ქ. ყაჭიაშვილი

# ავტომატიზებული მართვის მოდელები. სტატისტიკური მოდელები

„ტექნიკური უნივერსიტეტი“

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ქ. ყაჭიაშვილი

# ავტომატიზებული მართვის მოდელები. სტატისტიკური მოდელები

დამტკიცებულია სტუ – ს
სასწავლო – მეთოდური
საბჭოს მიერ

თბილისი
2004

უაკ 519.2, 681.3

სახელმძღვანელო განკუთვნილია 2202 – ინფორმაციის დამუშავებისა და მართვის ავტომატიზებული სისტემების სპეციალობის სტუდენტებისათვის.

მასში წარმოდგენილია გამოყენებითი სტატისტიკის ძირითადი ცნებები, ალბათობების განაწილების მნიშვნელოვანი კანონები, სტატისტიკური ჰიპოთეზების შემოწმებისა და შეფასებათა თეორიის საფუძვლები, ერთი და ორი ნორმალური ამონარჩევის ანალიზი, დისპერსიული ანალიზი, რეგრესიული ანალიზი. მასალა წარმოდგენილია არა მკაცრი ფორმალური აპარატის გამოყენებით, რაც აადვილებს მის შესწავლას ტექნიკური დარგის სტუდენტებისათვის.

სახელმძღვანელოში წარმოდგენილი მასალის უკეთ ათვისებისათვის პრაქტიკულ მეცადინეობებზე და დამოუკიდებლად გარჩევის მიზნით, მოცემულია აგრეთვე საკმაოდ დიდი რაოდენობის მრავალფეროვანი პრაქტიკული ამოცანები. სახელმძღვანელოს ბოლოში მოყვანილია ყველა ის სტატისტიკური ცხრილი, რომლებიც საჭიროა მასში წარმოდგენილი მეთოდების პრაქტიკული გამოყენებისათვის; კერძოდ, სახელმძღვანელოში მოცემული პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტისათვის.

სახელმძღვანელო გათვალისწინებულია მართვის ავტომატიზებული სისტემების სტუდენტებისათვის, თუმცა ის აგრეთვე სასარგებლო იქნება სხვა სპეციალობის სტუდენტებისა და ასპირანტებისათვის, რომლებიც დაინტერესებული არიან გამოყენებითი სტატისტიკის თანამედროვე მეთოდების შეისწავლით.

რეცენზენტები: პროფ. ნ. ჯიბლაძე
დოც. ი. ქართველიშვილი

რედაქტორები: პროფ. გ. გოგიჩაიშვილი
ვ. ოთარაშვილი


ISBN 99940-35-27-4

# ს ა რ ჩ ე ვ ი

ყაჭიაშვილი ქ.ი.

## შესავალი

ადამიანს ყოველდღიურ ცხოვრებაში აქვს შეხება პრობლემებთან, რომლებიც დაკავშირებული არიან მოსალოდნელი შედეგის ზუსტი გამოცნობის შესაძლებლობის არ არსებობასთან. მაგალითად, ნებისმიერი ჩვენთაგანისათვის შეუძლებელია წინასწარ ზუსტად განვსაზღვროთ საჭირო დროის ხანგრძლიობა დანიშნულების ადგილამდე, სასწავლებლამდე, სამუშაომდე ან სხვა ადგილამდე, მისასვლელად. ასევე, მაღაზიის გამყიდველისათვის შეუძლებელია წინასწარ განსაზღვროს თუ რამდენი მყიდველი შევა იმ დღეს მაღაზიაში. ასეთ მარტივ შემთხვევებში ადამიანი წინა გამოცდილების საფუძველზე აკეთებს მიახლოებით შეფასებას და, მაგალითად, მგზავრობისათვის საჭირო დროზე ათი წუთით ადრე გამოდის სახლიდან, რომ დროზე მივიდეს დანიშნულების ადგილზე. მაგრამ როდესაც საქმე ეხება სერიოზულ საკითხებს, მაგალითად, კომპანიის მიერ ახალი საქმის წამოწყებასთან დაკავშირებული საკითხების გადაწყვეტას, ბანკების მიერ გარკვეული ფინანსური ოპერაციების ჩატარებას და ა.შ. რესურსების ასეთი დარეზერვება, ანუ გამოუყენებელი მარაგების შექმნა, კონკურენციის თანამედროვე პირობებში, არარენტაბელური ანუ წამგებიანია, რადგან მას ბიზნესში გაასწრებენ ის კონკურენტები, რომლებიც უკეთესად ითვლიან და ღებულობენ უფრო ზუსტ გადაწყვეტილებებს.

ასეთი შემთხვევებისათვის, როდესაც შედეგის ზუსტად განსაზღვრა წინასწარ შეუძლებელია და ატარებს შემთხვევით ხასიათს, გამოიყენება მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდები, რომელთა საფუძვლებსაც ჩვენ შევისწავლით წინამდებარე კურსში.

მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდების ფართოდ გამოყენებას პრაქტიკაში ხელი შეუწყო გასული საუკუნის 60-70-იან წლებში გამოთვლითი ტექნიკის ფართოდ განვითარებამ და დანერგვამ ყოველდღიურ ცხოვრებაში. განსაკუთრებულად ინტენსიურად დაიწყო სტატისტიკური მეთოდების გამოყენება გასული საუკუნის 80-იან წლებში, რაც განაპირობა პერსონალური კომპიუტერის შექმნამ და ფართოდ გავრცელებამ. გარდა პერსონალური კომპიუტერების ფართო გავრცელდებისა, სტატისტიკური მეთოდების ფართოდ გამოყენებას დიდად შეუწყო ხელი მათთვის მონაცემების სტატისტიკური დამუშავების სპეციალიზებული პროგრამული პაკეტების შექმნამ. ასეთმა პაკეტებმა საშუალება მისცა მათემატიკური სტატისტიკის არა სპეციალისტებს, ანუ სხვა დარგის სპეციალისტებს, რომლებიც ღრმად არ ფლობენ სტატისტიკურ მეთოდებს, არამედ იციან ამ მეთოდების დანიშნულება და მათი შესაძლებლობები, კვალიფიციურად გამოიყენონ ეს მეთოდები თავისი დარგის ამოცანების გადასაწყვეტად. დანიშნულებისა და შესაბამისად, მათში რეალიზებული ამოცანების მიხედვით, არსებობენ უნივერსალური და სპეციალიზირებული სტატისტიკური პაკეტები. უნივერსალური სტატისტიკური პაკეტებიდან დღეისათვის ყველაზე ფართოდ გავრცალებული და გამოყენებული პაკეტებია: SPSS, STATISTICA, STATGRAPHICS, STADIA და სხვა. სპეციალიზირებული პაკეტებიდან აღსანიშნავია: Эвриста, Мезозавр (დროითი მწკრივების დასამუშავებლად), КЛАСС-МАСТЕР (რაოდენობრივი, თვისობრივი და ლოგიკური მონაცემების ანალიზისათვის) და სხვა. ცალკე გამოვყოფთ წინამდებარე ნაშრომის ავტორის ხელმძღვანელობით საქართველოში შექმნილ მონაცემთა სტატისტიკური ანალიზის უნივერსალურ პაკეტს SDpro-ს, რომელიც შექმნილია ანალოგიურ პროდუქციაზე არსებული საერთაშორისო სტანდარტების

შესაბამისად. უკანასკნელი ზემოთ დასახელებული პაკეტებისაგან განსხვავდება იმით, რომ ის ორიენტირებულია არა პროფესიონალ მომხმარებლზე, რის გამოც მისი შესწავლა და გამოყენება სტატისტიკურ მეთოდებში ცოტად თუ ბევრად გარკვეული მომხმარებლისათვის არ წარმოადგენს სირთულეს. გარდა ამისა, სხვებისაგან განსხვავებით, პაკეტი მრავალენოვანია. შესაბამისი ოფციის შერჩევით, მუშაობის ნებისმიერ ეტაპზე, შესაძლებელია მასში რეალიზებულ ნებისმიერ ენაზე გადასვლა. დღეისათვის პაკეტში რეალიზებულია ქართული, რუსული და ინგლისური ენები. პაკეტის Help-ში მოცემული ინსტრუქციის გამოყენებით, პაკეტის მომხმარებელს შეუძლია ნებისმიერი ენის დამატება პაკეტში გამოყენებული წინადადებების ამ ენეზე თარგმნის და, ინსტრუქციის თანახმად, მასში ჩართვის გზით.

მოვიყვანოთ სხვადასხვა პრაქტიკული ამოცანების გადასაწყვეტად სტატისტიკური მეთოდების გამოყენების რამოდენიმე მაგალითი.

1. მეწარმე, რომელსაც შეაქვს თავის საწარმოში შრომის ანაზღაურების ახალი სისტემა ან ნერგავს ახალ ტექნოლოგიურ პროცესს, დაინტერესებულია რაც შეიძლება სწრაფად დარწმუნდეს იმაში, რომ წარმოების გაუმჯობესება დაკავშირებულია ამ სიახლესთან და არ ატარებს შემთხვევით ხასათს და რამოდენიმე ხნის შემდეგ ასევე შემთხვევით არ გაუარესდება სიტუაცია.

ამ ამოცანის გადაწყვეტა შესაძლებელია მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდების გამოყენებით, რომლებიც საშუალებას იძლევიან ერთმანეთთან შედარებული იქნას სიახლის შემოტანამდე არსებული და შემოტანის შემდეგ მიღებული შედეგები და გარკვეული გარანტიით იყოს მიღებული გადაწყვეტილება მათი ერთგვაროვნების ან განსხვავების შესახებ.

2. ვთქვათ საჭიროა რაიმე პროცესის განვითარების წინასწარ განჭვრეტა ანუ პროცესის განვითარების პროგნოზი. მაგალითად, ბირჟაზე ვალუტის კურსის ცვალებადობის, გარემოს ტემპერატურის ცვალებადობის და ა.შ. პროგნოზი. პროცესის განვითარების წინასწარ განჭვრეტის საშუალებას, წინა პერიოდში მიღებული დაკვირვების შედეგების საფუძველზე, იძლევიან მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდები, რომლებიც გაერთიანებული არიან *რეგრესიული ანალიზის*, ან *შემთხვევითი პროცესების ანალიზისა და პროგნოზის* სახელწოდებით.

3. ყოველი მეწარმე დაინტერესებულია, რომ მის მიერ გამოშვებული პროდუქცია იყოს ერთგვაროვანი და რაც შეიძლება მაღალი ხარისხის. ამის მიღწევა შესაძლებელია ტექნოლოგიური პროცესის მკაცრი დაცვით, რისთვისაც საჭიროა სამუშაოს ყოველი ეტაპის მუდმივი, ობიექტური კონტროლი. ასეთი კონტროლის განსახორციელებლად დამუშავებულია პროდუქციის ხარისხის კონტროლის სტატისტიკური მეთოდები, რომელთა გამოყენება საწარმოში საშუალებას იძლევა წარმოების ყოველ ეტაპზე გავაკონტროლოთ შესრულებული სამუშაოს ხარისხი, რათა პრობლემის წარმოშობისთანავე, რაც შეიძლება სწრაფად, დავაფიქსიროთ და აღმოვფხვრათ ის. კონტროლის ასეთი მეთოდების საყოველთაო დანერგვა და გამოყენება გახდა მთავარი მიზეზი იაპონიის ეკონომიკის არნახული განვითარებისა მეორე მსოფლიო ომის შემდეგ.

4. ბანკების კრედიტის გამცემი განყოფილებები ყოველდღიურად დგებიან პრობლემის წინაშე, მისცენ თუ არა კრედიტი ამა თუ იმ მთხოვნელს. შეძლებს თუ არა ვალის ამღები ფულის დაბრუნებას დროულად. ამ პრობლემის გადასაწყვეტადაც გამოიყენება მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდები, რომელთაც *კლასტერ ანალიზის* მეთოდებს უწოდებენ. მეთოდის

არსი მდგომარეობს შემდეგში: ყოველი ფირმა ხასიათდება გარკვეული პარამეტრების სიმრავლით. მაგალითად, ძირითადი საშუალებების მოცულობა, საბრუნავი კაპიტალის მოცულობა, გამოშვებული პროდუქციის სახეობა და რაოდენობა, მოხმარებული ნედლეული და ა.შ. ამ პარამეტრებით ხდება ფირმების, რომლებმაც უკვე მიიღეს კრედიტი ამ ბანკიდან, დაჯგუფება კარგ გადამხდელებად, ცუდ გადამხდელებად და ფირმებად, რომლებმაც ვერ დააბრუნეს კრედიტი. კლასტერ ანალიზის მეთოდების გამოყენებით ახალ ფირმას მიაკუთვნებენ ერთ-ერთ ზემოთდასახელებულ ჯგუფს საკონტროლო პარამეტრების მნიშვნელობების მიხედვით და ღებულობენ შესაბამის გადაწყვეტილებას.

5. საჰაერო თავდაცვის ამოცანების გადაწყვეტისას რადიოლოკაციური გაზომილი ინფორმაციის პირველადი დამუშავებით მრავალგანზომილებიან სივრცეში გამოიყოფა წერტილების სიმრავლე, რომელთა გარკვეულ ქვესიმრავლეშიც შესაძლებელია მოწინააღმდეგის მოძრავი ობიექტების არსებობა. საჭიროა მოცემული გარანტიით გადაწყვეტილების მიღება თუ რომელ ქვესიმრავლეში იმყოფებიან მოძრავი ობიექტები. ამ ამოცანის გადასაწყვეტად გამოიყენება *სტატისტიკური ჰიპოთეზების შემოწმების კრიტერიუმები*, რადგან რადიოლოკაციური გაზომვის შედეგები ხასიათდებიან შემთხვევითი დამახინჯებებით.

6. გარემოს ობიექტების მდგომარეობა ხასიათდება გარკვეული პარამეტრების სიმრავლით, რომელთა მნიშვნელობების გაზომვაც ხდება დროის სხვადასხვა მომენტში სივრცის სხვადასხვა წერტილში. საჭიროა გადაწყვეტილების მიღება გარემოს საკონტროლო ობიექტში პარამეტრების ცვალებადობა დროში და სივრცეში განპირობებული გარკვეული გარეშე ზემოქმედებით თუ პარამეტრების შემთხვევითი ცვალებადობით. ამ ამოცანის გადაწყვეტა შესაძლებელია *ფაქტორული ანალიზის* მეთოდებით და ა.შ.

მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდები არიან უნივერსალური მეთოდები იმ თვალსაზრისით, რომ არა აქვს მნიშვნელობა თუ ცოდნის რომელ დარგს მიეკუთვნებიან ის მონაცემები, რომელთა დამუშავებაც ხდება ამ მეთოდებით; მთავარია ამოცანის არსი, რომლის გადაწყვეტაც გვინდა ამ მეთოდებით. ძალზე იშვიათ შემთხვევებში გვხვდება ისეთი ამოცანები, რომელთა გადაჭრაც მოითხოვს სპეციალური მეთოდების დამუშავებას. ამ შემთხვევაში საჭიროა ამ ამოცანის მათემატიკური ფორმალიზება მისი სპეციფიკის გათვალისწინებით, ამოხსნის ალგორითმის დამუშავება და რეალიზება კომპიუტერზე პროგრამის სახით. წინამდებარე კურსში ჩვენ შევისწავლით მათემატიკური სტატისტიკის უნივერსალურ მეთოდებს, რომლებიც ერთნაირად გამოდგებიან ნებისმიერი დარგის მონაცემების დასამუშავებლად შესაბამისი ამოცანების გადაწყვეტისათვის.

მონაცემების დამუშავებისას პირველ ეტაპს წარმოადგენს მათი ვიზუალიზაცია ანუ მონაცემების თვალსაჩინო წარმოდგენა გრაფიკების სახით. ეს საშუალებას იძლევა თვალსაჩინოდ წარმოვიდგინოთ პროცესის მიმდინარეობის ხასიათი და შევირჩიოთ შესაბამისი მეთოდები საჭირო ამოცანის გადასაწყვეტად. ამიტომ ზემოთ ნახსენებ მონაცემთა დამუშავების პროგრამულ პაკეტებში ფართოდ არის წარმოდგენილი მონაცემთა ერთ, ორ, სამგანზომილებიან გრაფიკებად წარმოდგენის საშუალებები და შესაძლებელია მათი გამოყენება როგორც მონაცემთა დამუშავების საწყის ეტაპზე, ასევე მიღებული შედეგების თვალსაჩინო წარმოდგენისათვის.

მონაცემთა პირველადი დამუშავებისას საჭიროა მონაცემებიდან გამოირიცხოს “უხეში შეცდომები”. “უხეში შეცდომები” ეს ისეთი

მონაცემებია, რომლებიც არ შეესაბამებიან მონაცემთა ძირითად სიმრავლეს და მათი წარმოშობა გამოწვეულია გარკვეული სუბიექტური ან ობიექტური მიზეზებით. მაგალითად, ხელსაწყოს ჩვენების აღებისას დაშვებული შეცდომა გამოწვეული ძაბვის მყისიერი ცვლილებით, ან ანათვალის ამღები პიროვნების სუბიექტური შეცდომა დაშვებული ჩანაწერის გაკეთებისას და ა.შ. ცნობილია [56], რომ საშუალოდ ექსპერიმენტალურ მონაცემებში ათ პროცენტამდე “უხეში შეცდომებია”, რომლებიც იწვევენ დამუშავების შედეგების მკვეთრ გაუარესებას. ამიტომ საჭიროა დამუშავების საწყის ეტაპზე მათი გამოვლენა და უგულებელყოფა.

# თავი 1. გამოყენებითი სტატისტიკის ძირითადი ცნებები

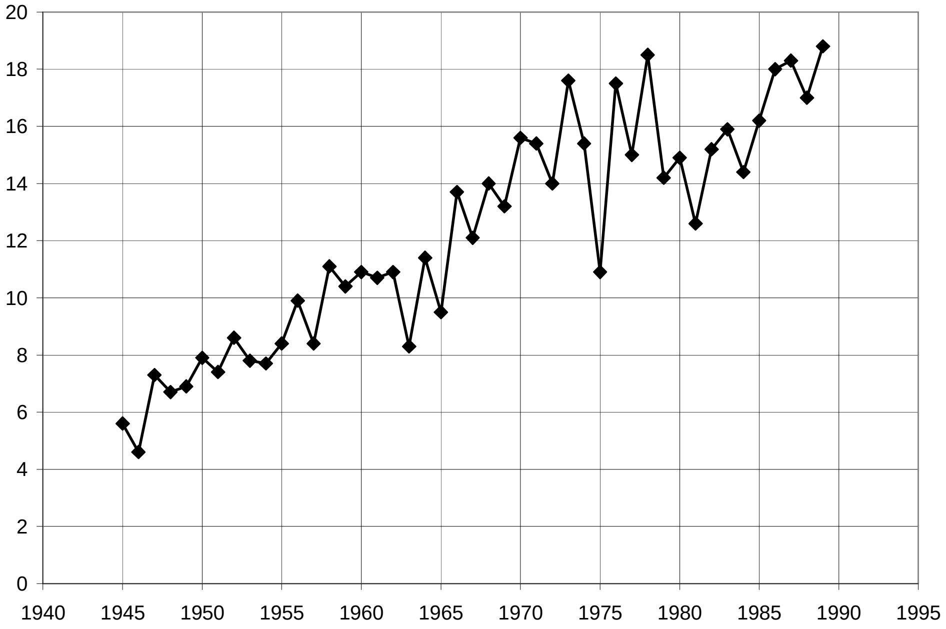
წინამდებარე თავში შევისწავლით ძირითად ცნებებსა და განსაზღვრებებს, რომლებიც დაგვჭირდება მოცემული კურსის შემდეგ თავებში შესასწავლი გამოყენებითი სტატისტიკის მეთოდებისა და ალგორითმების გასაგებად. ასეთი ცნებებია: შემთხვევითი მოვლენა, შემთხვევითი სიდიდე, შემთხვევითი მოვლენისა და სიდიდის ალბათობა, ალბათობების განაწილების კანონები, შემთხვევითი სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლები, ამონარჩევი და მისი წარმოდგენის მეთოდები.

## 1.1. შემთხვევითი ცვალებადობა

ბუნებაში ძალიან ხშირად გვხვდებიან მოვლენები, რომელთა შედეგების წინასწარ განჭვრეტა შეუძლებელია, რადგან ისინი ღებულობენ შემთხვევით მნიშვნელობებს მნიშვნელობათა გარკვეული არეებიდან. ასეთ მოვლენებს *შემთხვევითი მოვლენები* ჰქვიათ. თუმცა კი, მეორეს მხრივ, ცნობილია ბუნების კანონზომიერებები, რომლებიც მკაცრად ემორჩილებიან გარკვეულ დამოკიდებულებებს და მათი მნიშვნელობების განსაზღვრა ზუსტად არის შესაძლებელი მასთან დაკავშირებული მეორე სიდიდის მნიშვნელობის მიხედვით. მაგალითად, ფიზიკიდან ცნობილია სითხეში ჩაშვებულ სხეულზე მოქმედი წნევის ჩაშვების სიღრმეზე დამოკიდებულება და ყოველგვარი ექსპერიმენტის გარეშე ამ დამოკიდებულებით შეგვიძლია ზუსტად განვსაზღვროთ სხეულზე მოქმედი წნევა სიღრმის მიხედვით. ზუსტად ასევე შეგვიძლია განვსაზღვროთ სხეულის თავისუფალი ვარდნისას მის მიერ განვლილი მანძილი ვარდნის დროის მიხედვით. ასეთ პროცესებს *დეტერმინი-რებული პროცესები* ჰქვია.

როგორც უკვე ვთქვით, დეტერმინირებული პროცესებისაგან განსხვავებით, შეუძლებელია შემთხვევითი პროცესების მნიშვნელობების წინასწარ ზუსტი განსაზღვრა. მაგალითად, შეუძლებელია ზუსტად განვსაზღვროთ თუ როგორი მოსავალი იქნება მიღებული წლის ბოლოს ამა თუ იმ რეგიონში; ჰაერის ზუსტად როგორი ტემპერატურა იქნება გარკვეული პერიოდის შემდეგ და ა.შ. თუმცა კი შესაძლებელია გარკვეული საიმედობით მივუთითოთ ინტერვალი, რომლიდანაც მიიღებს მნიშვნელობებს ესა თუ ის შემთხვევითი სიდიდე. შემთხვევითი სიდიდე შეიძლება წარმოდგენილი იქნას ორი მდგენელის ჯამის სახით: ა) დეტერმინირებული მდგენელი, რომელიც დროში იცვლება გარკვეული კანონზომიერებით და ბ) შემთხვევითი მდგენელი, რომელიც ემატება დეტერმინირებულ მდგენელს და ცვლის მის ხასიათს შემთხვევით. მაგალითად [1], ნახაზ 1.1-ზე სქემატურად წარმოდგენილია 1948-1989 წლებში საბჭოთა კავშირში ერთ ჰექტარზე მარცვლეული კულტურების მოსავლიანო-ბის ცვალებადობა ცენტნერებში. მიუხედავად იმისა, რომ მოსავლიანობის მნიშვნელობა შემთხვევით იცვლება წლიდან წლამდე, მაინც აღინიშნება მოსავლიანობის ზრდის ტენდენცია რაც განპირობებული იყო პროგრესული აგრომეთოდების და სასუქების გამოყენებით. მოსავლიანობის შემთხვევითი ცვალებადობა სხვადასხვა წლებში განპირობებულია ამინდის და კიდევ მრავალი სხვა ფაქტორების ცვალებადობით, რომლებსაც აქვთ შემთხვევითი ხასიათი. მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდები საშუალებას იძლევიან ასეთ შემთხვევებში შევაფასოთ არსებული კანონზომიერების პარამეტრები,

შევამოწმოთ ესა თუ ის ჰიპოთეზები ამ კანონზომიერების შესახებ და ა.შ. ასეთი მეთოდების შესწავლას გარკვეულ დონეზე ისახავს მიზნად წინამდებარე კურსი.




ნახ. 1.1. 1948-1989 წლებში საბჭოთა კავშირში ერთ ჰექტარზე ყველა მარცვლეული კულტურების მოსავლიანობის ცვალებადობა (ც/ჰა)

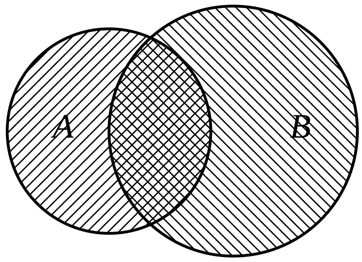
## 1.2. ხდომილება და მისი ალბათობა

შემთხვევითი ხდომილება ჰქვია ისეთ მოვლენას, რომელსაც ცდის შედეგად შეიძლება ჰქონდეს ან არ ჰქონდეს ადგილი. თუ ცდის შედეგად მოვლენას ყოველთვის აქვს ადგილი, *ჭეშმარიტი ხდომილება* ეწოდება. ხოლო თუ ცდის შედეგად მოვლენას არ შეიძლება ჰქონდეს ადგილი, *შეუძლებელი ხდომილება* ჰქვია.

ხდომილების მოხდენის შესაძლებლობის ზომას მისი *ალბათობა* ეწოდება. ხდომილებას, როგორც წესი, აღნიშნავენ დიდი ლათინური ასოებით, მაგალითად, $A$, $B$, $C$,..., ხოლო შესაბამის ალბათობას $P$ ასოთი. შეუძლებელი ხდომილების ალბათობა ნულის ტოლია, ანუ $P$(შეუძლ. ხდომ.)=0, ხოლო ჭეშმარიტი ხდომილების ალბათობა ერთის ტოლია, ანუ $P$(ჭეშმ. ხდომ.)=1. ზოგადად ალბათობა ღებულობს მნიშვნელობებს ნოლიდან ერთამდე ინტერვალში, ანუ რაიმე $A$ ხდომილებისათვის ადგილი აქვს პირობას $0 \le P(A) \le 1$.

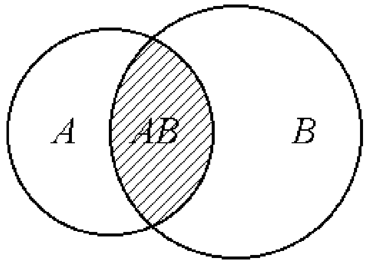
ხდომილებებზე შესაძლებელია მოქმედების ჩატარება. მაგალითად:

1) ორი $A$ და $B$ ხდომილების *გაერთიანება* ან *ჯამი* ჰქვია ისეთ $C$ ხდომილებას, რომელსაც ადგილი აქვს მაშინ, როდესაც ადგილი აქვს ან $A$-ს, ან $B$-ს ან ორივეს ერთად. ხდომილებების ჯამი აღინიშნება შემდეგნაირად $C = A + B$ ან $C = A \bigcup B$. ხდომილებების გაერთიანების გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას აქვს სახე



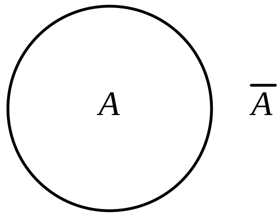

ნახ. 1.2.

2) ორი $A$ და $B$ ხდომილების *გადაკვეთა* ან *ნამრავლი* ჰქვია ისეთ $C$ ხდომილებას, რომელსაც ადგილი აქვს მაშინ, როდესაც ადგილი აქვს $A$-ს და $B$-ს ერთდროულად. ხდომილებების ნამრავლი აღინიშნება შემდეგნაირად $C = A \cdot B$ ან $C = A \bigcap B$. ხდომილებების გადაკვეთის გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას აქვს სახე




ნახ. 1.3.

3) $A$ ხდომილების *უარყოფა* ჰქვია ისეთ $\overline{A}$ ხდომილებას, რომელსაც ადგილი აქვს მაშინ, როდესაც $A$ ხდომილებას არა აქვს ადგილი და პირიქით. გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას აქვს სახე




ნახ. 1.4.

თუ ხდომილებები $A$ და $B$ არ შეიძლება მოხდნენ ერთდროულად, მაშინ ასეთ ხდომილებებს ეწოდებათ *შეუთავსებადი ხდომილებები.* შეუთავსებადი

ხდომილებების მაგალითებია $A$ და $\overline{A}$, ხოლო ხდომილება $A+\overline{A}$ ჭეშმარიტი ხდომილებაა.

მოვიყვანოთ მაგალითები:

- ვთქვათ $A$ არის ხდომილება, რომ კამათელის გაგორების შედეგად გამოვა 4-ზე ნაკლები ციფრი. $B$ არის ხდომილება, რომ კამათელის გაგორებისას გამოვა ციფრი 3 ან 6. მაშინ $A+B$ არის ხდომილება, რომ კამათელის გაგორებისას გამოვა ციფრი 1, 2, 3 ან 6; ხოლო $A\cdot B$ არის ხდომილება, რომ კამათლის გაგორებისას გამოვა ციფრი 3. $\overline{A}$ არის ხდომილება, რომ კამათლის გაგორებისას გამოვა ციფრი მეტი ან ტოლ 4-ის და ნაკლები ან ტოლი 6-ის.

მოვიყვანოთ ალბათობების თვისებები.

1) ნებისმიერი ხდომილებისათვის $0 \le P(A) \le 1$;

2) ორი $A$ და $B$ შეუთავსებადი ხდომილებების ჯამის ალბათობა ტოლია ამ ხდომილებების ალბათობების ჯამისა $P(A+B)=P(A)+P(B)$, ხოლო ზოგადად $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$.

3) ჭეშმარირი ხდომილების ალბათობა ტოლია 1-ის, ხოლო შეუძლებელი ხდომილების ალბათობა ტოლია 0-ის.

$A$ და $B$ ხდომილებებს ეწოდებათ *დამოუკიდებელი*, თუ $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$.

შემოვიტანოთ *პირობითი ალბათობის* ცნება. $A$ ხდომილების ალბათობა იმ პირობით, რომ ადგილი ჰქონდა $B$ ხდომილებას ჩაიწერება ასე $P(A\,|\,B)=\dfrac{P(A\cdot B)}{P(B)}$. აქედან $P(A\cdot B)=P(A\,|\,B)\cdot P(B)=P(B\,|\,A)\cdot P(A)$. თუ ხდომილება $A$ დამოკიდებულია $B$ ხდომილებისაგან, მაშინ $B$ ხდომილებაც დამოკიდებულია $A$ ხდომილებისაგან და პირიქით. თუ ხდომილება $A$ არ არის დამოკიდებული $B$ ხდომილებისაგან, მაშინ $B$ ხდომილებაც არ არის დამოკიდებული $A$ ხდომილებისაგან.

### 1.3. ალბათობების გაზომვა

რადგან ალბათობა ახასიათებს ამა თუ იმ მოვლენის მოხდენის შესაძლებლობას, ბუნებრივია მოვითხოვოთ მისი გაზომვის შესაძლებლობა. სხვა ფიზიკური სიდიდეებისაგან განსხვავებით, მაგალითად, წონა, დენის ძაბვა, სისწრაფე, სიგრძე და ა.შ., ალბათობის გაზომვა რაიმე ხელსაწყოს გამოყენებით შეუძლებელია. არსებობს ალბათობის გაზომვის ორი გზა: *ლოგიკური დასკვნების საფუძველზე ან პირდაპირი გაზომვა*. ალბათობის ლოგიკური გაზომვა მდგომარეობს მიღებული დაშვებების პირობებში ლოგიკური მსჯელობის საფუძველზე ალბათობის გამოთვლაში. მაგალითად, კამათელის გაგორების შემთხვევაში, თუ ვიცით, რომ ის სიმეტრიული და ერთგვაროვანია, ბუნებრივია დავუშვათ, რომ ნებისმიერი გვერდის გამოსვლის ალბათობა ერნაირია. რადგან ყველა შესაძლო შედეგების რაოდენობა ექვსია,

ამიტომ 1-დან 6-დე ნებისმიერი ციფრის გამოსვლის ალბათობა ტოლია $1/6$-ის. წყვილი ციფრების გამოსვლის ალბათობა ტოლია $1/2$-ის. ციფრების 3-ის ან 5-ის გამოსვლის ალბათობა ტოლია $1/3$-ის.

პირდაპირი გაზომვის არსი მდგომარეობს შემდეგში. ატარებენ რაც შე-იძლება დიდი რაოდენობის ექსპერიმენტებს. აღვნიშნოთ მათი საერთო რაოდენობა $N$-ით, ხოლო $N(A)$ აღვნიშნოთ ექსპერიმენტების რიცხვი, როდესაც ადგილი ჰქონდა $A$ ხდომილებას. ცხადია, რომ $N(A) \leq N$. ხდომილების ალბათობის მიახლოებითი მნიშვნელობა გამოითვლება ფორმულით $P(A) = \dfrac{N(A)}{N}$.

ექსპერიმენტების რიცხვის უსასრულოდ გაზრდისას, ანუ როდესაც $N \to \infty$ ალბათობის გამოთვლილი მნიშვნელობა მიისწრაფვის მისი ნამდვილი მნიშ-ვნელობებისაკენ (იხ. პარაგრაფი 4..2).

## 1.4. შემთხვევითი სიდიდეები. განაწილების ფუნქცია

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, შემთხვევითი სიდიდე ეს ისეთი სიდიდეა, რომელიც თავისი განსაზღვრის არედან ღებულობს მნიშვნელობებს შემთხვევით. ყოველი მნიშვნელობის მიღებას გააჩნია გარკვეული შესაძლებლობა, რომელსაც ამ მნიშვნელობის შესაბამისი ალბათობა ჰქვია. შესაბამისობას შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობებსა და ამ მნიშვნელობების მიღების ალბათობებს შორის შემთხვევითი სიდიდის *განაწილების კანონი* ჰქვია.

პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნის დროს ძირითადად გვხვდება ორი სახის შემთხვევითი სიდიდეები: *დისკრეტული და უწყვეტი*. თუმცა არსებობენ სხვა სახის შემთხვევითი სიდიდეები, რომელთაც წინამდებარე კურსში არ განვიხილავთ. *დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე* ჰქვია ისეთ სიდიდეს, რომლის შესაძლო მნიშვნელობები სასრულო ან თვლადია. მაგალითად, დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეა სათამაშო კამათელის გაგორების შედეგად გამოსული ციფრი. ამ შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია 1, 2, 3, 4, 5, 6. დისკრეული შემთხვევითი სიდიდეა, აგრეთვე, ორი კამათელის აგდებისას გამოსული ციფრების ჯამი, რომელიც ღებულობს მნიშვნელობებს 2-დან 12-დე.

*უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდე* ჰქვია ისეთ შემთხვევით სიდიდეს, რომლის შესაძლო მნიშვნელობათა ჩამოთვლა შეუძლებელია, რადგან ის ღებულობს ყველა შესაძლო მნიშვნელობებს რომელიმე სასრულო ან უსასრულო არედან. უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის მაგალითად შეიძლება დავასახელოთ ელექტრო ნათურის მუშაობის ხანგრძლივობა. ამ შემთხვევით სიდიდეს თეორიულად შეუძლია მიიღოს მნიშვნელობა ნოლიდან უსასრულობამდე დროის ინტერვალში.

ზემოთ ავღნიშნეთ, რომ შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობებსა და ამ მნიშვნელობების მიღების შესაძლებლობებს, ანუ შესაბამის ალბათობებს შორის დამოკიდებულებას ჰქვია *შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.* დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის მაგალითზე განვიხილოთ განაწილების კანონის არსი. განვიხილოთ ორი კამათელის აგდების შედეგად გამოსული ორი ციფრის ჯამი. ამ შემთხვევით სიდიდეს შეუძლია მიიღოს მნიშვნელობები

2, 3, 4, …, 12. შემთხვევითი სიდიდის ყოველ შესაძლო მნიშვნელობას შეესაბამება გარკვეული ალბათობა, რომელიც ახასიათებს ამ მნიშვნელობის მიღების შესაძლებლობას. ცხრილ 1.1-ში მოცემულია განსახილველი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები და შესაბამისი ალბათობები.

ცხრილი 1.1.

| $A$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(A)$ | 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

ცხრილით მოცემულია შესაბამისი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი, რადგან ის ამყარებს შესაბამისობას შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობებსა და ამ მნიშვნელობების მიღების ალბათობებს შორის.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდისათვის განაწილების კანონის ასევე მარტივად ჩაწერა შეუძლებელია მისი შესაძლო მნიშვნელობების უსასრულო რაოდენობის გამო. ამას გარდა, უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის შემთხვევაში ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს ერთ რომელიმე მნიშვნელობას მისი განსაზღვრის არედან ნოლის ტოლია (მისი შესაძლო მნიშვნელობების უსასრულო რაოდენობის გამო). ამ შემთხვევაში შეიძლება ვილაპარაკოთ ალბათობაზე, რომ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას მისი განსაზღვრის არის რომელიმე ქვესიმრავლიდან. კერძოდ, ალბათობა იმისა, რომ უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდე $\xi$ მიიღებს $x$ ცვლადზე ნაკლებ მნიშვნელობას ჩაიწერება ასე $F(x) = P(\xi < x)$ და მას ეწოდება *შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია*. განაწილების ფუნქცია შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონის წარმოდგენის ყველაზე უნივერსალური ფორმაა. განმარტებიდან ჩანს, რომ განაწილების ფუნქცია არსებობს როგორც დისკრეტული, ასევე უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის.

მოვიყვანოთ განაწილების ფუნქციის თვისებები.

1) $F(x) \geq 0$;
2) $F(-\infty) = 0$;
3) $F(+\infty) = 1$;
4) $0 \leq F(x) \leq 1$.

ალბათობების განაწილების კანონის ჩაწერის შემდეგი ფორმაა *განაწილების სიმკვრივე*. მაგრამ განაწილების ფუნქციისაგან განსხვავებით ალბათობების განაწილების სიმკრივე არსებობს მხოლოდ უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის. განაწილების სიმკრივის ცნება შეიძლება შემოვიტანოთ ინტეგრალური და დიფერენციული ფორმით.

**ინტეგრალური ფორმა.** $\xi$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე ეწოდება $p(x)$ ფუნქციას, თუ ის აკმაყოფილებს პირობას

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt,$$

სადაც $F(x)$ არის განსახილველი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია.

**დიფერენციალური ფორმა.** $\xi$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე ეწოდება $p(x)$ ფუნქციას, თუ ალბათობა იმისა, რომ $\xi$

შემთხვევითი სიდიდე მოხვდება $\Delta x$ სიგრძის მქონე ელემენტარულ ინტერვალში გამოითვლება ფორმულით

$$P(x \le \xi \le x + \Delta x) = p(x) \cdot \Delta x + O\Delta x,$$

სადაც $O\Delta x$ არის $\Delta x$ შედარებით უსასრულოდ მცირე სიდიდე.

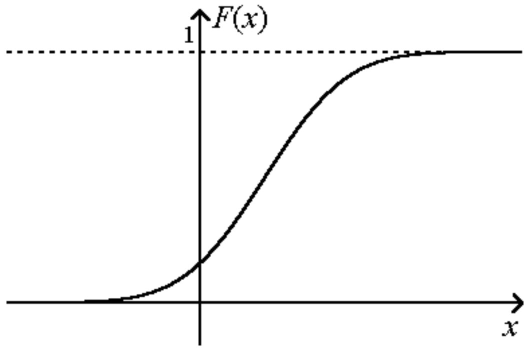
მოვიყვანოთ განაწილების სიმკვრივის თვისებები:

1) $p(-\infty) = p(+\infty) = 0;$

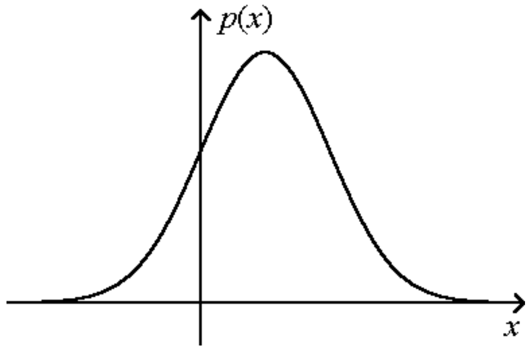
2) $p(x) \ge 0, \quad x \in (-\infty;+\infty);$

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$

ნახაზებზე 1.5 და 1.6 მოყვანილია შესაბამისად განაწილების ფუნქციისა და სიმკვრივის გრაფიკული სახეები




ნახ. 1.5.




ნახ. 1.6.

ალბათობების განაწილების ფუნქციის და ალბათობების სიმკვრივის განაწილების ინტეგრალური ფორმის საფუძველზე ადვილად ვრწმუნდებით, რომ $\xi$ შემთხვევითი სიდიდის მისი განსაზღვრის არედან $(a,b)$ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$P(\xi \in (a,b)) = F(b) - F(a) = \int\limits_{a}^{b} p(x)dx,$$

სადაც $F(x)$ არის $\xi$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია, ხოლო $p(x)$ არის მისი ალბათობების განაწილების სიმკვრივე.

## 1.5. ალბათობების განაწილების რიცხვითი მახასიათებლები

შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია და სიმკვრივე მოიცავენ შემთხვევითი სიდიდის შესახებ სრულ ინფორმაციას, ანუ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონის ცოდნა შეესაბამება შემთხვევითი სიდიდის ბუნების შესახებ სრული ინფორმაციის ქონას (მისი განსაზღვრის არე, დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის დროს შესაძლო მნიშვნელობების სიმრავლე და მათი მიღების ალბათობები, შემთხვევითი სიდიდის რომელიმე არეში მოხვედრის ალბათობა და სხვა). ძალზე ხშირად შემთხვევითი

სიდიდის განაწილების კანონი უცნობია და მისი დადგენა ხდება ექსპერიმენტალური მონაცემების საფუძველზე, რაც საკმაოდ შრომატევად და, ხშირ შემთხვევაში, ძვირად ღირებულ სამუშაოს წარმოადგენს. მრავალი პრაქტიკული ამოცანის გადაწყვეტისას არც არის საჭირო განაწილების კანონის ცოდნა ანუ შემთხვევითი სიდიდის მთელი ბუნების ცოდნა. საკმარისია მისი ცალკეული მახასიათებლების ცოდნა. შემთხვევითი სიდიდის ცალკეულ თვისებებს ახასიათებენ მისი რიცხვითი მახასიათებლები. არსებობს შემთხვევითი სიდიდის მრავალი რიცხვითი მახასიათებელი. მათ შორის ყველაზე გავრცელებულია *მომენტები* და *კვანტილები*. ჩვენ შევისწავლით ორი სახის მომენტებს. შემთხვევითი სიდიდის *საწყის მომენტებს* და *ცენტრალურ მომენტებს*.

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის $k$-ური რიგის საწყისი მომენტი ჰქვია სიდიდეს $\alpha_k$, რომელიც გამოითვლება ფორმულით

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \cdot p_i ,$$

სადაც $x_1, x_2, ..., x_n$ არიან დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები, ხოლო $p_1, p_2, ..., p_n$ არიან შესაბამისი მნიშვნელობების მიღების ალბათობები. იმისათვის რომ $k$-ური რიგის საწყისი მომენტი $\alpha_k$ არსებობდეს მწკრივი უნდა იკრიბებოდეს აბსოლუტურად.

ანალოგიურად განიმარტება უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის $k$-ური რიგის საწყისი მომენტი

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot p(x) dx,$$

სადაც $p(x)$ შესაბამისი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა.

საწყისი მომენტები დამოკიდებული არიან რიცხვით ღერძზე ათვლის წერტილის მდებარეობაზე. მომენტებს, რომელთა მნიშვნელობებიც ამ მდებარეობაზე არ არიან დამიკიდებული, ეწოდებათ ცენტრალური მომენტები.დისკრეტული $\xi$ შემთხვევითი სიდიდის $k$-ური რიგის ცენტრალური მომენტი ჰქვია სიდიდეს $\mu_k$, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M\xi)^k \cdot p_i ,$$

სადაც $M\xi$ აღნიშნულია შემთხვევითი სიდიდის პირველი საწყისი მომენტი, რომელსაც შემთხვევითი სიდიდის *მათემატიკური მოლოდინი* ჰქვია. იმის გამო, რომ მათემატიკურ მოლოდინს აქვს დიდი მნიშვნელობა აქვს ალბათობის თეორიაში და მათემატიკურ სტატისტიკაში, შემოღებულია მისი უნივერსალური აღნიშვნა $M\xi$ ან $M(\xi)$. ინგლისურ ლიტერატურაში ხმარობენ აღნიშვნას $E(\xi)$. მათემატიკური მოლოდინი ახასიათებს შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობების მდებარეობას რიცხვით ღერძზე. ანუ ეს არის ისეთი მნიშვნელობა, რომლის ახლო-მახლოთაც განლაგდებიან შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობათა დიდი უმრავლესობა.

უწყვეტი $\xi$ შემთხვევითი სიდიდის $k$-ური რიგის ცენტრალური მომენტი განისაზღვრება ანალოგიურად. კერძოდ,

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^k \cdot p(x) dx,$$

სადაც $M\xi$ არის $\xi$ შემთხვევითი სიდიდის პირველი რიგის საწყისი მომენტი.

მოვიყვანოთ მათემატიკური მოლოდინის თვისებები. ავღნიშნოთ: $a$ - რაიმე რიცხვია, ხოლო $\xi$ - შემთხვევითი რიცხვი. მაშინ

1) $M(a) = a;$
2) $M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta),$
3) $M(a \cdot \xi) = a \cdot M(\xi).$

შემთხვევითი სიდიდის რიცხვით მახასიათებლებს შორის მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია მეორე რიგის ცენტრალურ მომენტს, რომელსაც შემთხვევითი სიდიდის *დისპერსია* ჰქვია. დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდისათვის ის გამოითვლება ფორმულით $D\xi = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M\xi)^2 \cdot p_i$ , ხოლო უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდისათვის - $D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 \cdot p(x)dx$. ინგლისურ ლიტერატურაში ხმარობენ აღნიშვნას $V(\xi)$.

