ[τ_v-1]-φ[t_0])/(τ_v-1-z))
L:Null
-3.8148+3.66829 TM

x=-1a=-1b=1z=-1+0.005It_0=-1v=1

-1
-1
1
-1+0.005 TM
-1
1
-1-0.005` TM
-1-0.005 TM
N[(1/(π*I χ[z,a,b])) | a | b | t | | t, a, b | | | t | z | | t
| n | 1 | p | | , k, x, z | | | | | k | | | t_0 | | | | | k | z |
| | 3 k 0
]L[v,φ,t_0]+(1/χ[z,a,b])(
+p[v,0,-1,z](φ[τ_v]-L[v,φ,t_0])/(τ_v-
z)+p[v,1,-1,z](φ[τ_v+1]-L[v,φ,t_0])/(τ_v+1-z)+p[v+1,0,-1,z](φ[τ_v+1]-L[v,φ,t_0])/(τ_v+1-
z)+p[v+1,1,-1,z](φ[τ_v+2]-φ[t_0])/(τ_v+2-z))
3.8148_+3.66829 TM

```



წონიანი სინგულარული ინტეგრალების რიცხვითი გამოთვლის პროგრამა  
 მომატებული რიგის სიზუსტის დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა  
 მეთოდის ალგორითმით

```

n=50
50
Do[τσ=-1+2(σ-1)/n,{σ,1,n}]
τn+1=1
1
Do[tj=(τj+τj+1)/2,{j,1,n}]
Do[pσ=(1/π)√(1-τ²),{σ,1,n}]
Do[p1σ=(1/π)√(1-τ²),{σ,1,n}]
φ[t_,τ_]:=1/(t-τ)
Table[N[p1φ[τ1,tj]+p1n-1φ[τn,tj]],{j,1,n}]
{0.90243,0.906759,0.904852,0.902803,0.900654,0.898405,0.896052,0.893586,0.891
001,0.888287,0.885434,0.882431,0.879267,0.875927,0.872398,0.868661,0.8647,0.86

```

0492,0.856013,0.851238,0.846134,0.840668,0.8348,0.828482,0.821661,0.814276,0.806252,0.797503,0.787925,0.777397,0.765767,0.752855,0.738435,0.722225,0.703872,0.682918,0.658768,0.63063,0.597423,0.55764,0.509104,0.448557,0.370887,0.267574,0.123256,-0.0929981,-0.454816,-1.1978,-3.98369,-5.10961}

0.8944249448975945`,0.8981801941286907`,0.8858761703921558`,0.8700713351651848`,0.8493893293042534`,0.821550494557864`,0.7836066386170597`,0.7399788621184216`,0.9339968878499644` }

### პროფილის გარსდენის ამოცანა

n=5

$$u[x_,y_]:= (y^2+6y+4x y+2x-x^2+4)/(x+y+2)^3$$

$$u2[x_,y_]:=k \frac{y x}{y x^2 + k^2}$$

$$u1[x_,y_]:= (\pi/l) * ((y-x) * u2[x,y] - l/\pi) / (y-x)$$

$$s1[v_,j_,n_,m_] := \sum_{k=1}^{m-1} \left( \sum_{l=1}^{n-1} pp[l, k, j, k] \right) + \sum_{k=1}^{m-1} \left( \sum_{l=1}^{n-1} pp[l, k, j, k] \right);$$

$$s2[v_,j_,m_] := \sum_{k=1}^{j-1} pp[k, j, k, m] + \sum_{k=j}^{m-1} pp[k, j, k, m];$$

$$s3[v_,j_,m_] := pp[v,j] \left( \sum_{k=1}^{j-1} dd[k, j, k, m] + \sum_{k=j}^{m-1} dd[k, j, k, m] \right);$$

```

s4[v_,j_]:=pp[v,j]u1[λv,j,λv,j];
s5[v_,j_,m_]:=

$$\sum_{k=1}^{j-1} \text{pp}[\dots, k] \text{pp}[\dots, k] \text{u1}[\dots, j, \dots, k] +$$


$$\sum_{k=j}^{m-1} \text{pp}[\dots, k] \text{pp}[\dots, k] \text{u1}[\dots, j, \dots, k];$$

s6[v_,j_,m_]:=

$$\sum_{k=1}^{j-1} \text{pp}[\dots, j] \text{dd}[\dots, j, k, m] +$$


$$\sum_{k=j}^{m-1} \text{pp}[\dots, j] \text{dd}[\dots, j, k, m];$$

s7[v_,j_,n_,m_]:=

$$\sum_{k=1}^{m-1} \text{pp}[\dots, k] \text{pp}[\dots, k] \text{u1}[\dots, j, \dots, k] +$$


$$\sum_{k=1}^{n-1} \text{pp}[\dots, k] \text{pp}[\dots, k] \text{u1}[\dots, j, \dots, k];$$


```

```

Do[τσ=-1+2(σ-1)/n,{σ,1,n}]
Table[τσ,{σ,1,n}]
{-1,-(3/5),-(1/5),1/5,3/5}
m=4
4

Do[xk=(k-1)/(m-1),{k,1,m}]
Table[xk,{k,1,m}]
{0,1/3,2/3,1}
h=2/n
2/5
Do[λσ,k=τσ+h xk,{σ,1,n},{k,1,m}]
Table[N[λσ,k],{σ,1,n},{k,1,m}]
{{-1.,-0.866667,-0.733333,-0.6},{-0.6,-0.466667,-0.333333,-0.2},{-0.2,-0.0666667,0.0666667,0.2},{0.2,0.333333,0.466667,0.6},{0.6,0.733333,0.866667,1.}}
ω[t_,v_,m_]:=Product[t-λv,k,{k,1,m}]
τn+1=1
Do[p[σ_,k_]:=
(1/(π D[ω[t,σ,m],t]/.t->λσ,k))Integrate[ω[t,σ,m]/
√(1-t)(1-t) (t-λσ,k),{t,τσ,τσ+1}],{σ,1,n},{k,1,m}]
1
Table[N[p[σ,k]],{σ,1,n},{k,1,m}]
{{0.18328,0.239118,0.0874512,0.0399664},{0.029727,0.0844064,0.0630042,0.0208318},{0.0185239,0.0537195,0.0421604,0.0137846},{0.0123011,0.0357

```

```

865,0.0267983,0.00862186},{0.00719667,0.0211938,0.00989287,0.00223595
}}
pp[1,1]=N[p[1,1]]
pp[n,m]=N[p[n,m]]
0.18328
0.00223595
pp[n-1,m]=N[p[n,1]]
0.00719667
Do[pp[σ,m-1]=pp[σ,0],{σ,1,n-1}]
Do[pp[σ,k]=p[σ,k],{σ,1,n},{k,1,m-1}]
Do[pp[σ,1]=p[σ-1,m]+p[σ,1],{σ,2,n-1}]
Do[pp[σ-1,m]=pp[σ,1],{σ,2,n}]
Do[pp[n,k]=N[p[n,k]],{k,1,m}]

```

```

Table[N[pp[σ,k]],{σ,1,n},{k,1,m}]
{{0.18328,0.239118,0.0874512,0.0696934},{0.0696934,0.0844064,0.0630042
,0.0393558},{0.0393558,0.0537195,0.0421604,0.0260857},{0.0260857,0.035
7865,0.0267983,0.00719667},{0.00719667,0.0211938,0.00989287,0.0022359
5}}

```

```

dd[v_,j_,k_,m_]:=
Delete[Table[h_i,i,1,m],j],{j},{k}]/.h->λ)/(Delete[
Table[h_i,i,1,m],k],{k}]/.h->λ)

```

```

dd[1,2,3,4]
15/2

```

```

lag[f_,x_,m_]:=
Product[x^h_i,i,1,m] f[h_k] Product[x^h_k,k,1,m]

```

```

Do[Print[N[(1+s1[v,j,n,m]+s2[v,j,m]-s3[v,j,m]+s4[v,j])φ[λ_v,j]-
s5[v,j,m]+s6[v,j,m]-s7[v,j,n,m]]^2],{v,1,n-1},{j,1,m-1}]
Do[Print[N[(1+s1[n,j,n,m]+s2[n,j,m]-s3[n,j,m]+s4[n,j])φ[λ_n,j]-
s5[n,j,m]+s6[n,j,m]-s7[n,j,n,m]]^2],{j,1,m}]

```