დისპერსია ახასიათებს შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობების გაბნევას მათემატიკური მოლოდინის მიმართ. დისპერსიას აქვს შემთხვევითი სიდიდის განზომილების კვადრატის განზომილება, ამიტომ ხშირად მოხერხებულია გაბნევა დავახასიათოთ სიდიდით, რომელსაც აქვს შემთხვევითი სიდიდის განზომილება. ასეთ მახასიათებელს *საშუალო კვადრატული გადახრა* ეწოდება, აღინიშნება $\sigma$ და გამოითვლება $\sigma = \sqrt{D\xi}$ .

მოვიყვანოთ დისპერსიის თვისებები.

1) $D(a) = 0;$
2) $D(a + \xi) = D\xi;$
3) $D(a \cdot \xi) = a^2 \cdot D\xi$ .

ისევე როგორც მათემატიკური მოლოდინი და დისპერსია სხვა საწყისი და ცენტრალური მომენტებიც ახასიათებენ შემთხვევითი სიდიდის ამა თუ იმ თვისებებს. შემთხვევითი სიდიდის ყველა მომენტის განსაზღვრის შესაძლებლობა ნიშნავს იმას, რომ შესაძლებელია შემთხვევითი სიდიდის შესახებ მივიღოთ სრული ინფორმაცია ანუ ეს ტოლფასია შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონის, კერძოდ, ალბათობების განაწილების ფუნქციის ან სიმკვრივის ცოდნისა.

მოვიყვანოთ შემთხვევითი სიდიდის რამოდენიმე მნიშვნელოვანი რიცხვითი მახასიათებლი. საწყისი და ცენტრალური მომენტების განსაზღვრებიდან ჩანს, რომ მათი მნიშვნელობები დამოკიდებული არიან შემთხვევითი სიდიდის გაზომვის ერთეულზე. ზოგჯერ მოხერხებულია ისეთი მომენტების გამოყენება, რომლებიც არ არიან გაზომვის ერთეულზე დამოკიდებული. ასეთი მომენტებიდან ყველაზე ხშირად გამოიყენებიან მესამე და მეოთხე რიგის ნორმირებული ცენტრირებული მომენტები, რომლებსაც *ასიმეტრიისა* და *ექსცესის კოეფიციენტები* ჰქვიათ. ასიმეტრიის კოეფიციენტი გამოითვლება ფორმულით

$$Asym. = \frac{M[(\xi - M\xi)^3]}{(D\xi)^{3/2}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad .$$

ასიმეტრიის კოეფიციენტი ახასიათებს შემთხვევითი სიდიდის განაწილების არასიმეტრიულობას.

ექსცესის კოეფიციენტი გამოითვლება ფორმულით

$$Exc. = \frac{M[(\xi - M\xi)^4]}{(D\xi)^2} - 3 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \quad .$$

ექსცესის კოეფიციენტი ახასიათებს შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივის გვერდების ციცაბოობას, ანუ იმას, თუ რამდენად ხშირად ღებულობს შემთხვევითი სიდიდე მათემატიკური მოლოდინიდან დაშორებულ მნიშვნელობებს.

შემთხვევითი სიდიდის შემდეგი მნიშვნელოვანი რიცხვითი მახასიათებლებია *კვანტილები.*

შემთხვევითი $\xi$ სიდიდის $p$ - ური რიგირს კვანტილი ეწოდება ისეთ $x_p$ რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $F(x_p) = p$, სადაც $F(x)$ არის $\xi$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია. 0,75 და 0,25 დონეების მქონე კვანტილებს *კვარტილებს* უძახიან. 0.1, 0.2, 0.3 და ა.შ. 0.9 დონეების მქონე კვანტილებს *დეცილები* ჰქვიათ.

## 1.6. დამოუკიდებელი და დამოკიდებული შემთხვევითი სიდიდეები

დამოუკიდებლობა და დამოკიდებულება შემთხვევითი სიდიდეებისათვის ძალზე მნიშვნელოვანი მახასიათებლებია. ზემოთ შემოვიტანეთ დამოკიდებულების ცნება ხდომილებებისათვის. ანალოგიურედ შემოვიტანოთ შემთხვევითი სიდიდეების დამოკიდებულების ცნება.

ორ შემთხვევით $\xi$ და $\eta$ სიდიდეს ეწოდება დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები, თუ ადგილი აქვს ტოლობას $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$, სადაც $A$ და $B$ არიან ხდომილებები $A = (a_1 < \xi < a_2)$, $B = (b_1 < \eta < b_2)$, ხოლო $a_1, a_2, b_1, b_2$ - ნებისმიერი რიცხვებია.

დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებისათვის ადგილი აქვს ტოლობებს

$$M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta ,$$

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta .$$

შემთხვევითი სიდიდე $\xi$ დამოკიდებულია მეორე შემთხვევით $\eta$ სიდიდეზე, თუ $\xi$ შემთხვევითი სიდიდის ალბათობების განაწილების კანონი არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რა მნიშვნელობა მიიღო $\eta$ შემთხვევითმა სიდიდემ. შემოვიტანოთ შემთხვევითი სიდიდეების დამოკიდებულების ხარისხის დამახასიათებელი ზომა. შემთხვევითი სიდიდეების დამოკიდებულების უამრავი მახასიათებელი არსებობს. მათ შორის ყველაზე გავრცელებულია კოვარიაციისა და კორელაციის კოეფიციენტები, რომლებიც ახასიათებენ შემთხვევითი სიდიდეების წრფივ დამოკიდებულებებს. ორი შემთხვევითი $\xi$ და $\eta$ სიდიდის კოვარიაციის კოეფიციენტი განსაზღვრებით არის შემდეგნაირად გამოთვლილი რიცხვი

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M[(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)] = M\xi\eta - M\xi M\eta \, .$$

კოვარიაცია, დისპერსიის ანალოგიურად, არის მეორე რიგის ცენტრალური მომენტი. კოვარიაციის კოეფიციენტის მნიშვნელობა დამოკიდებულია $\xi$ და $\eta$ შემთხვევითი სიდიდეების გაზომვის ერთეულზე. ერთი ერთეულიდან მეორეზე გადასვლისას მისი მნიშვნელობა იცვლება, თუმცა $\xi$ და $\eta$ შორის დამოკიდებულების ხარისხი რჩება უცვლელი. ამიტომ

უფრო მოსახერხებელია დამოკიდებულების ხარისხის ისეთი მახასიათებლის არსებობა, რომელიც არ იქნება დამოკიდებული გაზომვის ერთეულისაგან. ასეთი მახასიათებელია კორელაციის კოეფიციენტი.

$$cor(\xi,\eta)=\rho(\xi,\eta)=\frac{M[(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)]}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} \quad ,$$

სადაც $D\xi>0, D\eta>0$ .

კორელაციის კოეფიციენტის თვისებებია:

1) $|\rho(\xi,\eta)|=|\rho(\xi^{'},\eta^{'})|$ , სადაც $\xi^{'}=a_1+a_2\xi, \eta^{'}=b_1+b_2\eta,\quad a_1,a_2,b_1,b_2$ - ნებისმიერი რიცხვებია;

2) $-1\le\rho(\xi,\eta)\le+1$;

3) $|\rho(\xi,\eta)|=1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\xi$ და $\eta$ შემთხვევით სიდიდეებს შორის არსებობს წრფივი კავშირი;

4) $|\rho(\xi,\eta)|=0$ თუ $\xi$ და $\eta$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია. ზოგადად შებრუნებულ მტკიცებას ადგილი არა აქვს, ანუ შეიძლება კორელაციის კოეფიციენტი იყოს ნოლის ტოლი, მაგრამ შემთხვევითი სიდიდეები არ იყვნენ დამოუკიდებლები, რადგან კორელაციის კოეფიციენტი ასახავს მხოლოდ წრფივ დამოკიდებულებას. ამიტომ შეიძლება კორელაციის კოეფიციენტი ნოლის ტოლი იყოს, მაგრამ შემთხვევითი სიდიდეებს შორის არსებობდეს არა წრფივი კავშირი. დამოუკიდებლობა და კორელაციის კოეფიციენტის ნოლთან ტოლობა სინონიმებია პრაქტიკაში ძალზედ ფართოდ გავრცელებული ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებისათვის. ამის შესახებ უფრო დაწვრილებით ქვემოთ იქნება ნათქვამი, ორგანზომილებიანი ნორმალური კანონის განხილვისას.

როდესაც კორელაციის კოეფიციენტი ერთის ტოლია ანუ $\rho(\xi,\eta)=+1$, მაშინ $\xi$ და $\eta$ შემთხვევითი სიდიდეებს შორის არსებობს დადებითი წრფივი კავშირი, ხოლო თუ კორელაციის კოეეფიციენტი მინუს ერთის ტოლია, ანუ $\rho(\xi,\eta)=-1$, მაშინ $\xi$ და $\eta$ შემთხვევითი სიდიდეებს შორის არსებობს უარყოფითი წრფივი კავშირი.

## 1.7. შემთხვევითი ამონარჩევი

შემთხვევით მოვლენების, მათ შორის შემთხვევითი სიდიდეების შესწავლისას ძალზე იშვიათადად არის ცნობილი ალბათობების განაწილების კანონი. ამიტომ შესწავლა ეყრდნობა შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობებზე დაკვირვების შედეგებს, ანუ ატარებენ ექსპერიმენტების სიმრავლეს და აფიქსირებენ $x_1,x_2,...,x_n$ შემთხვევითი სიდიდის მიერ მიღებულ მნიშვნელობებს. დაკვირვების ამ მნიშვნელობების გამოყენებით გამოითვლება შესასწავლი შემთხვევითი სიდიდის ესა თუ ის მახასიათებლები. იმის გამო, რომ დაკვირვების შედეგების მიღება დაკავშირებულია გარკვეულ მატერიალურ და დროით დანახარჯებთან, რომლებიც ხშირად საკმაოდ მნიშვნელოვანია, პრაქტიკაში მათი რაოდენობა შეზღუდულია.

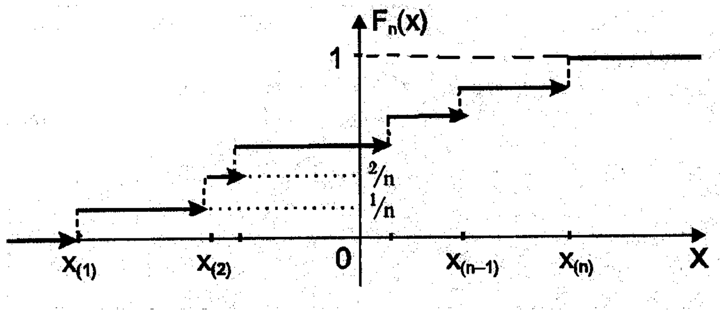
შემთხვევითი სიდიდის ყველა შესაძლო მნიშვნელობების სიმრავლეს *გენერალურ ამონარჩევს* უწოდებენ, ხოლო შემთხვევითი სიდიდის ყველა შესაძლო მნიშვნელობებიდან $x_1,x_2,...,x_n$ დაკვირვებების სასრულო

რაოდენობას, რომელთა საშუალებითაც შეისწავლიან შემთხვევით სიდიდეს, *ამონარჩევს* ეძახიან. მოცანა მდგომარეობს ისეთი ამონარჩევის მიღებაში, რომელიც მაქსიმალურად სრულად ასახავს გენერალური ამონარჩევის ყველა თვისებას. ეს მიიღწევა გენერალური ამონარჩევიდან თითო-თითო ობიექტის მიმდევრობით და წმინდა შემთხვევით ამორჩევით. მაგალითად, კონკრეტულ შემთხვევაში, $n$ რაოდენობის ობიექტებიდან ერთის ამორჩევისას, აუცილებელია, რომ ყოველი ობიექტის ამორჩევის ალბათობა იყოს $1/n$-ის ტოლი. იმ შემთხვევაში, როდესაც ამონარჩევი ასახავს გენერალური ამონარჩევის არა ყველა თვისებას, არამედ მის რომელიმე მხარეს, ამონარჩევს ჰქვია *წანაცვლებული ამონარჩევი.* წანაცვლებულ ამონარჩევს, როგორც წესი, მივყავართ მცდარ დასკვნამდე, რადგან ის სრულად ვერ ასახავს შემთხვევითი სიდიდის თვისებებს.

შემთხვევითი ამორჩევის პრინციპის დარღვევას ზოგჯერ მივყევართ სერიოზულ შეცდომებამდე. წარუმატებელი ამონარჩევის მაგალითად მოგვყავს ამერიკის შეერთებული შტატების მოსახლეობის გამოკითხვის შედეგები, რომელიც ჩატარდა 1936 წელს, როდესაც ქვეყნის პრეზიდენტის პოსტზე კენჭს იყრიდა ორი კანდიდატი, რუზველტი და ლანდონი. ავტორიტეტულმა ჟურნალმა „ლიტერატურული მიმოხილვა“, საზოგადოებაში თავისი რეიტინგის ამაღლების მიზნით, მოახდინა 4 მილიონი ამერიკლის გამოკითხვა იმისათვის, რომ ეწინასწარმეტყველა ამერიკის მომავალი პრეზიდენტის ვინაობა. სატელეფონო წიგნებიდან ამოიწერეს 4 მილიონი ადამიანის მისამართი და გაუგზავნეს შესაბამისი შეკითხვა. მიღებული პასუხების დამუშავების შედეგად ჟურნალმა გამოაქვეყნა ინფორმაცია, რომ არჩევნებში დიდი უპირატესობით გაიმარჯვებდა ლანდონი, თუმცა კი ცხოვრებამ საპირისპირო შედეგი აჩვენა. ასეთივე გამოკითხვა ჩაატარეს ამერიკელმა სოციოლოგებმა გელაპმა და როუპერმა. მათ გამოკითხეს მხოლოდ ოთხი ათასი ამერიკელი, ამასთან ცდილობდნენ რაც შეიძლება სრულად მოეცვათ მოსახლეობის ყველა ფენა. მათი შედეგი აღმოჩნდა ჟურნალის მიერ მიღებული შედეგის საწინააღმდეგო. მიუხედავად იმისა, რომ ამონარჩევი იყო გაცილებით უფრო მცირე მოცულობის, შედეგი აღმოჩნდა სწორი წინა შედეგისაგან განსხვავებით. მიზეზი მდგომარეობდა იმაში, რომ რედაქციის სპეციალისტებმა დაუშვეს რამოდენიმე სერიოზული შეცდომა რესპონდენტების ამონარჩევის ფორმირებისას: ა) მათ ვერ გაითვალისწინეს, რომ ტელეფონის წიგნებში, განსაკუთრებით იმ დროს, წარმოდგენილი იყო მოსახლეობის შეძლებული ფენა; ბ) პასუხი დაუბრუნა არა ყველა გამოკითხულმა, არამედ იმ საქმიანმა ადამიანებმა, რომლებიც მიჩვეულნი იყვნენ კორესპონდენციაზე პასუხის გაცემას. ლანდონს სწორედ ეს ფენა უჭერდა მხარს და მიღებულ შედეგებში აისახა სწორედ მათი განწყობა. მეორე შემთხვევაში ამონარჩევი თავისუფალი იყო ამ შეცდომისაგან. ცნობილია, რომ საზოგადოების ერთი და იგივე ფენის წარმომადგენლებს აქვთ დაახლოებით ერთნაირი ფსიქოლოგია და დამოკიდებულება მოვლენებისადმი. ამიტომ მოსახლეობის დაყოფა ფენებად და თითოეული ფენიდან თანაბარი რაოდენობის რესპოდენტის შერჩევა იძლევა ობიექტურ წარმოდგენას მთელი საზოგადოების განწყობის შესახებ. პირველ შემთხვევაში ამონარჩევი წანაცვლებული იყო გარკვეული მიმართულებით, ამიტომ მის საფუძველზე მიღებული იყო არასწორი შედეგი. როგორც უკვე ავღნიშნეთ, ასეთ ამონარჩევებს წანაცვლებული ამონარჩევები ჰქვიათ. არსებობს პრაქტიკულად წაუნაცვლებელი ამონარჩევების მიღების მეთოდები. დაწვრილებით ეს საკითხი განხილულია [55]-ში.

## 1.8. ამონარჩევები და მათი აღწერა

შემთხვევითი სიდიდის ყველა შესაძლო მნიშვნელობებიდან ამონარჩევი ეწოდება ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელ, ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობას $x_1, x_2, ..., x_n$. როგორც წესი, ამონარჩევს წარმოადგენენ ცხრილის სახით. ამონარჩევის დიდი $n$ მოცულობისას დაკვირვების ყველა შედეგის მიმოხილვა შეუძლებელი ხდება, ამიტომ ცდილობენ ამონარჩევი წარმოადგინონ შესაძლებლობის ფარგლებში კომპაქტურად და დამუშავებისათვის მოსახერხებელი ფორმით. ასეთი წარმოდგენის ერთ-ერთ შესაძლებელ ფორმას წარმოადგენს ალათობების განაწილების ემპირიული (სტატისტიკური) ფუნქცია $F_n(x)$. $\xi$ შემთხვევითი სიდიდის ემპირიული განაწილების ფუნქცია $F_n(x)$ ტოლია ისეთი $x_i$ მნიშვნელობების წილისა, რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $x_i \le x, i = 1,...,n$. ავღნიშნოთ $x_{(i)}, i = 1,...,n,$ დაკვირვების შედეგების ვარიაციული რიგი. მაშინ $F_n(x_{(i)}) = P(\xi \le x_{(i)}) = \frac{n_i}{n}$, სადაც $n_i$ არის დაკვირვაბის შედეგების რაოდენობა რომლებიც $\le x_{(i)}$. ნახაზ 1.7.-ზე მოცემულია ემპირიული განაწილების ფუნქციის გრაფიკული სახე.




ნახ. 1.7.

განაწილების ემპირიულ ფუნქციას აქვს დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციის ანალოგიური სახე. ეს აიხსნება შემდეგნაირად. უწყვეტი $\xi$ შემთხვევითი სიდიდის ამონარჩევი $x_1, x_2, ..., x_n$ არის $n$ დისკრეტულ მნიშვნელობათა ერთობლიობა. ამონარჩევის განმარტების თანახმად $x_1, x_2, ..., x_n$ არიან დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები და თითოეული მათგანის შესაბამისი ალბათობა ტოლია $1/n$-ის. ამიტომ ამონარჩევით ემპირიული განაწილების ფუნქციის აგება შეესაბამება ისეთი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციის აგებას, რომლის შესაძლო მნიშვნელობებია $x_1, x_2, ..., x_n$ და თითოეულ ამ მნიშვნელობის მიღების ალბათობა ტოლია $1/n$-ის. ისევე, როგორც ხდომილების სიხშირე მიისწრაფვის შესაბამისი ალბათობისკენ (იხ. პარაგრაფი 1.3), როდესაც დაკვირვების რიცხვი $n$ უსასრულოდ იზრდება, ემპირიული განაწილების ფუნქცია $F_n(x)$ მიისწრაფის უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის $F(x)$ განაწილების ფუნქციისაკენ, როდესაც $n \to \infty$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $n$-ის უსასრულოდ გაზრდისას ნახაზზე ნაჩვენები საფეხუროვანი ფუნქცია $F_n(x)$ გადადის შესაბამის $F(x)$ უწყვეტ ფუნქციაში.

როგორც ვიცით, ხშირ შემთხვევაში საკმარისია შემთხვევითი სიდიდის არა მთლიანი ბუნების ცოდნა (რასაც გვაძლევს განაწილების ფუნქციის ცოდნა), არამედ მისი ცალკეული მხარეების, ანუ რიცხვითი მახასიათებლების ცოდნა.

განვიხილოთ დაკვირვების შედეგებით რიცხვითი მახასიათებლების განსაზღვრის საკითხი, კერძოდ, ძირითადი რიცხვითი მახასიათებლებისა, როგორიცაა მათემატიკური მოლოდინი, დისპერსია, საშუალო კვადრატული გადახრა, კოვარიაციისა და კორელაციის კოეფიციენტები, კვანტილები. მათ შესაბამისად ჰქვიათ ამონარჩევის საშუალო, ამონარჩევის დისპერსია, ამონარჩევის კოვარიაცია და კორელაცია, ამონარჩევის კვანტილი.

ამონარჩევის საშუალო აღინიშნება შემდეგნაირად $\bar{x}$. მას დაკვირვების შედეგების საშუალო არითმეტიკულს ეძახიან და გამოითვლება ფორმულით $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. დაკვირვების შედეგებით შემთხვევითი სიდიდის დისპერსიის მნიშვნელობა გამოითვლება ფორმულით $S^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$. ხშირად დისპერსიის მნიშვნელობას ითვლიან ფორმულით $S_*^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$, რადგან ადგილი აქვს $M(S_*^2) = D(\xi)$.

ამონარჩევის კვანტილი ეწოდება სიდიდეს $x_p^*$, რომელიც არის შემდეგი განტოლების ამონახსნი

$$F_n(x) = p, \tag{1.1}$$

სადაც $F_n(x)$ არის ალბათობების ემპირიული განაწილების ფუნქცია, $p$ არის ალბათობა $0 < p < 1$.

გასაგებია, რომ განტოლებას (1.1) ყოველთვის არა აქვს ამოხსნა. ამიტომ მიღებულია შემდეგი შეთანხმება. მაგალითად, ემპირიული მედიანის $Med^*$ განსაზღვრისას საჭიროა $F_n(x) = 0.5$ განტოლების ამოხსნა. დაკვირვებების კენტი რიცხვის დროს $n = 2k+1$ ემპირიული მედიანა $Med^* = x_{(k)}$, ხოლო დაკვირვებების წყვილი რიცხვის დროს $n = 2k$ ემპირიული მედიანა $Med^* = (x_{(k)} + x_{(k+1)})/2$.

კოვარიაციის კოეფიციენტის მნიშვნელობა ამონარჩევით გამოითვლება ფორმულით

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}),$$

სადაც $x_i, y_i, i = 1,\ldots,n$ არის $\xi$ და $\eta$ შემთხვევით სიდიდეებზე დაკვირვების შედეგები.

კორელაციის კოეფიციენტის მნიშვნელობა ამონარჩევით გამოითვლება ფორმულით

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}.$$

ყაჭიაშვილი ქ.ი.

დანართი 9 – ში მოცემულია ამონარჩევით გამოთვლილი კორელაციის კოეფიციენტის განწილების კვანტილები $r_{1-\frac{p}{2}}$.

## 1.9. რანგი და რანჟირება

ხშირად ექსპერიმენტის შედეგები არიან არა რიცხვები, არამედ სიდიდეები, რომლებიც ერთმანეთთან მიმართებას ახასიათებენ ცნებებით “მეტი” ან “ნაკლები”. მაგალითად, ცოდნის შეფასებისას, რაიმე საგნის, მოვლენის ან პიროვნების მიმართ დამოკიდებულების გამოხატვისას, ან ფერთა გამის განსაზრვრისას დაწერილი ქულათა რაოდენობა ახასიათებს უკეთეს ან უარეს ცოდნას, მეტ ან ნაკლებ სიმპატიას და ა.შ. დაწერილი ბალების მიხედვით არ შეიძლება ზუსტად გაინსაზღვროს რამდენად მეტია ან ნაკლებია ცოდნა. მაგალითად, არ შეიძლება თქმა, რომ “ხუთიანის” მიმღებმა სტუდენტმა ზუსტად $5/3=1\frac{2}{3}$-ჯერ უკეთესად იცის საგანი, ვიდრე “სამი” ქულის მიმღებმა სტუდენტმა. ასეთი მონაცემების დამუშავებისას გამოიყენება მათემატიკური სტატისტიკის სპეციალური მეთოდები, რომლებიც ოპერირებენ ექსპერიმენტის არა კონკრეტულ მნიშვნელობებზე, არამედ მათ ადგილებზე დაკვირვებათა მიღებულ მწკრივში. ასეთ მეთოდებს *რანგული მეთოდები* ჰქვიათ. დაკვირვების $x_i$ შედეგის *რანგი* ჰქვია მის რიგით ნომერს $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ ვარიაციულ რიგში. მაგალითად, ვთქვათ დაკვირვების შედეგები შესდგება რიცხვებისაგან 5, 7, 3, 1, 12, მაშინ დაკვირვებათა ამ მწკრივში, მათი შესაბამისი რანგები იქნება 3, 4, 2, 1, 5. დაკვირვებათა სიმრავლიდან მათი რანგების მიმდევრობაზე გადასვლის პროცედურას რანჟირების პროცესი ჰქვია, ხოლო მიღებულ შედეგს – რანჟირების შედეგი.

პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტისას, დაკვირვების შედეგების, ანუ ამონარჩევის, დამრგვალების გამო, გვხვდება ერთნაირი შედეგები. ამ შემთხვევაში შესაბამისი ელემენტების რანგების განსაზღვრა ხდება შემდეგნაირად. ერთნაირი მნიშვნელობის მქონე დაკვირვების შედეგებს ამონარჩევში *შეკვრა* ან *კონა* დავარქვათ, ხოლო დაკვირვების რაოდენობას შეკვრაში – მისი *ზომა*. შეკვრაში მოხვედრილი დაკვირვების შდეგების რანგები ერთმანეთის ტოლია და უტოლდება ამ დაკვირვების შედეგების რანგების საშუალო არითმეტიკულს, რომლებიც მათ ექნებოდათ დაკვირვების ვარიაციულ რიგში მნიშვნელობების მიხედვით ერთმენეთის გვერდით განთავსებისას. მაგალითად, დაკვირვების შედეგების 3; 7; 3; 1; 12 შესაბამისი რანგები იქნება 2,5; 4; 2,5; 1; 5.

სტატისტიკური მეთოდების უმრავლესობა დაფუძნებულია დაშვებაზე, რომ განსახილველ შემთხვევით სიდიდეს აქვს ალბათობების გარკვეული განაწილების კანონი. ამ მეთოდებს *პარამეტრული მეთოდები* ჰქვიათ. უმრავლესობა ამ მეთოდებისა უშვებენ განაწილების კანონის ნორმალურობას. თუ რეალური ამოცანების გადაწყვეტისას აღმოჩნდა, რომ ეს დაშვება არა სწორია, მაშინ მიღებული შედეგები, დიდი ალბათობით, იქნებიან არა სწორი. *რანგული მეთოდები* არ ითხოვენ ასეთ დაშვებებს. ამიტომ მათ იყენებენ აგრეთვე დაკვირვებების რიცხვითი მონაცემების

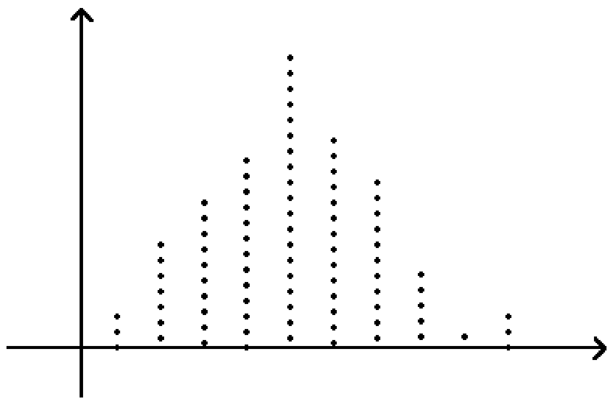
დამუშავებისას, როდესაც ალბათობების განაწილების კანონი უცნობია და დაკვირვებების მცირე რიცხვი არ იძლევა მათი იდენტიფიკაციის საშუალებას.

## 1.10. აღწერითი სტატისტიკის მეთოდები

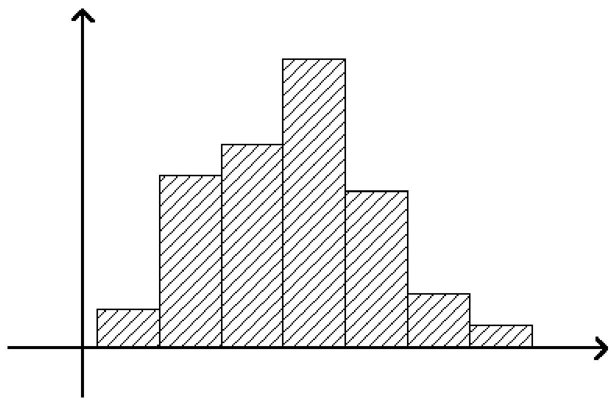
დაკვირვებათა სიმრავლე ხშირად საკმაოდ დიდი მოცულობისაა, შედგება ათეულობით, ასეულობით, ათასეულობით დაკვირვებების შედეგებისაგან, რაც აძნელებს დაკვირვებათა შედეგების უშუალო მიმოხილვასა და ანალიზს. ამიტომ წარმოიშობა დაკვირვეებათა შედეგების კომპაქტური წარმოდგენის ამოცანა. იდეალში ასეთი კომპაქტური წარმოდგენა იქნებოდა ფაქტი, რომ დაკვირვების შედეგები წარმოადგენენ ამონარჩევს, ანუ დამოუკიდებელ დაკვირვების შედეგებს მოცემული განაწილების კანონის მქონე შემთხვევითი სიდიდისათვის. ეს საშუალებას მოგვცემდა ყველა საჭირო გამოთვლები ჩაგვეტარებინა თეორიულად. მაგრამ, სამწუხაროდ, ხშირად, პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას, განაწილების კანონები უცნობია. ამიტომ, ასეთ შემთხვევებში, ამონარჩევის კომპაქტური წარმოდგენისათვის სარგებლობენ *აღწერითი სტატისტიკის მეთოდებით*.

აღწერითი სტატისტიკის მეთოდებს უწოდებენ სხვადასხვა მახასიათებლებით ამონარჩევის აღწერის და გრაფიკული წარმოდგენის მეთოდებს. ამონარჩევის ამა თუ იმ თვისების მახასიათებლად ზემოთ განვიხილეთ ამონარჩევით განსაზღვრული შემთხვევითი სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლები, რომლებიც შეიძლება დავყოთ რამოდენიმე ჯგუფად.

1. *მდებარეობის მახასიათებლები.* ეს მახასიათებლები რიცხვით ღერძზე მი-უთითებენ მდებარეობას, სადაც განლაგდებიან დაკვირვების შედეგები. მათ მიეკუთვნებიან: ამონარჩევის მინიმალური და მაქსიმალური ელემენტები, ზედა და ქვედა კვარტილები, დაკვირვების შედეგების საშუალო არითმეტიკული ($\bar{x}$), ამონარჩევის მედიანა ($med$)და სხვა ანალოგიური მახასიათებლები.
2. *გაბნევის მახასიათებლები.* ისინი ახასიათებენ დაკვირვების შედეგების გაბ-ნევას რიცხვით ღერძზე თავიაანთი ცენტრის მიმართ. მათ მიეკუთვნებიან: ამონარჩევის დისპერსია $S^2$, სტანდარტული გადახრა, სხვაობა ამონარჩევის მაქსიმალურ და მინიმალურ ელემენტებს შორის, რომელსაც გაქანებას ეძახიან $h = x_{\max} - x_{\min}$, სხვაობა ზედა და ქვედა კვარტილებს შორის, ექსცესის კოეფიციენტი და სხვა.
3. *ასიმეტრიის მახასიათებლები.* ისინი ახასიათებენ მონაცემების თავიაანთი ცენტრის მიმართ განლაგების სიმეტრიას. მათ მიეკუთვნებიან: ასიმეტრიის კოეფიციენტი, ამონარჩევის მედიანის მდებარეობა საშუალო არითმეტიკულის მიმართ და სხვა.
4. *განაწილების ემპირიული კანონები.* ესენია ემპირიული განაწილების ფუნქცია, წერტილოვანი დიაგრამა, ჰისტოგრამა, სიხშირეების ცხრილები. წერტილოვანი დიაგრამა გამოიყენება როდესაც დაკვირვების შედეგებში ერთი და იგივე დაკვირვების შედეგები გვხვდება მრავალჯერ. ასეთ შემთხვევაში აბსცისის შესაბამის წერტილში იხატება იმდენი წერტილი, რამდენჯერაც ეს მნიშვნელობა გვხვდება დაკვირვების შედეგებში. მახასიათებლის საერთო სახე ნაჩვენებია ნახ. 1.8-ზე.



ნახ. 1.8. წერტილოვანი დიაგრამა



ნახ. 1.9. ჰისტოგრამა

ჰისტოგრამა არის ალბათობების განაწილების სიმკვრივის ემპირული ანალოგი. ის აიგება დაკვირვების შედეგებით შემდეგნაირად. დაკვირვების შედეგებიდან $x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}$ განისაზღვრება $x_{\min} = x_{(1)}$ და $x_{\max} = x_{(n)}$. ამონარჩევის წარმოდგენის ინტერვალი იყოფა $k$ ქვეინტერვალად. ზოგადად ინტერვალები შეიძლება იყვნენ არა თანაბარი. თუ ინტერვალები ტოლებია, მაშინ მათი სიგრძე $\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$. $i$-ი ინტერვალის სასაზღვრო წერტილები შემდეგნაირად განისაზღვრებიან $x_{(i)} = x_{(1)} + (i-1) \cdot \Delta x,$ $x_{(i+1)} = x_{(1)} + i \cdot \Delta x,$ $i = 1, ..., k-1$. ითვლება დაკვირვებების რიცხვი ყოველ ინტერვალში. დაკვირვებების რაოდენობა ყოველ ინტერვალში ავღნიშნოთ $n_i$, ხოლო $p_i$ არის ამ ინტერვალში დაკვირვების შედეგების მოხვედრის სიხშირე. ცხადია, რომ $\sum_{i=1}^{k} n_i = n,$ $p_i = \frac{n_i}{n},$ $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. ყოველ ინტერვალზე იგება სწორკუთხედი, რომლის ფართობიც $p_i$ – ს ტოლია. ჰისტოგრამის საერთო სახე ნაჩვენებია ნახ. 1.9-ზე. ინტერვალების რაოდენობა $k$ აირჩევა დაკვირვების შედეგების რაოდენობისაგან დამოკიდებულებით. დაკვირვების დიდი რიცხვის დროს ინტერვალების რაოდენობა იზრდება.

ალბათობების განაწილების ემპირიული ფუნქციის ანალოგიურად, რომელიც ამონარჩევის მოცულობის გაზრდისას, ანუ როდესაც $n \to \infty$, ასიმპტოტურად მიისწრაფის განაწილების თეორიული ფუნქციისაკენ $F_n(x) \to F(x)$, ჰისტოგრამა, როდესაც $n \to \infty$, მიისწრაფის ალბათობების განაწილების თეორიული სიმკვრივისაკენ $f_n(x) \to f(x)$.

დაჯგუფებული მონაცემებით შემთხვევითი სიდიდის მახასიათებლები გამოითვლება შემდეგნაირად.

ავღნიშნოთ $x_i^0$-ით შუა წერტილი $i$-რი ინტერვალის რომლის სიგრძე ტოლია $\Delta x_i = x_{(i+1)} - x_{(i)}$, $i = 1, ..., k$. როგორც ადრე $n_i$ არის $i$ ინტერვალში მოხვედრილი დაკვირვებების რაოდენობა. დაჯგუფებული მონაცემებით ამონარჩევის საშუალო განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i^0 \cdot \frac{n_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i^0 \cdot n_i \, .$$

ამონარჩევის დისპერსია გამოითვლება ფორმულით

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i^0 - \overline{x})^2 \cdot n_i \,.$$

ანალოგიურად გამოითვლება სხვა რიცხვითი მახასიათებლების სიდიდეები დაჯგუფებული მონაცემებით.

## თავი 2. ალბათობების განაწილების მნიშვნელოვანი კანონები

როგორც უკვე ვიცით, განაწილების კანონები ასახავენ დამოკიდებულებას შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობებსა და ამ მნიშვნელობების მიღების შესაძლებლობებს ანუ ალბათობებს შორის. ვიცით, რომ ყველაზე გავრცელებული შემთხვევითი სიდიდეებია დისკრეტული და უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეები. უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონებია: განაწილების ფუნქცია და განაწილების სიმკვრივე, ხოლო დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდისათვის – განაწილების ფუნქცია და განაწილების მწკრივი.

წინამდებარე თავში შევისწავლით ყველაზე უფრო ფართოდ გავრცელებულ და გამოყენებულ დისკრეტული და უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონებს და მათ თვისებებს. კერძოდ, დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეებისათვის – ბინომალური და პუასონის, უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეებისთვის – ნორმალური, სტიუდენტის, მაჩვენებლიანი, თანაბარი, ხი-კვადრატი და ფიშერის განაწილების კანონების.

### 2.1. ბინომიალური განაწილება

ბინომალური განაწილების კანონი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია. ამ კანონით აღიწერება მრავალი ბუნებრივი და ტექნიკური პროცესები. ეს ისეთი პროცესებია, რომლებსაც ექსპერიმენტის შედეგად შეუძლიათ ჰქონდეთ ორი მნიშვნელობა: წარმატება და წარუმატებლობა. მაგალითად, საწარმოში პროდუქციის ხარისხის კონტროლის შედეგი შეიძლება იყოს ორიდან ერთი გადაწყვეტილება: ნაკეთობა ვარგისია ან უვარგისია. მასიური წარმოების დროს ყოველი ნაკეთობის ხარისხის შემოწმება ეკონომიურად არა ხელსაყრელია. ამიტომ კონტროლს ახორციელებენ შემდეგნაირად. დროის გარკვეულ მონაკვეთში გა-მოშვებული ნაკეთობების საერთო რაოდნობიდან აირჩევენ $n$ ნაკეთობას და ამოწმებენ მათ ხარისხს. ნაკეთობის ხარისხიანობას აღნიშნავენ, მაგალითად, ნოლით, ხოლო უხარისხობას – ერთით. ითვლიან ერთიანების საერთო რაოდენობას. ის ტოლია უხარისხო ნაკეთობების რიცხვის. ბუნებრივია $0 \le m \le n$. იგულისხმება, რომ ცალკეული ნაკეთობის ვარგისიანობა ან უვარგისობა დამოუკიდებელი ხდომილებებია, ანუ ერთი ნაკეთობის ვარგისიანობა ან უვარგისობა გავლენას არ ახდენს მეორე ნაკეთობის ვარგისიანობაზე. ავღნიშნოთ $p$ ალბათობა იმისა, რომ შესამოწმებელი ნაკეთობა იქნება უხარისხო, მაშინ $(1-p)$ არის ალბათობა იმისა, რომ ნაკეთობა იქნება ხარისხიანი. ზემოთ აღნიშნული დამოუკიდებლობა ნიშნავს, რომ $p$ ალბათობის მნიშნელობა ყოველი ნაკეთობისათვის ერთნაირია. $p$-ს მიახლოებითი მნიშვნელობა გამოითვლება ფორმულით $p \approx \frac{m}{n}$. ადგილი აქვს $\frac{m}{n} \to p$, როცა $n \to \infty$.

აღვნიშნოთ $X$-ით დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც შეესაბამება უხარისხო ნაკეთობების რაოდნობას $n$ შემოწმებულ ნაკეთობაში. $X$ შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი მნიშვნელობა $0$-დან $n$-დე, მაგრამ

თითოეული ამ მნიშვნელობის მიღების ალბათობა სხვადასხვაა. ზემოთ მოყვანილი პირობების შესრულებისას, შესაბამისობა $X$ შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობებსა და ალბათობებს შორის, რომლებითაც შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს ამ მნშვნელობებს, აღიწერება განაწილების კანონით, რომელსაც განაწილების ბინომიალური კანონი ეწოდება და შემდეგი სახე აქვს

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \qquad (2.1)$$

სადაც $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ და ჰქვია $n$ - დან $k$ დაჯგუფებათა რიცხვი.

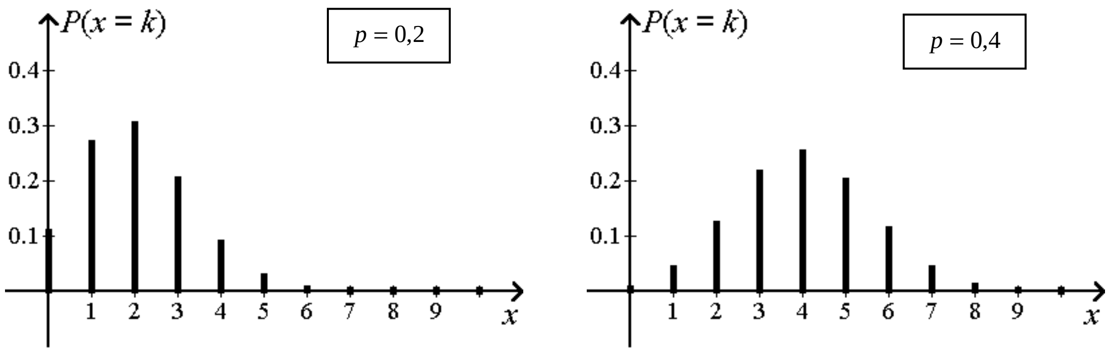
იმ ფაქტის აღსანიშნავად, რომ ბინომიალური განაწილება დამოკიდებულია $p$ და $n$ - გან ალბათობას $P(X=k)$ ჩაწერენ ასე $P(X=k\,|\,n,p)$.

შემთხვევითი სიდიდე $X$-ის მათემატიკური მოლოდინი და დისპერსია შესაბამისად ტოლია $MX=np, \;\; DX=np(1-p)$.

ალბათობა იმისა, რომ $X$ შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს $k$-ზე ნაკლებ ან ტოლ მნიშვნელობებს გამოითვლება ფორმულით

$$P(X\le k)=\sum_{m=0}^{k} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}. \qquad (2.2)$$

ნახ. 2.1.-ზე მოცემულია ბინომიალური განაწილების გრაფიკები $p$ და $n$ პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის.




ნახ. 2.1. ბინომიალური განაწილების კანონის სახე სხვადასხვა $p$-თვის, როდესაც $n=10$.

ბინომალური განაწილების კანონი მჭიდრო კავშირშია სხვა განაწილების კანონებთან; მაგალითად, პუასონისა და ნორმალური განაწილების კანონებთან. თუ სრულდება პირობა $0.1\le p\le 0.9$ და $np(1-p)>5$, ბინომალური კანონი კარგად აპროქსიმირდება ნორმალური განაწილების კანონით $np$-ს ტოლი მათემატიკური მოლოდინითა და დისპერსიით $np(1-p)$. როდესაც $np(1-p)>25$ ეს აპროქსიმაცია შეიძლება გამოყენებული იქნას $p$ მნიშვნელობისაგან დამოუკიდებლად.

საკმაოდ დიდი $n$-ის და $p<0.1$ დროს ბინომალური კანონის აპროქსიმაცია შესაძლებელია პუასონის განაწილების კანონით $np$-ს ტოლი მათემატიკური მოლოდინით.

ყაჭიაშვილი ქ.ი.

ალბათობების განაწილების ბინომალური კანონის დიდი მნიშვნელობის გამო მისი მნიშვნელობები გამოთვლილი (2.1) ან (2.2) ფორმულით და მოცემულია შესაბამის სტატისტიკურ ცხრილებში სხვადასხვა $n$-სა და $p$-თვის [2, 29]. წინამდებარე წიგნის ბოლოში, დანართ 1-ში მოცემულია ეს მნიშვნელობები ზოგიერთი $n$ და $p$-თვის.

## 2.2. პუასონის განაწილება

პუასონის განაწილების კანონიც არის დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი. ამ კანონს აქვს ადგილი ბუნებისა და ტექნიკის მრავალ ამოცანებში. მისი საშუალებით აღიწერება იმ მოვლენების ალბათობები, რომლებიც დაკავშირებულია შემთხვევითი რაოდენობის მოვლენების წარმოქმნასთან დროის მოცემულ ინტერვალში. მაგალითად, ატომურ ფიზიკაში – რადიოაქტიური ნივთიერების დაშლა დროის მოცემულ პერიოდში; ასტრონომიაში – მეტეორიტების გამოჩენა დროის მოცემულ ინტერვალში; რადიოლოკაციაში – ყალბი სიგნალების წარმოშობა არეკვლილი რადიოსიგნალების მიღებისას; კავშირგაბმულობაში – ტელეფონის სადგურში დარეკვების რაოდენობა ერთეულოვანი დროის ინტერვალში და ა.შ. პუასონის კანონს ადგილი აქვს იმ შემთხვევებში, როდესაც მოვლენის წარმოშობის ალბათობა პროპორციულია იმ $\Delta x$ ინტერვალის, რომელშიც ეს მოვლენა ხდება და ტოლია $a \cdot \Delta x + O\Delta x$, სადაც $a > 0$ მოცემული რიცხვია, $O\Delta x$ არის უსასრულოდ მცირე სიდიდე $\Delta x$-თან შედარებით. ამ შემთხვევაში, ალბათობა იმისა, რომ $X$ შემთხვევითი სიდიდე $T$ დროის განმავლობაში ღებულობს $k$-ს ტოლ მნიშვნელობას გამოითვლება ფორმულით

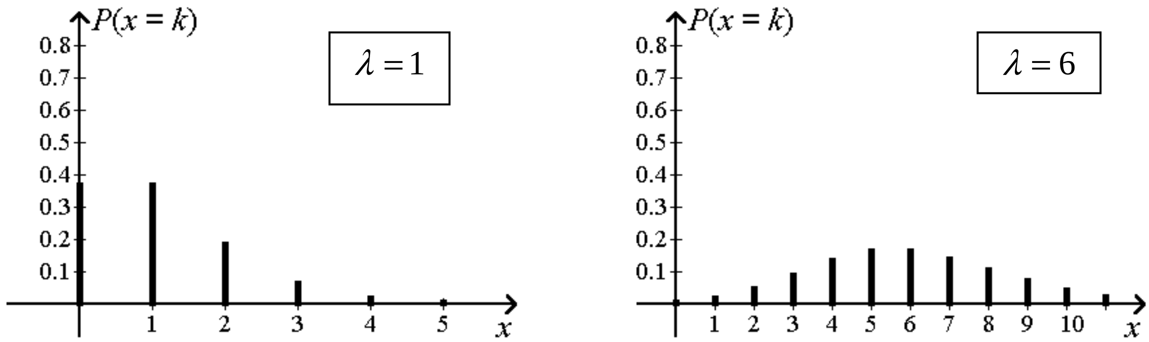
$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,2,...,$$

სადაც $\lambda = a \cdot T$ არის პუასონის კანონის ინტენსიურობა. დგილი აქვს პირობებს $MX = \lambda$, $DX = \lambda$.