```

Power::infy: Infinite expression 1/0 encountered.
False
Power::infy: Infinite expression 1/0 encountered.
False
Power::infy: Infinite expression 1/0 encountered.
General::stop: Further output of Power::infy will be suppressed during this
calculation.

```

False  
 False  
 False  
 False  
 False  
 False  
 False  
 False  
 False  
 False  
 False  
 Power::infy: Infinite expression 1/0 encountered.  
 False  
 Power::infy: Infinite expression 1/0 encountered.  
 False  
 Power::infy: Infinite expression 1/0 encountered.  
 General::stop: Further output of Power::infy will be suppressed during this calculation.  
 False  
 False

```

NSolve[{3φ[1,1]+5φ[1,2]□3,7φ[1,1]+8φ[1,2]□4},{φ[1,1],φ[1,2]}]
{{φ[1,1]→-0.363636,φ[1,2]→0.818182}}
NSolve[{-4.363240434116095` φ[-1.`] + 5.848514927765674` φ[-
0.8666666666666667`]-1.7553327166614825` φ[-
0.7333333333333333`]+0.6185748253330091` φ[-
0.6`] + 0.14543324222344625` φ[-
0.4666666666666667`]+0.08785806705809689` φ[-
0.3333333333333333`]+0.04679721959097781` φ[-
0.2`] + 0.05651635455050569` φ[-
0.0666666666666667`]+0.04029802265059015`
φ[0.0666666666666667`]+0.023086586122036883`
φ[0.2`] + 0.029724680940943337`
φ[0.3333333333333333`]+0.021090164253844076`
φ[0.4666666666666667`]+0.005402331320441883`
  
```

$\varphi[0.6^{\wedge}] + 0.015246665320053887^{\wedge}$   
 $\varphi[0.7333333333333333^{\wedge}] + 0.006842942900556887^{\wedge}$   
 $\varphi[0.8666666666666667^{\wedge}] == 2,$   
 $-2.025022465839446^{\wedge} \varphi[-1.^{\wedge}] - 0.09651832870748861^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.8666666666666667^{\wedge}] + 2.4318779231777192^{\wedge} \varphi[-0.7333333333333333^{\wedge}] -$   
 $0.0481395305896955^{\wedge} \varphi[-0.6^{\wedge}] + 0.20210942376709495^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.4666666666666667^{\wedge}] + 0.11429467255199971^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.3333333333333333^{\wedge}] + 0.05827155152861302^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.2^{\wedge}] + 0.06813379786079456^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.0666666666666667^{\wedge}] + 0.04735146243826407^{\wedge}$   
 $\varphi[0.0666666666666667^{\wedge}] + 0.02655811108028354^{\wedge}$   
 $\varphi[0.2^{\wedge}] + 0.03358602542518698^{\wedge}$   
 $\varphi[0.3333333333333333^{\wedge}] + 0.023466508027629604^{\wedge}$   
 $\varphi[0.4666666666666667^{\wedge}] + 0.005932113823920398^{\wedge}$   
 $\varphi[0.6^{\wedge}] + 0.016552189385780725^{\wedge}$   
 $\varphi[0.7333333333333333^{\wedge}] + 0.007356234942021908^{\wedge}$   
 $\varphi[0.8666666666666667^{\wedge}] == 2,$   
 $-0.6227869609200843^{\wedge} \varphi[-1.^{\wedge}] - 2.4968142714514636^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.8666666666666667^{\wedge}] + 2.4816647999466226^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.7333333333333333^{\wedge}] + 0.7339743349926515^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.6^{\wedge}] + 0.31138200069750954^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.4666666666666667^{\wedge}] + 0.15629034285456994^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.3333333333333333^{\wedge}] + 0.07451327550077451^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.2^{\wedge}] + 0.08335636453702555^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.0666666666666667^{\wedge}] + 0.05609918736573235^{\wedge}$   