პუასონის კანონი დაკავშირებულია ბინომიალურ და ნორმალურ განაწილების კანონებთან. როცა $\lambda > 9$ პუასონის განაწილების კანონი კარგად აპროქსიმდება ალბათობების ნორმალური განაწილებით $\lambda$ ტოლი მათემატიკური მოლოდინითა და დისპერსიით.

დამოუკიდებელი $n$ შემთხვევითი სიდიდის ჯამი, რომლებიც განაწილებული არიან შესაბამისად $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ პარამეტრებიანი პუასონის კანონებით, აგრეთვე განაწილბულია პუასონის კანონით $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$ პარამეტრით.

ნახაზ 2.2-ზე მოცემულია პუასონის განაწილების კანონის სქემატური სახე $\lambda$-ს სხვადასხვა მნიშვნლობისათვის.




ნახ. 2.2. პუასონის განაწილების სახე $\lambda$ სხვადასხვა მნიშვნელობებისა-თვის.

პუასონის განაწილების კანონის მნიშვნელობები გამოთვლილია და მოცე-მულია შესაბამის ცხრილებში $\lambda$-ს სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის. ზოგიერთ მათგანში მოცემულია ალბათობები $P(X=k)$ [29], ხოლო ზოგიერთში – დაგროვილი ალბათობები $P(X \le k) = \sum_{m=0}^{k} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$. წინამდებარე წიგნის ბოლოში, დანართ 2-ში, მოყვანილია ალბათობები $P(X=k)$ ზოგიერთი $\lambda$-თვის.

## 2.3. მაჩვენებლიანი ანუ ექსპონენციალური განაწილება

ექსპონენციალური კანონი არის უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის განაწი-ლების კანონი. ეს კანონი ხშირად გამოიყენება ე.წ. “სიცოცხლის ხანგრძლიობის” ამოცანებში, ანუ ამოცანებში, სადაც მოვლენის ალბათობა დამოკიდებულია იმ დროის ხანგრძლიობისაგან, რომლის განმავლობაშიც მას ადგილი აქვს. მაგალითად, მედიცინაში – პაციენტის სიცოცხლის ხანგრლივობა; საიმედობის თეორიაში – ნაკეთობის უმტყუნო მუშაობის ხანგრძლიობა; მასობრივი მომსახურების თეორიაში – მომსახურებაზე ლოდინის დრო.

ექსპონენციალური განაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე

$$p(x,\theta) = \theta \cdot e^{-\theta \cdot x}, \ \ \theta > 0 .$$

სადაც $\theta$ არის განაწილების პარამეტრი. ალბათობების განაწილების ფუნქციას აქვს სახე

$$F(x,\theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\theta \cdot x}, & at \quad x \ge 0, \\ 0, & at \quad x < 0. \end{cases}$$

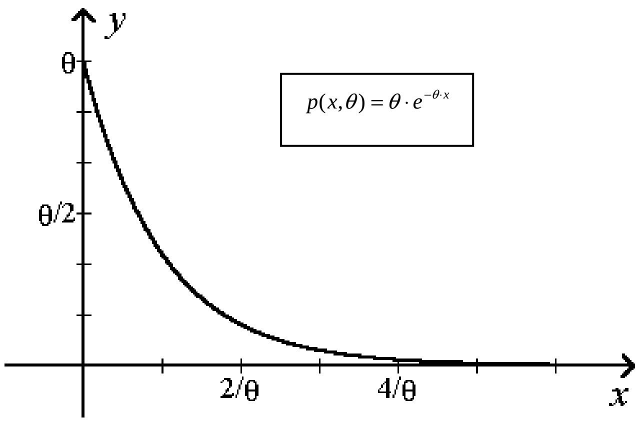
ექსპონენციალური განაწილებას ხშირად ეძახიან მეხსიერების არმქონე განაწილებასაც, რადგან ადგილი აქვს შემდეგ პირობას

$$P(X \ge s+t \,|\, X \ge t) = P(x \ge s) \ \ \text{ნებისმიერი} \ \ s,t \ge 0 .$$

ვთქვათ $X$ არის რაიმე ნაკეთობის უმტყუნო მუშაობის ხანგრძლიობა (მაგალითად, ტელევიზორის). მაშინ აღნიშნული თვისება ნიშნავს, რომ მოწყობილობისათვის, რომელმაც იმსახურა $t$ დროის განმავლობაში, ალბათობა რომ დამატებით იმუშავებს კიდევ $s$ დროის განმავლობაში, ისეთივეა როგორიც ალბათობა იმისა, რომ ასევე $s$ დროის განმავლობაში

იმუშავებს ახალი მოწყობილობა, რომელმაც მხოლოდ ახლა დაიწყო მუშაობა. ძნელია არ არის იმის მიხვედრა, რომ პრაქტიკაში ეს პირობა, როგორც წესი, არ სრულდება. ამ ნაკლის აღმოფხვრის მიზნით იმ ამოცანებისათვის, რომლებისთვისაც მოვლენის წინა ისტორია მნიშვნელოვანია, ექსპონენციალური კანონის ნაცვლად იყენებენ უფრო ზოგად კანონებს, რომლებიც ითვალისწინებენ წინაისტორიას. მაგალითად, გამა განაწილება, ვეიბულის განაწილება, ან რომელიმე სხვა განაწილება, რომელთა კერძო შემთხვევასაც წარმოადგენს ექსპონენციალური განაწილება.

ექსპონენციალური განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური მოლოდინი $MX = \dfrac{1}{\theta}$, ხოლო დისპერსია – $DX = \dfrac{1}{\theta^2}$. ნახ. 2.3-ზე ნაჩვენებია $\theta$ პარამეტრის მქონე ექსპონენციალური განაწილების სიმკვრივის სახე.



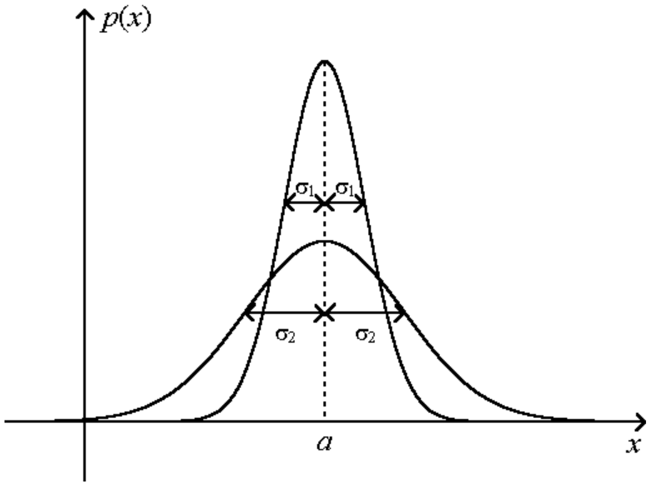

ნახ. 2.3. ექსპონენციალური განაწილების სიმკვრივე.

## 2.4. ნორმალური განაწილება

ნორმალურ განაწილებას ცენტრალური ადგილი უკავია ალბათობის თეორიასა და მათემატიკურ სტატისტიკაში მისი ზღვრული თვისებების გამო. ეს განსაკუთრებულობა გამომდინარეობს ორი მომენტიდან: ა) მრავალი შემთხვევითი სიდიდე, რომელთა ფორმირებაზეც მოქმედებს დიდი რაოდენობის სხვადასხვა ფაქტორი და მათი გავლენა დაახლოებით თანაბარია, განაწილებული არიან ნორმალური კანონის თანახმად; ასეთებია, მაგალითად, უმრავლესი გაზომვის შედეგები; ბ) ხშირად, როდესაც შემთხვევითი სიდიდე არ არის განაწილებული ნორმალური კანონით, მისი განაწილების კანონი, გარკვეულ პირობებში, შეიძლება აპროქსიმირებული იქნას ნორმალური კანონით. სტატისტიკური კრიტერიუმების დიდი უმრავლესობა დამუშავებულია ალბათობების განაწილების ნორმალური კანონისათვის. ნორმალური კანონი არის ყველაზე უფრო შესწავლილი განაწილების ყველა სხვა კანონებთან შედარებით. ნორმალური განაწილების კანონის სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < +\infty .$$

ნორმალური განაწილების კანონს აქვს ორი $a$ და $\sigma^2$ პარამეტრი. პარამეტრი $a$ არის ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური მოლოდინი, ხოლო $\sigma^2$ – დისპერსია. ნორმალური განაწილების კანონის სიმკვრივის გრაფიკი ნაჩვენებია ნახ. 2.4-ზე




ნახ. 2.4. ალბათობების განაწილების ნორმალური კანონის სიმკვრივე

როგორც გრაფიკიდან ჩანს $\varphi(x)$ მიისწრაფის ნოლისაკენ როდესაც $x \to -\infty$ ან $x \to +\infty$. სიმკვრივე სიმეტრიულია $a$ წერტილის მიმართ. ამასთან $a$ წერტილში ფუნქცია $\varphi(x)$ აღწევს თავის მაქსიმუმს, რომელიც ტოლია $1/(\sqrt{2\pi} \cdot \sigma)$.

პარამეტრი $a$ ახასიათებს განაწილების სიმკვრივის გრაფიკის მდებარეობას რიცხვით ღერძზე. პარამეტრი $\sigma > 0$ ახასიათებს სიმკვრივის გრაფიკის გაშლის ან შეკუმშვის ხარისხს.

განსაკუთრებული ადგილი უკავია ნორმალური განაწილების კანონს, რომლის მათემატიკური მოლოდინი ნოლის, ხოლო დისპერსია ერთის ტოლია. ასეთ შემთხვევით სიდიდეს ნორმირებული შემთხვევითი სიდიდე ეწოდება და მის სიმკვრივეს აქვს სახე

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}, \quad -\infty < x < +\infty .$$

ის ფაქტი, რომ $X$ შემთხვევითი სიდიდე გნაწილებულია ნორმალურად მათემატიკური მოლოდინით $a$ და დისპერსიით $\sigma^2$, მიღებულია ჩაიწეროს შემდეგნაირად $X \sim N(a,\sigma^2)$. ნორმირებული შემთხვევითი სიდიდისათვის გვაქვს $X \sim N(0,1)$. ვთქვათ ადგილი აქვს $\xi \sim N(a,\sigma^2)$, მაშინ სამართლიანია $\eta = \dfrac{\xi - a}{\sigma} \sim N(0,1)$.

ნორმირებული შემთხვევითი $\eta$ სიდიდისათვის ადგილი აქვს: ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს მნიშვნელობებს ინტერვალიდან (-2;+2), ე.ი. $p(-2 \le \eta \le +2) = 0,94$, აგრეთვე სამართლიანია $p(-3 \le \eta \le +3) = 0,9933$. უკანასკნელს ეწოდება სამი სიგმას კანონი, რადგან არა ნორმირებული შემთხვევითი სიდიდსათვის მას აქვს სახე $p(a - 3\sigma \le \xi \le a + 3\sigma) = 0.9933$.

ნორმირებული ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი $\eta \sim N(0,1)$ სიდიდისათვის განაწილების ფუნქცია $\Phi(x)$-ით აღინიშნება. ადგილი აქვს პირობას $\Phi(x)=1-\Phi(-x)$. ამ თვისების საფუძველზე ყოველთვის შეგვიძლია გამოვთვალოთ ნორმირებული განაწილების ფუნქციის მნიშვნელობა რიცხვითი ღერძის მარცხენა ნახევარზე მისი მნიშვნელობებით რიცხვითი ღერძის მარჯვენა ნახევრიდან. ამ თვისების გამოყენებით ცხრილებში ყოველთვის მოცემულია განაწილების ფუნქციისა და სიმკვრივის მნიშვნელობები მხოლოდ $x \geq 0$-თვის. ეს ცხრილები ამა თუ იმ მოცულობით მოცემულია ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის პრაქტიკულად ყველა წიგნში [იხ. მაგალითად 3, 14, 20]. ერთ-ერთი ასეთი ცხრილი მოცემულია წინამდებარე წიგნის ბოლოშიც (იხ. დანართი 3). ნორმირებული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდის ცხრილით ადვილად გამოითვლება არანორმირებული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდის შესაბამისი მნიშვნელობები. მართლაც, ვთქვათ $\xi \sim N(a,\sigma)$ და $\eta \sim N(0,1)$, მაშინ ადგილი აქვს

$$F(x)=P(\xi<x)=P\left(\frac{\xi-a}{\sigma}<\frac{x-a}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

## 2.5. ორგანზომილებიანი ნორმალური განაწილება

ისევე როგორც ერთგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის შემთხვევაში, ზოგადად $n$ განზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდისათვის განაწილების ფუნქცია ცალსახად განისაღვრება განაწილების სიმკვრივით.

ვთქვათ $\xi_1$ და $\xi_2$ შემთხვევითი სიდიდეები განაწილებული არიან ნორმალურად შესაბამისად მათემატიკური მოლოდინებით $a_1, a_2$ და დისპერსიებით $\sigma_1^2, \sigma_2^2$, ანუ $\xi_1 \sim N(a_1,\sigma_1^2)$ და $\xi_2 \sim N(a_2,\sigma_2^2)$. მაშინ ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდე $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ განაწილებულია ორგანზომილებიანი ნორმალური განაწილების კანონიით. თუ შემთხვევითი სიდიდეები $\xi_1$ და $\xi_2$ ნორმირებული და დამოუკიდებლები არიან, ანუ მათი მათემატიკური მოლოდინები ნოლის ტოლია, დისპერსიები – ერთის, ხოლო კორელაცია მათ შორის ნოლის ტოლია, მაშინ $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ნორმალურ სიმკვრივეს აქვს სახე

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\}.$$

ერთგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განწილების ფუნქცია არის შემთხვევითი სიდიდის $x$ ცვლადის (განაწილების ფუნქციის არგუმენტის) მოცემული მნიშვნელობიდან მარცხნივ მოხვედრის ალბათობა. ანალოგიურად განისაზღვრება ორგანზომილებიანი, სამგანზომილებიანი და ა.შ. შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი. ავღნიშნოთ, მაგალითად $G$ არის რაიმე არე ორგანზომილებიან სივრცეში. მაშინ ამ არეში მოხვედრის ალბათობა ტოლია

$$F(x,y)=\iint_G p(x,y)dxdy.$$

ორგანზომილებიანი შემთხვევითი $\xi$ სიდიდს განაწილების სიმკრივით ადვილად შეიძლება განვსაზრვროთ $\xi_1$ და $\xi_2$ ერთგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების სიმკვრივეები შემდეგნაირად

$$p_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dy \ , \ \ p_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx \ .$$

ამ ფორმულებით ადვილედ გამოითვლება $\xi_1$ და $\xi_2$ შემთხვევითი სიდიდეების მათემატიკური მოლოდინები

$$a_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x, y)dxdy \ , \ \ a_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yp(x, y)dxdy \ .$$

ზოგადად $\xi_1$ და $\xi_2$ კორელირებული შემთხვევითი სიდიდეებისათვის ორგანზომილებიან გნაწილების სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{(1-\rho^2)}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

სადაც $a_1$ და $a_2$ არიან შესაბამისად $\xi_1$ და $\xi_2$ შემთხვევითი სიდიდეების მათემატიკური მოლოდინები, ხოლო $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ - დისპერსიები; $\rho$ არის კორელაციის კოეფიციენტი $\xi_1$ და $\xi_2$ შორის.

## 2.6. ნორმალურ კანონთან დაკავშირებული განაწილებები

ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეების გარკვეული არა-წრფივი გარდაქმნით წარმოიშობა ახალი განაწილებების სიმრავლე, რომელთაგან მრავალს განსაკუთრებული ადგილი უკავია ალბათობის თეორიასა და მათემატიკურ სტატისტიკაში. მათ შორის განსაკუთრებით აღნიშვნის ღირსია სტიუდენტის, $\chi^2$ და ფიშერის განაწილებები, რადგან ამ განაწილებებს უკავიათ განსაკუთრებული ადგილი მათემატიკურ სტატისტიკაში და მათი კვანტილები ანუ პროცენტული წერტილები გამოიყენება მრავალ კრიტერიუმში, რომელთაგან ზოგიერთს ქვემოთ განვი-ხილავთ.

ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეების წრფივი გარდაქ-მნისას განაწილების კანონი ნორმალური რჩება, ანუ თუ $\xi_i \sim N(a_i, \sigma_i^2), i = 1,...,n$, მაშინ შემთხვევით სიდიდეს $\eta = \sum_{i=1}^{n}(b_i \cdot \xi_i + c_i)$, სადაც $b_i$ და $c_i$ ნამდვილი რიცხვებია, აქვს ნორმალუირ განაწილების კანონი მათემატიკური მოლოდინით $a = \sum_{i=1}^{n}(b_i \cdot a_i + c_i)$ და დისპერსიით $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \cdot \sigma_i^2$, თუ $\xi_i$ არიან არაკორელირებული შემთხვევითი სიდიდეები.

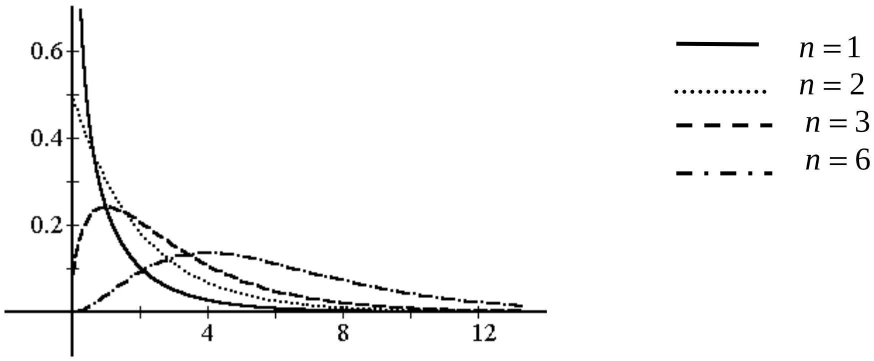
### 2.6.1. $\chi^2$ განაწილება

ვთქვათ $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ არიან დამოუკიდებელი ნორმირებული ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეები, ანუ $\xi_i \sim N(0,1)$. განვიხილოთ

შემთხვევითი სიდიდე $\eta=\xi_1^2+\xi_2^2+...+\xi_n^2$, რომელიც განაწილებულია $\chi^2$-განაწილების კანონით $n$-ის ტოლი თავისუფლების ხარისხით. ამ კანონის განაწილების სიმკვრივე, ისევე როგორც სტიუდენტისა და ფიშერის განაწილების კანონების სიმკვრივეები, პრაქტიკაში უშუალოდ საკმაოდ იშვიათად გამოიყენება, რადგან, დიდი მნიშვნელობის გამო, მათი მნიშვნელობები ცხრილების სახით მოცემულია მათემატიკური სტატისტიკის პრაქტიკულად ყველა წიგნში და, ამიტომ, უშუალო გამოთვლებისას სიმკვრივის ანალიტიკური სახე არ გვჭირდება. ამიტომ მათი ანალიტიკური სახე აქ არ მოგვყავს. ისინი მოცემულია დანართ 1-ში, შესაბამისი ცხრილების ბოლოს.

$\eta$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური მოლოდინი და დისპერსია შესაბამისად ტოლია $M(\eta)=n$ და $D(\eta)=2n$.

ნახაზ 2.5-ზე სქემატურად ნაჩვენებია $\eta$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივის სახე სხვადასხვა თავისუფლების ხარისხებისათვის




ნახ. 2.5.

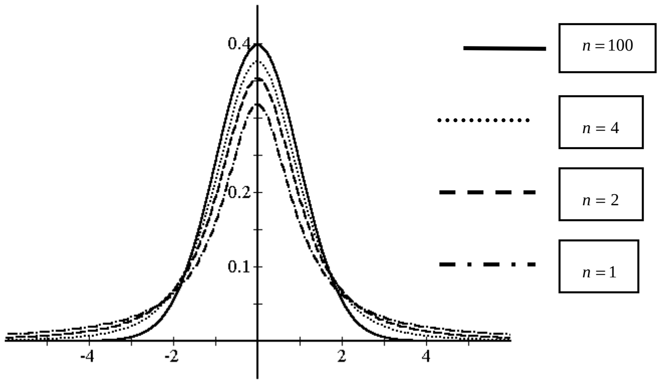
$\chi^2$-განაწილება ფართოდ გამოიყენება სხვადასხვა სტატისტიკურ კრიტერიუმებში, ამიტომ, როგორც უკვე ვთქვით, მისი განაწილების ფუნქციის და კვანტილების მნიშვნელობები ცხრილების სახით მოცემულია ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის მრავალ წიგნში. წინამდებარე წიგნის ბოლოს, დანართ 4-ში მოცემულია ერთ-ერთი ასეთი ცხრილი.

### 2.6.2 სტიუდენტის განაწილება

ეს განაწილებაც ფართოდ გამოიყენება სხვადასხვა სტატისტიკურ კრიტერიუმებში. ვთქვათ $\xi_0,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ დამოუკიდებელი ნორმირებული ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია. შემოვიტანოთ შემთხვევითი სიდიდე

$$\eta=\frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}}.$$

მის ალბათობების განაწილებას ჰქვია სტიუდენტის განაწილების კანონი $n$ თავისუფლების ხარისხით. ადგილი აქვს $M(\eta)=0$ და $D(\eta)=\dfrac{n}{n-2}$. სტიუდენტის განაწილების სიმკვრივის სახე სქემატურად მოცემულია ნახაზ 2.6-ზე.




ნახ. 2.6.

განაწილების სიმკვრივე სიმეტრიულია $x=0$ მიმართ.

შესაბამის ცხრილებში მოცემულია სტიუდენტის განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდის სხვადასხვა დონის კვანტილები და განაწილების ფუნქციის მნიშვნელობები. მათი დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობის გამო ეს მნიშვნელობები მოცემულია მათემატიკური სტატისტიკის პრაქტიკულად ყველა წიგნში. წინამდებარე წიგნის ბოლოს, დანართ 5-ში მოცემულია ერთ-ერთი ასეთი ცხრილი.

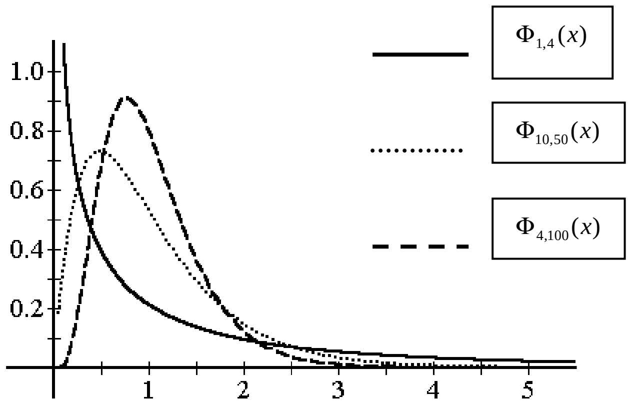
### 2.6.3. ფიშერის განაწილება

ვთქვათ შემთხვევითი სიდიდეები $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ და $\eta_1,\eta_2,...,\eta_m$ (სადაც $n$ და $m$ ნატურალური რიცხვებია) დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, რომელთაგან თითოეული განაწილებულია სტანდარტული ნორმალური კანონის თანახმად. შემოვიტანოთ შემთხვევითი სიდიდე

$$F_{m,n}=\frac{\frac{1}{m}(\eta_1^2+\eta_2^2+...+\eta_m^2)}{\frac{1}{n}(\xi_1^2+\xi_2^2+...+\xi_n^2)}.$$

მას აქვს ფიშერის განაწილების კანონი $m$ და $n$ თავისუფლების ხარისხებით. ადგილი აქვს $MF_{m,n}=\dfrac{n}{n-2}$ როცა $n>2$ და $DF_{m,n}=\dfrac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ როცა $n>4$.

განაწილების სიმკვრივეს სქემატურად აქვს ნახ. 2.7-ზე ნაჩვენები სახე სხვადასხვა თავისუფლების ხარისხებისათვის.




ნახ. 2.7.

ცხადია რომ ისევე როგორც $\chi^2$ განაწილების კანონის მქონე შემთხვევითი სიდიდე, ფიშერის განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეც განსაზღვრულია $[0,+\infty)$ ინტერვალში.

ფიშერის განაწილების გამოთვლილი მნიშვნელობები სხვადასხვა $m$ და $n$-თვის ამა თუ იმ მოცულობით მოცემულია მათემატიკური სტატისტიკის პრაქტიკულად ყველა წიგნში. წინამდებარე წიგნის ბოლოს, დანართ 6-ში მოცემულია ერთ-ერთი ასეთი ცხრილი.

## 2.7. თანაბარი განაწილების კანონი

თანაბარი განაწილების კანონი არის უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი. ამ კანონით აღიწერება მრავალი შემთხვევითი სიდიდის განაწილება ბუნებაში და ტექნიკაში. მოვიყვანოთ მაგალითები: 1) ვთქვათ სასწორს, რომლითაც აწარმოებენ გარკვეული მასის აწონვას აქვს 1 გრამის ტოლი მინიმალური დანაყოფი. ვთქვათ სასწორი აჩვენებს, რომ წონა მოთავსებულია ორ $k$ და $k+1$ გრამებს შორის. ბუნებრივია სხეულის წონად მიიღონ $k+1/2$ გრამი. ამ დროს დაშვებული შემთხვევითი შეცდომის სიდიდე მოთავსებულია ინტერვალში $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ და ყოველი შეცდომის ალბათობა ამ ინტერვალიდან ერთნაირია. 2) ვთქვათ მეტროს შემადგენლობები მოძრაობენ 5 წუთიანი ინტერვალით. მგზავრი, რომელიც პერონზე გამოდის, მატარებელს ელოდება დროის განმავლობაში, რომლის სიდიდეც შემთხვევითი სიდიდეა და ერთნაირი ალბათობებით ღებულობს მნიშვნელობებს $[0,5]$ ინტერვალიდან.

ნაქვამიდან ცხადია, რომ თანაბარად განაწილებული შემთხვითი სიდიდე მნიშვნელობებს ღებულობს სასრულო ინტერვალიდან, რომელსაც მისი განსაზღვრის ინტერვალი ჰქვია და ყოველი მნიშვნელობის ალბათობა ერთნაირია.

ვთქვათ $\xi$ თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა, რომელიც მნიშვნელობებს ღებულობს $[a,b]$ ინტერვალიდან. მაშინ მისი განაწილების სიმკვრივეს აქვს სახე

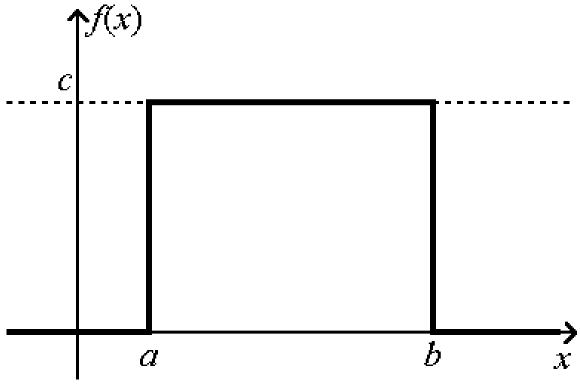
$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{at} \quad x<a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & at \quad a\le x\le b,\\ 0, & at \quad x>b.\end{cases}$$

ძნელი არ არის დავრწმუნდეთ, რომ თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია

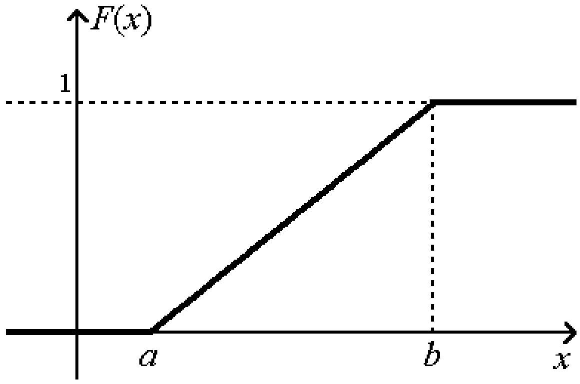
$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{at} \quad x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & at \quad a\le x\le b,\\ 1, & at \quad x>b.\end{cases}$$

თანაბრადგანაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური მოლოდინი $M\xi=\dfrac{a+b}{2}$, ხოლო დისპერსია $D\xi=\dfrac{(b-a)^2}{12}$. ვთქვათ $[\alpha,\beta]$ ინტერვალი მიეკუთვნება $[a,b]$ ინტერვალს (იხ. ნახ. 2.8), ანუ $[\alpha,\beta]\in[a,b]$, მაშინ $p(\xi\in[\alpha,\beta])=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$.

განაწილების სიმკვრივისა და განაწილების ფუნქციის გრაფიკები ნაჩვენებია შესაბამისად ნახაზებზე 2.8 და 2.9-ზე.




ნახ. 2.8.




ნახ. 2.9.

## თავი 3. სტატისტიკური ჰიპოთეზების შემოწმების საფუძვლები

ყოველდღიურ საქმიანობაში ყოველ ჩვენთაგანს ძალზე ხშირად უწევს გადაწყვეტილების მიღება ამა თუ იმ მოვლენის, საკითხის მდგომარეობის შესახებ. მაგალითად, დანიშნულების ადგილამდე ტრანსპორტის რომელი სახეობით უფრო სწრაფად მივალთ მოცემულ მომენტში, რაიმეს ყიდვისას რომელი ფირმის ნაწარმს მივცეთ უპირატესობა და ა.შ. როგორც წესი გადაწყვეტილებები ეფუძნებიან ჩვენს გამოცდილებას და ცოდნას იმ საკითხის შესახებ რომელთან მიმართებაშიც ვღებულობთ გადაწყვეტილებას. თუ საკითხის არსი და/ან ინფორმაცია, რომლის საფუძველზეც ვღებულობთ გადაწყვეტილებას, შეიცავს შემთხვევით მდგენელს, მაშინ ნებისმიერ გადაწყვეტილებას თან ახლავს შეცდომის დაშვების გარკვეული რისკი. მაგალითად, ფეხბურთის მატჩის ანგარიშის წინასწარი განჭვრეტა გარკვეული ცოდნის და ინფორმაციის საფუძველზე შესაძლებელია, მაგრამ თან ახლავს რისკი იმისა, რომ ჩვენი გადაწყვეტილება იქნება მცდარი იმიტომ, რომ მატჩის საბოლოო ანგარიშზე გავლენას ახდენენ მრავალი შემთხვევითი ფაქტორები. ვთქვათ გვინდა სამი გასროლის შედეგით შევადაროთ ორი მსროლელი ერთმანეთს. სროლის შედეგებით მიღებულ გადაწყვეტილებასაც თან ახლავს შეცდომის დაშვების გარკვეული რისკი იმის გამო, რომ სავსებით შესაძლებელია ამ კონკრეტულ შემთხვევაში უფრო ზუსტმა მსროლელმა აჩვენოს თავის შესაძლებლობებზე გაცილებით უარესი შედეგი და პირიქით, უფრო უარესმა მსროლელმა აჩვენოს უფრო კარგი შედეგი. ასეთ შემთხვევებში გადაწყვეტილების მისაღებად გამოიყენება მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდები, რომლებსაც სტატისტიკური ჰიპოთეზების შემოწმების მეთოდები ჰქვია. სტატისტიკური ჰიპოთეზა არის მათემატიკური სტატისტიკის ენაზე ფორმალიზებული დაშვება შესასწავლი მოვლენის არსის ამა თუ იმ მხარის შეახებ. სტატისტიკური ჰიპოთეზა ჩვეულებრივი ცხოვრებისეული ჰიპოთეზისაგან ძირითადად განსხვავდება იმით, რომ ის ალტერნატიულ ჰიპოთეზებთან ერთად მთლიანად მოიცავს შესასწავლი მოვლენის შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლეს, მაშინ როდესაც ცხოვრებისეული ჰიპოთეზის დროს ეს აუცილებებლი არ არის. წინამდებარე თავში შემოვიტანთ სტატისტიკური მოდელების განმარტებას, შევისწავლით სტატისტიკური ჰიპოთეზების არსს, მათ სახეებს და სტატისტიკური ჰიპოთეზების შემოწმების ზოგიერთ, პრაქტიკაში ფართოდ გავრცელებულ, მეთოდებს.

### 3.1. სტატისტიკური მოდელები

როგორც ზევით არაერთხელ ავღნიშნეთ შემთხვევითი მოვლენის შესახებ ინფორმაციის მიღების ერთად-ერთი გზა არის ამონარჩევის ანუ სასრულო რაოდენობის დამოუკიდებელი დაკვირვების შედეგების მიღება გენერალური ამონარჩევიდან. რაც უფრო სრულყოფილად წარმოადგენს გენერალურ ამონარჩევს კონკრეტული ამონარჩევი მით უფრო მეტია შესაძლებლობა, რომ მის საფუძველზე მიღებული გადაწყვეტილება იქნება ჭეშმარიტი. ამონარჩევის, ანუ სასრულო რაოდენობის დამოუკიდებელი დაკვირვების შედეგების საფუძველზე მათემატიკურ სტატისტიკაში ხდება გადაწყვეტილების მიღება ანუ სტატისტიკური ჰიპოთეზების შემოწმება. სტატისტიკური ჰიპოთეზის შემოწმების იდეა ყოველდღიურ ცხოვრებაში გადაწყვეტილების მიღების

ლოგიკის ანალოგიურია. კერძოდ, ყოველდღიურ ცხოვრებაში გადაწყვეტილების მიღებისას, როგორც წესი, ვსარგებლობთ შემდეგი პრაგმატული წესით. ვღებულობთ გამოთქმულ დაშვებას, თუ ის არ ეწინააღმდეგება მოვლენის, რომლის შესახებაც გამოითქმება დაშვება, დამახასიათებელ ნიშნებზე დაკვირვების შედეგებს (ამონარჩევს) და უკუიგდება გამოთქმული დაშვება, თუ ამონარჩევს წარმოადგენს ის მნიშვნელობები, რომლებსაც არ შეიძლებოდა ადგილი ჰქონოდათ გამოთქმული დაშვების სამართლიანობისას. სტატისტიკური ჰიპოთეზების შემოწმებისას ვიქცევით ანალოგიურად. დაკვირვების შედეგების საფუძველზე გამოითვლება $X$ დაკვირვების შედეგების (ამონარჩევის) $T(X)$ ფუნქცია , რომელიც სტატისტიკური ჰიპოთეზის სამართლიანობისას ღებულობს დიდ (პატარა) მნიშვნელობებს, ხოლო ჰიპოთეზის არასამართლიანობისას ღებულობს საწინააღმდეგო, პატარა (დიდ) მნიშვნელობებს. $T(X)$ ფუნქციის მნიშველობები არიან შემთხვევითი სიდიდეები, რადგან დაკვირვების შედეგები, ანუ ამონარჩევი $X$ არის შემთხვევითი. ამიტომ $T(X)$ ფუნქციის მიერ დიდი თუ პატარა მნიშვნელობების მიღების ფაქტის დადგენა შემდეგნაირად ხდება. ამოირჩევა ისეთი $C$ კრიტიკული მნიშვნელობა, რომ $T(X)>C$ ხდომილების ალბათობა იყოს ერთთან (ნოლთან) ახლოს შესამოწმებელი ჰიპოთეზის სამართლიანობისას, ხოლო ჰიპოეზის არასამართლიანობისას, პირიქით, იყოს ნოლთან (ერთთან) ახლოს. რეალური ამონარჩევის $X_{real}$ მიღების შემდეგ მოწმდება პირობა $T(X_{real})>C$ და თუ მას ადგილი აქვს, მიიღება შესამოწმებელი ჰიპოთეზა, წინააღმდგ შემთხვევაში – უკუიგდება. ხდომილებას, რომლის ალბათობაც ახლოსაა ერთთან *პრაქტიკულად ჭეშმარიტი ხდომილება* ჰქვია, ხოლო ხდომილებას, რომლის ალბათობაც ახლოსაა ნოლთან, *პრაქტიკულად შეუძლებელი ხდომილება* ჰქვია. პრაქტიკულად შეუძლებელი ხდომილების ალბათობის შერჩევის საკითხი, რომლის დროსაც შესამოწმებელი ჰიპოთეზა უკუიგდება, არის ამოცანა, რომელიც ფორმალიზაციას არ ექვემდებარება. მისი შერჩევა დამოკიდებულია კონკრეტული ამოცანის სპეციფიკაზე. მაგალითად, ავტომობილის სამუხრუჭო სისტემის საიმედობის გათვლისას არ შეიძლება, რომ მათი უმტყუნო მუშაობის ალბათობა 0.001 – ის ტოლი იყოს. თუმცა ბევრ პრაქტიკულ ამოცანებში ჭეშმარიტი გადაწყვეტილების უკუგდების ალბათობა აიღება 0.01; 0.05-ის ტოლი. ავტომობილების მუხრუჭების შემთხვევაში, უმტყუნო მუშაობის ალბათობის 0.001-თან ტოლობა ნიშნავს, რომ მუხრუჭები მწყობრიდან გამოვლენ ყოველი ათასი დაჭერისას საშუალოდ ერთხელ, რაც გამოიწვევს მრავალრიცხოვან ავარიებს და მსხვერპლს. ამიტომ, ამ შემთხვევაში, ალბათობა უნდა იყოს $10^{-6}$-ზე არა ნაკლები.

## 3.2. სტატისტიკური ჰიპოთეზების შემოწმება

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ სტატისტიკური ჰიპოთეზა არის შესასწავლი მოვლენის თვისებების და ამ თვისებებთან დაკავშირებული დაშვებების ფორმალიზებული ჩაწერა. სტატისტიკურ ჰიპოთეზას ვადგენთ იმ შემთხვევაში, როდესაც შესასწავლ მოვლენაზე გავლენას ახდენენ შემთხვევითი ფაქტორები, ანუ შესასწავლ მოვლენაზე დაკვირვების შედეგები წარმოადგენენ შემთხვევით

სიდიდეებს. ვიცით, რომ შემთხვევითი სიდიდის თვისებებს მთლიანად განსაზღვრავს მისი განაწილების კანონი. ამიტომ, სტატისიტკური ჰიპოთეზა არის დაშვება განაწილების კანონის ამა თუ იმ თვისების შესახებ. დაშვება შეიძლება ეხებოდეს როგორც თვითონ განაწილების კანონის სახეს და მის პარამეტრებს, ასევე ამ განაწილების კანონის მხოლოდ პარამეტრებს. სტატისტიკურ ჰიპოთეზას აღნიშნავენ $H$-ით. როგორც უკვე ვთქვით, ჰიპოთეზა შეიძლება იყოს დაშვება განაწილების კანონის სახის და პარამეტრების შესახებ. მაგალითად, ჰიპოთეზა $H: p(x) = N(x;a,\sigma^2)$ გულისხმობს, რომ შემთხვევით სიდიდე განაწილებულია ნორმალური კანონით მათემატიკური მოლოდინით $a$ და დისპერსიით $\sigma^2$. მეორეს მხრივ, როდესაც განაწილების კანონის სახე ცნობილია, სტატისტიკური ჰიპოთეზა შეიძლება იყოს განაწილების კანონის პარამეტრების შესახებ დაშვებები. მაგალითად, ვთქვათ ცნობილია, რომ $\xi$ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალური კანონით, ანუ $\xi \sim N(\cdot;a,\sigma^2)$. მაშინ ჰიპოთეზას შეიძლება ჰქონდეს სახე $H: a = a_1$, ან $H: \sigma = \sigma_1^2$, ან $H: a = a_1, \sigma = \sigma_1^2$ და ა.შ.

თუ ჰიპოთეზა განაწილების კანონს განსაზღვრავს ცალსახად, ანუ ჰიპოთეზას შეესაბამება მხოლოდ ერთი განაწილების კანონი, მაშინ ასეთ ჰიპოთეზას *მარტივი ჰიპოთეზა* ეწოდება. მარტივი ჰიპოთეზის მაგალითია $H: a = a_1$. წინააღმდეგ შემთხვევაში, როდესაც ჰიპოთეზას შეესაბამება ერთზე მეტი განაწილების კანონი, ჰიპოთეზას *რთული ჰიპოთეზა* ეწოდება. რთული ჰიპოთეზის მაგალითებია: $H: a > a_1$, $H: a < a_1$, $H: a \neq a_1$. პირველ ჰიპოთეზას *მარჯვენამხრივი* ჰიპოთეზა ჰქვია, მეორეს – *მარცხენამხრივი*, ხოლო მესამე ჰიპოთეზას – *ორმხრივი*.

ცხადია, რომ მარტივი ჰიპოთეზის შემოწმება უფრო ადვილია ვიდრე რთულის. იმისათვის, რომ შევამოწმოთ სტატისტიკური ჰიპოთეზა, ანუ მივიღოთ გადაწყვეტილება მისი ჭეშმარიტების შესახებ, საჭიროა შესამოწმებელ ჰიპოთეზასთან ერთად ჩამოვაყალიბოთ *ალტერნატიული ჰიპოთეზა*, რომელთან მიმართებაშიც ვამოწმებთ ძირითად ჰიპოთეზას. ძირითად ჰიპოთეზას, როგორც წესი, $H_0$-ით აღნიშნავენ, ხოლო ალტერნატიულ ჰიპოთეზას $H_1$-ით. მოვიყვანოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზების მაგალითები: 1) $H_0: a = a_1$, $H_1: a = a_2, a_1 \neq a_2$; 2) $H_0: a = a_1$, $H_1: a > a_1$; 3) $H_0: a = a_1$, $H_1: a \neq a_1$. პირველ შემთხვევაში ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები მარტივი ჰიპოთეზებია, მეორე და მესამე შემთხვევებში ალტერნატიული ჰიპოთეზები რთული ჰიპოთეზები არიან. ზოგადად ჰიპოთეზების რაოდენობა შეიძლება იყოს ორზე მეტი. წინამდებარე კურსში ამ შემთხვევას არ განვიხილავთ.

როგორც უკვე ვთქვით, $H_0$ ჰიპოთეზის შესამოწმებლად საჭიროა მოვნახოთ ისეთი კრიტიკული ხდომილება, რომელიც იქნება პრაქტიკულად ჭეშმარიტი ხდომილება შესამოწმებელი ჰიპოთეზის ჭეშმარიტების დროს და პრაქტიკულად შეუძლებელი ხდომილება ალტერნატიული ჰიპოთეზის ჭეშმარიტებისას. იდეალში, რა თქმა უნდა, ყველაზე კარგი იქნებოდა გვეპოვა ისეთი $A$ ხდომილება, რომელიც იქნებოდა ჭეშმარიტი $H_0$ ჰიპოთეზის დროს, ანუ მისი ალბათობა $P(A|H_0) = 1$ და შეუძლებელი $H_1$ ალტერნატიული ჰიპოთეზის დროს, ანუ $P(A|H_1) = 0$. მაგრამ ასეთი ხდომილების არსებობა ყოველთვის არ არის შესაძლებელი. ასეთ შემთხვევებში პოულობენ ისეთ

ხდომილებებს, რომლებიც არიან პრაქტიკულად ჭეშმარიტი ხდომილებები ძირითადი ჰიპოთეზის ჭეშმარიტების დროს და პრაქტიკულად შეუძლებელი ხდომილებები ალტერნატიული ჰიპოთეზის ჭეშმარიტების დროს.

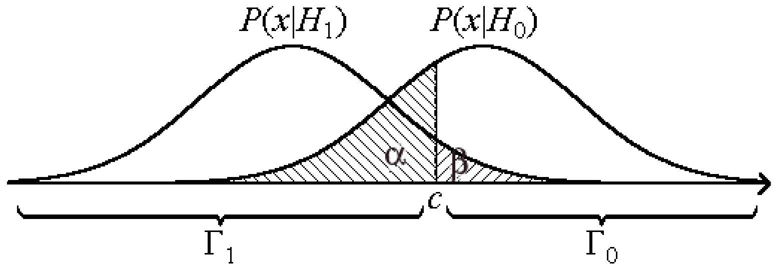
როგორც წესი, კრიტიკული ხდომილების მოსაძებნად შემდეგნაირად იქცევიან. ამონარჩევი აღვნიშნოთ $X$-ით, ხოლო $T(X)$-ით ავღნიშნოთ ამონარჩევის რაიმე ფუნქცია, რომელსაც შემდეგი თვისებები ექნება. შესამოწმებელი $H_0$ ჰიპოთეზის სამართლიანობისას დიდ მნიშვნელობებს ღებულობს, ხოლო ალტერნატიული $H_1$ ჰიპოთეზის სამართლიანობისას მცირე მნიშვნელობებს ღებულობს ან პირიქით, $H_0$-ის სამართლიანობისას ღებულობს მცირე მნიშვნელობებს და $H_1$-ის სამართლიანობისას ღებულობს დიდ მნიშვნელობებს. $T(X)$ ფუნქციას *კრიტერიუმის სტატისტიკას* ეძახიან. სიცხადისათვის ვთქვათ $T(X)$ სტატისტიკა დიდ მნიშვნელობებს ღებულობს $H_0$ ჰიპოტეზის სამართლიანობისას და მცირე მნიშვნელობებს ღებულობს $H_1$ ალტერნატიული ჰიპოთეზის სამართლიანობისას. მაშინ $H_0$ ჰიპოთეზის შემოწმების კრიტიკული არის განსაზღვრისათვის საჭიოა ისეთის $C$ სიდიდს განსაზღვრა, რომლისათვისაც ადგილი აქვს $P(T(X) \geq C \mid H_0) \to 1$ და $P(T(X) \geq C \mid H_1) \to 0$. ორივე პირობის ერთდროული შესრულება შეუძლებელია, რადგან პირველი ალბათობის გაზრდა ყოველთვის იწვევს მეორე ალბათობის გაზრდას და პირიქით, მეორე ალბათობის ნოლთან მიახლოებით ($C$-ს მნიშვნელობის შერჩევით) მცირდება პირველი ალბათობა.

სტატისტიკური ჰიპოთეზების შემოწმების დროს ადგილი აქვს ორი სახის შეცდომებს: 1) უკუვაგდოთ ჰიპოთეზა, როდესაც ის ჭეშმარიტია; 2) მივიღოთ ჰიპოთეზა, როდესაც ის არ არის ჭეშმარიტი. ამ შეცდომებს *პირველი და მეორე გვარის* შეცდომებს უწოდებენ.

პირველი გვარის შეცდომის ალბათობა ჩაიწერება შემდეგნაირად $P(T(X) < C \mid H_0)$. ამ ალბათობას *კრიტერიუმის მნიშვნელობის დონეს* ეძახიან და აღნიშნავენ $\alpha$ ასოთი, ე.ი. $P(T(X) < C \mid H_0) = \alpha$. $H_0$ ჰიპოთეზის მიღების კრიტიკულ არეს აქვს სახე $T(X) \geq C$, ხოლო $T(X) < C$ არის $H_1$ ჰიპოთეზის მიღების არე. კრიტიკულ არეს განსაზღვრავენ შემდეგნაირად: აფიქსირებენ პირველი ტიპის შეცდომის ალბათობის სიდიდეს, ანუ ირჩევენ კრიტერიუმის მნიშნელობის მაქსიმალურ დონეს და ზღურბლურ მნიშვნელობას $C$-ს ირჩევენ ისე, რომ მეორე ტიპის შეცდომის ალბათობა იყოს მინიმალური.

მეორე გვარის შეცდომის ალბათობას აღნიშნავენ $\beta$ ასოთი. $1-\beta$ სიდიდეს ჰქვია *კრიტერიუმის სიმძლავრე*. ამრიგად, $H_0$ ჰიპოთეზის შემოწმებისას კრიტიკული არე უნდა განვსაზღვროთ ისე, რომ კრიტერიუმის მნიშვნელობის დონე იყოს ზემოდან შემოზღუდული, ნოლთან ახლოს მყოფი სიდიდე, ხოლო კრიტერიუმის სიმძლავრე იყოს რაც შეიძლება დიდი, ერთთან ახლოს მყოფი სიდიდე. კრიტერიუმის მნიშვნელობის დონის არჩევა ფორმალიზაციას არ ექვემდებარება და მის სიდიდეს იჩევენ კონკრეტული ამოცანის არსიდან გამომდინარე. ხშირ შემთხვევაში მის მნიშვნელობას ირჩევენ შემდეგი მნიშვნელობებიდან $\alpha = 0.1; 0.05; 0.01; 0.001$. იმ შემთხვევაში, როდესაც პირველი გვარის შეცდომა დაკავშირებულია დიდ დანაკარგებთან, $\alpha$-ს მნიშვნელობას ღებულობენ გაცილებით უფრო ნაკლებს, მაგალითად $\alpha = 10^{-6}$ და ა.შ.

ნახ. 3.1-ზე მოცემულია ორი მარტივი ჰიპოთეზის შემოწმების ზემოთ აღწერილი წესის გრაფიკული ინტერპრეტაცია.




$\Gamma_0$ და $\Gamma_1$ შესაბამისად არიან $H_0$ და $H_1$ ჰიპოთეზების მიღების არეები.
ნახ. 3.1.

### 3.3. სტატისტიკური მოდელებისა და ჰიპოთეზების მაგალითები

განვიხილოთ მაგალითები, რომლებიც გვიჩვენებენ თუ როგორ შეიძლება პრაქტიკული ამოცანების ფორმალიზაცია სტატისტიკური მოდელებით და ბუნებრივ ენაზე დასმული საკითხების ჩამოყალიბება სტატისტიკური ჰიპოთეზების სახით. ზოგადად არ არსებობს ფორმალური აპარატი არაფორმალური ამოცანების სტატისტიკური მოდელებითა და სტატისტიკური ჰიპოთეზებით წარმოდგენისათვის. განხილული მაგალითების მიზანია წარმოდგენა მოგვცეს ამ პროცესებზე და გამოგვიმუშაოს გარკვეული მინიმალური ჩვევები ამოცანების ასეთი ფორმალიზაციისათვის.

***სამმაგი ტესტი***. ეს მაგალითი განვიხილოთ ფსიქოლოგიური ტესტის სახით, თუმცა ასეთი მაგალითები მრავლად გვხვდება როგორც ყოველდღიურ ცხოვრებაში ისე ტექნიკური ამოცანების ამოხსნისას. მაგალითად, ორი ან რამოდენიმე ტექნოლოგიური პროცესის შედარებისას, სწავლების სხვადასხვა მეთოდიკების შედარებისას და ა.შ.

ვთქვათ თითოეულს ადამიანების ჯგუფიდან მიეწოდება სამი ჭიქა წყალი რომელთაგან ორში ჩასხმულია სუფთა წყალი, ხოლო მესამეს დამატებული აქვს ცოტაოდენი შაქარი. ამოცანა მდგომარეობს დაადგინონ ადამიანების გამოსაცდელ ჯგუფს შეუძლია თუ არა შაქრის მოცემული კონცენტრაციის გარჩევა. ვთქვათ ადამიანების ჯგუფი ერთგვაროვანია, მათი ტესტირება ხდება ერთნაირ პირობებში და ერთი ადამიანის ტესტირების შედეგები გავლენას არ ახდენენ მეორე ადამიანის ტესტირების შედეგებზე. იმ ფაქტის დასადგენად, რომ ადამიანებს მოცემული ჯგუფიდან შეუძლიათ განასხვაონ შაქრის მოცემული კონცენტრაცია ჩავატაროთ შემდეგი მსჯელობა. ვთქვათ კონცენტრაცია ისეთია, რომ გამოსაცდელ პირებს არ შეუძლიათ მისი სუფთა წყლისაგან გარჩევა. მაშინ ყოველი მათგანი შემთხვევით ირჩევს მიწოდებული ჭიქებიდან ერთ-ერთს. ავღნიშნოთ სწორი არჩევანი ერთიანით, ხოლო არასწორი – ნოლით. თუ არჩევის შედეგზე არ მოქმედებენ სხვა ფაქტორები, გარდა სუფთა შემთხვევითისა, მაშინ სწორე არჩევის ალბათობა $p=\dfrac{1}{3}$. ამრიგად, საწყისი ამოცანა მივიყვანეთ სტატისტიკურ მოდელამდე, რომელსაც შეესაბამება ბერნულის სქემა. მართლაც, ყოველი ექსპერიმენტის შედეგი ორიდან ერთ მნიშვნელობას ღებულობს: 1 – დამტკბარი წყლის სწორი არჩევისას და 0 – მცდარი არჩევისას. სწორი არჩევანის ალბათობა ყოველ

ექსპერიმენტში ერთნაირია და ტოლია 1/3-ის. იმისდა მიხედვით თუ როგორი ალტერნატიული დაშვების მიმართ მოწმდება ძირითადი დაშვება იმის შესახებ, რომ გამოსაცდელი პიროვნებები ვერ არჩევენ შაქრის მოცემულ კონცენტრაციას, სტატისტიკური ჰიპოთეზები ფორმირდება სხვადასხვანაირად. მაგალითად, 1) $H_0: p = \frac{1}{3}$, $H_1: p > \frac{1}{3}$, როდესაც ალტერნატიულად იგულისხმება, რომ გამოსაცდელი ჯგუფი ანსხვავებს შაქრის მოცემულ კონცენტრაციას სუფთა წყლისაგან; 2) $H_0: p = \frac{1}{3}$, $H_1: p < \frac{1}{3}$, როდესაც ალტერნატიულად იგულისხმება, რომ გამოსაცდელი ჯგუფი ანსხვავებს შაქრის მოცემულ კონცენტრაციას სუფთა წყლისაგან, მაგრამ ერთმანეთში ერევა სუფთ და შაქრიანი წყლები; 3) $H_0: p = \frac{1}{3}$, $H_1: p = 0.9$, როდესაც ალტერნატიულად იგულისხმება, რომ გამოსაცდელი ჯგუფის ათი წევრიდან ცხრა სწორად ანსხვავებს შაქრის მოცემულ კონცენტრაციას სუფთა წყლისაგან.

პირველ ორ შემთხვევაში ალტერნატიული ჰიპოთეზები არიან რთული ჰიპოთეზები, ხოლო მესამე შემთხვევაში ალტერნატიული ჰიპოთეზა არის მარტივი.

***შეწყვილებული დაკვირვებები.*** პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება ამოცანები, როდესაც საჭიროა ორი მოქმედების ერთმანეთთან შედარება მათი შედეგებით. მაგალითად, სწავლების ორი მეთოდი, ორი ტექნოლოგია, ორი წამალი და ა.შ. მაგალითის სახით განვიხილოთ ადამიანის რეაქციის სისწრაფის შედარება ხმის და სინათლის სიგნალებზე. ამისათვის შეირჩა ერთგვაროვანი პიროვნებების ჯგუფი, რომლებსაც ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად აწვდიდნენ ორი სახის სიგნალს: ბგერითს და სინათლის. სიგნალის მიღებისთანავე გამოსაცდელი პირი ხელს აჭერდა სპეციალური ხელსაწყოს ღილაკს, რომელიც აფიქსირებდა სიგნალის მიწოდების და ღილაკზე ხელის დაჭერის მომენტებს შორის სხვაობას. ავღნიშნოთ $x_i, y_i, i = 1,...,n$, არის ხმის და სინათლის სიგნალების მიწოდების მომენტებსა და ღილაკზე ხელის დაჭერის მომენტებს შორის განსხვავებები, შესაბამისად. $n$ არის გამოსაცდელთა რაოდენობა, ანუ პიროვნებების რიცხვი ჯგუფში. ამოცანა მდგომარეობს დავადგინოთ ორივე ტიპის სიგნალზე ადამიანების რეაგირების იდენტურობა.

განვიხილოთ აღნიშნული ამოცანის სტატისტიკის ენაზე აღწერის შესაძლებლობა, ანუ სტატისტიკური მოდელის აგების და ამ მოდელის თვისებების შესახებ ჰიპოთეზების ფორმირების შესაძლებლობა, რომელთა სამართლიანობაც შემოწმებული უნდა იქნას დაკვირვების შედეგების საფუძველზე. სტატისტიკური მოდელების აგებისას შესაძლებელია სხვადასხვანაირად მოქცევა. ჯერ განვიხილოთ ამოცანის დასმის *პარამეტრული მიდგომა*. ასეთი მიდგომისას მიიღება, რომ $x_i, y_i$ დაკვირვების შედეგები ემორჩილებიან ალბათობების განაწილების გარკვეულ კანონს. ტერმინის „მიიღება“ ქვეშ იგულისხმება ან ამ ფაქტის ცოდნა წინა გამოცდილების საფუძველზე, ან $x_i, y_i$ დაკვირვების შედეგების გამოკვლევა სპეციალური ტესტების (კრიტერიუმების) გამოყენებით.

*სტატისტიკური მოდელის არჩევა.* დაუშვათ, რომ $x_i, y_i$ დაკვირვების შედეგები განაწილებულია ნორმალურად, ანუ $x_i \sim N(a_i, \sigma^2)$, $y_i \sim N(b_i, \sigma^2)$. ეს ნიშნავს,

რომ ბგერით და სინათლის სიგნალებზე ყოველი გამოსაცდელის რეაქციის ხანგრძლიობის მათემატიკური მოლოდინები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან, ხოლო დისპერსიები ერთნაირია. ამ შემთხვევაში ბგერით და სინათლის სიგნალებზე გამოსაცდელი პიროვნებების რეაქციის იდენტურობის ჰიპოთეზას აქვს სახე:

$$H: a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n,$$

სადაც $a_i, b_i, i = 1, \ldots, n$, და $\sigma^2$ არიან ნორმალური განაწილების კანონების უცნობი პარამეტრები და მათი მნიშვნელობები შეფასებული უნდა იქნას დაკვირვების შედეგების საფუძველზე. ამრიგად, მოვახდინეთ დასმული პრობლემის ფორმალიზაცია, ანუ ამოვირჩიეთ სტატისტიკური მოდელი, რომლითაც აღიწერება დასმული ტექნიკური ამოცანა და მოვახდინეთ გამოთქმული დაშვების ფორმალიზაციაც სტატისტიკური ჰიპოთეზის სახით.

მიღებული ფორმალიზებული ამოცანა საკმაოდ რთულია იმიტომ, რომ დაკვირვების შედეგებით საჭიროა $2n+1$ უცნობი პარამეტრის განსაზღვრა. დავუშვათ არსებობს საფუძველი მივიღოთ, რომ გამოსაცდელი პიროვნებების ჯგუფი იმდენად ერთგვაროვანია, რომ ერთიდაიგივე ტიპის სიგნალებზე მათი რეაქციის საშუალო ხანგრძლიობა ერთნაირია და შესაბამისად ტოლია $a$ და $b$. ამ შემთხვევაში ორივე ტიპის სიგნალზე რეაქციის დროის ტოლობის დაშვება სტატისტიკური ჰიპოთეზის სახით ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$H: a = b.$$

ასეთი ფორმალიზაციისას ამოცანა მნიშვნელოვნად მარტივდება. დაკვირვების შედეგების საფუძველზე საჭიროა მხოლოდ სამი $(a, b, \sigma^2)$ პარამეტრის განსაზღვრა და შემდეგ ჰიპოთეზის შემოწმება. ამოცანის ფორმალიზაციისას ყოველთვის საჭიროა რაც შეიძლება მარტივი სტატისტიკური მოდელის მიღების მცდელობა, რომელიც მიიღება შესასწავლი მოვლენის შესახებ სხვადასხვა დაშვებების საფუძველზე. მაგრამ ყოველი დაშვება საჭიროა გაკეთდეს დიდი სიფრთხილით იმიტომ, რომ თუ დაშვება მცდარია, მაშინ რაც არ უნდა ფაქიზი მათემატიკური მეთოდები იქნას გამოყენებული ფორმალიზებული ამოცანის გადასაწყვეტად, არასწორი გადაწყვეტილების მიღბის ალბათობა მაინც დიდია.

სტატისტიკური მოდელების აგების მეორე გზა არის *არაპარამეტრული*. ამ შემთხვევაში არავითარი დაშვებები არ კეთდება განაწილების კანონებთან დაკავშირებით, რომლებსაც ემორჩილებიან დაკვირვების შედეგები, ანუ $x_i, y_i$ დაკვირვების შედეგების ალბათობების განაწილების კანონებთან დაკავშირებით. ჰიპოთეზები ფორმირდებიან დაკვირვების შედეგების ურთიერთ მიმართების შესახებ და გადაწყვეტილება მიიღება არა უშუალოდ $x_i, y_i$ დაკვირვების შედეგების საფუძველზე, არამედ მათი ურთიერთ მიმართების საფუძველზე ან მათი რანგების, ანუ მონოტოურად დალაგებულ დაკვირვების ყველა შედეგში მათი რიგითი ნომრების საფუძველზე. პარამეტრულთან შედარებით არაპარამეტრული მეთოდების დადებითი მხარე მდგომარეობს იმაში, რომ ამ შემთხვევაში არავითარი დაშვებების გაკეთება არ არის საჭირო განაწილების კანონებთან დაკავშირებით რომლებსაც ემორჩილებიან დაკვირვების შედეგები და ამით, თითქოსდა, თავიდან აიცილება შეცდომის დაშვების ერთ-ერთი შესაძლო წყარო ამოცანის ფორმალიზაციისას. უარყოფითი მხარე მდგომარეობს იმაში, რომ დაკვირვების შედეგების განაწილების კანონებთან დაკავშირებით გაკეთებული დაშვებების სამართლიანობისას, ის დამატებითი ინფორმაცია, რომელსაც შეიცავენ ეს კა-

ნონები, არაპარამეტრული კრიტერიუმების გამოყენებისას იკარგება, რასაც მივყევართ მიღებული გადაწყვეტილების სანდოობის შემცირებასთან.

### 3.4. სტატისტიკური ჰიპოთეზების შემოწმება (გამოყენებითი ამოცანები)

#### 3.4.1. ბერნულის გამოცდების სქემა

გადავიდეთ ფორმალიზებული სტატისტიკური ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდების შესწავლაზე. დავუბრუნდეთ ზემოთ განხილულ სამმაგი ტესტის მაგალითს, რომლის არსიც მდგომარეობს შემდეგში: საჭიროა ობიექტის მდგომარეობის შესახებ გადაწყვეტილების მიღება, როდესაც მას შეუძლია სამ სხვადასხვა მდგომარეობაში ყოფნა, რომელთაგან ორი ერთნაირია. იგულისხმებოდა, რომ ყოველ ცდაში სწორი გადაწყვეტილების ალბათობა ერთნაირია და $p$-ს ტოლია. შესამოწმებელ ძირითად ჰიპოთეზას ჰქონდა შემდეგი სახე: $H_0: p=\dfrac{1}{3}$. ეს ჰიპოთეზა შეიძლება შევამოწმოთ სხვადასხვა ალტერნატიულ ჰიპოთეზებთან მიმართებაში. ერთ-ერთ შესაძლო ალტერ-ნატიულ ჰიპოთეზას აქვს სახე: $H_1: p>\dfrac{1}{3}$. დამტკბარი წყლის განხილვისას ალ-ტერნატიული ჰიპოთეზა ნიშნავს, რომ გამოსაცდელი ადამიანების ჯგუფს შეუძლია შეიგრძნოს შაქრის მოცემული კონცენტრაცია. ალტერნატიულ ჰიპოთეზას შეიძლება ჰქონდეს სახე: $H_2: p<\dfrac{1}{3}$, რომელის ნიშნავს, რომ გამოსაცდელი ადამიანების ჯგუფს შეუძლია განასხვაოს შაქრის მოცემული კონცენტრაცია სუფთა წყლისაგან, მაგრამ მათ ურევს ერთმანეთში. ალტერნატიული ჰიპოთეზა $H_3: p=0.9$ ნიშნავს, რომ ათიდან ცხრა შემთხვევაში გამოსაცდელი პირები იღებენ სწორ გადაწყვეტილებას. მათემატიკური სტატისტიკის თვალსაზრისით მესამე ალტერნატიული ჰიპოთეზის განხილვის შემთხვევა არის ყველაზე მარტივი, რადგან ამ შემთხვევაში, როგორც ძირითადი, ისე ალტერნატიული ჰიპოთეზები არიან მარტივები, ანუ ისინი შეიცავენ თითო-თითო ალბათობების განაწილების კანონებს. განსახილველ შემთხვევაში ასეთები არიან ბერნულის განაწილების კანონები. ორ სხვა $H_1$ და $H_2$ ალტერნატიულ ჰიპოთეზებში იგულისხმება არა თითო ალბათობების განაწილების კანონები, არამედ მათი სიმრავლეები. პირ-ველ შემთხვევაში ესენია ბერნულის განაწილების ყველა კანონი, რომელთათვისაც სწორი გადაწყვეტილების ალბათობა $p$ აკმაყოფილებს პირობას $1/3<p<1$. მეორე შემთხვევაში ალბათობა აკმაყოფილებს პირობას $0<p<1/3$.

ამ მაგალითზე განვიხილოთ გადაწყვეტილების მიღების ალგორითმის აგება. ავღნიშნოთ: $A$ არის ხდომილება, რომლის ალბათობა, $H_0$ ჰიპოთეზის სამართლიანობისას, არის პატარა. ავღნიშნოთ ეს ალბათობა $\alpha$ ასოთი, ანუ $A$ ხდომილებისათვის ადგილი აქვს $P(A|H_0)\leq\alpha$. სიდიდე $\alpha$ შეირჩევა ისე, რომ განსახილველი ამოცანისათვის ხდომილება, რომლის ალბათობა $\leq\alpha$, ითვლება პრაქტიკულად შეუძლებლად, ანუ $A$ ხდომილება, $H_0$ ჰიპოთეზის სამართლიანობისას, არის პრაქტიკულად შეუძლებელი ხდომილება. თუ

შესაძლებელია $A$ ხდომილების არჩევა ისე, რომ ალტერნატიული ჰიპოთეზის სამართლიანობისას მისი ალბათობა იყოს დიდი, ანუ $A$ იქნება პრაქტიკულად ჭეშმარიტი ხდომილება, მაშინ ასეთი ხდომილებით შესაძლებელი იქნება შევამოწმოთ ძირითადი ჰიპოთეზა შესაბამის ალტერნატიულ ჰიპოთეზასთან მიმართებაში. მართლაც, თუ ადილი აქვს $A$ ხდომილებას, ეს ნიშნავს, რომ მოხდა პრაქტიკულად შეუძლებელი ხდომილება მაშინ, როდასც $H_0$ ჰიპოთეზა არის ჭეშმარიტი. ამიტომ, დიდი ალბათობით, $H_0$ ჰიპოთეზას არ შეიძლება ჰქონდეს ადგილი. მეორეს მხრივ, ალტერნატიული ჰიპოთეზის სამართლიანობისას $A$ ხდომილება არის პრაქტიკულად ჭეშმარიტი ხდომილება. ამიტომ ბუნებრივია მივიღოთ ალტერნატიული ჰიპოთეზა $A$ ხდომილების ჭეშმარიტების დროს.

კონკრეტული შემთხვევის, სამი ჭიქა წყლიდან ერთი დამტკბარის არჩევის მაგალითზე განვიხილოთ, გადაწყვეტილების მისაღებად $A$ ხდომილების არჩევა. კონკრეტულობისათვის ავირჩიოთ $\alpha = 0.02$, ანუ ხდომილებები რომელთა შესაბამისი ალბათობებიც $\alpha$-ზე ნაკლებია ითვლებიან პრაქტიკულად შეუძლებელ ხდომილებებად. გამოთვლების სიმარტივისა და შედეგების თვალსაჩინოებისათვის დაუშვათ $n = 10$. ზოგადად, 10-ის ტოლი ამონარჩევის მოცულობა არ არის საკმარისი სერიოზული დასკვნებისათვის, მაგრამ აქ $n = 10$ ავირჩიეთ დასახელაბული მიზეზების გამო. ცხრილ 3.1-ში მოცემულია ხდომილებების ალბათობები, რომ $k$ $(k \le n)$ გამოსაცდელმა სწორედ აირჩია დამტკბარ წყლიანი ჭიქა $H_0$ ჰიპოთეზის სამართლიანობისას. ცხრილ 3.2-ში მოცემულია ხდომილებების ალბათობები, რომ $k$ პიროვნებაზე მეტმა მიიღო სწორე გადაწყვეტილება ძირითადი ჰიპოთეზის სამართლიანობის პირობებში. ცხრილ 3.3-ში მოცემულია ხდომილებების ალბათობები, რომ $k$ გამოსაცდელზე მეტი იძლევა სწორ პასუხს $H_3$ ალტერნატიული ჰიპოთეზის სამართლიანობისას.

ძირითადი ჰიპოთეზის შესამოწმებლად განვიხილოთ $A$ ხდომილება, რომ სწორი პასუხების რაოდენობა $S \ge C$. ზღვრული მნიშვნელობა $C$ ავირჩიოთ 3.1 და 3.2 ცხრილების საფუძველზე.

ცხრილი 3.1.

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(S=k\mid H_0)$ | 0.0173 | 0.0868 | 0.1950 | 0.2602 | 0.2276 | 0.1365 |
| $k$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| $P(S=k\mid H_0)$ | 0.0569 | 0.0163 | 0.0030 | 0.0004 | 0.0000 | |

ცხრილი 3.2.

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(S\ge k\mid H_0)$ | 1.000 | 0.9827 | 0.8959 | 0.7009 | 0.4407 | 0.2131 |
| $k$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| $P(S\ge k\mid H_0)$ | 0.0766 | 0.0197 | 0.0034 | 0.0004 | 0.0000 | |

ცხრილი 3.3.

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(S \geq k \mid H_3)$ | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 |
| $k$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| $P(S \geq k \mid H_3)$ | 0.9984 | 0.9872 | 0.9298 | 0.7361 | 0.3487 | |

ცხრილი 3.1-დან ჩანს, რომ ხდომილებების დიდი რაოდენობა პრაქტიკულად შეუძლებელი ხდომილებებია კრიტერიუმის მნიშვნელობის დონის $\alpha = 0.02$ შერჩეული მნიშვნელობისათვის. ცხრილი 3.2-დან ჩანს, რომ კრიტერიუმის მნიშვნელობის დონის არჩეული მნიშვნელობით ხდომილებები $S \geq 7$, $S \geq 8$, $S \geq 9$, $S \geq 10$ არიან პრაქტიკულად შეუძლებელი ხდომილებები, ანუ ნებისმიერი მათგანი, პრინციპში, შეიძლება არჩეული იქნას ძირითადი ჰიპოთეზის შესამოწმებლად. განვიხილოთ ამ ხდომილებების ალბათობები $H_3$ ალტერნატიული ჰიპოთეზის ჭეშმარიტებისას. ცხრილი 3.3-დან ჩანს, რომ $H_3$-ის ჭეშმარიტებისას $S \geq 7$ ხდომილების ალბათობა ტოლია 0.9872, ანუ არის პრაქტიკულად ჭეშმარიტი ხდომილება. ამრიგად, განხილული კონკრეტული მაგალითისათვის შევძელით მოგვეძებნა ხდომილება $A \equiv S \geq 7$ რომლის ალბათობა, $H_0$-ის ჭეშმარიტებისას, პრაქტიკულად ნოლის ტოლია, ხოლო $H_3$ ალტერნატიული ჰიპოთეზის ჭეშმარიტებისას არის ერთთან ახლოს. ამიტომ ხდომილება $A \equiv S \geq 7$ წარმოადგენს გადაწყვეტილების მიღების წესს, რომლის არსიც მდგომარეობს შემდეგში: თუ ექვს კაცზე მეტი იძლევა სწორე პასუხს, მაშინ დიდი დარწმუნებით შეიძლება ვთქვათ, რომ განსახილველი კონცენტრაცია გარჩევადია ადამიანების მოცემული ჯგუფისათვის. დავუშვათ $\alpha = 0.005$. ამ შემთხვევაში პრაქტიკულად შეუძლებელ ხდომილებებად ითვლე-ბიან ის ხდომილებები, რომელთა ალბათობებიც $\leq 0.005$. ცხრილი 3.2-დან ჩანს, რომ $A$ ხდომილებად უნდა ავიღოთ $S \geq 8$. ცხრილი 3.3-დან ჩანს, რომ ამ ხდომილების ალბათობა, $H_3$ ალტერნატიული ჰიპოთეზის ჭეშმარიტებისას, საკმაოდ მაღალია. რთული $H_1$ და $H_2$ ალტერნატიული ჰიპოთეზების განხილვისას $A$ ხდომილება უნდა ავირჩიოთ ისეთნაირად, რომ $A$ ხდომილების ალბათობები იყვნენ შესაძლებლობის ფარგლებში მაქსიმალურები ალტერნატიული ჰიპოთეზების შესაბამისი ნებისმიერი განა-წილების კანონის შემთხვევაში.

განსახილველ კონკრეტულ შემთხვევაში $H_1$ ალტერნატიული ჰიპოთეზის დროს გადაწყვეტილების მიღების წესი $S \geq 7$ რჩება მისაღები (კარგი) კრიტერიუმის მნიშვნელობის დონისას $\alpha = 0.02$.

ალტერნატიული ჰიპოთეზები $H_1$ და $H_2$ არიან ცალმხრივი ალტერნატიული ჰიპოთეზები. ალტერნატიული ჰიპოთეზა შეიძლება იყოს ორმხრივი $H_4 : p \neq p_0$ ძირითადი ჰიპოთეზის შემთხვევაში $H_0 : p = p_0$. ამ შემთხვევაში გადაწყვეტილების მიღების წესიც უნდა იყოს ორმხრივი, ანუ უნდა მოიძებნოს ორი რიცხვი $C_1$ და $C_2$, რომლებისათვისაც ადგილი აქვს პირობას $P(S \leq C_1 \mid H_0) + P(S \geq C_2 \mid H_0) \leq \alpha$.

### 3.4.2. ნიშნების კრიტერიუმი ერთი ამონარჩევისათვის

ეს კრიტერიუმი ერთ-ერთი უმარტივესთაგანია და საჭიროებს დაკვირვების შედეგებთან დაკავშირებით მინიმალურ ინფორმაციას. კარძოდ, ისინი უნდა იყვნენ დამოუკიდებლები და მედიანა უნდა იყოს განსაზღვრული ცალსახად. კრიტერიუმი დაფუძნებულია ბერნულის სქემაზე, რომელიც გავარჩიეთ წინა პარაგრაფში. ის საშუალებას გვაძლევს შევამოწმოთ ჰიპოთეზა განაწილების კანონის მედიანასთან დაკავშირებით. ვიცით, რომ $\xi$ შემთხვევითი სიდიდის ალბათობების განაწილების მადიანას უწოდებენ ისეთ $\theta$ რიცხვს, რომლისათვისაც სამართლიანია პირობა $P(\xi<\theta)=P(\xi>\theta)=1/2$. მრავალი პრაქტიკული ამოცანის მიყვანა ხერხდება მედიანასთან დაკავშირებული ჰიპოთეზის შემოწმების შემთხვევასთან. მაგალითად, ვთქვათ პოლიკლინიკაში გმოკვლევებით დადგინდა პაციენტების არტერიალური წნევის მედიანური მნიშვნელობა და ვთქვათ ეს მნიშვნელობა $\theta$ ტოლია. საჭიროა დადგინდეს შეიცვალა თუ არა არტერიალური წნევის მედიანური მნიშვნელობა მოცემული პოლიკლინიკის პაციენტებისათვის ზაფხულის შვებულებების შემდეგ. ამისათვის იკვლევენ პოლიკლინიკის $n$ პაციენტს. აღვნიშნოთ $x_1,x_2,...,x_n$ - პაციენტების არტერიალური წნევის მნიშვნელობებია და გამოვითვალოთ სხვაობები $x_i-\theta, i=1,...,n$. შემოვიტანოთ შემდეგი ფუნქცია

$$s(x)=\begin{cases}1, & at \quad x>0,\\ 0, & at \quad x<0.\end{cases}$$

გამოვითვალოთ მნიშვნელობა $S=\sum_{i=1}^{n}s(x_i-\theta)$. შემთხვევითი სიდიდე $s(x)$ ღებულობს ორ მნიშვნელობას 0 ან 1. ჰიპოთეზის სამართლიანობისას, რომ არტერიული მნიშვნელობა არ შეიცვალა, ყოველი ამ მნიშვნელობის ალბათობა ერთნაირია და ტოლია 1/2-ის. შემთხვევითი სიდიდე $S$ არის $s(x_i-\theta)$-ის დადებითი მნიშვნელობების რაოდენობა $n$ გამოცდაში. ამრიგად, საწყისი ამოცანა მივიყვანეთ ბერნულის სქემაზე, რომელშიც $S$-ით აღნიშნულია წარმატებების რიცხვი და $n$ ექსპერიმენტში მისი მნიშვნელობის მიხედვით უნდა შემოწმდეს ჰიპოთეზა $H_0: p=1/2$. ამ ჰიპოთეზის შემოწმება სხვადასხვა ალტერნატივებისას განხილული იყო ზემოთ.

მოცემული მეთოდის ღირსება მდგომარეობს მის სიმარტივეში და დასაკვირვებელი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონთან დაკავშირებული მოთხოვნების მინიმალურობაში.

### 3.5. ჰიპოთეზების შემოწმება ორ ამონარჩევიან ამოცანებში

მოცემული შემთხვევა წინა შემთხვევისაგან განსხვავდება იმით, რომ აქ ერთი ამონარჩევის ნაცვლად გვაქვს ორი ამონარჩევი და დასკვნა უნდა გამოვიტანოთ მათი ურთიერთ მიმართების შესახებ. ასეთი ამოცანების მაგალითად შეიძლება მოვიყვანოთ შემდეგი: სწავლების ორი მეთოდის, ორი ტექნოლოგიის, ორი წამლის ეფექტის, ორი ობიექტის მდგომარეობის შედარება და ა.შ.

აღვნიშნოთ $F(x)$ არის განაწილების ფუნქცია პირველი ამონარჩევისათვის, ხოლო $G(x)$ - მეორე ამონარჩევისათვის. ორი ამონარჩევის შედარებისას შეიძლება გაკეთდეს სხვადასხვა დაშვება მათი ალბათობების განაწილების კანონებთან დაკავშირებით. ყველაზე მარტივ და გავრცელებულ შემთხვევაში იგულისხმება, რომ ორი შესადარებელი მეთოდი იწვევს რიცხვით ღერძზე განაწილების კანონის მხოლოდ მდებარეობის ცვლილებას, ე.ი. იწვევს შემთხვევითი სიდიდის მხოლოდ მათემატიკური მოლოდინის ცვლილებას. შედარებით რთულ შემთხვევაში შესადარებელ ამონარჩევებს შორის განსხვავება შეიძლება გამოხატული იქნას არა მხოლოდ ალბათობების განაწილების კანონის მდებარეობის ცვლილებაში, არამედ შემთხვევითი სიდიდის გაფანტვის მახასიათებლის, ანუ დისპერსიის ცვალებადობაშიც. და ბოლოს, ყველაზე რთულ შემთხვევაში, დამუშავების მეთოდების ცვალებადობამ შეიძლბა გამოიწვიოს მთლიანად განაწილების კანონის შეცვლა.

$G(x)$ ალბათობების განაწილება მიეკუთვნება $F(x)$ ალბათობების განაწილების კანონთა დაძრულ ოჯახს $\theta$ დაძვრის პარამეტრით, თუ ნებისმიერი $x$-თვის ადგილი აქვს $F(x)=G(x-\theta)$.

ალბათობების განაწილების ასეთი კანონებისათვის დაკვირვებების შედეგების ორი სიმრავლის ერთგვაროვნების შესახებ ჰიპოთეზა ჩაიწერება შემდეგნაირად $H_0:\theta=0$.

ამბობენ, რომ $F\geq G$, სადაც $F$ და $G$ განაწილების ფუნქციებია, თუ ნებისმიერი $x$ რიცხვისათვის ადგილი აქვს $F(x)\geq G(x)$. ამბობენ, რომ $F\leq G$, თუ ნებისმიერი $x$ რიცხვისათვის ადგილი აქვს $F(x)\leq G(x)$.

ამ განსაზღვრების აზრი მდგომარეობს შემდეგში. ავღნიშნოთ: $\xi$ შემთხვევითი სიდიდეა, რომლის განაწილების კანონი არის $F(x)$, ხოლო $\eta$ შემთხვევითი სიდიდეა $G(x)$ განაწილების კანონით. მაშინ $F(x)\geq G(x)$ ნიშნავს, რომ $\xi$-ს აქვს ტენდენცია მიიღოს უფრო პატარა მნიშვნელობები, ვიდრე $\eta$-მ; ანუ ნებისმიეი $x$-თვის სრულდება $P(\xi<x)\geq P(\eta<x)$.

### 3.5.1. მანი-უიტნის კრიტერიუმი

მოცემული კრიტერიუმი საშუალებას იძლევა ერთგვაროვნებაზე შევადაროთ ორი დამოუკიდებელი ამონარჩევი. ავღნიშნოთ $x_1,x_{2,},...,x_m$ - პირველი ამონარჩევია, ხოლო $y_1,y_2,...,y_n$ - მეორე ამონარჩევია. პირველი ამონარჩევის განაწილების ფუნქცია ავღნიშნოთ $F(x)$ – ით, ხოლო მეორესი $G(x)$ – ით.

განსახილველი კრიტერიუმის გამოსაყენებლად საჭიროა შემდეგი დაშვებები:

1. დაკვირვების შედეგები $x_1,x_{2,},...,x_m$; $y_1,y_2,...,y_n$ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი არიან;

2. განაწილების კანონები $F(x)$ და $G(x)$ არიან უწყვეტები. აქედან გამომდინარეობს, რომ ერთის ტოლი ალბათობით დაკვირვების შედეგები არ შეიცავენ ერთმანეთის ტოლ მნიშვნელობებს.

ორი ამონარჩევის ერთგვაროვნების შესახებ ჰიპოთეზა ჩაიწერება შემდეგნაირად: $H_0 : F(x) = G(x)$. ეს ჰიპოთეზა უნდა შევამოწმოთ ალტერნატიულ ჰიპოთეზასთან მიმართებაში, რომელიც შეიძლება იყოს როგორც ერთმხრივი, ისე ორმხრივი, ანუ ალტერნატივის სახით შეიძლება გვჰქონდეს შემდეგი ჰიპოთეზებიდან ერთ – ერთი:

1. მარჯვენამხრივი ალტერნატივა $F(x) > G(x)$, ანუ $y$ დაკვირვების შედეგებს აქვთ ტენდენცია მიიღონ უფრო დიდი მნიშვნელობები ვიდრე $x$;
2. მარცხენამხრივი ალტერნატივა $F(x) < G(x)$, ანუ $x$ დაკვირვების შედეგებს აქვთ ტენდენცია მიიღონ უფრო დიდი მნიშვნელობები ვიდრე $y$;
3. ორმხრივი ალტერნატივა $F(x) \neq G(x)$.

განვიხილოთ პირველი შემთხვევა. მანი-უიტნის კრიტერიუმის არსი მდგომარეობს $x_i$ და $y_j$, $i = 1,...,m$; $j = 1,...,n$, დაკვირვების შედეგების წყვილ-წყვილად შეჯერებაში. შედარებების საერთო რიცხვი ტოლია $mn$. შედარების შედეგი ჩავთვალოთ წარმატებულად თუ $x_i < y_j$ და წარუმატებლად თუ $x_i > y_j$. იმის გამო, რომ $F(x)$ და $G(x)$ უწყვეტებია, $x$ და $y$ შორის ერთნაირი დაკვირვების შედეგი არ უნდა იყოს. მაგრამ რეალურ მონაცემებში, დაკვირვების შედეგების შეზღუდული სიზუტით ჩაწერის გამო, $x$ და $y$ შორი გვხვდებიან ერთნაირი სიდიდეები. ჯერ განვიხილავთ მანი-უიტნის კრიტერიუმი თეორიული შემთხვევისათვის, შემდეგ კი შემოვიტანოთ შესაბამისი შესწორება. დაკვირვების $x$ და $y$ შედეგების შედარების საფუძველზე დაითვლება წარმატებების საერთო რაოდენობა. ეს სიდიდე ავღნიშნოთ $U_{набл}$. ცხადია, რომ მას შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი მნიშვნელობა $0$-დან $mn$-დე. მარჯვენამხრივი ალტერნატიული ჰიპოთეზის შემოწმებისას ბუნებრივია დაუშვათ, რომ რაც უფრო დიდია $U_{набл}$-ს მნიშვნელობა, მით მეტია იმის ალბათობა, რომ ძირითადი ჰიპოთეზა არ არის ჭეშმარიტი და ადგილი აქვს ალტერნატიულ ჰიპოთეზას. $U_{набл}$ შემთხვევითი სიდიდს განაწილება არის დისკრეტული განაწილება, რომელიც, $H_0$ ჰიპოთეზის სამართლიანობისას განსაზღვრულია მოცემული კრიტერიუმის ავტორების მიერ. ამ განაწილების პროცენტული წერტილები დატაბულირებულია და მოცემულია შესაბამის ცხრილებში (იხ. დანართი 7).

ავირჩიოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობის დონე $\alpha$. შესაბამისი ცხრილებიდან $\alpha$, $m$ და $n$-ის საშუალებით ვპოულობთ მანი-უიტნის განაწილების $\alpha$ დონის კვანტილს, ანუ ვხსნით ალბათურ განტოლებას

$$P(U \geq U_{пр.}(\alpha, m, n) \,|\, H_0) = \alpha \qquad (3.1)$$

და თუ ადგილი აქვს $U_{набл} \geq U_{пр.}(\alpha, m, n)$, მიიღება ალტერნატიული ჰიპოთეზა, წინააღმდეგ შემთხვევაში მიიღება ძირითადი ჰიპოთეზა.

მარცხენამხრივი ალტერნატიული ჰიპოთეზის განხილვისას შესაბამისი ცხრილებიდან მოიძებნება შემდეგი განტოლების ამოხსნა

$$P(U \leq U_{л.}(\alpha, m, n) \,|\, H_0) = \alpha\,. \qquad (3.2)$$

თუ ადგილი აქვს $U_{набл} \leq U_{л.}(\alpha, m, n)$, მიიღება ალტერნატიული ჰიპოთეზა, წინააღმდეგ შემთხვევაში – ძირითადი ჰიპოთეზა.

ცხრილებიდან $U_{л.}(\alpha, m, n)$ მნიშვნელობის გამოსათვლელად შეიძლება ვისარგებლოთ დამოკიდებულებით

$$U_{л.}(\alpha, m, n) + U_{пр}(\alpha, m, n) = mn\,,$$

რომელიც გამომდინარეობს $U$ სტატისტიკის განაწილების სიმეტრიიდან თავისი $mn/2$ ცენტრის მიმართ.

ორმხრივი ალტერნატიული ჰიპოთეზის შემოწმებისას კრიტიკულ არეს აქვს შემდეგი სახე

$$\{U_{набл} \le U_{л}(\alpha,m,n)\} \cup \{U_{набл} \ge U_{пр}(\alpha,m,n)\},$$

ანუ მიიღება ალტერნატიული ჰიპოტეზა, თუ $U_{набл}$ მოხვდება $U_{л.}(\alpha,m,n)$ და $U_{пр.}(\alpha,m,n)$-ის შესაბამისად მარცხნივ ან მარჯვნივ. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ანუ თუ $U_{набл}$ მოხვდება $U_{л.}(\alpha,m,n)$ და $U_{пр.}(\alpha,m,n)$ შორის, მიიღება ძირითადი ჰიპოთეზა. ამ შემთხვევაში კრიტერიუმის მნიშვნელობის დონე $2\alpha$-ს ტოლია. თუ გვინდა, ორმხრივი ალტერნატივის დროს, შევინარჩუნოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობის დონე $\alpha$-ს ტოლი, მაშინ კრიტიკულ არეში უნდა ავიღოთ $U_{л.}(\alpha/2,m,n)$ და $U_{пр.}(\alpha/2,m,n)$.

იმის გამო, რომ $U$ არის დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე (3.1) და (3.2) განტოლებებს შეიძლება არ ჰქონდეთ ზუსტი ამოხსნა $\alpha$, $m$ და $n$-ის მოცემული მნიშვნელობებისათვის. ამიტომ ცხრილებში მოიძებნება ან მათი მიახლოებითი ამოხსნები ან $\alpha$ შეირჩევა ისე, რომ მათ ჰქონდეთ ზუსტი ამოხსნები.

როგორც ზემოთ ავღნიშნეთ, დაკვირვების შედეგების ჩაწერის სიზუსტის შეზღუდულობის გამო, $x$ და $y$ შორის შეიძლება შეგვხდეს ერთნაირი მნიშვნელობები. ამ შემთხვევაში, $U$ სტატისტიკის დათვლისას, ითვლიან ერთნაირი დაკვირვების შედეგების რაოდენობას და $U_{набл}$-ს უმატებენ ამ რაოდენობის განახევრებულ მნიშვნელობას. მაგალითად, ვთქვათ გვაქვს დაკვირვების შედეგები $x$:1, 7, 4; $y$:2, 4. მაშინ $U_{набл}$=1+1+0+0+0+1/2=2.5.

## 3.5.2. უილკოკსონის კრიტერიუმი

წინა კრიტერიუმი დაფუძნებულია ნიშნების კრიტერიუმზე. მასში გამოიყენება არა დაკვირვების შედეგების მნიშვნელობები, არამედ მათი ურთიერთ მიმართება. მისგან განსხვავებით უილკოკსონის კრიტერიუმი დაფუძნებულია დაკვირვების შედეგების რანგებზე. ის არის რანგებზე დაფუძნებული კრიტერიუმებიდან ერთ-ერთი პირველთაგანი. ეს კრიტერიუმი გამოიყენება იგივე პირობებში, როგორც მანი-უიტნის კრიტერიუმი.

ვთქვათ მოცემულია დაკვირვებების ორი ამონარჩევი $x_1, x_{2,}..., x_m$ და $y_1, y_2,..., y_n$. საჭიროა ძირითადი ჰიპოთეზის შემოწმება, რომ $x_1, x_{2,}..., x_m$, $y_1, y_2,..., y_n$ მიეკუთვნებიან ერთ გენერალურ ამონარჩევს.

დაშვებები დაკვირვების შედეგების შესახებ ანალოგიურია წინა შემთხვევისა:

1. დაკვირვების შედეგები $x_1, x_{2,}..., x_m$ და $y_1, y_2,..., y_n$ არიან ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი;
2. განაწილების კანონები $F(x)$ და $G(x)$ არიან უწყვეტები.