 $\varphi[0.0666666666666667^{\wedge}] + 0.030692549876943573^{\wedge}$   
 $\varphi[0.2^{\wedge}] + 0.03804716908867127^{\wedge}$   
 $\varphi[0.3333333333333333^{\wedge}] + 0.026149826034791126^{\wedge}$   
 $\varphi[0.4666666666666667^{\wedge}] + 0.006520111032777229^{\wedge}$   
 $\varphi[0.6^{\wedge}] + 0.01798265632502894^{\wedge}$   
 $\varphi[0.7333333333333333^{\wedge}] + 0.007913367684342516^{\wedge}$   
 $\varphi[0.8666666666666667^{\wedge}] == 2,$   
 $-0.4946436230497585^{\wedge} \varphi[-1.^{\wedge}] - 0.933034492530502^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.8666666666666667^{\wedge}] - 0.6651117030997664^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.7333333333333333^{\wedge}] + 0.7918669359117113^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.6^{\wedge}] + 2.1995144505655406^{\wedge} \varphi[-0.4666666666666667^{\wedge}] -$   
 $0.5466304135866762^{\wedge} \varphi[-0.3333333333333333^{\wedge}] + 0.27465744497537947^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.2^{\wedge}] + 0.10505448051058627^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.0666666666666667^{\wedge}] + 0.06767501957728446^{\wedge}$   
 $\varphi[0.0666666666666667^{\wedge}] + 0.03588528401966831^{\wedge}$   
 $\varphi[0.2^{\wedge}] + 0.043441101058788574^{\wedge}$   
 $\varphi[0.3333333333333333^{\wedge}] + 0.029303690611939298^{\wedge}$   
 $\varphi[0.4666666666666667^{\wedge}] + 0.00719666682350275^{\wedge}$   
 $\varphi[0.6^{\wedge}] + 0.01960232179407177^{\wedge}$   
 $\varphi[0.7333333333333333^{\wedge}] + 0.008536587498919683^{\wedge}$   
 $\varphi[0.8666666666666667^{\wedge}] == 2,$

-0.37150585147259624` φ[-1.`]-0.6230259660145641` φ[-  
 0.8666666666666667`]-0.3332693415369052` φ[-0.7333333333333333`]-  
 0.7350658845622866` φ[-0.6`]+1.4992422245013644` φ[-  
 0.4666666666666667`]+1.1088360676326385` φ[-  
 0.3333333333333333`]+0.04524870654300564` φ[-  
 0.2`]+0.13994884771354937` φ[-  
 0.0666666666666667`]+0.08434919473664171`  
 φ[0.0666666666666667`]+0.042844852701737504`  
 φ[0.2`]+0.05031546074580114`  
 φ[0.3333333333333333`]+0.03317885543716322`  
 φ[0.4666666666666667`]+0.008005617878304214`  
 φ[0.6`]+0.021499425946793285`  
 φ[0.7333333333333333`]+0.009255149613742847`  
 φ[0.8666666666666667`]==2,  
 -0.2942592776902384` φ[-1.`]-0.4629124771247091` φ[-  
 0.8666666666666667`]-0.22032141119694215` φ[-0.7333333333333333`]-  
 0.18131784038560742` φ[-0.6`]-1.1012154294203977` φ[-  
 0.4666666666666667`]+2.3037062003605677` φ[-  
 0.3333333333333333`]+0.45681801402711736` φ[-  
 0.2`]+0.2081991088363017` φ[-  
 0.0666666666666667`]+0.11140763408848331`  
 φ[0.0666666666666667`]+0.05297971008570927`  
 φ[0.2`]+0.059644149362366346`  
 φ[0.3333333333333333`]+0.038185076855602754`  
 φ[0.4666666666666667`]+0.009013923229202758`  
 φ[0.6`]+0.023801484615374152`  
 φ[0.7333333333333333`]+0.010109418979755235`  
 φ[0.8666666666666667`]==2,  
 -0.2402648666956958` φ[-1.`]-0.3633070189507744` φ[-  
 0.8666666666666667`]-0.16236840292646726` φ[-0.7333333333333333`]-  
 0.17063053989849403` φ[-0.6`]-0.3097197548222555` φ[-  
 0.4666666666666667`]-0.4659044999296667` φ[-  
 0.3333333333333333`]+1.4043526962514106` φ[-  
 0.2`]+1.2960543451926276` φ[-0.0666666666666667`]-  
 0.27807410853193415` φ[0.0666666666666667`]+0.16795116395003445`  
 φ[0.2`]+0.07335895233584815`  
 φ[0.3333333333333333`]+0.04505023212530538`  