ძირითადი ჰიპოთეზა შემდეგნაირად ფორმირდება: $H_0 : F(x) = G(x)$.

ალტერნატიული ჰიპოთეზები წინა შემთხვევის ანალოგიურია:

1. მარჯვენამხრივი $F(x) > G(x)$;
2. მარცხენამხრივი $F(x) < G(x)$;
3. ორმხრივი $F(x) \neq G(x)$.

კრიტერიუმის არსი მდგომარეობს შემდეგში. დაკვირვების ყველა შედეგი $x_1, x_{2,}..., x_m$, $y_1, y_2,..., y_n$ ლაგდება ზრდადობის მიხედვით. $S_1, S_2,..., S_n$-ით აღვნიშნოთ $y$-ბის რანგები ამ ვარიაციულ რიგში. გამოვთვალოთ სიდიდე

$$W_{набл} = S_1 + S_2 + ... + S_n,$$

რომელსაც უილკოკსონის სტატისტიკა ჰქვია. განვიხილოთ როგორ იქცევიან ეს რანგები სხვადასხვა ალტერნატივების დროს.

1. მარჯვენამხრივი ალტერნატივის დროს, ცხადია, რომ $y$-ის მნიშვნელობები რიცხვით ღერძზე დაიკავებენ მარჯვენა ნახევარს და მათი რანგების ჯამი მიიღებს დიდ მნიშვნელობებს.
2. მარცხენამხრივი ალტერნატივის დროს, პირიქით, $y$-ბის მნიშვნელობები მოხვდებიან $x$-ბის მარცხნივ და მათი რანგების ჯამი მიიღებს პატარა მნიშნელობებს.

ამ თვისებაზეა დაფუძნებული უილკოკსონის კრიტერიუმი. ავტორმა შეძლო მოენახა $W$ სიდიდის განაწილების ფუნქცია ძირითადი $H_0$ ჰიპოთეზის ჭეშმარიტებისას. ამ განაწილების კვანტილები გამოთვლილია $\alpha$, $m$, $n$ სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის და მოცემულია შესაბამის ცხრილებში (იხ. დანართი 8), საიდანაც $m$, $n$ და $\alpha$ მოცემული მნიშვნელობებისათვის ვპოულობთ შემდეგი განტოლების ამოხსნას

$$P(W \geq W_{пр}(\alpha, m, n) \mid H_0) = \alpha.$$

თუ ადგილი აქვს $W_{набл} \geq W_{пр}(\alpha, m, n)$, მაშინ მიიღება მარჯვენამხრივი ალტერნატიული ჰიპოთეზა, წინააღმდეგ შემთხვევაში – ძირითადი ჰიპოთეზა.

ანალოგიურად, მარცხენამხრივი ალტერნატიული ჰიპოთეზისათვის გვაქვს: $\alpha$, $m$, $n$ მოცემული მნიშვნელობებისათვის ვპოულობთ განტოლების ამოხსნას

$$P(W \leq W_{л}(\alpha, m, n) \mid H_0) = \alpha.$$

თუ $W_{набл} \leq W_{л}(\alpha, m, n)$ მიიღება მარცხენამხრივი ალტერნატიული ჰიპოთეზა, წინააღმდეგ შემთხვევაში მიიღება ძირითადი ჰიპოთეზა.

$W$-ს განაწილების სიმეტრიულობის გამო ადგილი აქვს

$$W_{л}(\alpha, m, n) + W_{пр}(\alpha, m, n) = n(m + n + 1). \quad (3.3)$$

ამიტომ დატაბულირებული მხოლოდ მარჯვენამხრივი კრიტიკული მნიშვნელობები და მარცხენამხრივი მნიშვნელობები მოიძებნება (3.3) დამოკიდებულებიდან.

ორმხრივი ალტერნატიული ჰიპოტეზის შემოწმების დროს კრიტიკულ არეს აქვს შემდეგი სახე:

$$W_{набл} \leq W_{л}(\alpha, m, n) \bigcup W_{набл} \geq W_{пр}(\alpha, m, n), \quad (3.4)$$

ანუ (3.4) პირობის შესრულებისას მიიღება ორმხრივი ალტერნატიული ჰიპოთეზა, წინააღმდეგ შემთხვევაში მიიღება ძირითადი ჰიპოთეზა.

როგორც მანი-უიტნის, ასევე უილკოკსონის კრიტერიუმისათვის შესაბამის ცხრილებში მოცემულია კვანტილების მნიშვნელობები $m$ და $n$-ის შეზღუდული მნიშვნელობებისათვის. მათი ცხრილებში მოცემულ მნიშვნელობებზე მეტი მნიშვნელობებისათვის სარგებლობენ შესაბამისი განაწილების კანონების ნორმალური კანონით აპროქსიმაციით.

დამტკიცებულია, რომ ძირითადი $H_0$ ჰიპოთეზის ჭეშმარიტებისას და შემო-ტანილი დაშვებების სამართლიანობისას, $W^* = (W - MW)/\sqrt{DW}$ შემთხვევით სიდიდეს მიახლოებით აქვს სტანდარტული ნორმალური განაწილება, როდესაც $m \to \infty$ და $n \to \infty$, ანუ $W^* \sim N(\cdot;0,1)$. აქ $MW = n(m+n+1)/2$ და $DW = mn(m+n+1)/12$. ამ შემთხვევაში კრიტიკულ არეს აქვს შემდეგი სახე:

1. მარჯვენამხრივი ალტერნატიული ჰიპოტეზის დროს $W^*_{набл} \ge z_{1-\alpha}$;
2. მარცხენამხრივი ალტერნატიული ჰიპოტეზის დროს $W^*_{набл} \le z_{\alpha}$;
3. ორმხრივი ალტერნატიული ჰიპოტეზის დროს $W^*_{набл} \le z_{\alpha} \bigcup W^*_{набл} \ge z_{1-\alpha}$.

აქ $z_{\alpha}$ და $z_{1-\alpha}$ არიან სტანდარტული ნორმალური განაწილების $\alpha$ და $1-\alpha$ დონის კვანტილები. ორმხრივი ალტერნატიული ჰიპოტეზის დროს კრიტერიუმის მნიშვნელობის დონე $2\alpha$-ს ტოლია. თუ გვინდა შევინარჩუნოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობის დონე $\alpha$-ს ტოლი, მაშინ შესაბამის კრიტიკულ არეებში $z_{\alpha}$ და $z_{1-\alpha}$-ს ნაცვლად უნდა ავიღოთ $z_{\alpha/2}$ და $z_{1-\alpha/2}$.

მანი-უიტნის და უილკოკსონის კრიტერიუმები ერთმანეთთან დაკავშირებულია დამოკიდებულებით $W = U + n(n+1)/2$. ეს დამოკიდებულება გვიჩვენებს $U$ და $W$ სტატისტიკების ექვივალენტობას. ამიტომ მათ გამოყენებას ერთნაირ შედეგებამდე მივყავართ.

## 3.6. შეწყვილებული დაკვირვებები

წინა პარაგრაფებში შევისწავლეთ ნიშნების, მანი-უიტნის, უილკოკსონის კრიტერიუმები, რომლებიც საშუალებას იძლევიან ერთმანეთს შევადაროთ ორი ამონარჩევი, გავაკეთოთ დასკვნები მათი იდენტურობის შესახებ. ამასთან ავღნიშნეთ, რომ დაკვირვების ობიექტები არიან ერთგვაროვნები. დაკვირვების ობიექტების ერთგვაროვნება არის მნიშვნელოვანი პირობა. მაგრამ, სამწუხაროდ ყოველთვის არ არის საშუალება შევამოწმოთ მათი ერთგვაროვნება. დაკვირვების ობიექტების არაერთგვაროვნების თავიდან ასაცილებლად, ხშირად, გამოცდებისას იყენებენ ერთი და იგივე ობიექტებს. მაგალითად: სწავლების ორი მეთოდის შედარებისას ამ მეთოდებს იყენებენ ადამიანების ერთი და იგივე ჯგუფზე; ორი ტექნოლოგიური პროცესის შედარებისას იყენებენ ერთი და იგივე დანადგარებს და ა.შ. ასეთ შემთხვევებში, ერთი და იგივე ობიექტისათვის ღებულობენ დაკვირვებების ორ სიმრავლეს და თუ $n$ დაკვირვებების რიცხვია, მაშინ შედეგად ღებულობენ $(x_i, y_i), i = 1,...,n$, შეწყვილებულ დაკვირვებებს. შევისწავლოთ ასეთი დაკვირვე-ბის შედეგების დამუშავების მეთოდები.

### 3.6.1. ნიშნების კრიტერიუმი შეწყვილებული ამონარჩევის ანალიზისათვის

ვთქვათ $(x_i, y_i), i = 1,...,n$, $n$ მოცულობის შეწყვილებული დაკვირვებებია. საჭიროა დამუშავების ეფექტის არ არსებობის შესახებ ჰიპოთეზის შემოწმება, რომელიც ჩაიწერება ასე

$$H_0 : P(x_i < y_i) = P(x_i > y_i) = 0.5 \text{ ყველა } i = 1,...,n.$$

შემოვიტანოთ სიდიდე $z_i = y_i - x_i, i = 1,...,n$. კეთდება დაშვებები: 1) ყველა $z_i$ ურთიერთ დამოუკიდებალი შემთხვევითი სიდიდეებია. ეს დაშვება არ ნიშნავს ერთნაირი ინდექსის მქონე $x_i$ და $y_i$ დამოუკიდებლობას. ეს ძალზე მნიშვნელოვანია პრაქტიკაში, როდესაც დაკვირვებები ხდება ერთი და იგივე ობიექტზე და ამდენად, ისინი შეიძლება ერთმანეთზე დამოკიდებულები იყვნენ. 2) ყველა $z_i$ აქვს ნოლის ტოლი მედიანები, ე.ი. $P(z_i < 0) = P(z_i > 0) = 1/2$. კიდევ ერთხელ გაუსვათ ხაზი, რომ სხვადასხვა $z_i$-ის განაწილების კანონი შეიძლება ერთმანეთს არ ემთხვეოდეს.

ავირჩიოთ ალტერნატიული ჰიპოთზა, რომელიც შეიძლება იყოს როგორც მარჯვენამხრივი, ასევე მარცხენამხრივი და ორმხრივი. ავირჩიოთ მარჯვენამხრივი: $H_1 : P(x_i > y_i) < P(x_i < y_i)$. $z_i$-თან მიმართებაში ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად: $H_0 : P(z_i < 0) = P(z_i > 0) = 0.5$; $H_1 : P(z_i < 0) < P(z_i > 0)$, ე.ი. ძირითადი ჰიპოთეზა გულისხმობს, რომ $z_i, i = 1,...,n$-თვის ნოლი არის მედიანა.

ამრიგად, განსახილველი შემთხვევა დავიყვანეთ სერიის კრიტერიუმის ცნობილ სქემამდე, როდესაც ბერნულის განაწილების დროს $z_i$ შემთხვევითი სიდიდეებისათვის უნდა შემოწმდეს ჰიპოთეზა მედიანის შესახებ.

$z_i$-ს შორის ნულოვანი მნიშვნელობების არსებობისას საჭიროა მათი გადაგდება და შესაბამისად $n$-ის მნნიშვნელობის შემცირება $z_i$-ის არანულოვან რაოდენობამდე. $n$-ის დიდი მნიშვნელობისას, ისევე როგორც სერიის კრიტერიუმში, შეიძლება ვისარგებლოთ ბინომიალური განაწილების ნორალური აპოქსიმაციით.

თუ საჭიროა შევადაროთ არა მარტო ორი შეწყვილებული განმეორებადი დაკვირვებები, არამედ, მათ შორის განსხვავების არსებითობის შემთხვევაში, შევაფასოთ ამ განსხვავების სიდიდე, საჭიროა ვისარგებლოთ შემდეგი მოდელით. უშვებენ, რომ $z_i = \theta + \varepsilon_i, i = 1,...,n$, სადაც $\theta$-რაღაც მუდმივია, რომელიც ახასიათებს ერთი განაწილების მეორეს მიმართ მდებარეობას, ხოლო $\varepsilon_i$ შემთხვევითი სიდიდეებია მათემატიკური მოლოდინით $M(\varepsilon_i) = 0$. ასეთი მოდელის შემთხვევაში ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები ღებულობენ სახეს: $H_0 : \theta = 0$ და $H_1 : \theta > 0$. ალტერნატიული ჰიპოთეზის სამართლიანობისას არსებობს შესაძლებლობა შევაფასოთ $\theta$ - ორი ამონარჩევის განსხვავების სიდიდე.

განხილული კრიტერიუმის ღისება მდგომარეობს იმაში, რომ ის არ ადებს მკაცრ მოთხოვნებს $x_i, y_i$ დაკვირვების შედეგებს. ერთად-ერთი მოთხოვნა მდგომარეობს იმაში, რომ $z_i$ უნდა იყვნენ დამოუკიდებლები ერთმანეთის მიმართ. ამასთან $x_i$ და $y_i$ შეიძლება იყვნენ დამოკიდებულები. აგრეთვე $z_i$ შეიძლება ემორჩილებოდნენ სხვადასხვა განაწილების კანონებს.

### 3.6.2. განმეორებადი შეწყვილებული დაკვირვებების ანალიზი ნიშნების რანგების მიხედვით (უილკოკსონის ნიშნების რანგების ჯამების კრიტერიუმი)

თუ შეიძლება დავუშვათ, რომ წინა პუნქტში შემოტანილი $z_i, i=1,...,n,$ უწყვეტი, ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ ერთგვაროვნების ჰიპოთეზის შესამოწმებლად შეიძლება გამოვიყენოთ უფრო ძლიერი უილკოკსონის ნიშნების რანგების ჯამების კრიტერიუმი, რომლის არსიც მდგომარეობს შემდეგში.

ძირითად და ალტერნატიულ ჰიპოთეზებს აქვთ წინა პუნქტში მოყვანილის ანალოგიური სახე:

$$H_0 : P(x_i < y_i) = P(x_i > y_i) = 0.5\,;\;\; H_1 : P(x_i > y_i) < P(x_i < y_i)\,.$$

გამოვთვალოთ: $z_i$ არის $x_i$-ის $y_i$-გან გადახრის მნიშვნელობები, ანუ $z_i = y_i - x_i$. შემოვიტანოთ დამხმარე ფუნქცია $\psi_i, i=1,...,n$, სადაც

$$\psi_i = \begin{cases} 1, & если \;\; z_i > 0; \\ 0, & если \;\; z_i < 0. \end{cases}$$

ვთქვათ $R_i$ არის $|z_i|$-ის რანგი $|z_1|,...,|z_n|$-ის ზრდადობის მიხედვით მოწეს-რიგებულ მიმდევრობაში. გამოვთვალოთ სტატისტიკა $T_{набл} = \sum_{i=1}^{n} \psi_i R_i$. ალტერნატიული $H_1$ ჰიპოთეზის ჭეშმარიტებისას სტატისტიკას $T_{набл}$ აქვს ტენდენცია მიიღოს დიდი მნიშვნელობები. ამიტომ $H_0$ ჰიპოთეზის $H_1$ ჰიპოთეზის მიმართ შემოწმების კრიტერიუმს აქვს სახე: თუ $T_{набл} \geq t(\alpha, n)$, მაშინ მიიღება ალტერნატიული ჰიპოთეზა, წინააღმდეგ შემთხვევაში მიიღება ძირითადი ჰიპოთეზა. აქ $\alpha$ არის კრიტერიუმის მნიშვნელობის დონე, $t(\alpha, n)$ არის $\alpha$ დონის კვანტილი, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას $P(T \geq t(\alpha, n) \,|\, H_0) = \alpha$.

მარცხენამხრივი ალტერნატივის დროს $H_2 : P(x_i > y_i) > P(x_i < y_i)$ კრიტიკულ არეს აქვს სახე $T_{набл} \leq \frac{n(n+1)}{2} - t(\alpha, n)$.

ორმხრივი ალტერნატიული ჰიპოთეზის დროს $H_3 : P(x_i > y_i) \neq P(x_i < y_i)$ კრიტიკულ არეს, ანუ $H_3$ ჰიპოთეზის მიღების არეს აქვს სახე

$$T_{набл} \geq t(\alpha, n) \bigcup T_{набл} \leq \frac{n(n+1)}{2} - t(\alpha, n)\,.$$

ამ შემთხვევაში კრიტერიუმის მნიშვნელობის დონე $2\alpha$-ს ტოლია. თუ გვინდა შევინარჩუნოთ $\alpha$ ტოლი კრიტერიუმის მნიშვნელობის დონე, მაშინ კრიტიკულ არეში $t(\alpha, n)$ ნაცვლად უნდა ავიღოთ $t(\alpha/2, n)$.

$x_i$ და $y_i$ შემთხვევითი სიდიდეების უწყვეტობის გამო მათ შორის ერთნაირი მნიშვნელობები თეორიულად არ უნდა იყოს. მაგრამ, დამრგვალების შეცდომების გამო, დაკვირვებების პრაქტიკულ შედეგებში გვხვდება ერთნაირი მნიშვნელობები. ცხადია მათი შესაბამისი $z_i = 0$. ასეთ შემთხვევაში $z_i$-ის ნულოვანი მნიშვნელობები უკუიგდება, დაკვირვებების საერთო რიცხვი მცირდება შესაბამისი სიდიდით და აღწერილი კრიტერიუმი გამოიყენება დაკვირვების შედეგების შემცირებული რაოდენობისათვის.

თუ $z_i, i=1,...,n$, შორის გვხვდება ერთნაირი მნიშვნელობები, მაშინ $R_i$ რანგების გამოთვლისას გამოიყენება საშუალო რანგები. დაკვირვების

შედეგების დიდი რაოდენობისას შეიძლება ვისარგებლოთ ნორმალური აპროქსიმაციით. $H_0$ ჰიპოთეზის სამართლიანობისას სტატისტიკას

$$T^* = \frac{T - MT}{\sqrt{DT}} = \frac{T - n(n+1)/4}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}}$$

ასიმპტოტურად (როცა $n \to \infty$) აქვს სტანდარტული ნორმალური განაწილება $N(\cdot;0,1)$. კრიტიკულ არეს (მაგალითად, მარჯვენამხრივი ალტერნატივისას) აქვს სახე $T^*_{набл} \geq z_{1-\alpha}$, სადაც $z_{1-\alpha}$ არის სტანდარტული ნორმალური განაწილების $1-\alpha$ პროცენტული წერტილი.

# თავი 4. შეფასებათა თეორიის საფუძვლები

## 4.1. შესავალი

ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა სწავლობენ კანონებს, რომლებსაც ემორჩილებიან შემთხვევითი სიდიდეები, მოვლენები, ხდომილებები; კერძოდ, სხვადასხვა შემთხვევითი ხდომილებების ალბათობების გამოთვლის მეთოდებს. ძალზე იშვიათად ხერხდება შემთხვევითი ხდომილების ალბათობის უშუალო გამოთვლა. როგორც წესი, ალბათობა გამოითვლება შემთხვევითი სიდიდეების ალბათობების განაწილების კანონების საშუალებით რომლებზედაც არის დამოკიდებული მოცემული ხდომილება. ალბათობების განაწილების კანონი არის განსაზღვრული თვისებების მქონე ფუნქცია, რომელიც დამოკიდებულია პარამეტრების სიმრავლეზე. ამ პარამეტრების კონკრეტული მნიშვნელობები გამოყოფენ ერთ კონკრეტულ განაწილებას ერთნაირი ტიპის განაწილებების უსასრულო სიმრავლიდან. მაგალითად, ვთქვათ $\xi$ შემთხვევით სიდიდეს აქვს ნორმალური განაწილების კანონი $m$ მათემატიკური მოლოდინით და $\sigma^2$ დისპერსიით, ანუ $\xi \sim N(\cdot;m,\sigma^2)$. $m$ და $\sigma^2$-ს მნიშვნელობებისაგან დამოკიდე-ბულებით მიიღება ნორმალური კანონების უსასრულო სიმრავლე. ერთი განაწილების კანონის კონკრეტიზაციისათვის, რომელსაც სინამდვილეში ემორჩილება $\xi$ შემთხვევითი სიდიდე, საჭიროა ნორმალური კანონების უსასრულო სიმრავლიდან გამოვყოთ ერთი განაწილება, ანუ დავაკონკრეტოთ $m$ და $\sigma^2$ პარამეტრების მნიშვნელობები, რომლებიც შეესაბამებიან $\xi$ შემთხვევით სიდიდეს, ანუ ვიპოვოთ ალბათობების განაწილების კანონების პარამეტრების უცნობი მნიშვნელობები. ეს შესაძლებელია გაკეთდეს $\xi$ შემ-თხვევითი სიდიდის დაკვირვების შედეგების საფუძველზე, ანუ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ დაკვირვების შედეგების საფუძველზე. ამიტომ განაწილების პარამეტრების ნაპოვნი მნიშვნელობები არიან არა ზუსტი, არამედ მათი მიახლოებითი მნიშვნელობები. მათემატიკურ სტატისტიკაში იმ ფაქტის აღსანიშნავად, რომ დაკვირვების შედეგების საფუძველზე $m$ და $\sigma^2$ პარამეტრების ნაპოვნი მნიშვნელობები არიან მიახლოებითი მნიშვნელობები, გამოიყენება სიტყვა *შეფასება*, ანუ $a \equiv (m,\sigma^2)$ პარამეტრის შეფასება არის $\hat{a} \equiv (\hat{m},\hat{\sigma}^2)$, რომელიც არის $a$ პარამეტრების ვექტორის უცნობი ნამდვილი მნიშვნელობის მიახლოებითი მნიშვნელობა, ანუ $\hat{a}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \approx a$. დაკვირვების შედეგების საფუძველზე $\hat{a}$ მნიშვნელობის პოვნის პროცესს *შეფასებას* უწოდებენ. არსებობენ $a$ პარამეტრის სხვადასხვა მიახლოებითი მნიშვნელობების პოვნის დიდი რაოდენობის მეთოდები. პრობლემა მდგომარეობს $a$-ს ყველა შესაძლო მნიშვნელობებიდან გარკვეული თვალსაზრისით საუკეთესო შეფასების გამოყოფაში. შეიძლება მოვიფიქროთ ბევრი კრიტერიუმი ტერმინის „საუკეთესო“ განსაზღვრისათვის. ქვემოთ შევჩერდებით ყველაზე უფრო გავრცელებულ და სხვებზე უფრო ხშირად გამოყენებულ კრიტერიუმებზე, როგორებიც არიან:

1. სიზუსტის კრიტერიუმი (პარამეტრის ჭეშმარიტ მნიშვნელობასთან სიახლოვე);
2. წაუნაცვლებლობის კრიტერიუმი (შეფასების მათემატიკური მოლოდინის ტოლობა პარამეტრის ჭეშმარიტ მნიშვნელობასთან);

3. ძალმოსილების კრიტერიუმი (დაკვირვებების რაოდენობის გაზრდისას შეფასების ალბათურად მისწრაფება პარამეტრის ჭეშმარიტი მნიშვნელობისაკენ);
4. ეფექტურობის კრიტერიუმი (შეფასების დისპერსიის მინიმალურობა სხვა შეფასებების დისპერსიებთან შედარებით) და ა.შ.

შეფასების პოვნა, რომელსაც ექნებოდა ყველა ზემოთ ჩამოთვლილი თვისებები, საკმაოდ რთული ამოცანაა. ამიტომ, დასახული მიზნებიდან გამომდინარე, კონკრეტული ამოცანების გადაწყვეტისას, უპირატესობა ეძლევა შეფასებების ამა თუ იმ თვისებებს.

ზოგიერთ წინა პარაგრაფში უკვე გვქონდა შეხება ალბათობების განაწილების პარამეტრების შეფასებებთან. მაგალითად, საშუალო არითმეტიკულის გამოყენებით ვაფასებდით მათემატიკური მოლოდინის მნიშვნელობას, ამონარჩევის დისპერსიით ვპოულობდით დისპერსიის უცნობ მნიშვნელობას. ისინი იყვნენ შემთხვევითი სიდიდის შესაბამისი რიცხვითი მახასიათებლების შეფასებები, თუმცა ტერმინით „შეფასება“ არ ვსარგებლობდით. ამონარჩევის ალბათობების განაწილების $F_n$ ფუნქციით ვაფასებდით უცნობ $F$ ალბათობების განაწილების ფუნქციას; ცდებში $A$ ხდომილების გამოსვლის $n(A)/n$ სიხშირით ვაფასებდით ამ ხდომილების $P$ ალბათობას. ყველა ისინი იყვნენ ე.წ. წერტილოვანი შეფასებები, რადგან იძლეოდნენ შესაბამისი $a$ პარამეტრის უცნობი მნიშვნელობის ერთ $\hat{a}$ შეფასებით მნიშვნელობას. ამ შემთხვევაში შეუძლებელია მიუთითო რამდენად ზუსტია $a$ პარამეტრის $\hat{a}$ შეფასება. ამ ამოცანის გადასაწყვეტად საჭიროა მიუთითო უცნობი პარამეტრის არა მარტო ერთი მიახლოებითი მნიშვნელობა, არამედ რაღაც ინტერვალი, რომელშიც მოცემული ალბათობით იმყოფება პარამეტრის უცნობი ჭეშმარიტი მნიშვნელობა. თუ ხერხდება ასეთი ინტერვალის მოძებნა, მას უწოდებენ *ინტერვალურ შეფასებას.*

შეფასებების მოძებნისას გარკვეული დაშვებები კეთდება $\xi$ შემთხვევითი სიდიდის თვისებების შესახებ და ამ თვისებების საფუძველზე მოინახება ზემოთ ჩამოთვლილი ოპტიმალური თვისებების მქონე შეფასებები. თუ $\xi$-ს თვისებების შესახებ გაკეთებული დაშვებები არ არიან სამართლიანი, მაშინ გამოთვლილი შეფასებები იქნებიან არაოპტიმალური. მაგალითად, საშუალო არითმეტიკული $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ არის ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური მოლოდინის ოპტიმალური შეფასება, რომელსაც აქვს ოპტიმალურობის ყველა ზემოთ ჩამოთვლილი თვისება. ალბათობების განაწილების კანონის ნორმალურობის დაშვების დარღვევისას (მაგალითად, თუ $x_1, x_2, ..., x_n$ ამონარჩევი შეიცავს უხეშ შეცდომებს) საშუალო არითმეტიკული არ არის მათემატიკური მოლოდინის ოპტიმალური შეფასება და მით უფრო ცუდ შეფასებებს იძლევა, რაც უფრო მეტია უხეში შეცდომები დაკვირვების შედეგებში. უკანასკნელი რამოდენიმე ათეული წელიწადია ინტენსიურად ვითარდება შეფასებების სპეციალური მეთოდები, რომლებიც იძლევიან მდგრად შეფასებებს დაკვირვების შედეგების თვისებებთან დაკავშირებით გაკეთებული საწყისი დაშვებების დარღვევისას (მაგალითად, დაკვირვების შედეგებში უხეში შეცდომების არსებობისას). ასეთ მეთოდებს უწოდებენ შეფასების *რობასტულ მეთოდებს.* წინამდებარე კურსში არ განვიხილავთ ასეთ შეფასებებს.

## 4.2. დიდ რიცხვთა კანონი

როგორც ზემოთ ავღნიშნეთ, ძალზე იშვიათად ხერხდება ხდომილების ალბათობის უშუალო გამოთვლა. ეს შესაძლებელია თუ ექსპერიმენტის სქემა დაიყვანება შედეგების სასრულო რიცხვამდე, რომელთაგან ნებისმიერის მოხდენა არის შესაძლებელი ექსპერიმენტების შედეგად. წინააღმდეგ შემთხვევაში ატარებენ $n$ ექსპერიმენტს და ითვლიან იმ ექსპერიმენტების რაოდენობას, რომლებშიაც ადგილი ჰქონდა ჩვენთვის საინტერესო $A$ ხდომილებას. ავღნიშნოთ ის $n(A)$-თი. $A$ ხდომილების $p$ ალბათობის შეფასებად ღებულობენ $n(A)/n$ სიხშირეს. $n$-ის გაზრდისას, ანუ როდესაც $n \to \infty$ ადგილი აქვს $n(A)/n \to p$. მათემატიკური ანალიზის ენაზე ეს ფაქტი შეიძლება ჩაიწეროს ასე: არსებობენ ისეთი მთელი რიცხვი $N$ და $\varepsilon > 0$, რომ როდესაც $n > N$ ადგილი აქვს $|n(A)/n - p| < \varepsilon$. ალბათობის თეორიაში და მათემატიკურ სტატისტიკაში ასეთი განსაზღვრა არ არის სამართლიანი იმიტომ, რომ ნებისმიერი $n$-თვის ალბათობა იმისა, რომ $n(A)/n$ რაც არ უნდა დიდად განსხვავდება $p$-გან არ უდრის ნოლს. ამიტომ, ასეთი უზუსტობების თავიდან ასაცილებლად, ალბათობის თეორიაში შემოტანილია ზღვრის ასეთი განსაზღვრა: $n(A)/n$ სიხშირე იკრიბება $p$ ალბათობისაკენ როდესაც $n \to \infty$, თუ ადგილი აქვს

$$P\left(\left|\frac{n(A)}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \to 1$$

ნებისმიერი $\varepsilon > 0$.

ისტორიულად ხდომილების სიხშირის კრებადობა შესაბამისი ალბათობისაკენ პირველად დაამტკიცა ბერნულმა 17-ე საუკუნის ბოლოს და მის საპატივსაცემოდ ამ თეორემას ქვია **ბერნულის თეორემა**. თეორემის არსი მდგომარეობს შემდეგში: დაუშვათ, რომ $n$ ექსპერიმენტიდან ყოველში $A$ ხდომილების $p$ ალბათობა უცვლელი რჩება და ყოველი ექსპერიმენტის შედეგი დანარჩენისაგან დამოუკიდებელია, მაშინ $n$-ის დიდი მნიშვნელობისათვის $A$ ხდომილების მოხდენის $n(A)/n$ სიხშირე მიახლოებით $A$ ხდომილების ალბათობის ტოლია, ანუ $p \cong n(A)/n$. ბერნულის თეორემის შემდგომი განვითარება არის *დიდ რიცხვთა კანონი*, რომლის უმარტივესი ვარიანტიც არის *ჩებიშევის თეორემა*. ავღნიშნოთ: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ შემთხვევით $\xi$ სიდიდეზე დამოუკიდებელი დაკვირვების შედეგებია. მაშინ **ჩებიშევის თეორემას** აქვს სახე:

$$P\left(\left|\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - M(\xi)\right| < \varepsilon\right) \to 1 \text{ როცა } n \to \infty,$$

ანუ დამოუკიდებელი, ერთნაირად განაწილებული დიდი რაოდენობის შემთხვევითი რიცხვების საშუალო არითმეტიკული ალბათურად მიისწრაფის მათი მათემატიკური მოლოდინისაკენ.

$n$-ის დიდი მნიშვნელობისათვის ამონარჩევის მახასიათებლის მისწრაფება შესაბამისი თეორიული მახასიათებლისაკენ (მისი ნამდვილი მნიშვნელობისაკენ) სამართლიანია არა მარტო საშუალო არითმეტიკულისათვის. განაწილების $F$ ფუნქციის თვისებებზე და ჩვენთვის საინტერესო მახასიათებლებზე საკმაოდ სუსტი დაშვებებისას, დიდი $n$-თვის, ამონარჩევის მახასიათებლის მნიშვნელობა მიისწრაფის შესაბამისი მახასიათებლის თეორიული მნიშვნელობისაკენ. ეს მტკიცება ძალზე მნიშვნელოვანია

ალბათობის თეორიისათვის და მათემატიკური სტატისტიკისათვის და ეწოდება *დიდ რიცხვთა კანონი.*

დიდ რიცხვთა კანონის შემდგომ განვითარებას წარმოადგენს *ცენტრალური ზღვრული თეორემა.* ავღნიშნოთ $\theta = (\theta_1, ..., \theta_r)$ განაწილების პარამეტრების თეორიული მნიშვნელობები. როდესაც $r = 1$ პარამეტრი $\theta$ არის სკალარული სიდიდე, როდესაც $r \geq 2$ პარამეტრი $\theta$ არის ვექტორული სიდიდე. მაგალითად, ნორმალური კანონისათვის $\theta = (\theta_1, \theta_2) = (m, \sigma^2)$. ავღნიშნოთ $\theta_n$ არის $\theta$ პარამეტრის შეფასებული მნიშვნელობა, გამოთვლილი დაკვირვების შედეგების $x_1, x_2, ..., x_n$ საფუძველზე. მაშინ *ცენტრალური ზღვრული თეორემა* ამტკიცებს: განაწილების $F$ ფუნქციაზე და $\theta$ პარამეტრზე ძალზე სუსტი დაშვებებისას შემთხვევით სიდიდეს

$$\sqrt{n}(\theta_n - \theta)$$

აქვს ასიმპტოტურად (როდესაც $n \to \infty$) ნორმალური განაწილება გარკვეული $(m, \sigma^2)$ პარამეტრებით, ანუ $\sqrt{n}(\theta_n - \theta) \sim N(\cdot; m, \sigma^2)$.

## 4.3. სტატისტიკური პარამეტრები

მათემატიკურ სტატისტიკაში ტერმინის “სტატისტიკური მოდელების პარამეტრების” ქვეშ იგულისხმება ორი აზრით ახლოს მდგომი, მაგრამ მაინც სხვადასხვა მნიშვნელობა: 1) ალბათობების განაწილების პარამეტრები და 2) სტატისტიკური მოდელების პარამეტრები.

*განაწილების კანონების პარამეტრები* არის რიცხვითი მახასიათებლების სასრულო ერთობლიობა, რომელთა განსაზღვრული მნიშვნელობებიც გამოყოფენ ერთ კონკრეტულ განაწილებას მოცემული ტიპის ალბათობების განაწილების კანონების უსასრულო სიმრავლიდან. მაგალითად, ალბათობების განაწილების ნორმალური კანონის სიმკვრივეს აქვს სახე

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

მოცემული განაწილების პარამეტრებია $a$ და $\sigma^2$. მათი მოცემული მნიშვნელობები გამოყოფენ ერთ კონკრეტულ განაწილებას ალბათობების განაწილების ნორმალური კანონების უსასრულო სიმრავლიდან.

სტატისტიკური პარამეტრების მეორე ტიპი არის სხვადასხვა სტატისტიკური კანონზომიერებების აღმწერი სტატისტიკური მოდელების პარამეტრები. მაგალითად, პარამეტრი $\theta$ ნიშნების კრიტერიუმში ერთი ამონარჩევისათვის, აგრეთვე ნიშნების კრიტერიუმში შეწყვილებული განმეორებადი დაკვირვებების ანალიზისათვის; რეგრესიული დამოკიდებულებების პარამეტრები, რომლებიც აღწერენ დამოკიდებულებებს შემთხვევით სიდიდეებს შორის (განხილული იქნება ქვემოთ); ფაქტორების პარამეტრები ფაქტორულ ანალიზში, რომლის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს დისპერსიული ანალიზი (განხილული იქნება ქვემოთ) და ა.შ.

სტატისტიკური პარამეტრები ავღნიშნოთ $\theta$. თუ პარამეტრების რიცხვი ერთია, მაშინ $\theta$ არის სკალარული სიდიდე. თუ პარამეტრების რიცხვი $r \geq 2$, მაშინ $\theta = (\theta_1, ..., \theta_r)$ არის ვექტორული სიდიდე.

სტატისტიკური მოდელების ნებისმიერი მახასიათებლები შეიძლება გამოსახული იქნას მათი პარამეტრების საშუალებით. ამიტომ მათემატიკური სტატისტიკის ერთ-ერთი ძირითადი ამოცანა მდგომარეობს შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების შედეგების, ანუ ამონარჩევის დახმარებით ამ პარამეტრების მნიშვნელობების მონახვაში. იმის გამო, რომ ამონარჩევი შედგება დაკვირვების შედეგების სასრულო რაოდენობისაგან, მათი საშუალებით გამოთვლილი შედეგები არიან შესაბამისი მახასიათებლების მიახლოებითი მნიშვნელობები. სიტყვათა შეხამების "მიახლოებითი მნიშვნელობები" მაგიერ სტატისტიკაში იხმარება ტერმინი "შეფასება". სტატისტიკური მოდელის $\theta$ პარამეტრების შეფასებები მოინახება დამოუკიდებელი, ერთნაირად განაწილებული $x_1, x_2, ..., x_n$ დაკვირვების შედეგების საფუძველზე, ანუ პოულობენ ისეთ $t(x_1, ..., x_n)$ ფუნქციას, რომ ადგილი ჰქონდეს

$$t(x_1, ..., x_n) \approx \theta .$$

## 4.4. განაწილების პარამეტრების შეფასება ამონარჩევით

როგორც ზემოთ უკვე აღვნიშნეთ, სტატისტიკური პარამეტრების შეფასებები არიან ამ პარამეტრების მიახლოებითი მნიშვნელობები გამოთვლილი დაკვირვების შედეგების საფუძველზე. არსებობს სტატისტიკური პარამეტრების გამოთვლის ორი ძირითადი მიდგომა: 1) შეფასებები გამოითვლება დაკვირვებების მოცემული სასრული რაოდენობით, ანუ სასრულო $x_1, x_2, ..., x_n$ ამონარჩევის საფუძველზე; 2) შეფასებები მოინახება მუდმივად ზრდადი რაოდენობის დაკვირვების შედეგების საფუძველზე; ყოველი შემდგომი დაკვირვების შედეგით, წინა დაკვირვების შედეგების საფუძველზე პარამეტრების უკვე გამოთვლილი შეფასებები, ზუსტდებიან მანმადე, სანამ მიღებულ შეფასებებს არ ექნებათ საჭირო სიზუსტე მოცემული ალბათობით. უკანასკნელებს ეწოდებათ *მიმდევრობითი ანალიზის მეთოდები.*

მიმდევრობითი ანალიზის მეთოდები არიან უფრო მნიშვნელოვანი როგორც პრაქტიკული, ასევე თეორიული თვალსაზრისით, ვიდრე სასრულო ამონარჩევზე დაფუძნებული მეთოდები იმიტომ, რომ ისინი საშუალებას იძლევიან უფრო სრულად გამოვიყენოთ დაკვირვების შედეგებით მიღებული ინფორმაცია. მოცემული სიზუსტის შეფასებების მისაღებად ისინი საშუალოდ იყენებენ უფრო მცირე სიგრძის ამონარჩევს, ვიდრე სასრულო ამონარჩევზე დაფუძნებული მეთოდები. მოცემული კურსის შეზღუდულობის გამო, მასში მიმდევრობით მეთოდებს არ შევისწავლით.

ზემოთ ვისწავლეთ შემთხვევითი სიდიდეების ზოგიერთი სტატისტიკური მახასიათებლების გამოთვლის ფორმულები. მაგალითად, ვიცით, რომ საშუალო არითმეტიკული $\bar{x}$, გამოთვლილი $x_1, x_2, ..., x_n$ დაკვირვების შედეგების საფუძველზე, იძლევა ამ განაწილების $a$ მათემატიკური მოლოდინის მიახლოებით მნიშვნელობას (მაშინ საშუალო არითმეტიკულს შეფასებას არ ვეძახოდით). შემოტანილი ტერმინოლოგიის თანახმად $\bar{x}_n$ არის მათემატიკური მოლოდინის შეფასება გამოთვლილი $n$ დაკვირვების შედეგების საფუძველზე, ანუ $\bar{x}_n \approx a$. ჩებიშევის კანონის თანახმად $\bar{x}_n \xrightarrow{\text{по вероятности}} a$ როდესაც $n \to \infty$. ზუსტად ასევე, ზემოთ ნასწავლი გამოსახულება, რომელიც საშუალებას

იძლევა გამოვითვალოთ დისპერსიის მიახლოებითი მნიშვნელობა $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ არის ამ დისპერსიის შეფასება, ანუ $S^2 \approx \sigma^2$ და ჩებიშევის თეორემის თანახმად $S^2 \xrightarrow{\text{по вероятности}} \sigma^2$ როდესაც $n \to \infty$.

ზოგადად, განაწილების ყოველი კანონი $F(\theta)$ დამოკიდებულია პარამეტრების სასრულო რაოდენობაზე. ამ განაწილების ნებისმიერი მახასიათებელი გამოთვლილი $F(\theta)$ განაწილების კანონის დახმარებით დამოკიდებულია ამ განაწილების $\theta$ პარამეტრზე. ავღნიშნოთ ეს მახასიათებელი $T$-ს საშუალებით. მაშინ $T$ დამოკიდებულია $\theta$ პარამეტრზე, ანუ $T = T(\theta)$. დაკვირვების შედეგების $x_1, x_2, ..., x_n$ საფუძველზე გამოვთვლით მოცემული მახასიათებლის შეფასებას. ავღნიშნოთ ის $T_n$-ის დახმარებით. ვიცით, რომ დიდ რიცხვთა კანონის თანახმად $T_n \approx T(\theta)$. თუ ამ განტოლებას ამოვხსნით $\theta$-ს მიმართ, მივიღებთ $\theta$ უცნობი პარამეტრის შეფასებას. ეს მიდგომა არის სტატისტიკური პარამეტრების შეფასებების მიღების საერთო მეთოდიკა. იმისგან დამოკიდებულებით, თუ რომელი მახასიათებლები ამოირჩევა, მიიღება $\theta$ პარამეტრების სხვადასხვა შეფასებები. თუ ამოცანა კორექტულად არის დასმული და ამოხსნილი, მაშინ ყველა ისინი არიან $\theta$ პარამეტრის უცნობი ჭეშმარიტი მნიშვნელობის მიახლოებითი მნიშვნელობები.

მაგალითის სახით განვიხილოთ ეგრეთ წოდებული *მომენტების* და *კვანტილების მეთოდები.* **მომენტების მეთოდში** სტატისტიკურ მახასიათებლებად გამოიყენება შემთხვევითი სიდიდის მომენტები. არჩეული მომენტების რაოდენობა დამოკიდებულია ალბათობების განაწილების კანონების პარამეტრების რიცხვზე, ანუ $\theta$-ს განზომილებაზე. მაგალითად, განვიხილოთ ნორმალური განაწილება, რომელიც დამოკიდებულია ორ პარამეტრზე – მათემატიკური მოლოდინი და დისპერსია. ამრიგად, მომენტების მეთოდში მახასიათებლებად უნდა ამოვირჩიოთ რომელიმე ორი მომენტი. ავირჩიოთ პირველი და მეორე რიგის საწყისი მომენტები. ვიცით, რომ ნორმალური განაწილებისათვის $M\xi = a$ და $M\xi^2 = a^2 + \sigma^2$. $M\xi$ და $M\xi^2$-ის სტატისტიკური ანალოგები შესაბამისად არიან $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ და $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. შევადგინოთ სისტემა ორი განტოლებისაგან

$$\begin{cases} a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,, \\ a^2 + \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{cases}.$$

ამრიგად, მივიღეთ ორი განტოლებისაგან შემდგარი სისტემა ორი უცნობით $a$ და $\sigma^2$. ამ სისტემის ამოხსნით უცნობი პარამეტრების მიმართ ვღებულობთ $a = \overline{x}$ და $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$. საბოლოოდ მივიღეთ, რომ მათემატიკური მოლოდინისა და დისპერსიის გამოთვლის ზემოთ ნასწავლი ფორმულები არიან შეფასებების გამოსათვლელი ფორმულები, მიღებული მომენტების მეთოდით ალბათობების განაწილების ნორმალური კანონის შესაბამისი პარამეტრებისათვის. თუ მახასიათებლებად ავირჩევდით შემთხვევითი სიდიდის არა საწყის პირველ ორ მომენტს, არამედ რომელიმე სხვა ორ მომენტს, მივიღებდით სხვა ფორმულებს $a$ და $\sigma^2$ შეფასებების გამოსათვლელად. ისინიც

იქნებოდნენ $a$ და $\sigma^2$-ს უცნობი მნიშვნელობების შეფასებები, მაგრამ მოგვცემდნენ სხვა მნიშვნელობებს, ვიდრე ზემოთ მოყვანილი ფორმულები.

**კვანტილების მეთოდი**. მეთოდის არსი ანალოგიურია მომენტების მეთოდის, მაგრამ ამ შემთხვევაში $T$ მახასიათებლად და მის $T_n$ სტატისტიკურ ანალოგად აირჩევიან კვანტილები. ეს მეთოდიც განვიხილოთ ნორმალური განაწილების მაგალითზე. ვთქვათ $\xi$ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა, ანუ $\xi \sim N(a,\sigma^2)$, ხოლო $\eta \sim N(0,1)$, მაშინ $\xi = a + \sigma \cdot \eta$. შემთხვევითი $\eta$ სიდიდის ზედა და ქვედა კვარტილები ეწოდებათ შესაბამისად სიდიდეებს $\Phi^{-1}(0.75)$ და $\Phi^{-1}(0.25)$, სადაც $\Phi$ - ნორმირებული ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა. შემთხვევითი $\xi$ სიდიდის ზედა და ქვედა კვარტილები შესაბამისად იქნებიან

$$(a + \sigma \cdot \Phi^{-1}(0.75)) \text{ და } (a + \sigma \cdot \Phi^{-1}(0.25)). \qquad (4.1)$$

ვიცით, რომ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდისათვის მედიანა და მათემატიკური მოლოდინი ერთმანეთს ემთხვევა. მედიანა არის 0.5 დონის კვანტილი, ანუ $F^{-1}(0.5)$, სადაც $F(x)$ არის $\xi$ შემთხვევითი სიდიდის ნორმალური განაწილების ფუნქცია. ამიტომ

$$a = F^{-1}(0.5) = med(x_1, x_2, ..., x_n) = \vartheta_n(0.5),$$

სადაც $\vartheta_n$ არის 0.5 დონის მქონე ამონარჩევის კვანტილი, ანუ მედიანა. ავღნიშნოთ $\vartheta_n(0.75)$ და $\vartheta_n(0.25)$ არიან შემთხვევითი $\xi$ სიდიდის შსაბამისად ზედა და ქვედა კვარტილების სტატისტიკური ანალოგები. მაშინ (4.1)-ის საფუძველზე ვწერთ

$$a + \sigma \cdot \Phi^{-1}(0.75) = \vartheta_n(0.75),$$

$$a + \sigma \cdot \Phi^{-1}(0.25) = \vartheta_n(0.25).$$

აქედან ადვილად ვღებულობთ საშუალო კვადრატული გადახრის შეფასების გამოსათვლელ ფორმულას

$$\hat{\sigma} = \frac{\vartheta_n(0.75) - \vartheta_n(0.25)}{\Phi^{-1}(0.75) - \Phi^{-1}(0.25)} = \frac{\vartheta_n(0.75) - \vartheta_n(0.25)}{2 \cdot \Phi^{-1}(0.75)},$$

რადგან სამართლიანია ტოლობა $\Phi^{-1}(0.75) = -\Phi^{-1}(0.25)$. ამრიგად, მათემატიკური მოლოდინის და საშუალო კვადრატული გადახრის შეფასებების გამოსათვლელად მივიღეთ მომენტების მეთოდისაგან განსხვავებული ფორმულები.

## 4.5. შეფასებების თვისებები. ინტერვალური შეფასებები

ზემოთ უკვე ავღნიშნეთ, რომ პრინციპში შესაძლებელია სტატისტიკური პარამეტრების შეფასებების უსასრულო რაოდენობის პოვნა. იმისათვის, რომ გამოვყოთ ამ უსასრულო რაოდენობიდან ყველაზე უფრო ოპტიმალური შეფასებები, საჭიროა ჩამოვაყალიბოთ ოპტიმალურობის კრიტერიუმები, ანუ კრიტერიუმები, რომლებიც საშუალებას იძლებიან უპირატესობა მივცეთ ამა თუ იმ შეფასებებს. ყველაზე გავრცელებული კრიტერიუმებია შემდეგი.

1. *შეფასების ძალმოსილება*, რომლის ქვეშაც იგულისხმება შეფასების შემდეგი თვისება $\theta_n \xrightarrow{\text{по вероят.}} \theta$, როდესაც $n \to \infty$.
2. *შეფასების წაუნაცვლებლობა*, რომლის ქვეშაც იგულისხმება შეფასების შემდეგი თვისება $M\theta_n = \theta$.
3. *შეფასების ეფექტურობა*, რომლის ქვეშაც იგულისხმება შეფასების შემდეგი თვისება $M(\theta_n - \theta)^2 \Rightarrow \min$, ანუ შეფასების დისპერსიის მინიმალურობა.

ზოგჯერ ეფექტურობის მაჩვენებლად გამოიყენება არა დისპერსია, არამედ განსაზღვრული $W(\theta_n, \theta)$ ფუნქცია, რომელიც ახასიათებს რისკს, დაკავშირებულს $\theta_n$ შეფასებასთან. ამ ფუნქციას დანაკარგების ფუნქციას უწოდებენ. შეფასებას უწოდებენ *ეფექტურს*, თუ მისი შესაბამისი დანაკარგების მათემატიკური მოლოდინი $MW(\theta_n, \theta)$ მინიმალურია.

აქამდე ვიხილავდით წერტილოვან შეფასებებს, რომლებიც დაკვირვების შედეგების $(x_1, x_2, ..., x_n)$ საფუძველზე იძლევიან შესაფასებელი პარამეტრის ერთ მიახლოებით მნიშვნელობას. ამასთან უცნობია შეფასებების გამოთვლისას დაშვებული შეცდომები, ანუ არ არის ცნობილი $\theta_n$ რამდენად შორს არის $\theta$-გან. ხშირად, ამოცანების გადაწყვეტისას, მოითხოვება ისეთი არეს პოვნა (დაკვირვების შედეგების საფუძველზე), რომელიც მოიცავს პარამეტრი $\theta$-ს უცნობ ნამდვილ მნიშვნელობას მოცემული ალბათობით, ანუ საჭიროა ისეთი, მოცემულ $\alpha$ ალბათობაზე დამოკიდებული $A_n(\alpha)$ არეს პოვნა, რომ ადგილი ჰქონდეს

$$P(\theta \in A_n(\alpha)) = 1 - \alpha,$$

ანუ ალბათობა იმისა, რომ $\theta$-ს უცნობი მნიშვნელობა იმყოფება ამ არეში $1-\alpha$-ს ტოლია. ინდექსი $n$ მიუთითებს იმ ფაქტზე, რომ $A_n(\alpha)$ არე ნაპოვნია $n$ მოცულობის ამონარჩევის საფუძველზე. $1-\alpha$ ალბათობას ეძახიან ნდობის ალბათობას, ხოლო $A_n(\alpha)$ არეს – ნდობის არეს. რაც უფრო დიდია $1-\alpha$ ნდობის ალბათობა, მით დიდია ნდობის ინტერვალი.

## 4.6. მაქსიმალური (უდიდესი) დამაჯერებლობის მეთოდი

შევისწავლოთ სტატისტიკური მოდელების პარამეტრების მონახვის კიდევ ერთი მეთოდი (გარდა მომენტების და კვანტილების). ეს მეთოდი ყველაზე უფრო გავრცელებულია იმიტომ, რომ საშუალებას იძლევა ყველაზე უფრო სრულად გავითვალისწინოთ დაკვირვების შედეგებში მოცემული ინფორმაცია.

ვთქვათ $x_1, x_2, ..., x_n$ არის დაკვირვების შედეგები $\xi$ შემთხვევით სიდიდეზე, რომელსაც აქვს $p(x,\theta)$ ალბათობების განაწილების სიმკვრივე, ანუ $X_1, X_2, ..., X_n$ - ურთიერთ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, რომელთაგან ნებისმიერს აქვს $p(x,\theta)$ ალბათობების განაწილების სიმკვრივე. დაკვირვების შედეგების დამოუკიდებლობის გამო მათი ალბათობების განაწილების ერთობლივი სიმკვრივე ტოლია $p(x_1,\theta) \cdot p(x_2,\theta) \cdots p(x_n,\theta)$. პარამეტრ $\theta$-ს *უდიდესი დამაჯერებლობის შეფასება* ჰქვია მის $\theta_{М.П.}(n)$ მნიშვნელობას, რომლისათვისაც ადგილი აქვს

$$p(x_1,\theta_{М.П.})\cdot p(x_2,\theta_{М.П.})\cdots p(x_n,\theta_{М.П.})\geq p(x_1,\theta)\cdot p(x_2,\theta)\cdots p(x_n,\theta)\,.$$

განვიხილოთ უდიდესი შესაძლებლობების შეფასებების მიღების მაგალითი ალბათობების ნორმალური განაწილების კანონისათვის. ვთქვათ $x_1,x_2,...,x_n$ არის $\xi$ შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების შედეგები, სადაც $\xi\sim N(a,\sigma^2)$, ანუ ადგილი აქვს

$$p(x_1,\theta)\cdot p(x_2,\theta)\cdots p(x_n,\theta)=(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\cdot\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2\}\,. \tag{4.2}$$

უდიდესი შესაძლებლობების შეფასებების მისაღებად $a$ და $\sigma^2$ პარამეტრებისათვის უნდა ვიპოვოთ მათი ისეთი მნიშვნელობები, რომელთათვისაც (4.2) გამოსახულება ღებულობს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

დაუშვათ $\sigma^2$-ის მნიშვნელობა მოცემულია. გამოსახულება (4.2) ღებულობს უდიდეს მნიშვნელობას $a$ პარამეტრით, როდესაც ექსპონენტის მაჩვენებელი ნოლის ტოლია, ანუ

$$\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2=0\,. \tag{4.3}$$

(4.3)-ის ამოხსნით ვღებულობთ $a_{М.П.}=\overline{x}$ .

$\sigma^2$-ის უდიდესი შესაძლებლობების შეფასების მისაღებად ვისარგებლოთ ფუნქციის მაქსიმუმის პოვნის ანალიტიკური მეთოდით, ანუ გავადიფერენციალოთ (4.2) $\sigma^2$-ით და ამოვხსნათ მიღებული განტოლება $\sigma^2$-თან მიმართებაში. შედეგედ ვღებულობთ

$$\sigma^2_{М.П.}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\,.$$

ამრიგად მივიღეთ, რომ ალბათობების განაწილების ნორმალური კანონისათვის პარამეტრების უდიდესი დამაჯერებლობის შეფასებები და მომენტების მეთოდით მიღებული შეფასებები ერთმანეთს ემთხვევა. სამწუხაროდ, ანალოგიურ ფაქტს ადგილი აქვს ალბათობების განაწილების არა ყველა კანონისათვის.

## თავი 5. ერთი და ორი ნორმალური ამონარჩევის ანალიზი

წინამდებარე თავში განვიხილავთ წინა ორ თავში შესწავლილ საკითხებს, ანუ შეფასებათა თეორიისა და ჰიპოთეზების შემოწმების ძირითად საკითხებს ნორმალური განაწილებისათვის ამ უკანასკნელის განსაკუთრებული ადგილის გამო ალბათობის თეორიასა და მათემატიკურ სტატისტიკაში.

### 5.1. ნორმალური ამონარჩევის გამოკვლევა

ზემოთ უკვე აღვნიშნეთ, რომ პარამეტრების შეფასების და ჰიპოთეზების შემოწმების მეთოდები იყოფა ორ დიდ ჯგუფად: *პარამეტრულ* და *არაპარამეტრულ მეთოდებად.* პარამეტრული მეთოდებია ის მეთოდები, რომლებიც დაფუძნებულია დაკვირვების შედეგების განაწილების კანონებზე. არაპარამეტრული მეთოდები განაწილების კანონებს არ იყენებენ.

პარამეტრული მეთოდების დიდი უმრავლესობა დამუშავებულია ნორმალური განაწილების კანონისათვის. თუ პარამეტრული მეთოდი დამუშავებულია ერთი რომელიმე განაწილების კანონისათვის და მას ვიყენებთ ისეთი დაკვირვების შედეგებისათვის, რომლებიც არ ემორჩილებიან ამ განაწილების კანონს, მაშინ მიღებული გადაწყვეტილების სანდოობა, ზოგადად, ნაკლები იქნება საჭირო სანდოობაზე. ამიტომ, პარამეტრული მეთოდების გამოყენების წინ, საჭიროა შემოწმდეს ჰიპოტეზა, რომ დაკვირვების შედეგები ემორჩილებიან მოცემულ განაწილების კანონს. კერძოდ, ნორმალური განაწილებისათვის დამუშავებული კრიტერიუმების გამოყენებისას, საჭიროა დავრწმუნდეთ, რომ დაკვირვების შედეგები ემორჩილებიან ნორმალურ განაწილებას. ასეთი ჰიპოთეზის შემოწმება საკმაოდ რთული ამოცანაა იმ თვალსაზრისით, რომ სანდო გადაწყვეტილების მისაღებად საჭიროა დიდი რაოდენობა დაკვირვების შედეგები (ასობით, ათასობით). თუმცა კი დაკვირვებების მცირე რიცხვის დროს, როდესაც არ არის შესაძლებლობა გავზარდოთ დაკვირვებების რაოდენობა, განაწილების ნორმალურობაზე შემოწმებას მაინც ახდენენ, მაგრამ ამ დროს მიღებული გადაწყვეტილებების სანდოობა საკმაოდ დაბალია და დაკვირვების შედეგების განაწილების კანონის ნორმალურობის ჰიპოთეზა უარიყოფა იმ შემთხვევაში, როდესაც დაკვირვების შედეგების განაწილების კანონი მკვეთრად განსხვავდება ნორმალური განაწილებისაგან. დაკვირვების შედეგების განაწილების კანონების ტიპის შესახებ გადაწყვეტილების მიღება ხდება კრიტერიუმებით, რომლებსაც *თანხმობის კრიტერიუმები* ჰქვია.

ცნობილია თანხმობის კრიტერიუმები: ხი-კვადრატი ($\chi^2$), კოლმოგოროვ-სმირნოვის, ომეგა-კვადრატი ($\omega^2$) და სხვა. ეს კრიტერიუმები უნივერსალური კრიტერიუმებია და გამოიყენებიან ნებისმიერი ტიპის განაწილების კანონისათვის. ისინი იძლევიან საშუალებას მივიღოთ სწორი გადაწყვეტილება მოცემული ალბათობით დაკვირვებათა დიდი რიცხვისათვის. განაწილების კანონის ნორმალურობაზე შემოწმებისათვის, როდესაც დაკვირვებათა რიცხვი მცირეა, გამოიყენებიან სპეციალური, ნორმალური განაწილებისათვის დამუშავებული, კრიტერიუმები. ნორმალურობაზე შემოწმებისას აგრეთვე გამოიყენებიან ასიმეტრიისა და ექსცესის კოეფიციენტებზე დაფუძნებული კრიტერიუმები.

საერთოდ, ნორმალური ამონარჩევის განხილვისას, შეიძლება განხილული იქნას ორი ტიპის ამოცანები:

1) დაკვირვების შედეგებით მოინახოს ნორმალური განაწილების პარამეტრების, ანუ $a$ და $\sigma^2$ - ის შეფასებები;

2) შემოწმდეს ამ პარამეტრების გარკვეულ მნიშვნელობებთან ტოლობის ჰიპოთეზა. მაგალითად, $H_0: a = a_0$; $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$, სადაც $a_0$ და $\sigma_0^2$ მოცემული მნიშვნელობებია. ან ორი ამონარჩევის პარამეტრების ერთმანეთთან ტოლობა. მაგალითად, $H_0: a_1 = a_2$, სადაც $a_1$ და $a_2$, შესაბამისად, პირველი და მეორე ამონარჩევის მათემატიკური მოლოდინებია. წინამდებარე თავში შევისწავლით ასეთი ამოცანების გადაწყვეტის მეთოდებს.

მოკლედ მოვიყვანოთ ნორმალური განაწილების ზოგიერთი თვისება, რომელიც დაგვჭირდება წინამდებარე თავში.

1) ნორმალური განაწილების ფუნქცია $F(x)$ მათემატიკური მოლოდინით $a$ და დისპერსიით $\sigma^2$ დაკავშირებულია ნორმალიზებულ ნორმალური განაწილების $\Phi(x)$ ფუნქციასთან შემდეგნაირად

$$F(x) = \Phi(\frac{x-a}{\sigma}).$$

2) თუ $\xi$ არის ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე მათემატიკური მოლოდინით $a$ და დისპერსიით $\sigma^2$, ხოლო $\eta$ არის ნორმალიზებული ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, მაშინ $\xi = a + \sigma \cdot \eta$.

3) თუ $\xi_1$ და $\xi_2$ არიან დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეები, მათემატიკური მოლოდინებით და დისპერსიებით შესაბამისად $a_1, a_2$ და $\sigma_1^2, \sigma_2^2$, მაშინ შემთხვევითი სიდიდე $\xi = \xi_1 + \xi_2$ განაწილებულია ნორმალური კანონით მათემატიკური მოლოდინით $a_1 + a_2$ და დისპერსიით $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

## 5.2. ნორმალურობის შემოწმების გრაფიკული მეთოდი

შევისწავლოთ დაკვირვების შედეგების განაწილების კანონის ნორმალ-რობაზე შემოწმების უმარტივესი გრაფიკული მეთოდი, რომელიც დაფუძნებულია ადამიანის თვალის შესაძლებლობაზე გამოარჩიოს წრფივი დამოკიდებულება სხვა სახის დამოკიდებულებისაგან. ვთქვათ მოცემულია დაკვირვების შედეგები $x_1, x_2, ..., x_n$. დავალაგოთ დაკვირვების ეს შედეგები ვარიაციული მწკრივის სახით $x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}$. თუ ამონარჩევი არის ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეებზე დაკვირვების შედეგები, მაშინ მათ ნორმირებულ მნისვნელობებს აქვთ სტანდარტული ნორმალური განაწილება. მოვახდინოთ ამონარჩევის გარდაქმნა შემდეგნაირად $y = \Phi(\frac{x-a}{\sigma})$, სადაც $a$ და $\sigma$ არიან მათემატიკური მოლოდინი და დისპერსია შესაბამისად. შემოვიტანოთ სიდიდე $z = \Phi^{-1}(y)$. ჩანს, რომ $z$ და $x$ შორის არსებობს წრფივი

კავშირი, რადგან $z=\dfrac{x-a}{\sigma}$. ვისარგებლოთ ამ დამოკიდებულებით და ყოველი დაკვირვების შედეგისათვის $x_{(1)},x_{(2)},...,x_{(n)}$ გამოვთვალოთ შესაბამისი $z$.

განაწილების სტატისტიკური ფუნქცია $F_n(x)$, როგორც ვიცით, არის საფეხუროვანი ფუნქცია, რომელიც ვარიაციულ მწკრივის ყოველ წერტილში იზრდება $1/n$ სიდიდით, ამასთან როცა $x<x_{(1)}$ $F_n(x)=0$, ხოლო როცა $x>x_{(n)}$ $F_n(x)=1$. გამოვიყენოთ ვარიაციული მწკრივის ყველა წერტილის შესაბამისი $F_n(x)$ ფუნქციის ნახტომის შუაწერტილისათვის ფუნქცია $\Phi^{-1}$. შედეგად $(x,z)$ კოორდინატთა სიბრტყეში მივიღებთ წერტილებს $\left(x_{(i)},\Phi^{-1}\left(\dfrac{2i-1}{2n}\right)\right)$, რომლებიც განლაგდებიან წრფეზე, თუ დაკვირვების შედეგები განაწილებული არიან ნორმალური კანონის თანახმად, წინააღმდეგ შემთხვევაში ისინი არ ყოფილან ნორმალურად განაწილებულნი.

## 5.3. ნორმალური განაწილების პარამეტრების შეფასება და მათი თვისებები

ნორმალურ განაწილებას, როგორც ვიცით, აქვს ორი პარამეტრი: მათემატიკური მოლოდინი და დისპერსია. ზემოთ ვისწავლეთ ამ პარამეტრების შეფასებების გამოთვლის მეთოდები და კერძოდ, ვნახეთ, რომ როგორც მომენტების მეთოდით, ასევე უდიდესი დამაჯერებლობის მეთოდით, ამ პარამეტრების შეფასებები გამოითვლებიან შემდეგნაირად

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\ ,\ \ S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\ .$$

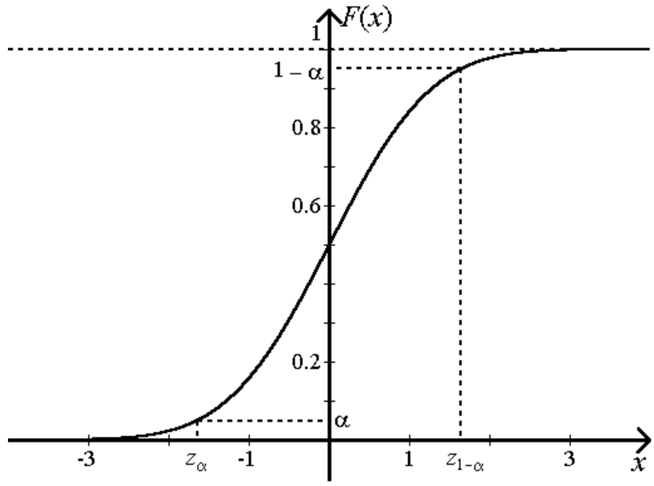
შესაძლებელია ამ პარამეტრების შეფასებები მოვნახოთ სხვა ფორმულებითაც, კერძოდ, მათემატიკური მოლოდინის შეფასება მოვნახოთ ფორმულით $\bar{x}=\dfrac{1}{n-2}\sum_{i=2}^{n-1}x_{(i)}$, დისპერსიის შეფასება მოვნახოთ ფორმულით $S^2=\left[\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{x}|\right]^2$ და ა.შ.

წერტილოვანი შეფასების მონახვისას ყოველთვის ისმება კითხვა: რამდენად ზუსტად შეესაბამება ეს შეფასება საძიებელ უცნობ სიდიდეს?

*განვიხილოთ მათემატიკური მოლოდინის შემთხვევა*. ვთქვათ $\bar{x}$ არის უცნობი $a$ მათემატიკური მოლოდინის შეფასება. ყოველი სასრულო ამონარჩევისათვის საინტერესოა $\bar{x}$-ის $a$-გან გადახრის შეფასება. ვიცით, რომ როცა $n\to\infty$ $\bar{x}$ ალბათურად მიისწრაფის $a$-კენ, ანუ ალბათობა უტოლობისა $|\bar{x}-a|<\varepsilon$, სადაც $\varepsilon$ არის რაგინდ მცირე დადებითი რიცხვი, მიისწრაფის ერთისკენ, როდესაც $n\to\infty$.

საინტერესოა მოცემულ $n$ მოცულობის ამონარჩევს როგორი $\varepsilon$ შეესაბამება მოცემული ალბათობით. ვიცით, რომ თუ $x_1,x_2,...,x_n$ განაწილებულია ნორმალური განაწილების კანონით მათემატიკური

მოლოდინით $a$ და დისპერსიით $\sigma^2$, მაშინ შემთხვევითი სიდიდე $\bar{x}$, როგორც დაკვირვების შედეგების წრფივი კომბინაცია, განაწილებულია ნორმალური კანონით მათემატიკური მოლოდინით $a$ და დისპერსიით $\sigma^2/n$, ანუ $\bar{x} \sim N(\cdot; a, \sigma^2/n)$. ამიტომ, შემთხვევითი სიდიდე $\eta = \sqrt{n}(\bar{x}-a)/\sigma \sim N(\cdot;0,1)$. აქედან გამომდინარეობს $P\left(|\eta| < z_{1-\alpha}\right) = 1-2\alpha$, სადაც $z_{1-\alpha}$ არის სტანდარტული ნორმალური განაწილების $1-\alpha$ დონის კვანტილი. ამ ფორმულის სამართლიანობა ცხადად ჩანს ნახ. 5.1-ზე მოყვანილი გრაფიკიდან.




ნახ. 5.1.

ჩავსვათ ბოლო ფორმულაში $\eta$ მნიშვნელობა. მივიღებთ, რომ $P\left(\left|\sqrt{n}\left(\bar{x}-a\right)/\sigma\right| < z_{1-\alpha}\right) = 1-2\alpha$, ანუ $P\left(\left|\left(\bar{x}-a\right)\right| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}\right) = 1-2\alpha$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $\bar{x}$-ის $a$-თან მიახლოების სიზუსტე $\sigma \cdot z_{1-\alpha}/\sqrt{n}$ სიდიდეზე უარესი არ არის $1-2\alpha$-ს ტოლი ალბათობით. ამოვწეროთ ეს ინტერვალი მათემატიკური მოლოდინის უცნობი $a$ მნიშვნელობისათვის. მივიღებთ

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} < a < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}. \tag{5.1}$$

ამრიგად, მივიღეთ ინტერვალი, რომელიც შეიცავს ნორმალური განაწილების მათემატიკურ მოლოდინს მოცემული ალბათობით. ამ ინტერვალს მათემატიკური მოლოდინის *ნდობის ინტერვალი* ჰქვია, შესაბამისად ნდობის ალბათობით $1-2\alpha$.

გამოვიკვლიოთ როგორ მოქმედებს ნდობის ინტერვალის სიდიდეზე დაკვირვების შედეგების მოცულობა $n$, შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა $\sigma$ და ალბათობა $\alpha$.

(5.1)-დან ჩანს, რომ $n$-ის გაზრდით, ანუ დაკვირვებების რიცხვის გაზრდით, მცირდება ინტერვალის სიდიდე საშუალო კვადრატული გადახრის და $\alpha$-ს მოცემული მნიშვნელობისათვის. მაგრამ ინტერვალის შემცირება ხდება არა $n$-ის პირდაპირპროპორციულად, არამედ $\sqrt{n}$-ის პროპორციულად. მაგალითად, თუ გვინდა წმინდა სტატისტიკური მეთოდებით 10-ჯერ გავზარდოთ შეფასების სიზუსტე, დაკვირვებების მოცულობა უნდა გავზარდოთ 100-ჯერ.

შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრის გაზრდით ნდობის ინტერვალის სიდიდე იზრდება, ანუ უარესდება შეფასების სიზუსტე. $\alpha$-ს შემცირებით, ანუ ნდობის ალბათობის გაზრდით (ერთთან მიახლოებით) ნდობის ინტერვალის სიდიდე იზრდება, რადგან $\alpha$-ს შემცირებით $z_{1-\alpha}$ იზრდება.

ამრიგად, განვიხილეთ შემთხვევა, როდესაც ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა იყო ცნობილი. განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც საშუალო კვადრატული გადახრა არის უცნობი და ვსარგებლობთ მისი $S$ შეფასებით. ამ შემთხვევაში განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევითი სიდიდე

$$t = \sqrt{n}\,\frac{(\overline{x}-a)}{S}.$$

თუ გავიხსენებთ ზემოთ განხილულ სტიუდენტის განაწილების კანონს, ადვილად მივხვდებით, რომ $t$ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია სტიუდენტის განაწილების კანონით $n-1$-ის ტოლი თავისუფლების ხარისხით. ამიტომ ადგილი აქვს შემდეგ პირობას $P\left(|t| < t_{1-\alpha}\right) = 1-2\alpha$, სადაც $t_{1-\alpha}$ არის სტიუდენტის განაწილების კანონის $1-\alpha$ პროცენტული წერტილი, ანუ $1-\alpha$ დონის კვანტილი. თუ უკანასკნელ ფორმულაში ჩავსვავთ $t$-ს მნიშვნელობას მივიღებთ $P\left(\left|\sqrt{n}\,\frac{(\overline{x}-a)}{S}\right| < t_{1-\alpha}\right) = 1-2\alpha$. საიდანაც მათემატიკური მოლოდინის ნდობის ინტერვალისათვის ვღებულობთ

$$\overline{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha} < a < \overline{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}. \qquad (5.2)$$

ამ შემთხვევაშიც ნდობის ინტერვალის დამოკიდებულება $n$-ის, $S$-ის და $\alpha$-გან ანალოგიურია წინა შემთხვევის.

*მოვნახოთ ნდობის ინტერვალი ნორმალური განაწილების დისპერსიისათვის.* ვიცით, რომ დისპერსიის წაუნაცვლებელი შეფასება გამოითვლება ფორმულით

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.$$

თუ გამოვიყენებთ იმ ფაქტს, რომ $x_i = a + \sigma \cdot \eta_i$, სადაც $\eta_i \sim N(\cdot;0,1)$, მაშინ დისპერსიის შეფასების ფორმულა ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$S^2 = \frac{\sigma^2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\eta_i - \overline{\eta})^2.$$

აქედან ვღებულობთ, რომ

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}(\eta_i - \overline{\eta})^2. \qquad (5.3)$$

თუ გავიხსენებთ ზემოთ შესწავლილ $\chi^2$ განაწილების კანონს, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ შემთხვევითი სიდიდე $\sum_{i=1}^{n}(\eta_i - \overline{\eta})^2$ განაწილებულია $\chi^2$ განაწილების კანონით $n-1$ თავისუფლების ხარისხით, ანუ $\sum_{i=1}^{n}(\eta_i - \overline{\eta})^2 \sim \chi^2_{n-1}(x)$. აღვნიშნოთ $\chi^2_{n-1,\alpha}$ და $\chi^2_{n-1,1-\alpha}$ $n-1$ თავისუფლების

ხარისხიანი $\chi^2$ განაწილების $\alpha$ და $1-\alpha$ პროცენტული წერტილები. ცხადია, რომ ადგილი აქვს შემდეგ პირობას

$$P(\chi^2_{n-1,\alpha} < \chi^2_{n-1}(x) < \chi^2_{n-1,1-\alpha}) = 1-2\alpha .$$

უკანასკნელ ფორმულაში შევიტანოთ $\chi^2_{n-1}(x)$-ის მნიშვნელობა (5.3)-დან, მივიღებთ

$$P(\chi^2_{n-1,\alpha} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{n-1,1-\alpha}) = 1-2\alpha ,$$

საიდანაც ადვილად ვღებულობთ დისპერსიის ნდობის ინტერვალს

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha}} .$$

ამრიგად, მიღებული გამოსახულება არის ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის დისპერსიის ნდობის ინტერვალი $1-2\alpha$-ს ტოლი ნდობის ალბათობით.

### 5.4. ნორმალური განაწილების პარამეტრებთან დაკავშირებული ჰიპოთეზების შემოწმება

#### 5.4.1. ერთი ამონარჩევი

ვთქვათ $x_1, x_2, ..., x_n$ არის ნორმალურად განწილებულ შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების შედეგები მათემატიკური მოლოდინით $a$ და დისპერსიით $\sigma^2$. განვიხილოთ ორი შემთხვევა: 1) დისპერსია $\sigma^2$ ცნობილია; 2) დისპერსია $\sigma^2$ უცნობია.

**დისპერსია ცნობილია**. ვთქვათ, გვინდა შევამოწმოთ ჰიპოტეზა $H_0 : a = a_0$, სადაც $a_0$ არის მათემატიკური მოლოდინის რაღაც გარკვეული მნიშვნელობა. განვიხილოთ ორმხრივი ალტერნატიული ჰიპოტეზა $H_1 : a \neq a_0$. შემოვიტანოთ შემთხვევითი სიდიდე $\eta = \sqrt{n}\,\frac{(\bar{x}-a_0)}{\sigma}$. თუ ძირითადი ჰიპოტეზა სამართლიანია, ანუ დაკვირვების შედეგების მათემატიკური მოლოდინი $a_0$-ის ტოლია, მაშინ შემთხვევითი სიდიდე $\eta$ ემორჩილება სტანდარტულ ნორმალურ განაწილებას, ანუ $\eta = \sqrt{n}\,\frac{(\bar{x}-a_0)}{\sigma} \sim N(\cdot;0,1)$. შევირჩიოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობის დონე $0<\alpha<1$. მაშინ $H_0$ ჰიპოტეზის სამართლიანობისას ადგილი აქვს უტოლობას

$$\sqrt{n}\left|\frac{(\bar{x}-a_0)}{\sigma}\right| < z_{1-\alpha/2} , \qquad (5.4)$$

სადაც $z_{1-\alpha/2}$ არის სტანდარტული ნორმალური განაწილების $1-\alpha/2$ დონის კვანტილი.

ამრიგად, მივიღეთ $H_0$ ჰიპოტეზის მიღების არე. თუ ადგილი აქვს (5.4) უტოლობას, მიიღება ძირითადი ჰიპოტეზა, წინააღმდეგ შემთხვევაში მიიღება ორმხრივი ალტერნატიული ჰიპოტეზა.

**დისპერსია უცნობია**. ამ შემთხვევაში ვსარგებლობთ დისპერსიის $S^2$ შეფასებით. $\eta$ სტატისტიკის ნაცვლად განვიხილოთ სტატისტიკა $t=\sqrt{n}\frac{(\bar{x}-a_0)}{S}$. იმ შემთხვევაში, როდესაც სამართლიანია $H_0$ ძირითადი ჰიპოტეზა, $t$ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია სტიუდენტის კანონის თანახმად $n-1$-ის ტოლი თავისუფლების ხარისხით. თუ კრიტერიუმის მნიშვნელობის დონეს ავიღებთ ისევ $\alpha$ - ს ტოლს, მაშინ $H_0$ ჰიპოტეზის მიღების არეს აქვს სახე

$$\sqrt{n}\left|\frac{(\bar{x}-a_0)}{S}\right|<t_{1-\alpha/2}, \tag{5.5}$$

სადაც $t_{1-\alpha/2}$ არის $n-1$-ის ტოლი თავისუფლების ხარისხის მქონე სტიუდენტის განაწილების $1-\alpha/2$ დონის კვანტილი. ამრიგად, თუ ადგილი აქვს (5.5) პირობას მიიღება ძირითადი ჰიპოთეზა, წინააღმდეგ შემთხვევაში – ორმხრივი ალტერნატიული ჰიპოტეზა.

### 5.4.2. ორი ამონარჩევი

განვიხილოთ ორი ნორმალური ამონარჩევის მათემატიკური მოლოდინების შედარების ამოცანა.

ვთქვათ $x_1,x_2,...,x_n$ და $y_1,y_2,...,y_m$ დამოუკიდებელი ამონარჩევებია შესაბამისად $(a_1,\sigma_1^2)$ და $(a_2,\sigma_2^2)$ პარამეტრების მქონე ნორმალური განაწილების კანონებიდან. შევამოწმოთ $H_0:a_1=a_2$ ძირითადი ჰიპოტეზა, რომ ორი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური მოლოდინები ერთმანეთის ტოლია, $H_1:a_1\neq a_2$ ორმხრივი ალტერნატიული ჰიპოტეზის წინააღმდეგ. $\sigma_1^2$ და $\sigma_2^2$ პარამეტრებთან დაკავშირებით შესაძლებელია ოთხი შემთხვევა:

ა) დისპერსიები ცნობილია და ერთმანეთის ტოლია $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$;

ბ) დისპერსიები ცნობილია და ერთმანეთისგან განსხვავდებიან $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$;

გ) დისპერსიები უცნობია და ერთმანეთის ტოლია;

დ) დისპერსიები უცნობია და ერთმანეთისგან განსხვავდებიან.

**პირველი შემთხვევა**. შემოვიტანოთ შემთხვევითი სიდიდე $\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}$. $H_0$ ჰიპოთეზის სამართლიანობის დროს ეს შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია სტანდარტული ნორმალური განაწილების კანონით, ანუ $\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\sim N(\cdot;0,1)$.

შევირჩიოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობის დონე $\alpha$, ხოლო $z_{1-\alpha/2}$-ით აღვნიშნოთ სტანდარტული ნორმალური განაწილების $1-\alpha/2$ დონის კვანტილი. მაშინ ცხადია, რომ ძირითადი $H_0$ ჰიპოტეზის მიღების არეს ექნება შემდეგი სახე

$$\left|\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}}\right| < z_{1-\alpha/2},$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში მიიღება $H_1$ ალტერნატიული ჰიპოტეზა.

**მეორე შემთხვევა**. ამ შემთხვევაში შემოვიტანოთ შემდეგი სახის შემთხვევითი სიდიდე $\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n+\sigma_2^2/m}}$, რომელიც, $H_0$ ჰიპოტეზის სამართლიანობის დროს, განაწილებული იქნება სტანდარტული ნორმალური კანონით. ავღნიშნოთ: $\alpha$ - კრიტერიუმის მნიშვნელობის დონე; $z_{1-\alpha/2}$ - სტანდარტული ნორმალური განაწილების $1-\alpha/2$ დონის კვანტილი. მაშინ $H_0$ ჰიპოტეზის მიღების არეს ექნება შემდეგი სახე

$$\left|\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n+\sigma_2^2/m}}\right| < z_{1-\alpha/2},$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში მიიღება $H_1$ ალტერნატიული ჰიპოტეზა.

**მესამე შემთხვევა**. შემოვიტანოთ შემთხვევითი სიდიდე $\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{S\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}}$, სადაც

$S^2 = \dfrac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}$ არის გაერთიანებული ამონარჩევით გამოთვლილი ამონარჩევების ტოლი დისპერსიების შეფასება, ხოლო $S_1^2$ და $S_2^2$ არიან შესაბამისად პირველი და მეორე ამონარჩევებით გამოთვლილი ერთი და იგივე დისპერსიის შეფასებები. თუ გავიხსენებთ ზემოთ შესწავლილ სტიუდენტის განაწილების კანონს, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ განსახილველი შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია $n+m-2$ თავისუფლების ხარისხის მქონე სტიუდენტის კანონით.

ამ შემთხვევაში $H_0$ ძირითადი ჰიპოტეზის მიღების არეს აქვს შემდეგი სახე

$$\left|\frac{\bar{x}-\bar{y}}{S\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}}\right| < t_{1-\alpha/2},$$

სადაც $t_{1-\alpha/2}$ არის $n+m-2$ თავისუფლების ხარისხის მქონე სტიუდენტის განაწილების $1-\alpha/2$ დონიანი კვანტილი. წინააღმდეგ შემთხვევაში მიიღება $H_1$ ალტერნატიული ჰიპოტეზა.

**მეოთხე შემთხვევა**. ამ შემთხვევაში შემოვიტანოთ შემდეგი სახის შემთხვევითი სიდიდე

$$\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{S_1^2/n+S_2^2/m}},$$

სადაც $S_1^2$ და $S_2^2$ არიან შესაბამისად პირველი და მეორე ამონარჩევის დისპერსიების შეფასებები. ამ შემთხვევითი სიდიდის ზუსტი განაწილების კანონი უცნობია, მაგრამ მიახლოებით ის განაწილებულია სტიუდენტის განაწილების კანონით, თავისუფლების ხარისხით

$$d = \frac{\left(S_1^2 / n + S_2^2 / m\right)^2}{\frac{\left(S_1^2 / n\right)^2}{n-1} + \frac{\left(S_2^2 / m\right)^2}{m-1}}.$$

ამ შემთხვევაში ძირითადი $H_0$ ჰიპოტეზის მიღების არეს აქვს შემდეგი სახე

$$\left|\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{S_1^2 / n + S_2^2 / m}}\right| < t_{1-\alpha/2},$$

სადაც $t_{1-\alpha/2}$ არის $d$ თავისუფლების ხარისხის მქონე სტიუდენტის განაწილების $1-\alpha/2$ დონის პროცენტული წერტილი. წინააღმდეგ შემთხვევაში მიიღება $H_1$ ალტერნატიული ჰიპოტეზა.

განვიხილოთ **ორი ამონარჩევის დისპერსიების ტოლობის ჰიპოთეზის შემოწმების ამოცანა.** განვიხილოთ ძირითადი ჰიპოტეზა $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ორმხრივი ალტერნატიული ჰიპოთეზის წინააღმდეგ $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდე $F = S_1^2 / S_2^2$, რომელსაც უწოდებენ ფიშერის სტატისტიკას. ძირითადი ჰიპოთეზის სამართლიანობისას $F$ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ფიშერის განაწილების კანონით თავისუფლების ხარისხებით $(n-1, m-1)$, სადაც $n$ და $m$ შესაბამისად პირველი და მეორე ამონარჩევების მოცულობებია.

ავირჩიოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობის დონე $\alpha$. ძირითადი ჰიპოთეზის მიღების არეს, ორმხრივი ალტერნატიული ჰიპოთეზის წინააღმდეგ შემოწმებისას, აქვს სახე

$$F_{n-1,m-1;\alpha/2} < F < F_{n-1,m-1;1-\alpha/2},$$

სადაც $F_{n-1,m-1;\alpha/2}$ და $F_{n-1,m-1;1-\alpha/2}$ $(n-1, m-1)$ თავისუფლების ხარისხის მქონე ფიშერის განაწილების $\alpha/2$ და $1-\alpha/2$ დონის კვანტილებია შესაბამისად. წინააღმდეგ შემთხვევაში მიიღება $H_1$ ალტერნატიული ჰიპოთეზა.

### 5.4.3. შეწყვილებული მონაცემები

ვიცით, რომ შეწყვილებულ მონაცემებს აქვს შემდეგი სახე $(x_i, y_i), i = 1,\dots,n$, სადაც $n$ არის დაკვირვებების რაოდენობა. $x_i$ და $y_i$ არიან დაკვირვებები ერთი და იმავე ობიექტზე სხვადასხვა პირობებში. შემოვიტანოთ შემთხვევითი სიდიდეები $z_i = y_i - x_i, i = 1,\dots,n$, და მათ დავადოთ შემდეგი მოთხოვნები:

1) $z_i, i = 1,\dots,n$ ერთმანეთისგან დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია;

2) $z_i$-ის წარმოდგენა შეიძლება შემდეგნაირად $z_i = \theta + \varepsilon_i$, სადაც $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ - დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, $\theta$ - უცნობი მუდმივი სიდიდეა;

3) შემთხვევითი სიდიდე $\varepsilon_i \sim N(\cdot;0,\sigma^2)$, $i=1,\ldots,n$, სადაც, როგორც წესი, დისპერსია $\sigma^2$ არ არის ცნობილი.

ამრიგად, შემოტანილი აღნიშვნით საწყისი შეწყვილებულ მონაცემებიანი ამოცანა მივიყვანეთ ერთი ნორმალური ამონარჩევის ამოცანაზე, რომელიც ზემოთ განვიხილეთ, სადაც ფორმირებული ჰიპოტეზები შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ $\theta$ პარამეტრის მიმართ და მათ შესამოწმებლად გამოვიყენოთ მიღებული კრიტიკული არეები. მაგალითად, ამ შემთხვევაში შეწყვილებული მონაცემების მათემატიკური მოლოდინების ტოლობის ჰიპოთეზას ექნება შემდეგი სახე $H_0:\theta=0$, ხოლო ორმხრივი ალტერნატიული ჰიპოთეზას - $H_1:\theta\neq 0$.

## თავი 6. დისპერსიული ანალიზი

### 6.1. ამოცანის დასმა

აქამდე ვსწავლობდით შემთხვევითი ფაქტორების გავლენას დაკვირვების შედეგებზე. მეორე, არა ნეკლებ მნიშვნელოვანი შემთხვევაა დაკვირვების შედეგებზე არა შემთხვევითი ფაქტორების გავლენა, ანუ შემთხვევა, როდესაც დაკვირვების შედეგებზე მოქმედებენ არა მარტო რომელიღაც შემთხვევითი ფაქტორები, არამედ ფაქტორები, რომლებიც იცვლებიან არა შემთხვევითად. მაგალითად, ნებისმიერი წარმოების მიზანია გამოუშვას ერთგვაროვანი პროდუქცია. პროდუქციის არა ერთგვაროვნებაზე გავლენას ახდენენ წარმოების სხვადასხვა ეტაპები და მათი გავლენა, როგორც წესი, სხვადა-სხვანაირია. არაერთგვაროვნების ფაქტის აღმოჩენისას საჭიროა მისი წარმოშობის მიზეზის დადგენა, ანუ იმ ეტაპების დადგენა, რომლებიც განაპირობებენ პროდუქციის არაერთგვაროვნებას და მათ შორის გამოიყოს ისეთი ეტაპები, რომლებიც ძირითადად განაპირობებენ ამ არაერთგვაროვნებას. ეს იმისათვის არის საჭირო, რომ კაპიტალდაბანდება, პირველ რიგში, განხორციელდეს იმ ეტაპების გასაუმჯობესებლად, რომლებსაც შეაქვთ ყველაზე მეტი არაერთგვაროვნება. ამავე დროს შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ წარმოების რომელიღაც ეტაპები საერთოდ არ აუარესებენ პროდუქციის ერთგვაროვნებას და მათი მოდერნიზაცია არ არის საჭირო. ასეთი ამოცანების გადაწყვეტის საშუალებას იძლევიან მათემატიკური სტატისტიკის სპეციალური მეთოდები, რომლებიც გაერთიანებული არიან საერთო სახელწოდებით "ფაქტორული ანალიზი". წინამდებარე თავში განვიხილავთ მხოლოდ იმ შემთხვევებს, როდესაც შემთხვევითი ცვალებადობა ემორჩილება ნორმალური განაწილების კანონს. ნორმალური განაწილების კანონს აქვს ორი პარამეტრი: მათემატიკური მოლოდინი და დისპერსია. ამიტომ ასეთ შემთხვევით სიდიდეზე არა შემთხვევითი ფაქტორის გავლენა შეიძლება აისახოს როგორც მათემატიკური მოლოდინის, ასევე დისპერსიის ცვალებადობაზე. თუ დაკვირვებები ხორციელდება ერთი და იგივე მეთო-დიკით, ერთი და იგივე ხელსაწყოებით, მაშინ დისპერსია შეიძლება ჩავთვა-ლოთ უცვლელად და არა შემთხვევითი ფაქტორის გავლენა აისახება დაკვირვების შედეგების მათემატიკური მოლოდინის ცვალებადობაზე.

შემდგომში განვიხილავთ მხოლოდ ასეთ შემთხვევებს, როდესაც არა შემ-თხვევითი ფაქტორების გავლენით შეიძლება შეიცვალოს დაკვირვების შედეგების მათემატიკური მოლოდინი. *იმისათვის, რომ დადგინდეს არაშემთხვევითი* $A$ *ფაქტორის გავლენა* $x_1, x_2, ..., x_n$ *დაკვირვების შედეგებზე, საჭიროა შემოვიტანოთ ამ გავლენის მახასიათებელი.* ვთქვათ $A$ ფაქტორის გავლენა შეისწავლება ამ ფაქტორის $A_1, A_2, ..., A_k$ დონეებზე. შესაბამისი დაკვირვების შედეგები ავღნიშნოთ $a_1, a_2, ..., a_k$. მაშინ $A$ ფაქტორის გავლენის შესასწავლად შეიძლება გამოვიყენოთ სიდიდე $\sigma_A^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(a_i - \bar{a})^2$, სადაც $\bar{a} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i$. $\sigma_A^2$-ს $A$ ფაქტორის დისპერსიას ეძახიან. $A$ ფაქტორი არ არის შემთხვევითი, ამიტომ $\sigma_A^2$ არ არის დისპერსია კლასიკური გაგებით. ის განსახილველად შემოტანილი იქნა ორი მიზეზის გამო. ჯერ ერთი იმიტომ, რომ დისპერსია არის გაბნევის უმარტივესი მახასიათებელი. მეორეც,

შემთხვევითი $A$ ფაქტორის გავლენა დაკვირვების შედეგებზე ამ შემთხვევაში ხასიათდება შემთხვევითი ფაქტორის ანალოგიურად. ეს საშუალებას იძლევა ერთმანეთს შევადაროთ შემთხვევითი და არა შემთხვევითი $A$ ფაქტორის გავლენა.