 φ[0.4666666666666667`]+0.010331085766465993`  
 φ[0.6`]+0.026703924123529843`  
 φ[0.7333333333333333`]+0.011158091411109534`  
 φ[0.8666666666666667`]==2,  
 -0.19992032294081988` φ[-1.`]-0.29451528283929485` φ[-  
 0.8666666666666667`]-0.12665584259463614` φ[-0.7333333333333333`]-  
 0.12505698367983725` φ[-0.6`]-0.20213824489141063` φ[-  
 0.4666666666666667`]-0.22834776024807388` φ[-0.3333333333333333`]-  
 0.4238600678520946` φ[-0.2`]+1.7048772831806063` φ[-  
 0.0666666666666667`]+0.7261263045607043`

$\varphi[0.06666666666666667^{\wedge}] + 0.03523437406390334^{\wedge}$   
 $\varphi[0.2^{\wedge}] + 0.09594662232455065^{\wedge}$   
 $\varphi[0.3333333333333333^{\wedge}] + 0.055218917578975825^{\wedge}$   
 $\varphi[0.46666666666666667^{\wedge}] + 0.012151977142353186^{\wedge}$   
 $\varphi[0.6^{\wedge}] + 0.03052745564128345^{\wedge}$   
 $\varphi[0.7333333333333333^{\wedge}] + 0.0124916092141425^{\wedge}$   
 $\varphi[0.86666666666666667^{\wedge}] == 2,$   
 $-0.16846614548104183^{\wedge} \varphi[-1.0^{\wedge}] - 0.24383599807504122^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.86666666666666667^{\wedge}] - 0.1022643852877747^{\wedge} \varphi[-0.7333333333333333^{\wedge}] -$   
 $0.09720986542574599^{\wedge} \varphi[-0.6^{\wedge}] - 0.1476544929733417^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.46666666666666667^{\wedge}] - 0.14853430043278493^{\wedge} \varphi[-0.3333333333333333^{\wedge}] -$   
 $0.088744455653288^{\wedge} \varphi[-0.2^{\wedge}] - 0.7101463142592783^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.06666666666666667^{\wedge}] + 2.219116859363129^{\wedge}$   
 $\varphi[0.06666666666666667^{\wedge}] + 0.30576723175222315^{\wedge}$   
 $\varphi[0.2^{\wedge}] + 0.1408390751961005^{\wedge}$   
 $\varphi[0.3333333333333333^{\wedge}] + 0.07204875541499521^{\wedge}$   
 $\varphi[0.46666666666666667^{\wedge}] + 0.014863941791825507^{\wedge}$   
 $\varphi[0.6^{\wedge}] + 0.03584429847964844^{\wedge}$   
 $\varphi[0.7333333333333333^{\wedge}] + 0.0142589680938907^{\wedge}$   
 $\varphi[0.86666666666666667^{\wedge}] == 2,$   
 $-0.14325820350246302^{\wedge} \varphi[-1.0^{\wedge}] - 0.20489718251396977^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.86666666666666667^{\wedge}] - 0.08449976108614816^{\wedge} \varphi[-0.7333333333333333^{\wedge}] -$   
 $0.07835827015083907^{\wedge} \varphi[-0.6^{\wedge}] - 0.1145843453519247^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.46666666666666667^{\wedge}] - 0.10830474451471586^{\wedge} \varphi[-0.3333333333333333^{\wedge}] -$   
 $0.09183012858164673^{\wedge} \varphi[-0.2^{\wedge}] - 0.19205222838339592^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.06666666666666667^{\wedge}] - 0.30856871835303673^{\wedge}$   
 $\varphi[0.06666666666666667^{\wedge}] + 1.6232041155588677^{\wedge}$   
 $\varphi[0.2^{\wedge}] + 0.8620736256075595^{\wedge} \varphi[0.3333333333333333^{\wedge}] -$   
 $0.1878677469836783^{\wedge} \varphi[0.46666666666666667^{\wedge}] + 0.08458223197643949^{\wedge}$   
 $\varphi[0.6^{\wedge}] + 0.043793651430553006^{\wedge}$   
 $\varphi[0.7333333333333333^{\wedge}] + 0.016726645796602407^{\wedge}$   
 $\varphi[0.86666666666666667^{\wedge}] == 2,$   
 $-0.12268533184614229^{\wedge} \varphi[-1.0^{\wedge}] - 0.174114875062987^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.86666666666666667^{\wedge}] - 0.07099538252943219^{\wedge} \varphi[-0.7333333333333333^{\wedge}] -$   