*დისპერსიული ანალიზი ეწოდება მეთოდების ერთობლიობას, რომლებიც საშუალებას იძლევიან მათი დისპერსიების დახმარებით გავაცალკევოთ შემთხვევითი და არა შემთხვევითი ფაქტორების გავლენა შესასწავლ მოვლენაზე.* დისპერსიული ანალიზის ამოცანა არის: დაკვირვების შედეგებით გამოვთვალოთ შემთხვევითი და არა შემთხვევითი ფაქტორების დისპერსიები და შევადაროთ ისინი ერთმანეთს. განვიხილოთ დისპერსიული ანალიზის უმარტივესი შემთხვევა.

ვთქვათ $x_1, x_2, ..., x_n$ დაკვირვების შედეგებზე მოქმედებენ შემთხვევითი ფაქტორი და $A$ ფაქტორი. ვთქვათ შემთხვევითი ფაქტორის დისპერსია ცნობილია და $\sigma^2$-ის ტოლია. დაკვირვების შედეგებით გამოითვლება ამ დაკვირვების შედეგების გაფანტვის დისპერსია $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$. ეს დისპერსია განპირობებულია ორი ფაქტორის გავლენით: შემთხვევითი ფაქტორით, რომელიც ხასიათდება $\sigma^2$ დისპერსიით და $A$ ფაქტორით, რომელიც ხასიათდება $\sigma_A^2$ დისპერსიით. ეს ფაქტორები ერთმანეთისგან დამოუკიდებლები არიან. იმ ფაქტის გათვალისწინებით, რომ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების ჯამის დისპერსია ტოლია ამ შემთხვევითი სიდიდეების დისპერსიების ჯამის, ვწერთ $S^2 = \sigma^2 + \sigma_A^2$. აქედან ვღებულობთ $\sigma_A^2 = S^2 - \sigma^2$.

პრაქტიკაში, როგორც წესი, შემთხვევითი ფაქტორის დისპერსია უცნობია და საჭიროა დაკვირვების შედეგებით მისი შეფასება. გადავიდეთ ისეთი შემთხვევის განხილვაზე, როდესაც დაკვირვების შედეგებზე გავლენას ახდენს ერთი ფაქტორი.

## 6.2. ერთფაქტორული დისპერსიული ანალიზი

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც შემთხვევითი ფაქტორის დისპერსია $\sigma^2$ უცნობია. ამ შემთხვევაში $x_1, x_2, ..., x_n$ დაკვირვების შედეგებით საჭიროა შემთხვევითი ფაქტორის $\sigma^2$ დისპერსიის და არა შემთხვევითი ფაქტორის $\sigma_A^2$ დისპერსიის შეფასება. ამ პრობლემის გადასაწყვეტად საჭიროა $A_1, A_2, ..., A_k$ დონეებზე დაკვირვებების გამეორება. ავღნიშნოთ $x_{i,1}, x_{i,2}, ..., x_{i,n}$-ით $A$ ფაქტორის $A_i$ $(i = 1, ..., k)$ დონის შესაბამისი დაკვირვების შედეგები. ამ შემთხვევაში შეიძლება სხვადასხვანაირად მოვიქცეთ. შეიძლება $A$ ფაქტორის ერთ დონეზე განვახორციელოთ დაკვირვებების დიდი რაოდენობა, ამ დაკვირვებებით შევაფასოთ შემთხვევითი ფაქტორის $\sigma^2$ დისპერსია, მივიღოთ ის შემთხვევითი ფაქტორის დისპერსიის ნამდვილ მნიშვნელობად და გამოვიყენოთ ზემოთ მოყვანილი სქემა. მაგრამ ეს არ არის საუკეთესო გამოსავალი იმიტომ, რომ არ იძლევა საშუალებას $A$ ფაქტორის დონეებზე შევამოწმოთ შემთხვევითი ფაქტორის დისპერსიის ცვალებადობა და ამ

ცვალებადობის არსებობის შემთხვევაში გავითვალისწინოთ ის დისპერსიულ ანალიზში. ამიტომ შემდეგნაირად იქცევიან.

$A$ ფაქტორის $i$ დონეზე ატარებენ დაკვირვებების ერთნაირ $n$ რაოდენობას: $x_{i,j}, i=1,...,k; j=1,...,n$. ითვლიან საშუალოებს $A$ ფაქტორის ყველა დონისათვის და დაკვირვებების ყველა შედეგისათვის

$$\overline{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} \quad \text{და} \quad \overline{\overline{x}} = \frac{1}{n \cdot k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}.$$

ყველა დაკვირვების შედეგის დისპერსია გამოითვლება ფორმულით

$$S^2 = \frac{1}{nk-1}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \overline{\overline{x}})^2.$$

გამოვითვალოთ შემთხვევითი ფაქტორის დისპერსია. $A$ ფაქტორის დაფიქსირებული დონის დაკვირვების შედეგებზე, ანუ განსახილველი ფაქტორის $A_i$ დონეზე $x_{i,1}, x_{i,2},..., x_{i,n}$ დაკვირვების შედეგებზე გავლენას ახდენს მხოლოდ შემთხვევითი ფაქტორი, რომლის დისპერსიაც ფასდება ფორმულით

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x}_i)^2, \quad i = 1,...,k.$$

ყოველი $S_i^2$, $i=1,...,k$, არის შემთხვევითი ფაქტორის დისპერსიის შეფასება. შემთხვევითი ფაქტორის დისპერსიის უფრო ზუსტ შეფასებას მივიღებთ, თუ გავასაშუალებთ მათ მნიშვნელობებს

$$S_0^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} S_i^2 = \frac{1}{k(n-1)}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x}_i)^2.$$

გამოთვლილი $S^2$ და $S_0^2$ მნიშვნელობებით $A$ ფაქტორის დისპერსია შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით

$$\sigma_A^2 \approx S^2 - S_0^2. \tag{6.1}$$

ფორმულა (6.1) იძლევა $\sigma_A^2$ დისპერსიის უხეშ შეფასებას, რადგან $S^2$ და $S_0^2$ არიან დაკვირვების შედეგებით გამოთვლილი შეფასებები. უფრო ზუსტი შეფასება შეიძლება მივიღოთ დაკვირვების შედეგების $A$ ფაქტორის დონეების მიხედვით საშუალო მნიშვნელობების, ანუ $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_k$ საშუალო მნიშვნელობების გაფანტვის განხილვით. ამ საშუალო მნიშვნელობების გაფანტვის დისპერსია ტოლია

$$\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(\overline{x}_i - \overline{\overline{x}})^2 = \sigma_A^2 + \frac{\sigma^2}{n} \approx \sigma_A^2 + \frac{S_0^2}{n}. \tag{6.2}$$

ეს დისპერისა განპირობებულია ორი ფაქტორით: შემთხვევითი და $A$ ფაქტორით. (6.2)-დან ვღებულობთ

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(\overline{x}_i - \overline{\overline{x}})^2 - \frac{S_0^2}{n}.$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$S_A^2 = \frac{n}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(\overline{x}_i - \overline{\overline{x}})^2 = n\sigma_A^2 + S_0^2,$$

მაშინ

$$\sigma_A^2 = \frac{S_A^2 - S_0^2}{n}. \tag{6.3}$$

იმისათვის, რომ დავადგინოთ დაკვირვების შედეგებზე $A$ ფაქტორის გავლენა საჭიროა ერთმანეთს შევადაროთ $S_A^2$ და $S_0^2$ დისპერსიები. თუ ეს დისპერსიები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან, მაშინ ეს განსხვავება შეიძლება გამოწვეული იქნას მხოლოდ $A$ ფაქტორის გავლენით, რომელიც გამოისახება $\sigma_A^2$ დისპერსიით. თუ $S_A^2$ და $S_0^2$ დისპერსიები ერთნაირია, მაშინ ეს მიუთითებს იმაზე, რომ $\sigma_A^2 = 0$, ანუ $A$ ფაქტორი არ მოქმედებს დაკვირვების შედეგებზე.

$S_A^2$ და $S_0^2$ არიან შესაბამისი დისპერსიების შეფასებები. ისინი გამოთვლილია დაკვირვების შედეგებით, რომლებიც შემთხვევითი სიდიდეები არიან. ამიტომ შეფასებებიც შემთხვევითი სიდიდეები არიან. აქედან გამომდინარე მათი ერთმანეთთან შედარება უნდა განხორციელდეს სტატისტიკური კრიტერიუმების გამოყენებით. კერძოდ, ფიშერის კრიტერიუმით, რადგან ცნობილია, რომ დისპერსიის ორი შეფასებული მნიშვნელობის შეფარდება ემორჩილება ფიშერის განაწილების კანონს. შედარების კრიტერიუმს აქვს სახე: თუ

$$\frac{S_A^2}{S_0^2} > F_{1-\alpha}, \tag{6.4}$$

სადაც $F_{1-\alpha}$ არის $l_1 = k-1,\ l_2 = k(n-1)$ თავისუფლების ხარისხებიანი ფიშერის განაწილების $1-\alpha$ დონის კვანტილი, მაშინ მიიღება გადაწყვეტილება, რომ დაკვირვების შედეგებზე $A$ ფაქტორის გავლენა არის არსებითი და ამ გავლენის დისპერსია გამოითვლება (6.3) ფორმულით. წინააღმდეგ შემთხვევაში მიიღება გადაწყვეტილება, რომ დაკვირვების შედეგებზე $A$ ფაქტორი გავლენას არ ახდენს. ამ შემთხვევაში შემთხვევითი ფაქტორის დისპერსიის შეფასებისათვის $S_0^2$-ის ნაცვლად გამოიყენება $S^2$-ი, რომელიც არის შემთხვევითი ფაქტორის დისპერსიის უფრო ზუსტი შეფასება.

კონკრეტული მაგალითების პრაქტიკული გამოთვლების პროცედურების გამარტივების მიზნით მოვიყვანოთ ერთფაქტორული დისპერსიული ანალიზის განხორციელების სქემა.

პირველ რიგში დაკვირვების ყველა შედეგის შეტანა ხდება ერთფაქტორული დისპერსიული ანალიზის ცხრილ 6.1-ში.

ცხრილი 6.1.

| $j$-ი დაკვირ-ვების შედეგი | ფაქტორის დონეები | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $A_1$ | $A_2$ | | $A_k$ |
| 1 | $x_{11}$ | $x_{21}$ | | $x_{k1}$ |
| 2 | $x_{12}$ | $x_{22}$ | | $x_{k2}$ |
| ... | | | | |
| $n$ | $x_{1n}$ | $x_{2n}$ | | $x_{kn}$ |
| ჯამი | $X_1$ | $X_2$ | | $X_k$ |

ცხრილის ბოლო სტრიქონში $X_i$-ით აღნიშნულია $i$ სვეტში მოცემული დაკვირვების შედეგების ჯამი.

დაკვირვების შედეგებით გამოითვლება სიდიდეები:

1) ყველა დაკვირვების შედეგების კვადრატების ჯამი
$$\vartheta_1 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 ;$$
2) სვეტებში მოცემული დაკვირვების შედეგების ჯამების კვადრატების ჯამი გაყოფილი სვეტებში დაკვირვებების რაოდენობაზე
$$\vartheta_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} X_i^2 ;$$
3) დაკვირვების შედეგების ჯამის კვადრატი გაყოფილი დაკვირვებების საერთო რაოდენობაზე
$$\vartheta_3 = \frac{1}{kn}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right)^2 ;$$
4) $S_A^2$ და $S_0^2$ დისპერსიების შეფასებები ფორმულებით
$$S_0^2 = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{k(n-1)}, \quad S_A^2 = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_3}{k-1}. \qquad (6.5)$$

ფიშერის კრიტერიუმებით ერთმანეთს დარდება დისპერსიები $S_A^2$ და $S_0^2$. ერთმანეთისაგან მათი არსებითი განსხვავებისას მიიღება გადაწყვეტილება დაკვირვების შედეგებზე $A$ ფაქტორის არსებითი გავლენის შესახებ და ამ ფაქტორის დისპერსია გამოითვლება (6.3) ფორმულით. წინააღმდეგ შემთხვევაში მიიღება გადაწყვეტილება დაკვირვების შედეგებზე $A$ ფაქტორის გავლენის არა არსებითობის შესახებ და ფორმულით
$$S^2 = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_3}{kn-1}$$
გამოითვლება შემთხვევითი ფაქტორის დისპერსიის უფრო ზუსტი შეფასება ვიდრე (6.5)-ის პირველი ფორმულით გამოთვლილი შეფასებაა.

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება შემთხვევა, როდესაც $A$ ფაქტორის სხვადასხვა დონეებზე მოცემულია დაკვირვების შედეგების სხვადასხვა რაოდენობა, ანუ ფაქტორის $A_i$ დონეზე მოცემულია მნიშვნელობები $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i}$, $i = 1,\dots,k$. ამ შემთხვევაში შეიძლება მოვიქცეთ შემდეგნაირად: $A$ ფაქტორის ყოველი დონისათვის დავტოვოთ დაკვირვებების ერთნაირი რაოდენობა, რომელიც შეესაბამება $n_i$-ის მინიმალურ სიდიდეს, სადაც $i = 1,\dots,k$; დანარჩენი დაკვირვების შედეგები უკუვაგდოთ. დაკვირვების შედეგების უკუგდება აუარესებს ანალიზის შედეგების ხარისხს. ამიტომ, ამ შემთხვევაში, ახორციელებენ ერთფაქტორულ დისპერსიულ ანალიზს, რომელიც არის ზემოთ მოყვანილი სქემის უბრალო მოდიფიკაცია და აქვს სახე:

1) $\vartheta_1 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2$ ;

2) $\vartheta_2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{X_i^2}{n_i}$ ;

3) $\vartheta_3 = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right)^2$, სადაც $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ .

ამ სიდიდეებით გამოითვლება დისპერსიების მნიშვნელობები
$$S_0^2 = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{N-k}, \quad S_A^2 = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_3}{k-1}.$$

მოწმდება დისპერსიების გამოთვლილი მნიშვნელობების ერთმანეთისაგან განსხვავების არსებითობა. თუ სრულდება (6.4) უტოლობა, სადაც $F_{1-\alpha}$ არის $l_1 = k-1$ და $l_2 = N-k$ თავისუფლების ხარისხებიანი ფიშერის განაწილების კანონის $1-\alpha$ დონის კვანტილი, მაშინ მიიღება გადაწყვეტილება დაკვირვების შედეგებზე $A$ ფაქტორის გავლენის არსებითობის შესახებ და ამ გავლენის დისპერსია

$$\sigma_A^2 = \frac{(k-1)N}{N^2 - \sum_{i=1}^{k} n_i^2}(S_A^2 - S_0^2).$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში, ანუ თუ არ სრულდება (6.4) პირობა, მიიღება გადაწყვეტილება დაკვირვების შედეგებზე $A$ ფაქტორის გავლენის არა არსებითობის შესახებ და დისპერსიის უფრო ზუსტი შეფასება გამოითვლება ფორმულით

$$S^2 = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_3}{N-1}.$$

## 6.3. ორფაქტორული დისპერსიული ანალიზი

პრაქტიკაში, ხშირად გვხვდება ამოცანები, როდესაც დაკვირვების შედეგებზე გავლენას ახდენენ მრავალი არაშემთხვევითი ფაქტორები. ასეთი ამოცანების გადასაწყვეტად გამოიყენება მრავალფაქტორული ანალიზის მეთოდები, კერძოდ, მრავალფაქტორული დისპერსიული ანალიზის მეთოდები. მრავალფაქტორული დისპერსიული ანალიზის მაგალითად განვიხილავთ ორფაქტორულ დისპერსიულ ანალიზს, ანუ შემთხვევას, როდესაც დაკვირვების შედეგებზე მოქმედებს ორი ფაქტორი $A$ და $B$. ორი ფაქტორის გავლენა შეიძლება შესწავლილი იქნას ერთფაქტორული დისპერსიული ანალიზის საშუალებით შემდეგნაირად. დავაფიქსიროთ ერთი ფაქტორის (მაგალითად, $B$ ფაქტორის) მნიშვნელობა რაღაც დონეზე და ამ დონეზე შევისწავლოთ მეორე ფაქტორის (მაგალითად, $A$ ფაქტორის) გავლენა დაკვირვების შედეგებზე ერთფაქტორული დისპერსიული ანალიზის გამოყენებით. შემდეგ პირველი $B$ ფაქტორის დონე დავაფიქსიროთ მეორე დონეზე და ამ დონეზე (კვლავ ერთფაქტორული დისპერსიული ანალიზის მეთოდის დახმარებით) შევისწავლოთ მეორე $A$ ფაქტორის გავლენა და ა.შ. ასეთ მიდგომას გააჩნია შემდეგი ნაკლი: 1) $B$ ფაქტორის ყველა დონისათვის საჭიროა ახალი დაკვირვების შედეგები, რომლებიც $B$ ფაქტორის სხვა დონეებისათვის არ გამოდგება, ანუ გაუმართლებლად იზრდება დაკვირვების შედეგების საერთო რაოდენობა; 2) შეუძლებელია $A$ და $B$ ფაქტორების ურთიერთგავლენის ფაქტორის დაკვირვების შედეგებზე გავლენის დადგენა, იმ შემთხვევაში თუ ასეთ გავლენას ადგილი აქვს. ამ ნაკლისაგან თავისუფალია ორფაქტორული დისპერსიული ანალიზი, რომლის განხილვაზეც გადავდივართ.

ავღნიშნოთ $a_1, a_2, ..., a_k$ და $b_1, b_2, ..., b_m$ შესაბამისად $A$ და $B$ ფაქტორების დონეებია. ცხრილი 6..2 წარმოადგენს ორფაქტორული დისპერსიული ანალიზის ცხრილს.

ცხრილი 6.2.

| ფაქტორები | | $A$ | | | | ჯამი |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $a_1$ | $a_2$ | | $a_k$ | |
| $B$ | $b_1$ | $x_{11}$ | $x_{21}$ | | $x_{k1}$ | $X_1'$ |
| | $b_2$ | $x_{12}$ | $x_{22}$ | | $x_{k2}$ | $X_2'$ |
| | | | | | | |
| | $b_m$ | $x_{1m}$ | $x_{2m}$ | | $x_{km}$ | $X_m'$ |
| ჯამი | | $X_1$ | $X_2$ | | $X_k$ | |

მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ ნებისმიერი სვეტის და ნებისმიერი სტრიქონის გადაკვეთაზე მოცემულია დაკვირვების მხოლოდ ერთი შედეგი, ანუ $A$ და $B$ ფაქტორების დონეების ნებისმიერ წყვილს შეესაბამებს მხოლოდ ერთი დაკვირვების შედეგი. ცხრილ 6.2-ში $X_1, X_2, ..., X_k$-ით აღნიშნულია შესაბამის სვეტებში დაკვირვების შედეგების ჯამები, ხოლო $X_1^{'}, X_2^{'}, ..., X_m^{'}$-ით აღნიშნულია დაკვირვების შედეგების ჯამები შესაბამის სტრიქონებში.

ავღნიშნოთ: $\overline{x}_i$ არის $i$-რ სვეტში მოცემული დაკვირვების შედეგების საშუალო არითმეტიკული, ანუ $\overline{x}_i = \dfrac{X_i}{m}$, $i = 1, ..., k$, ხოლო $\overline{x}_j'$ არის $j$-რ სტრიქონში მოცემული დაკვირვების შედეგების საშუალო არითმეტიკული, ანუ $\overline{x}_j' = \dfrac{X_j'}{k}$, $j = 1, .., m$. $\overline{\overline{x}}$-ით აღნიშნულია ყველა დაკვირვების შედეგის საშუალო არითმეტიკული.

განვიხილოთ საშუალო არითმეტიკულების გაბნევა სვეტებში და სტრიქონებში. საშუალო არითმეტიკულების გაბნევაზე სვეტებში მოქმედებს მხოლოდ ორი ფაქტორი: $A$ ფაქტორი და შემთხვევითი ფაქტორი, $B$ ფაქტორი არ მოქმედებს, რადგან მისი მოქმედება ყოველ სვეტზე საშუალდება. ამიტომ შეიძლება დავწეროთ:

$$\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(\overline{x}_i - \overline{\overline{x}})^2 = \sigma_A^2 + \frac{\sigma^2}{m}. \qquad (6.6)$$

ზუსტად ასევე, საშუალო არითმეტიკულების გაფანტვაზე სტრიქონებში მოქმედებს ორი ფაქტორი: $B$ ფაქტორი და შემთხვევითი ფაქტორი, $A$ ფაქტორი არ მოქმედებს, რადგან მისი მოქმედება საშუალდება ყოველ სტრიქონზე. მიტომ სამართლიანია:

$$\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(\overline{x}_j' - \overline{\overline{x}})^2 = \sigma_B^2 + \frac{\sigma^2}{k}. \qquad (6.7)$$

ცნობილი, რომ იყოს შემთხვევითი ფაქტორის დისპერსია $\sigma^2$, (6.6) და (6.7)-დან ადვილად გამოვთვლიდით $A$ და $B$ ფაქტორების შესაბამის დისპერსიებს $\sigma_A^2$ და $\sigma_B^2$ და დავამთავრებდით ორფაქტორულ დისპერსიულ ანალიზს. მგრამ დისპერსია $\sigma^2$ უცნობია და მისი მნიშვნელობა საჭიროა განვსაზღვროთ არსებული დაკვირვების შდეგების საფუძველზე.

მოვიქცეთ შემდეგნაირად. გამოვთვალოთ $i$-რ სვეტში მოცემული დაკვირვების შედეგების დისპერსია

$$S_i^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(x_{ij}-\overline{x}_i)^2\ ,\ \ i=1,\ldots,k\ .$$

ეს დისპერსია განაპირობებულია ორი ფაქტორით: შემთხვევითი ფაქტორი და $B$ ფაქტორი, რადგან $A$ ფაქტორის დონე დაფიქსირებულია. ამიტომ

$$S_i^2 = \sigma_B^2 + \sigma^2\ ,\ \ i=1,\ldots,k\ . \tag{6.8}$$

ტოლობა (6.8) უფრო ზუსტი იქნება, თუ $S_i^2$ ნაცვლად ვისარგებლებთ მათი გასაშუალებული მნიშვნელობით, ანუ

$$\sigma_B^2 + \sigma^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}S_i^2 = \frac{1}{k(m-1)}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}(x_{ij}-\overline{x}_i)^2\ . \tag{6.9}$$

ტოლობა (6.9)-ს გამოვაკლოთ ტოლობა (6.7). მივიღებთ

$$\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{k} = \frac{1}{k(m-1)}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}(x_{ij}-\overline{x}_i)^2 - \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(\overline{x}'_j-\overline{\overline{x}})^2\ .$$

აქედან ადვილად განვსაზღვრავთ $\sigma^2$-ს:

$$\sigma^2 = \frac{1}{(k-1)(m-1)}\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}(x_{ij}-\overline{x}_i)^2 - k\sum_{j=1}^{m}(\overline{x}'_j-\overline{\overline{x}})^2\right].$$

მიღებული გამოსახულება იძლევა საშუალებას დაკვირვების ყველა შედეგით გამოვთვალოთ შემთხვევითი ფაქტორის დისპერსიის შეფასება. აღვნიშნოთ ის $S_0^2$-ით.

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$S_A^2 = \frac{m}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(\overline{x}_i-\overline{\overline{x}})^2 = m\sigma_A^2+\sigma^2 \approx m\sigma_A^2 + S_0^2\ ,$$

$$S_B^2 = \frac{k}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(\overline{x}_j-\overline{\overline{x}})^2 = k\sigma_B^2+\sigma^2 \approx k\sigma_B^2 + S_0^2\ .$$

ამ ფორმულებიდან ცხადად ჩანს, რომ დაკვირვების შედეგებზე $A$ ფაქტორის გავლენისას $S_A^2$ დისპერსია განსხვავებული იქნება $S_0^2$ დისპერსიისაგან. მათი სტატისტიკურად არსებითი განსხვავება უნდა დადგინდეს ფიშერის კრიტერიუმის დახმარებით, რადგან დაკვირვების შედეგებით გამოთვლილი შეფასებები $S_A^2$ და $S_0^2$ არიან შემთხვევითი სიდიდეები. მათი შედარების კრიტერიუმს აქვს შემდეგი სახე: თუ

$$\frac{S_A^2}{S_0^2} > F_{1-\alpha}\ ,$$

სადაც $F_{1-\alpha}$ არის $k-1$ და $(k-1)(m-1)$ თავისუფლების ხარისხებიანი ფიშერის განაწილების კანონის $1-\alpha$ დონის კვანტილი, მაშინ მიიღება გადაწყვეტილება, რომ დაკვირვების შედეგებზე $A$ ფაქტორის გავლენა არსებითია და ამ გავლენის დისპერსია გამოითვლება ფორმულით:

$$\sigma_A^2 = \frac{S_A^2 - S_0^2}{m}\ .$$

თუ $A$ ფაქტორი გავლენას არ ახდენს დაკვირვების შედეგებზე, მაშინ $S_A^2$ და $S_0^2$ არიან შემთხვევითი ფაქტორის დისპერსიის შეფასებები და უფრო ზუსტი შეფასების საპოვნელად საჭიროა მათი საშუალო მნიშვნელობის გამოყენება

$$S^2 = \frac{(k-1)S_A^2+(k-1)(m-1)S_0^2}{(k-1)+(k-1)(m-1)} = \frac{(k-1)S_A^2+(k-1)(m-1)S_0^2}{m(k-1)}\ .$$

ზუსტად ასევე შეიძლება $B$ ფაქტორის გავლენის არსებითობის დადგენა. თუ

$$\frac{S_B^2}{S_0^2} > F_{1-\alpha},$$

სადაც $F_{1-\alpha}$ არის $m-1$ და $(k-1)(m-1)$ თავისუფლების ხარისხებიანი ფიშერის განაწილების კანონის $1-\alpha$ დონის კვანტილი, მაშინ მიიღება გადაწყვეტილება, რომ დაკვირვების შედეგებზე $B$ ფაქტორის გავლენა არსებითია. ამ გავლენის დისპერსია გამოითვლება ფორმულით:

$$\sigma_B^2 = \frac{S_B^2 - S_0^2}{k}.$$

თუ $B$ ფაქტორი გავლენას არ ახდენს დაკვირვების შედეგებზე, მაშინ $S_B^2$ და $S_0^2$ არიან შემთხვევითი ფაქტორის დისპერსიის შეფასებები და უფრო ზუსტი შეფასების გამოთვლა შესაძლებელია მათი საშუალო მნიშვნელობის გამოყენებით

$$S^2 = \frac{(m-1)S_B^2 + (k-1)(m-1)S_0^2}{(m-1)+(k-1)(m-1)} = \frac{(m-1)S_B^2 + (k-1)(m-1)S_0^2}{k(m-1)}.$$

თუ დაკვირვების შედეგებზე არ მოქმედებენ $A$ და $B$ ფაქტორები, მაშინ $S_A^2$, $S_B^2$ და $S_0^2$ დისპერსიების დახმარებით შესაძლებელია შემთხვევითი ფაქტორის დისპერსიის ყველაზე ზუსტი შეფასების გამოთვლა

$$S^2 = \frac{(k-1)S_A^2 + (m-1)S_B^2 + (k-1)(m-1)S_0^2}{(k-1)+(m-1)+(k-1)(m-1)} = \frac{(k-1)S_A^2 + (m-1)S_B^2 + (k-1)(m-1)S_0^2}{mk-1}.$$

ერთფაქტორული დისპერსიული ანალიზის ანალოგიურად გამოთვლების ავტომატიზაციისათვის მოვიყვანოთ ორფაქტორული დისპერსიული ანალიზის გამოთვლების სქემა:

1) $\vartheta_1 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}^2$;

2) $\vartheta_2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k} X_i^2$;

3) $\vartheta_3 = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{m} X_j'^2$;

4) $\vartheta_4 = \frac{1}{km}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right)^2 = \frac{1}{km}\left(\sum_{j=1}^{m} X_j'\right)^2$.

გამოთვლილი სიდიდეებით ჩვენთვის საინტერესო დისპერსიები გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით

$$S_0^2 = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_4 - \vartheta_2 - \vartheta_3}{(k-1)(m-1)};\quad S_A^2 = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_4}{k-1};\quad S_B^2 = \frac{\vartheta_3 - \vartheta_4}{m-1}.$$

განხილულ ორფაქტორულ ანალიზში იგულისხმებოდა, რომ განსახილველი არა შემთხვევითი $A$ და $B$ ფაქტორები ერთმანეთზე არ მოქმედებენ. ასეთი ურთიერთ ზემოქმედების შემთხვევაში ურთიერთ გავლენის ფაქტორის არსებითობის დასადგენად საჭიროა განმეორებადი დაკვირვებები $A$ და $B$ ფაქტორების დაფიქსირებული მნიშვნელობებისათვის. ავღნიშნოთ: $x_{ij1}, x_{ij2}, ..., x_{ijn}$ დაკვირვების შედეგებია $A$ და $B$ ფაქტორების $a_i$ და $b_j$

დონეებზე შესაბამისად. ავღნიშნოთ $A$ და $B$ ფაქტორების ურთიერთ მოქმედების ფაქტორის დისპერსია $\sigma_{AB}^2$-ით. შევინარჩუნოთ აღნიშვნა $x_{ij}$ განმეორებადი დაკვირვების შედეგების საშუალო არითმეტიკულისათვის. შესაბამისი დისპერსია გამოითვლება ფორმულით

$$S_{ij}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{\ell=1}^{n}(x_{ij\ell} - x_{ij})^2 .$$

ის განაპირობებულია ორი ფაქტორის გავლენით: ურთიერთგავლენის ფაქტორი დისპერსიით $\sigma_{AB}^2$ და შემთხვევითი ფაქტორი $S^2$ დისპერსიით, რომლის მნიშვნელობაც გამოითვლება ასე

$$S^2 = \frac{1}{km}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} S_{ij}^2 = \frac{1}{km(n-1)}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n}(x_{ij\ell} - x_{ij})^2 .$$

ორივე ეს დისპერსია შედის $S_0^2$ დისპერსიაში და განსაზღვრავს მის მნიშ-ვნელობას

$$S_0^2 \approx \sigma_{AB}^2 + \frac{S^2}{n} .$$

სიდანაც

$$\sigma_{AB}^2 \approx S_0^2 - \frac{S^2}{n} .$$

აქედან ცხადია, რომ თუ $n \cdot S_0^2$ სტატისტიკურად არსებითად განსხვავდება $S^2$-გან, ანუ თუ ადგილი აქვს

$$\frac{n \cdot S_0^2}{S^2} > F_{1-\alpha} ,$$

სადაც $F_{1-\alpha}$ არის $F_{(k-1)(m-1),km(n-1)}$ ფიშერის განაწილების კანონის $1-\alpha$ დონის კვანტილი, მაშინ მიიღება გადაწყვეტულება, რომ დაკვირვების შედეგებზე მოქმედებს ურთიერთ გავლენის ფაქტორი და მისი დისპერსია ფასდება ფორმულით

$$\sigma_{AB}^2 = \frac{nS_0^2 - S^2}{n} ,$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში დაკვირვების შედეგებზე ურთიერთგავლენის ფაქტორი არ მოქმედებს. ამ შემთხვევაში $S^2$ და $S_0^2$ არიან შემთხვევითი ფაქტორის დისპერსიის შეფასებები და მათი საშუალებით შეიძლება გამოვთვალოთ ამ უკანასკნელის უფრო ზუსტი შეფასება

$$\sigma^2 \approx \frac{km(n-1)S^2 + (k-1)(m-1)S_0^2}{km(n-1) + (k-1)(m-1)} .$$

ურთიერთგავლენის ფაქტორის გათვალისწინებისას ზემოთ მოყვანილი ორფაქტორული ანალიზის სქემა შეივსება შემდეგნაირად. დამატებით გამოითვლება

$$\vartheta_5 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n} x_{ij\ell}^2 \quad \text{და} \quad S^2 = \frac{\vartheta_5 - n\vartheta_1}{km(n-1)} .$$

შემდგომი ანალიზი ხორციელდება ზემოთ მოყვანილის შესაბამისად.

# თავი 7. რეგრესიული ანალიზი

## 7.1. შესავალი

კორელაციური ანალიზი საშუალებას იძლევა დავადგინოთ ერთი შემთხვევითი სიდიდის მეორეზე გავლენის ფაქტი. დისპერისული ანალიზი საშუალებას იძლევა დავადგინოთ შემთხვევით სიდიდეზე არა შემთხვევითი ფაქტორის გავლენა. კვლევის შემდგომი (არა მნიშვნელობის მიხედვით, არამედ განხილვის მიმდევრობით) ეტაპი არის ამ გავლენის რაოდენობრივი აღწერა მისი არსებობის შემთხვევაში.

გადავიდეთ რეგრესიული ანალიზის ძირითადი მომენტების განხილვაზე. მათემატიკური სტატისტიკის ამ მეტად მნიშვნელოვანი ნაწილის უფრო ღრმად შესწავლის მსურველებმა შეუძლიათ ისარგებლონ ლიტერატურით [7, 15, 36, 37, 56].

განვიხილოთ ორი $\xi$ და $\eta$ შემთხვევითი სიდიდეები. ვთქვათ ისინი გავლენას ახდენენ ერთმანეთზე, ანუ ერთი მათგანის ცვლილება განაპირობებს მეორეს ცვლილებას. ამ შემთხვევითი სიდიდეების მნიშვნელობების შეპირისპირებისას შესაძლებელია ორი სახის შეცდომების დაშვება: ა) $\xi$-ს შემთხვევითი ფლუქტუაციის გამო $\eta$-ს მნიშვნელობას უთანადდება $\xi$-ს არა ის მნიშვნელობა, რომელიც სინამდვილეში შეესაბამება $\eta$-ს მოცემულ მნიშვნელობას; ბ) შესაბამისობის შეცდომა გამოწვეულია $\eta$-ს შემთხვევითი ფლუქტუაციით. ფორმალურად ორივე შეცდომა შეიძლება მივაკუთნოთ $\eta$-ს და წარმოვიდგინოთ, რომ საერთო შეცდომის სიდიდე გამოწვეულია მხოლოდ $\eta$-ს შემთხვევითი გაფანტვით. ავღნიშნოთ $\eta$-ს განაწილების ფუნქცია $F(y)$-ით. რადგან $\eta$ არის დამოკიდებული $\xi$ შემთხვე-ვითი სიდიდისაგან, განაწილების ფუნქცია $F(y)$ არის პირობითი განაწილების ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობაც დამოკიდებულია იმაზე თუ როგორ მნიშვნელობას ღებულობს $\xi$ შემთხვევითი სიდიდე , ანუ $F(y)$ ფუნქცია არის ორი არგუმენტის ფუნქცია $F(y)=F(x,y)$. თუ ცნობილია $F(x,y)$, მაშინ ცნობილია $\eta$-ს $\xi$-გან დამოკიდებულების მთლიანი აღწერა, ამასთან გამოსახული ზუსტ ფუნქციონალურ დამოკიდებულებებში. $F(x,y)$-ის მოძებნა დაკვირვების შედეგების საფუძველზე საკმაოდ ძნელი ამოცანაა, რომელიც მოითხოვს დიდი რაოდენობის დაკვირვების შედეგებს. ამიტომ მათი მოძებნა ხერხდება საკმაოდ იშვიათად. დაუშვათ $\xi$ და $\eta$ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია. მაშინ $F(x,y)$ იქნება ორ განზომილებიანი ნორმალური განაწილების ფუნქცია, რომელიც სრულად განისაზღვრება მათემატიკური მოლოდინებითა და დისპერსიებით. ამიტომ $\eta$-ს $\xi$-გან დამოკიდებულების საჩვენებლად საკმარისია ჩვენება თუ როგორ იცვლება $\eta$ სიდიდის მათემატიკური მოლოდინი და დისპერსია $\xi$-ს ცვლილებისას.

შემდეგში $\xi$ პარამეტრის მნიშვნელობა ავღნიშნოთ $x$-ით, $\eta$ პარამეტრის მნიშვნელობა - $y$-ით. $a_y$ და $\sigma_y^2$-ით ავღნიშნოთ $\eta$ შემთხვევითი სიდიდის საშუალო და დისპერსია. მაშინ მივდივართ ორი ფუნქციის მოძებნის აუცილებლობასთან:

$$a_y = f_1(x) \text{ და } \sigma_y^2 = f_2(x).$$

მეორე დამოკიდებულება აღწერს მეთოდიკის სიზუსტის ცვალებადობას პარამეტრის ცვალებადობისას. მას *სკედასტიკური დამოკიდებულება* ეწოდება და იშვიათად გამოიყენება. პირველი დამოკიდებულება აღწერს $\eta$-საშუალო მნიშვნელობების ცვალებადობას $\xi$ სიდიდის მნიშვნელობების ცვალებადობისას. ამ დამოკიდებულებას *რეგრესიული დამოკიდებულება* ჰქვია და ის თამაშობს დიდ როლს მრავალი ამოცანის გადაწყვეტისას, რადგან აღწერს $\xi$ და $\eta$ სიდიდეების ჭეშმარიტ, ყველა შემთხვევითი დამატებისაგან თავისუფალ, დამოკიდებულებას. ამიტომ ყოველგვარი დამოკიდებულების გამოკვლევის მიზანია რეგრესიული დამოკიდებულების პოვნა, ხოლო დისპერისია გამოიყენება მოძებნილი შეფასებების სიზუსტის შესაფასებლად.

ამრიგად, ზოგადად, რეგრესიული დამოკიდებულება მიახლოებით შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად

$$y = f(x) + \varepsilon\,, \qquad (7.1)$$

სადაც $\varepsilon$ - ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა ნოლის ტოლი მათემატიკური მოლოდინით და $\sigma^2$ დისპერსიით. ზოგადად $f(x)$ ფუნქცია დამოკიდებულია პარამეტრების გარკვეული რაოდენობისაგან, რომელთა მნიშვნელობები უნდა იქნას მონახული დაკვირვების შედეგების საფუძველზე. ავღნიშნოთ: $x_i, y_i, i=1,...,n$, შესაბამისად $\xi$ და $\eta$ შემთხვევით სიდიდეებზე დაკვირვების შედეგებია. (7.1) რეგრესიული დამოკიდებულებით $x_i$-ს ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება $y_i$-ს გარკვეული მნიშვნელობა. ამ დროს დაშვებული შეცდომა ტოლია $y_i - f(x_i)$-ის. ყველა $i$, $i=1,...,n$-თვის დაშვებული შეცდომები არიან შემთხვევითი სიდიდეები, ამიტომ უცნობი პარამეტრების შეფასებებად ბუნებრივია ავიღოთ მათი ისეთი მნიშვნელობები, რომლებიც მინიმიზაციას გაუკეთებენ ამ შემთხვევითი სიდიდეების დისპერსიას

$$D = \frac{1}{n-\ell}\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i))^2\ . \qquad (7.2)$$

იმის გამო, რომ $f$ ფუნქციის უცნობი პარამეტრები შეზღუდვებს ადებენ დაკვირვების შედეგებს რომლებითაც ისინი ფასდებიან, $D$ დისპერსიის თავისუფლების ხარისხის სიდიდე მცირდება შესაბამისი რაოდენობით. ამიტომ $\ell$ არის $f$ ფუნქციის უცნობი პარამეტრების რიცხვი. დაკვირვების შედეგების ერთნაირი $n$ რაოდენობისათვის $D$ დისპერსიის გაზრდა შეიძლება გამოწვეული იყოს არა მხოლოდ $f$ ფუნქციის პარამეტრების მნიშვნელობების არა კორექტული შერჩევით, არამედ ამ პარამეტრების რაოდენობის გაზრდითაც. ამიტომ საჭიროა რეგრესიად შერჩეული იქნას შესაძლებლობის ფარგლებში მინიმალური რაოდენობის უცნობი პარამეტრების მქონე ფუნქცია.

## 7.2. მიახლოებითი რეგრესიის გამოთვლა და ანალიზი

წინამდებარე თავის შესავალში ვთქვით, რომ რეგრესიის უცნობი კოეფიციენტების შეფასებების მონახვა ხდება შესაბამისი დისპერსიის მინიმიზაციით. იქვე ავღნიშნეთ, რომ რეგრესია მოიძებნება ერთნაირი რაოდენობის პარამეტრების მქონე ფუნქციებს შორის. ამ შემთხვევაში რეგრესიის

აღდგენისათვის (7.2) დისპერსიის მინიმიზაცია ტოლფასია შემდეგი გამოსახულების მინიმიზაციის

$$S=\sum_{i=1}^{n}(y_i-f(x_i))^2\,, \qquad (7.3)$$

სადაც $x_i, y_i, i=1,...,n$, არიან დაკვირვების შედეგები. (7.3) კრიტერიუმს ეწოდება *უმცირეს კვადრატთა კრიტერიუმი.* (7.3) – ის მინიმიზაციისათვის გამოიყენება მათემატიკური ანალიზის კარგად ნაცნობი მეთოდი. კერძოდ, გავადიფერენციროთ (7.3) გამოსახულება უცნობი პარამეტრებით, მიღებული გამოსახულებები გავუტოლოთ ნოლს და ამოვხსნათ მიღებული განტოლებათა სისტემა უცნობი პარამეტრების მიმართ.

ავღნიშნოთ $a_1, a_2,...,a_k$ რეგრესიის უცნობი პარამეტრები, ანუ ადგილი აქვს დამოკიდებულებას $y=f(x)=f(a_1,a_2,...,a_k;x)$. გავადიფერენციროთ (7.3) კრიტერიუმი ამ პარამეტრებით და მიღებული გამოსახულებები გავუტოლოთ ნოლს

$$\frac{\partial S}{\partial a_1}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-f(x_i))\frac{\partial f}{\partial a_1}=0\,,$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-f(x_i))\frac{\partial f}{\partial a_2}=0\,,$$

……………………………..

$$\frac{\partial S}{\partial a_k}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-f(x_i))\frac{\partial f}{\partial a_k}=0\,.$$

მიღებულ განტოლებათა სისტემას ეწოდება *ნორმალურ განტოლებათა სისტემა.* იმის გამო, რომ $S$ დადებითად განსაზღვრული ფუნქციაა და $f$ რეგრესიად ყოველთვის აირჩევა დიფერენცირებადი ფუნქცია, ნორმალურ განტოლებათა სისტემა ყოველთვის არსებობს და აქვს ამოხსნა. მისი ამოხსნის მეთოდი დამოკიდებულია ფუნქციის სახისაგან და $\xi$ და $\eta$ შემთხვევითი სიდიდეების მახასიათებლებისაგან. თუ $f$ ფუნქციაში უცნობი პარამეტრები შედიან წრფივად, ნორმალურ განტოლებათა სისტემა იქნება წრფივ განტოლებათა სისტემა, წინააღმდეგ შემთხვევაში, ანუ როდესაც $f$-ში კოეფიციენტები შედიან არა წრფივად, ნორმალურ განტოლებათა სისტემა არის არა წრფივ განტოლებათა სისტემა და მისი ამოხსნისათვის, ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში, საჭიროა შესაბამისი მეთოდის შერჩევა. თუ ნორმალურ განტოლებათა სისტემას აქვს ერთზე მეტი ამონახსენი, მაშინ მათ შორის ამოირჩევა ის ამონახსნი, რომელიც მინიმიზაციას უკეთებს (7.3) უმცირეს კვადრატთა კრიტერიუმს.

განვიხილოთ ნორმალურ განტოლებათა სისტემა, როდესაც რეგრესია აღსდგება მეორე რიგის პოლინომის სახით, ანუ რეგრესიას აქვს სახე $y=a_1+a_2\cdot x+a_3\cdot x^2$. ამ შემთხვევაში $\frac{\partial y}{\partial a_1}=1$, $\frac{\partial y}{\partial a_2}=x$, $\frac{\partial y}{\partial a_3}=x^2$ და ნორმალურ განტოლებათა სისტემა ღებულობს სახეს:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-(a_1+a_2\cdot x_i+a_3\cdot x_i^2))\cdot 1=0\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-(a_1+a_2\cdot x_i+a_3\cdot x_i^2))\cdot x_i=0\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-(a_1+a_2\cdot x_i+a_3\cdot x_i^2))\cdot x_i^2=0\,.$$

ეს სისტემა არის წრფივი $a_1, a_2, a_3$ პარამეტრების მიმართ და მისი ამოხსანა არ წარმოადგენს არავითარ სირთულეს.