 $0.06474239727314816^{\wedge} \varphi[-0.6^{\wedge}] - 0.09234138459204515^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.46666666666666667^{\wedge}] - 0.08400553770660583^{\wedge} \varphi[-0.3333333333333333^{\wedge}] -$   
 $0.06690849360705918^{\wedge} \varphi[-0.2^{\wedge}] - 0.12457094195619295^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.06666666666666667^{\wedge}] - 0.15027932477257513^{\wedge} \varphi[0.06666666666666667^{\wedge}] -$   
 $0.28019000482323264^{\wedge} \varphi[0.2^{\wedge}] + 1.828336295824159^{\wedge}$   
 $\varphi[0.3333333333333333^{\wedge}] + 0.4745114088295319^{\wedge} \varphi[0.46666666666666667^{\wedge}] -$   
 $0.016368614158922514^{\wedge} \varphi[0.6^{\wedge}] + 0.05702793766306539^{\wedge}$   
 $\varphi[0.7333333333333333^{\wedge}] + 0.020425858417864356^{\wedge}$   
 $\varphi[0.86666666666666667^{\wedge}] == 2,$   
 $-0.1056864991982783^{\wedge} \varphi[-1.0^{\wedge}] - 0.1492880762119106^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.86666666666666667^{\wedge}] - 0.06041698370397232^{\wedge} \varphi[-0.7333333333333333^{\wedge}] -$   
 $0.05446604823185417^{\wedge} \varphi[-0.6^{\wedge}] - 0.07636767244608102^{\wedge} \varphi[-$   
 $0.46666666666666667^{\wedge}] - 0.06773536507108496^{\wedge} \varphi[-0.3333333333333333^{\wedge}] -$



0.051906912598806615` φ[-0.2`]-0.09075706874885829` φ[-  
 0.06666666666666667`]-0.09745149702209382` φ[0.06666666666666667`]-  
 0.05935680161794716` φ[0.2`]-0.4625414517980559`  
 φ[0.3333333333333333`]+2.1905217386659`  
 φ[0.46666666666666667`]+0.12234373467771216`  
 φ[0.6`]+0.08349750776230117`  
 φ[0.7333333333333333`]+0.026594243906862734`  
 φ[0.86666666666666667`]==2,  
 -0.06959571746137332` φ[-1.`]-0.09809959294905435` φ[-  
 0.86666666666666667`]-0.0393612239208182` φ[-0.7333333333333333`]-  
 0.034897785997963886` φ[-0.6`]-0.0476442255255458` φ[-  
 0.46666666666666667`]-0.04062363070224122` φ[-0.3333333333333333`]-  
 0.029402989881970557` φ[-0.2`]-0.04728222137685143` φ[-  
 0.06666666666666667`]-0.0446336536367028` φ[0.06666666666666667`]-  
 0.03415190307651233` φ[0.2`]-0.06031077374001166`  
 φ[0.3333333333333333`]-0.06195168251947184` φ[0.46666666666666667`]-  
 0.013279815682609643` φ[0.6`]-0.22924297001859062`  
 φ[0.7333333333333333`]+1.9993399395791271`  
 φ[0.86666666666666667`]+0.02473216920162538` φ[1.`]==2,  
 -0.061093265867495174` φ[-1.`]-0.08627558442294134` φ[-  
 0.86666666666666667`]-0.03461650529158961` φ[-0.7333333333333333`]-  
 0.030627621960754588` φ[-0.6`]-0.041634446823791485` φ[-  
 0.46666666666666667`]-0.035257595747418914` φ[-0.3333333333333333`]-  
 0.02526929698093911` φ[-0.2`]-0.04008343571277299` φ[-  
 0.06666666666666667`]-0.037128609058598404`  
 φ[0.06666666666666667`]-0.027658473779664895` φ[0.2`]-  
 0.04694385972761588` φ[0.3333333333333333`]-0.045251092732617765`  
 φ[0.46666666666666667`]-0.02225473048866479` φ[0.6`]-  
 0.050462813291157274` φ[0.7333333333333333`]-0.12272736983065292`  
 φ[0.86666666666666667`]+1.88622234290101` φ[1.`]==2}]

{ { φ[-1.]→3.1792,φ[-0.866667]→3.09753,φ[-0.733333]→3.00583,φ[-  
 0.6]→2.90771,φ[-0.466667]→2.80635,φ[-0.333333]→2.705,φ[-  
 0.2]→2.60631,φ[-  
 0.0666667]→2.51229,φ[0.0666667]→2.4246,φ[0.2]→2.34412,φ[0.333333]→  
 2.27128,φ[0.466667]→2.20614,φ[0.6]→2.14843,φ[0.733333]→2.0977,φ[0.86  
 6667]→2.0534,φ[1.]→2.01479} }