$y = f(x)$ რეგრესიის პოვნის შემდეგ ისმება კითხვა: შეესაბამება თუ არა ნაპოვნი რეგრესია უცნობ ჭეშმარიტ დამოკიდებულებას, თუ არსებობს ისეთი $\varphi(x)$ შესწორება, რომ $y = f(x) + \varphi(x)$ რეგრესია უკეთესად შეესაბამება არსებულ დაკვირვების შედეგებს? ავღნიშნოთ $\ell_1$-ით $y = f(x)$ რეგრესიის უცნობი პარამეტრების რაოდენობა, ხოლო $\ell_2$-ით ავღნიშნოთ $y = f(x) + \varphi(x)$ რეგრესიის პარამეტრების რაოდენობა. ბუნებრივია $\ell_1 < \ell_2$. გამოვთვალოთ შესაბამისი დისპერსიები

$$D_1 = \frac{1}{n - \ell_1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2, \; D_2 = \frac{1}{n - \ell_2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i) - \varphi(x_i))^2 .$$

იმისათვის, რომ $\varphi(x)$ შესწორებას ჰქონდეს აზრი, ანუ გააუმჯობესოს საწყისი რეგრესია, საჭიროა, რომ $D_2$ დისპერსია სტატისტიკურად არსებითად ნაკლები იყოს $D_1$ დისპერსიაზე. თუ $\frac{D_1}{D_2} > F_{1-\alpha}$, სადაც $F_{1-\alpha}$ არის $n - \ell_1$ და $n - \ell_2$ თავისუფლების ხარისხების მქონე ფიშერის განაწილების კანონის $1-\alpha$ დონის კვანტილი, მიიღება გადაწყვეტილება, რომ $y = f(x) + \varphi(x)$ რეგრსია უკეთესად შეესაბამება დაკვირვების შედეგებს, ვიდრე $y = f(x)$ რეგრესია. წინააღმდეგ შემთხვევაში მიიღება გადაწყვეტილება, რომ $\varphi(x)$ არ აუმჯობესებს $y = f(x)$ საწყის რეგრესიას.

$\varphi(x)$ შესწორების უგულებელყოფა არ ნიშნავს, რომ $y = f(x)$ რეგრესია საერთოდ არ საჭიროებს შესწორებას. გადაწყვეტილების მისაღებად, რომ $y = f(x)$ რეგრესიას ესაჭიროება შესწორება საჭიროა შემთხვევითი ფაქტორის დისპერსიის ცოდნა. როგორც წესი ეს დისპერსია უცნობია და მისი შეფასებისათვის საჭიროა განმეორებითი დაკვირვებები. ავღნიშნოთ ყოველი $x_i$-თვის განმეორებადი დაკვირვებები $y_{i1}, y_{i2}, ..., y_{im}$-ით, მაშინ შემთხვევითი ფაქტორის დისპერსიის შეფასება იქნება

$$S_i^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m} (y_{ij} - \overline{y}_i)^2, \; i = 1, ..., n.$$

ამ დისპერსიის უფრო ზუსტი შეფასება გამოითვლება ასე

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_i^2 .$$

$y = f(x)$ რეგრესიის დისპერსია, ანუ $D_1$ განპირობებულია ორი ფაქტორის გავლენით: $S^2$ დისპერსიის მქონე შემთხვევითი ფაქტორით და $y = f(x)$ რეგრესიის და უცნობი ჭეშმარიტი რეგრესიის შეუსაბამისობის ფაქტორით. ავღნიშნოთ მისი დისპერსია $S_{regr}^2$-ით. იმის გამო, რომ ეს ორი ფაქტორი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლები არიან, ადგილი აქვს $D_1 = S^2 + S_{regr}^2$. თუ $D_1$ დისპერსია $S^2$ დისპერსიისაგან სტატისტიკურად არსებითად განსხვავდება, ეს შეიძლება გამოწვეული იყოს მხოლოდ და მხოლოდ იმით, რომ $S_{regr}^2 \neq 0$, ანუ $y = f(x)$ რეგრესია არ შეესაბამება უცნობ ნამდვილ რეგრესიას. $D_1$ და $S^2$ განსხვავების არსებითობა მოწმდება ასე: თუ $\frac{D_1}{S^2} > F_{1-\alpha}$, სადაც $F_{1-\alpha}$ არის

$n-\ell_1$ და $n(m-1)$ თავისუფლების ხარისხების მქონე ფიშერის განაწილების $1-\alpha$ დონის კვანტილი, მაშინ მიიღება გადაწყვეტილება, რომ $y=f(x)$ რეგრესია საჭიროებს შესწორებას, წინააღმდეგ შემთხვევაში მიიღება გადწყვეტილება, რომ $y=f(x)$ რეგრესია შეესაბამება დაკვირვების შედეგებს.

$y=f(x)$ რეგრესიის უცნობი პარამეტრების შეფასებების მონახვას უმცირეს კვადრატთა კრიტერიუმის მინიმიზაციის გზით ეწოდება *რეგრესიის იდენტიფიკაცია*, ხოლო $y=f(x)$ რეგრესიის დაკვირვების შედეგებთან შესაბამისობის უშუალო ანალიზს ეწოდება *რეგრესიული ანალიზი.*

## 7.3. წრფივი რეგრესია

ამ შემთხვევაში რეგრესიულ დამოკიდებულებას აქვს შემდეგი სახე $y=a+b\cdot x$, სადაც $a$ და $b$ უცნობი კოეფიციენტებია. უმცირეს კვადრატთა კრიტერიუმი ჩაიწერება ასე

$$S=\sum_{i=1}^{n}(y_i-(a+b\cdot x_i))^2,$$

სადაც $x_i, y_i, i=1,...,n$, დაკვირვების შედეგებია. ნორმალურ განტოლებათა სის-ტემას აქვს შემდეგი სახე

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-(a+b\cdot x_i))=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-(a+b\cdot x_i))\cdot x_i=0.$$

გადავწეროთ ეს სისტემა შემდეგნაირად

$$a\cdot n+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i,$$

$$a\sum_{i=1}^{n}x_i+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i.$$

$b$ რიცხვს ეწოდება *რეგრესიის კოეფიციენტი.* ის შეიძლება ადვილად მოვძებნოთ დეტერმინანტების დახმარებით

$$b=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}.$$

$a$ რიცხვს ეწოდება *რეგრესიის თავისუფალი წევრი.* ისიც ადვილად განი-საზღვრება წრფივ განტოლებათა სისტემიდან დეტერმინანტების დახმარებით, მაგრამ სიმარტივისათვის განვსაზღვროთ სისტემის პირველი განტოლებიდან უკვე განსაზღვრული $b$ კოეფიციენტის დახმარებით

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i-b\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\overline{y}-b\cdot\overline{x},$$

აქედან $\overline{y}=a+b\cdot\overline{x}$.

ამრიგად, აღმოჩნდა, რომ წრფივი რეგრესია გადის $(\overline{x},\overline{y})$ წერტილზე. ამიტომ, წრფივი რეგრესიის ასაგებად საჭიროა $(\overline{x},\overline{y})$ წერტილზე გავავლოთ

წრფე, რომელიც აბსცისთა ღერძთან ადგენს კუთხეს, რომლის ტანგენსიც $b$ კოეფიციენტის ტოლია.

განვსაზღვროთ არე, რომელსაც მიეკუთვნება წრფივი რეგრესია მოცემული ალბათობით. როგორც უკვე იყო ნათქვამი, წრფივი რეგრესია განისაზღვრება $\bar{y}$-ის მნიშვნელობით და $b$ კოეფიციენტით. $\bar{y}$-თვის ნდობის ინტერვალის აგება განხილული იყო ზემოთ. ავღნიშნოთ $\bar{y}'$ და $\bar{y}''$ ამ ინტერვალის უკიდურესი მარცხენა და მარჯვენა წერტილები. $b$ კოეფიციენტის ნდობის ინტერვალის საპოვნელად ვისარგებლოთ ბარტლეტის შედეგით, რომელმაც დაამტკიცა, რომ სტატისტიკა

$$t=\frac{S_x\sqrt{n-2}}{S_y\sqrt{1-r}}(b-b_0),$$

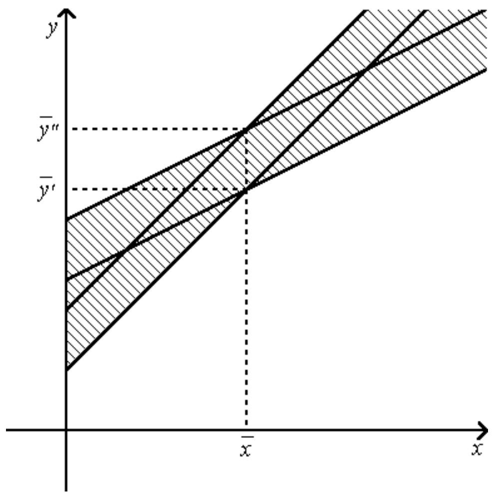
სადაც $S_x$ და $S_y$ არიან კვადრატული ფესვები შესაბამისად $x_i$ და $y_i$ ამონარჩევების დისპერსიებიდან თავიაანთი საშუალოების მიმართ, $r$ არის ამონარჩევის კორელაციის კოეფიციენტი, ხოლო $b_0$ არის ჭეშმარიტი რეგრესიის კოეფიციენტი, განაწილებულია $n-2$-ის ტოლი თავისუფლების ხარისხის მქონე სტიუდენტის კანონით. $t_{1-\alpha/2}$-ით ავღნიშნოთ სტიუდენტის განაწილების $(1-\alpha/2)$ დონის კვანტილი. მაშინ ადგილი აქვს

$$-t_{1-\alpha/2}\le\frac{S_x\sqrt{n-2}}{S_y\sqrt{1-r}}(b-b_0)\le t_{1-\alpha/2},$$

საიდანაც ძნელი არ არის მივიღოთ $b_0$-თვის ნდობის ინტერვალი

$$b-t_{1-\alpha/2}\frac{S_y\sqrt{1-r}}{S_x\sqrt{n-2}}\le b_0\le b+t_{1-\alpha/2}\frac{S_y\sqrt{1-r}}{S_x\sqrt{n-2}}.$$

$b^{'}$ და $b^{''}$-ით ავღნიშნოთ ამ ნდობის ინტერვალის შესაბამისად უკიდურესი მარცხენა და მარჯვენა წერტილები. მაშინ ნდობის არე რომელშიაც $(1-\alpha)^2$ ალბათობით იმყოფება ჭეშმარიტი რეგრესიის შესაბამისი წრფე აიგება შემდეგნაირად. კოორდინატთა სიბრტყის $(\bar{x},\bar{y}^{'})$ და $(\bar{x},\bar{y}^{''})$ წერტილებზე ატარებენ ორ-ორ წრფეს კუთხური კოეფიციენტებით $b^{'}$ და $b^{''}$. ამ წრფეების მიერ მოცული მაქსიმალური არე არის *წრფივი რეგრესიის ნდობის არე* (იხ. ნახ. 7.1).




ნახ. 7.1.

ცნობილია, რომ შემთხვევით სიდიდეებს შორის წრფივი კავშირის სიძლიერის მაჩვენებელია კორელაციის კოეფიციენტი. განვსაზღვროთ კავშირი წრფივი რეგრესიის კოეფიციენტებს და კორელაციის კოეფიციენტს შორის. გავყოთ რეგრესიის კოეფიციენტის $b$-ს გამოსათვლელი გამოსახულების მრიცხველი და მნიშვნელი $n^2$-ზე, მივიღებთ

$$b = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{rS_x S_y}{S_x^2} = r\frac{S_y}{S_x},$$

საიდანაც

$$r = \frac{b \cdot S_x}{S_y}.$$

თუ კორელაციის კოეფიციენტი გამოთვლილი იქნა ადრე, მაშინ ის შეიძლება გამოყენებული იქნას წრფივი რეგრესიის განსასაზღვრად

$$y = a + r\frac{S_y}{S_x} \cdot x,$$

ანდა თუ $a$-ს შევცვლით $\overline{y} - b \cdot \overline{x}$-ით, მივიღებთ

$$y - \overline{y} = r\frac{S_y}{S_x}(x - \overline{x}).$$

აქედან ცხადად ჩანს, რომ როდესაც კორელაციის კოეფიციენტი $r = 0$, მაშინ წრფივი რეგრესია არის აბსცისთა ღერძის პარალელური წრფე, ანუ $y$ არ არის დამოკიდებული $x$-ზე.

## 7.4. არაწრფივი რეგრესია

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, არაწრფივი რეგრესიის იდენტიფიკაციისათვის საჭიროა უმცირეს კვადრატთა კრიტერიუმის მინიმიზაცია. რეგერსიის სახისაგან, ანუ $y = f(x)$-გან დამოკიდებულებით მიიღება სხვადასხვა სახის არაწრფივ ნორმალურ განტოლებათა სისტემები. მათი ამოხსნისათვის, ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში, საჭიროა ავირჩიოთ შესაბამისი მეთოდი. იდენტიფიკაციის ამოცანის გასამარტივებლად საჭიროა ვეცადოთ, თუ ეს შესაძლებელია, რეგრესია ავირჩიოთ რაც შეიძლება ნაკლები რაოდენობის უცნობი პარამეტრებით. ზოგჯერ შესაძლებელია ცვლადების შეცვლით მოვახდინოთ რეგრესიის გაწრფივება უცნობი პარამეტრების მიმართ. თუ რეგრესიის ყველა პარამეტრის გაწრფივება ვერ ხერხდება, უნდა ვეცადოთ გაწრფივებით შევამციროთ რეგრესიაში არა წრფივად შემავალი პარამეტრების რაოდენობა. განვიხილოთ რამოდენიმე მარტივი მაგალითი.

დაუშვათ საჭიროა არაწრფივი რეგრესიის აღდგენა $x_i, y_i, i = 1,...,n$, დაკვირვების შედეგების საფუძველზე. ვთქვათ რეგრესიას აქვს მაჩვენებლიანი ფუნქციის სახე $y = a \cdot b^x$. გალოგარითმებით შეიძლება მივაღწიოთ ამ დამოკიდებულების გაწრფივება $\ln y = \ln a + x \cdot \ln b$. თუ რეგრესიული

დამოკიდებულების იდენტიფიკაციის წინ მოვახდენთ საწყისი მონაცემების გარდაქმნას $x_i, \ln y_i, i=1,...,n$, მაშინ გაწრფივებული რეგრესიის აღსადგენად, ანუ $\ln a$ და $\ln b$ განსასაზღვრად შეიძლება გამოვიყენოთ წრიფვი რეგრესიის იდენტიფიკაციის ფორმულები. ცხადია, რომ ამის შემდეგ, საწყისი რეგრესიის $a$ და $b$ კოეფიციენტების განსაზღვრა არ წარმოადგენს არავითარ სირთულეს.

განვიხილოთ ხარისხობრივი დამოკიდებულება $y=a\cdot x^b$. ამ შემთხვევაში გალოგარითმება იძლევა $\ln y=\ln a+b\cdot\ln x$. საწყისი მონაცემები უნდა გარდავქმნათ შემდეგნაირად: $\ln x_i, \ln y_i, i=1,...,n$. $\ln a$ და $b$ კოეფიციენტები განისაზღვრებიან როგორც წრფივი რეგრესიის კოეფიციენტები, ხოლო $a$ კოეფიციენტი განისაზღვრება უკუ გარდაქმნით.

## ამოცანები პრაქტიკული მეცადინეობისათვის

1. ლატარიაში 1000 ბილეთია; მათგან ერთი ბილეთი იგებს 500 ლარს, 10 ბილეთი იგებს 100-100 ლარს, 50 ბილეთი იგებს 20-20 ლარს, ხოლო 100 ბილეთი იგებს 5-5 ლარს, დანარჩენი ბილეთები არამომგებიანია. იპოვეთ არა ნაკლებ 20 ლარის მოგების ალბათობა [4].
2. სამ იარაღის საწყობს ესვრიან ერთ ბომბს. პირველ საწყობზე მოხვედრის ალბათობა ტოლია 0.01-ის; მეორეზე – 0.008-ის; მესამეზე – 0.025-ის. ერთ საწყობზე მოხვედრისას ფეთქდება სამივე საწყობი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ საწყობები იქნებიან აფეთქებული [4].
3. წრიული სამიზნე შედგება სამი ზონისაგან: I, II და III. ერთი გასროლისას პირველ ზონაში მოხვედრის ალბათობა ტოლია 0.15-ის, მეორეში – 0.23-ის, მესამეში – 0.17-ის. იპოვეთ აცდენის ალბათობა [4].
4. ყუთში ორი თეთრი და სამი შავი ბურთულაა. ყუთიდან მიმდევრობით იღებენ ორ ბურთულას. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე ბურთულა თეთრია [4].
5. ამოცანის პირობა იგივეა, მაგრამ პირველი ამოღების შემდეგ ბურთულას აბრუნებენ ყუთში და ბურთულებს ურევენ [4].
6. სამი მსროლელი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ესვრიან მიზანში. მიზანში მოხვედრის ალბათობა პირველი, მეორე და მესამე მსროლელისათვის შესაბამისად ტოლია: $p=0.2$; $p=0.5$; $p=0.3$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სამივე მსროლელი მოახვედრებს მიზანში [4].
7. სამჯერ ესვრიან ერთი და იგივე სამიზნეს. მოხვედრების ალბათობა პირველი, მეორე და მესამე გასროლისას შესაბამისად ტოლია: $p=0.4$; $p=0.5$; $p=0.7$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ სამი გასროლის შედეგად სამიზნეს მოხვდება ერთხელ [4].
8. წინა მაგალითის პირობებში იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სამიზნეს ერთხელ მაინც მოხვდება [4].
9. სამიზნეს ესვრიან ერთხელ. მოხვედრის ალბათობა ტოლია 0.3-ის. შემთხვევითი სიდიდე $X$ არის მოხვედრათა რაოდენობა. ააგეთ $X$ სიდიდის განაწილების მწკრივი და განაწილების მრავალკუთხედი [4].
10. მსრლოლელი სამჯერ ესვრის სამიზნეს. ყოველი გასროლისას მოხვედრის ალბათობა ტოლია 0.4-ის. ყოველი მოხვედრისათვის მსროლელს ერიცხება 5 ქულა. ააგეთ შეგროვებული ქულების განაწილების მწკრივი [4].
11. რაღაც მიზანს ესვრიან პირველ მოხვედრამდე. ყოველი გასროლისას მოხვედრის ალბათობა $p$-ს ტოლია. $X$ შემთხვევითი სიდიდე არის გასროლათა რიცხვი. ააგეთ $X$ სიდიდის განაწილების მწკრივი [4].
12. მიზანში ისვრიან ერთხელ. მოხვედრის ალბათობა ტოლია 0.3-ის. ააგეთ მოხვედრათა რიცხვის განაწილების ფუნქცია [4].
13. მიზანში ისვრიან 4-ჯერ; ყოველი გასროლისას მოხვედრის ალბათობა ტოლია 0.3-ის. ააგეთ მოხვედრათა რიცხვის განაწილების ფუნქცია [4].
14. უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია მოცემულია გამოსახულებით

$$F(x)=\begin{cases}0 \quad at \quad x<0,\\ ax^2 \quad at \quad 0<x<1,\\ 1 \quad at \quad x>1.\end{cases}$$

ა) იპოვეთ კოეფიციენტი $a$.
ბ) იპოვეთ განაწილების სიმკვრივე $f(x)$.
გ) იპოვეთ შემთხვევითი სიდიდე $X$-ის 0.25-დან 0.5-დე ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა [4].

15. $X$ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია კანონით რომლის სიმკვრივეა:

$$f(x)=a\cdot\cos x \quad \text{როცა} \quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2};$$

$$f(x)=0 \quad \text{როცა} \quad x<-\frac{\pi}{2} \quad \text{ან} \quad x>\frac{\pi}{2}.$$

ა) იპოვეთ კოეფიციენტი $a$.
ბ) ააგეთ $f(x)$ განაწილების სიმკვრივის გრაფიკი.
გ) იპოვეთ $F(x)$ განაწილების ფუნქცია და ააგეთ მისი გრაფიკი.
დ) იპოვეთ შემთხვევითი სიდიდე $X$-ის 0-დან $\frac{\pi}{4}$-დე ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა [4].

16. $X$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე მოცემულია ფორმულით:

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

ა) ააგეთ $f(x)$ განაწილების სიმკვრივის გრაფიკი.
ბ) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ $X$ შემთხვევითი სიდიდე მოხვდება $(-1,+1)$ ინტერვალში [4].

17. ცხრილ 1.ა-ში მოცემულია ჩარხზე (რომელიც უშვებს ათასობით ასეთ ნაკეთობას) დამზადებული 200 სამაგრის თავაკების ზომები. ყველა პირობა, რომელშიაც მუშაობდა ჩარხი, უცვლელი იყო. ააგეთ განაწილების ემპირიული ფუნქცია, ჰისტოგრამა, გამოითვალეთ შესაბამისი შემთხვევითი სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლები. გამოითვალეთ იგივე რიცხვითი მახასიათებლები დაჯგუფებული მონაცემებით. გამოთვლილი მნიშვნელობებით იმსჯელე შემთხვევითი სიდიდის და მისი განაწილების კანონის შესახებ [1].

ცხრილი 1.ა.

| 100 სამაგრის თავაკის დიამეტრი, მმ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13.39 | 13.34 | 13.33 | 13.14 | 13.56 | 13.31 | 13.38 | 13.51 | 13.38 | 13.40 |
| 13.28 | 13.23 | 13.34 | 13.37 | 13.50 | 13.64 | 13.38 | 13.30 | 13.42 | 13.34 |
| 13.53 | 13.43 | 13.58 | 13.58 | 13.32 | 13.63 | 13.27 | 13.48 | 13.26 | 13.32 |
| 13.57 | 13.38 | 13.36 | 13.33 | 13.43 | 13.57 | 13.38 | 13.28 | 13.39 | 13.28 |
| 13.40 | 13.34 | 13.39 | 13.54 | 13.50 | 13.40 | 13.52 | 13.47 | 13.55 | 13.43 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13.29 | 13.28 | 13.33 | 13.46 | 13.38 | 13.37 | 13.61 | 13.53 | 13.44 | 13.26 |
| 13.43 | 13.33 | 13.51 | 13.39 | 13.50 | 13.56 | 13.38 | 13.24 | 13.34 | 13.34 |
| 13.41 | 13.43 | 13.49 | 13.51 | 13.42 | 13.51 | 13.45 | 13.48 | 13.48 | 13.54 |
| 13.55 | 13.52 | 13.44 | 13.23 | 13.50 | 13.48 | 13.40 | 13.66 | 13.48 | 13.32 |
| 13.43 | 13.53 | 13.26 | 13.44 | 13.58 | 13.69 | 13.38 | 13.43 | 13.59 | 13.37 |
| 13.45 | 13.58 | 13.47 | 13.24 | 13.62 | 13.32 | 13.45 | 13.52 | 13.39 | 13.50 |
| 13.40 | 13.37 | 13.57 | 13.18 | 13.46 | 13.50 | 13.33 | 13.45 | 13.40 | 13.60 |
| 13.52 | 13.40 | 13.35 | 13.40 | 13.29 | 13.33 | 13.48 | 13.20 | 13.43 | 13.44 |
| 13.39 | 13.41 | 13.46 | 13.39 | 13.29 | 13.48 | 13.55 | 13.42 | 13.31 | 13.46 |
| 13.40 | 13.30 | 13.20 | 13.45 | 13.31 | 13.40 | 13.46 | 13.45 | 13.13 | 13.40 |
| 13.62 | 13.35 | 13.42 | 13.42 | 13.54 | 13.36 | 13.31 | 13.44 | 13.58 | 13.41 |
| 13.47 | 13.28 | 13.48 | 13.37 | 13.59 | 13.54 | 13.20 | 13.43 | 13.56 | 13.35 |
| 13.29 | 13.41 | 13.31 | 13.51 | 13.42 | 13.44 | 13.32 | 13.36 | 13.48 | 13.36 |
| 13.45 | 13.26 | 13.29 | 13.51 | 13.32 | 13.38 | 13.24 | 13.46 | 13.38 | 13.34 |
| 13.32 | 13.53 | 13.52 | 13.40 | 13.57 | 13.25 | 13.62 | 13.37 | 13.29 | 13.55 |

18. ცხრილ 2.ა-ში მოცემულია 9 ფერმერის ნაკვეთზე მოყვენილი პომიდორისა და კიტრის მოსავლის რაოდენობა და ამავე ნაკვეთების ნიადაგებში ნიტრატებისა და ფოსფატების შემცველობები. გამოითვალეთ შესაბამის შემთხვევითი სიდიდეების რიცხვითი მახასიათებლები, მათ შორის კორელაციის კოეფიციენტები მიღებული მოსავალის სიდიდეებსა და ნიადაგში ნიტრატებისა და ფოსფატების შემცველობებს შორის.

ცხრილი 2.ა.

| ფერმერის ნაკვეთის ნომერი | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ნიტრატების შემცველობა. მგ/კგ | 61.1 | 24.3 | 21.7 | 17.3 | 16 | 13.2 | 12.4 | 12 | 3.5 |
| ფოსფატების შემცველობა. მგ/კგ | 512.2 | 348.66 | 292 | 259.36 | 257.94 | 243 | 170.74 | 122.4 | 75 |
| პომიდორის მოსავალი კგ/0.01 ჰა | - | 253.33 | 130 | 104.5 | 101 | 139.33 | 72 | 90 | 71 |
| კიტრის მოსავალი კგ/0.01 ჰა | 145 | 168 | - | - | 192 | 63 | 80 | 63 | 76 |

19. უწყვეტი შემთხვევითი $X$ სიდიდე განაწილებულია შემდეგი სიმკვრივის მქონე კანონით

$$f(x) = Ae^{-|x|}.$$

იპოვეთ $A$ კოეფიციენტი. განსაზღვრეთ $X$ სიდიდის მათემატიკური მოლოდინი, დისპერსია, საშუალო კვადრატული გადახრა, ასიმეტრიისა და ექსცესის კოეფიციენტების მნიშვნელობები [4].

ყაჭიაშვილი ქ.ი.

20. $X$ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია შემდეგი სიმკვრივის მქონე კანონით:

$$f(x)=\begin{cases} ax \quad at \quad 0<x<1, \\ 0 \quad at \quad x<0 \quad or \quad x>1. \end{cases}$$

ააგეთ ალბათობების გნაწილების სიმკვრივის გრაფიკი, განსაზღვრეთ $a$, მათემატიკური მოლოდინი, დისპერსია, საშუალო კვადრატული გადახრა და ასიმეტრიის კოეფიციენტი [4].

21. ავტომატური სატელეფონო სადგური საათში საშუალოდ ღებულობს $K$ გამოძახებას. გამოძახებების რაოდენობები დროის ნებისმიერ ინტერვალში განაწილებულია პუასონის კანონით. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორ წუთში სადგურში მოვა ზუსტად სამი გამოძახება [4].

22. წინა მაგალითის პირობებში იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორ წუთში ერთი გამოძახება მაინც მოვა [4].

23. 21-ე მაგალითის პირობებში იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორ წუთში მოვა არა ნაკლებ სამი გამოახება [4].

24. სართავი დაზგის მუშაობისას ძაფი წყდება საათში საშუალოდ 0.375-ჯერ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ცვლაში (8 საათის განმავლობაში) ძაფის გაწყვეტის რაოდენობა იქნება მოთავსებული 2-სა და 4-ს შორის (არა ნაკლებ ორისა და არა უმეტეს ოთხის) [4].

25. ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად სამიზნეს ესვრიან 50-ჯერ. მიზანში მოხვედრების ალბათობა ერთი გასროლისას ტოლია 0.4-ის. ბინომიალური განაწილების ზღვრული თვისების გამოყენებით იპოვეთ მიახლოებითი ალბათობა იმისა, რომ მიზანში მოხვდება: არც ერთი ყუმბარა, ერთი ყუმბარა, ორი ყუმბარა [4].

26. მოცემულია ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე 1.2-ის ტოლი მათემატიკური მოლოდინით და 0.8-ის ტოლი საშუალო კვადრატული გადახრით. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი სიდიდე მოხვდება ინტერვალში [-1.6; +1.6] [4].

27. მოცემულია ნორმალურად განაწილებული $X$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური მოლოდინი $m$ და აბსცისთა ღერძზე ინტერვალი $(\alpha,\beta)$. როგორი უნდა იყოს შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა $\sigma$, რომ მოცემულ ინტერვალში მისი მოხვედრის ალბათობა იყოს მაქსიმალური [4]?

28. გაზომვის ცდომილების განაწილების კანონის გამოკვლევის მიზნით რადიომზომით განხორციელდა დაშორების 400 გაზომვა. ცდების შედეგები მოცემულია სტატისტიკური მწკრივის სახით:

ცხრილი ა.3.

| $I_i$ | 20;30 | 30;40 | 40;50 | 50;60 | 60;70 | 70;80 | 80;90 | 90;100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

ყაჭიაშვილი ქ.ი.

| $m_i$ | 21 | 72 | 66 | 38 | 51 | 56 | 64 | 32 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0.052 | 0.180 | 0.165 | 0.095 | 0.128 | 0.140 | 0.160 | 0.080 |

გაასწორეთ სტატისტიკური მწკრივი თანაბარი სიმკვრივის კანონით [4].

29. მიწისზედა სამიზნეზე თვითმფრინავიდან სროლისას დამიზნების გვერდითი შეცდომის 500 გაზომვა განხორციელდა. გაზომვის შეცდომები (რადიანის მეათასედ ნაწილებში) მოყვენილია სტატისტიკური მწკრივის სახით:

| $I_i$ | -4;-3 | -3;-2 | -2;-1 | -1;0 | 0;1 | 1;2 | 2;3 | 3;4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_i$ | 6 | 25 | 72 | 133 | 120 | 88 | 46 | 10 |
| $p_i$ | 0.012 | 0.050 | 0.144 | 0.266 | 0.240 | 0.176 | 0.092 | 0.020 |

აღნიშვნები: $I_i$-დამიზნების შეცდომის მნიშვნელობების ინტერვალები; $m_i$-მოცემულ ინტერვალში დაკვირვებების რიცხვი; $p_i = \dfrac{m_i}{n}$-შესაბამისი სიხშირეები [4].

სტატისტიკური მონაცემებით მიახლოებით ააგეთ დამიზნების შეცდომის განაწილების სტატისტიკური მწკრივი.

30. მოახდინეთ წინა მაგალითში მოცემული სტატისტიკური განაწილების გაგლუვება ნორმალური კანონის დახმარებით [4]:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} .$$

31. ცხრილში მოყვენილია [0,5] ინტერვალში თანაბრად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების შედეგები. გამოთვალეთ მათემატიკური მოლოდინი, დისპერსია. ააგეთ ალბათობების განაწილების ემპირიული ფუნქცია და სიმკვრივე.

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2.128 | 0.410 | 2.373 | 0.352 | 4.204 | 0.298 | 1.466 | 4.586 | 1.839 | 3.873 | 1.639 | 3.488 |
| $i$ | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| $x_i$ | 4.220 | 3.589 | 1.533 | 0.813 | 1.647 | 2.330 | 1.233 | 4.128 | 1.395 | 2.408 | 0.745 | 4.371 |
| $i$ | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | | | | | | |
| $x_i$ | 1.436 | 3.863 | 4.882 | 2.462 | 4.439 | 4.136 | | | | | | |

32. ცხრილში მოცემულია ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეების გენერატორის მუშაობის შედეგები მათემატიკური მოლოდინით 2 და დისპერსიით 4. გენერირებული მონაცემებით გამოთვალეთ მათემატიკური მოლოდინისა და დისპერსიის მნიშვნელობების შეფასებები. ააგეთ ალბათობების განაწილების ემპირიული ფუნქცია და სიმკვრივე.

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0.178 | 1.169 | 1.830 | 0.523 | 1.655 | -4.082 | -1.646 | 13.24 | 2.509 | 1.573 | 6.996 | 5.682 |
| $i$ | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| $x_i$ | 2.914 | 1.169 | -0.111 | 6.010 | 2.803 | -0.313 | 3.473 | 6.709 | -0.653 | 3.263 | -4.756 | 1.740 |
| $i$ | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | | | | | | |
| $x_i$ | 5.702 | 6.458 | -1.074 | 10.056 | 3.742 | 4.106 | | | | | | |

33. ჩვიდმეტი გამოსაცდელისაგან თითოეულს შემთხვევითი მიმდევრობით მიეწოდებოდა ორი სიგნალი: სინათლისა და ბგერითი. სიგნალების ინტენსივობა მთელი ექსპერიმენტის დროს უცვლელი იყო. დრო სიგნალის წარმოშობის მომენტსა და გამოსაცდელის რეაქციას შორის ფიქსირდებოდა ხელსაწყოთი. ექსპერიმენტის შედეგები მოცემულია ცხრილში.

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $i$ | $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 223 | 181 | 10 | 191 | 156 |
| 2 | 104 | 194 | 11 | 197 | 178 |
| 3 | 209 | 173 | 12 | 183 | 160 |
| 4 | 183 | 153 | 13 | 174 | 164 |
| 5 | 180 | 168 | 14 | 176 | 169 |
| 6 | 168 | 176 | 15 | 155 | 155 |
| 7 | 215 | 163 | 16 | 115 | 122 |
| 8 | 172 | 152 | 17 | 163 | 144 |
| 9 | 200 | 155 | | | |

ადამიანთა მოცემული ჯგუფისათვის შეიძლება ჩავთვალოთ სინათლისა და ბგერით სიგნალებზე რეაქციის დრო ერთნაირი?

34. ცხრილში მოცემულია მდინარის წყლის ამიაკით დაბინძურების მონაცემები ორ მეზობელ კვეთში თერთმეტი თვის განმავლობაში (თვეში თითო გაზომვა). ცნობილია, რომ მდინარის წყლის დაბინძურების პარამეტრის საშუალო წლიური მნიშვნელობა ზედა კვეთში 0.245-ის ტოლია. კონტროლის ქვემო კვეთში შესრულებული თერთმეტი გაზომვის შედეგით დაადგინეთ მოცემული პარამეტრის კონცენტრაციის საშუალო წლიური მნიშვნელობის გაზრდის ფაქტი იმ პირობით, რომ გაზომვის შედეგები განაწილებულია ნორმალური განაწილების კანონით.

| გაზომ-ვის დრო | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX | X | XI | $\bar{x}_{11}$ | $\bar{x}_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| კონტრო-ლის ზედა კვეთი | 0.3 | 0.32 | 0.6 | 0.34 | 0.06 | 0.13 | 0.34 | 0.4 | 0.02 | 0.1 | 0.09 | 0.245 | 0.311 |
| კონტრო-ლის ქვედა კვეთი | 0.62 | 0.68 | 0.8 | 0.38 | 0.18 | 0.48 | 0.54 | 0.51 | 0.08 | 0.18 | 0.1 | 0.414 | 0.524 |

ყაჭიაშვილი ქ.ი.

35. გადაწყვიტეთ წინა პუნქტში მოცემული ამოცანა პირველი რვა თვის მონაცემების საფუძველზე. ანუ მდინარის ზედა კვეთში დაბინძურების პარამეტრის საშუალო წლიური მნიშვნელობა 0.311-ის ტოლია. კონტროლის ქვედა კვეთში რვა გაზომვის შედეგით დაადგინეთ ამ კვეთში დაბინძურების საშუალო წლიური მნიშვნელობის გაზრდის ფაქტი.

36. გადაწყვიტეთ 35 და 36 მაგალითებში დასმული პრობლემები მანი-უიტნისა და უილკოკსონის კრიტერიუმებით.

37. ფერმერების ხუთი ნაკვეთის ნიადაგებში ნიტრატების შემცველობები იყო გაზომილი გაზაფხულზე და შემოდგომაზე. დაადგინეთ შემოდგომით ნიადაგში ნიტრატების შემცველობის ცვლილების ფაქტი გაზაფხულთან შედარებით.

| ს/ს ნაკვეთის ნომერი | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| გაზაფხულზე ნიადაგში ნიტრატების შემცველობა (მგ/კგ) | 18 | 17.3 | 9.5 | 4.6 | 5.3 |
| შემოდგომით ნიადაგში ნიტრატების შემცველობა (მგ/კგ) | 15.3 | 12.7 | 12.2 | 11.8 | 10.5 |

38. შეამოწმეთ $\xi$ შემთხვევითი სიდიდის მედიანის მოცემულ მნიშვნელობასთან ტოლობის $\theta = \theta_0$ ჰიპოთეზა ამ შემთხვევით სიდიდეზე 15 დაკვირვების შედეგით, რომლებიც მოცემულია ცხრილში

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 9.18 | 5 | 2.81 | 3.58 | 3.99 | 4.9 | 7.32 | 3.35 | 3.41 | 3.1 | 7.14 | 8.11 | 6.11 | 4.3 | 3.17 |

ა) $\theta_0 = 5$;

ბ) $\theta_0 = 3$;

გ) $\theta_0 = 3.5$.

39. ფერმერის ნაკვეთის ნიტრატებით დაბინძურების დონის ცვლილების დადგენის მიზნით გაზაფხულზე და შემოდგომით ზომავენ მის კონცენტრაციას ნიადაგის ხუთ სიღრმით ფენაში (15 სმ, 30 სმ, 45 სმ, 60 სმ, 90 სმ). შედეგები მოცემულია ცხრილში. მანი-უიტნის კრიტერიუმის დახმარებით დაადგინეთ ნიადაგის დაბინძურების დონის ცვლილების ფაქტი.

| სიღრმითი ფენის ნომერი | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ნიადაგის ფენებში ნიტრატების შემცველობა გაზაფხულზე (მგ/კგ) | 18 | 17.3 | 9.5 | 4.6 | 5.3 |
| ნიადაგის ფენებში ნიტრატების შემცველობა შემოდგომით (მგ/კგ) | 15.3 | 12.7 | 12.2 | 11.8 | 10.5 |

40. წინა მაგალითი გადაწყვიტე უილკოკსონის კრიტერიუმის დახმარებით.

41. მდინარის მოცემული კვეთის დაბინძურებაზე გავლენას ახდენენ გარკვეული საწარმოს ჩამდინარე წყლები, რომლებიც მდინარის წყალს აბინძურებენ ამიაკით. საწარმოში დანერგეს ახალი, ეკოლოგიურად უფრო უსაფრთხო, ტექნოლოგია. ცხრილის პირველ სტრიქონში მოცემულია მდინარის წყალში ამიაკის კონცენტრაციის გაზომვის შედეგები ახალი ტექნოლოგიის დანერგვამდე, ხოლო მეორე სტრიქონში მოცემულია გაზომვის შედეგები ახალი ტექნოლოგის დანერგვის შემდეგ. მანი-უიტნისა და უილკოკსონის კრიტერიუმების დახმარებით დაადგინეთ მდინარის წყლის დაბინძურების დონის ცვლილების ფაქტი საწარმოში ახალი ტექნოლოგიის დანერგვის შემდეგ.

| გაზომვის რიგითი ნომრები | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ამიაკის შემცველობა მდინარის წყალში ახალი ტექნოლოგიის დანერგვამდე | 0.3 | 0.52 | 0.53 | 0.39 | 0.25 | 0.19 | 0.35 | 0.23 |
| ამიაკის შემცველობა მდინარის წყალში ახალი ტექნოლოგიის დანერგვის შემდეგ | 0.02 | 0.2 | 0.07 | | | | | |

42. გამოიყენეთ ნიშნების კრიტერიუმი სინათლისა და ბგერით სიგნალებზე ადამიანების რეაქციის დროის მონაცემების ანალიზისათვის (იხ. მაგალითი 34) [1].

43. გადაწყვიტე წინა მაგალითის ამოცანა უილკოკსონის ნიშნების რანგების ჯამების კრიტერიუმის გამოყენებით. როცა: ა) $n=15$; ბ) $n=17$ [1].

44. გამოთვალეთ ადამიანის სინათლისა და ბგერით სიგნალებზე რეაგირების მონაცემების ძირითადი რიცხვითი მახასიათებლები (მათ შორის კორელაციის კოეფიციენტი) (იხ. მაგალითი 34) [1].

45. ცხრილში მოყვანილია ავადმყოფებისათვის ლიმფური ჯირკვალის გაზომვის შედეგები ულტრასონოგრაფიისა და კომპიუტერული ტომოგრაფიის მეთოდებით. ერთი და იმავე ავადმყოფს ორივე მეთოდით გაზომვები უტარდებოდა ერთი და იგივე დროს. შეამოწმეთ ორივე მეთოდით მიღებული გაზომვის შედეგების იდენტურობა: ა) ნიშნების კრიტერიუმის მეთოდით შეწყვილებული დაკვირვებებისათვის; ბ) უილკოკსონის ნიშნების რანგების ჯამის მეთოდით.

| გაზომვის ნომერი | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ულტრასო-ნოგრაფია | 2.3 | 1.5 | 1.4 | 1.5 | 1.8 | 1.2 | 1.0 | 1.5 | 1.5 | 1.7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| კომპიუტე-რული ტომოგრა-ფია | 1.8 | 1.8 | 1.7 | 1.5 | 1.5 | 1.5 | 1.3 | 1.7 | 1.6 | 1.6 | 1.8 | 0.7 | 1.5 | 0.8 | 1.2 |

46. გრაფიკული მეთოდით შეამოწმეთ ჰიპოთეზები იმის შესახებ, რომ ადამიანის რეაქციის დრო სინათლისა და ბგერის სიგნალებზე (იხ. მაგალითი 34) განაწილებული არიან ნორმალური კანონით [1].

47. ცხრილში მოყვანილია ორ განზომილებიანი ნორმალურად განაწილებული ფსევდო შემთხვევითი ვექტორის გენერაციის შედეგები. იპოვეთ ორ განზომილებიანი ნორმალური განაწილების პარამეტრების შეფასებები, ააგეთ ამ პარამეტრების ნდობის ინტერვალები, შეამოწმეთ ამ პარამეტრებთან დაკავშირებული ჰიპოთეზები.

მათემატიკური მოლოდინის ვექტორი:

$$a = [\ 1.0000,\ 3.0000].$$

დისპერსიული მატრიცა

$$W = \begin{pmatrix} 2.0 & 0.7 \\ 0.7 & 4.0 \end{pmatrix}$$

გენერირებული მონაცემაბი

| $j$ | $x_{1,j}$ | $x_{2,j}$ |
|---|---|---|
| 1 | -8.075323 | 1.851354 |
| 2 | 1.866408 | 0.934127 |
| 3 | 0.506295 | 4.112154 |
| 4 | -0.208784 | 1.254827 |
| 5 | 0.470386 | 2.764051 |
| 6 | -0.809748 | 3.434635 |
| 7 | -0.256132 | 5.545604 |
| 8 | -1.316983 | 2.559858 |
| 9 | 2.556789 | 1.783427 |
| 10 | 1.684340 | 1.825249 |
| 11 | 2.283028 | 4.774898 |
| 12 | 1.421519 | 1.779352 |

| | | |
|---|---|---|
| 13 | -0.523746 | 2.530648 |
| 14 | 0.468836 | 1.692398 |
| 15 | 1.830686 | 1.477231 |
| 16 | 0.299683 | 0.980654 |
| 17 | 2.113039 | 1.440862 |
| 18 | 3.177876 | 6.591503 |
| 19 | 1.727140 | 5.389623 |
| 20 | 0.935191 | -1.391321 |
| 21 | -1.026028 | 1.345145 |
| 22 | -0.245524 | -0.960215 |
| 23 | -0.146793 | -1.679388 |
| 24 | 2.197345 | 3.455451 |
| 25 | 2.279845 | 3.775871 |
| 26 | 0.677116 | 1.335242 |
| 27 | 1.743165 | 3.270833 |
| 28 | 3.391363 | 3.040776 |
| 29 | 4.315069 | 0.460287 |
| 30 | 1.249540 | 1.765827 |
| 31 | -0.277846 | 5.010329 |
| 32 | 1.715998 | 5.323771 |
| 33 | 1.145639 | 3.351479 |
| 34 | 3.430488 | 3.269623 |
| 35 | -1.028074 | -1.590042 |
| 36 | 3.099870 | 7.267988 |
| 37 | 2.372273 | 4.016786 |
| 38 | -0.738203 | 1.255776 |
| 39 | 3.220242 | 3.993731 |
| 40 | 1.967129 | 5.068442 |
| 41 | 1.282559 | 1.706056 |
| 42 | -0.474923 | 4.172657 |
| 43 | 0.976219 | 5.508640 |
| 44 | -0.631014 | 2.215554 |
| 45 | 2.226529 | 6.405292 |
| 46 | -0.813716 | 1.403541 |
| 47 | -0.357754 | 1.435465 |
| 48 | 1.243116 | 2.913436 |
| 49 | -0.346079 | 1.246020 |
| 50 | 1.750597 | 4.146453 |

48. ერთფაქტორული დისპერსიული ანალიზის გამოყენებით გამოიკვლიეთ სხვადასხვა კატალიზატორის გავლენა გარკვეული ქიმიური რეაქციის გამოსავალზე. ცხრილში მოცემულია ქიმიური რეაქციის გამოსავალი პროდუქტის მონაცემები გრამებში [3].

| დაკვირვების ნომერი | კატალიზატორები | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ |
| 1 | 3.2 | 2.6 | 2.9 | 3.7 | 3.0 |
| 2 | 3.1 | 3.1 | 2.6 | 3.4 | 3.4 |
| 3 | 3.1 | 2.7 | 3.0 | 3.2 | 3.2 |
| 4 | 2.8 | 2.9 | 3.1 | 3.3 | 3.5 |
| 5 | 3.3 | 2.7 | 3.0 | 3.5 | 2.9 |
| 6 | 3.0 | 2.8 | 2.8 | 3.3 | 3.1 |
| ჯამი | 18.5 | 16.8 | 17.4 | 20.4 | 19.1 |

49. ოთხ სხვადასხვა ლაბორატორიაში ხდებოდა სამი სხვადასხვა ტიპის ზღვის წყლის გამომხდელი აპარატის გამოცდა (იხ. ცხრილი). ყოველი კონკრეტული გამოცდა მეორდებოდა სამჯერ. გამოცდის შედეგები გამოსახულია წყლის ნარჩენი მარილიანობის პროცენტებში. აპარატები ავღნიშნოთ ასოებით $A_1$, $A_2$, $A_3$, ხოლო ლაბორატორიები – ასოებით $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$. მივიღეთ ორი ფაქტორი: “აპარატის ფაქტორი” $A$ და “ლაბორატორიეს ფაქტორი” $B$. იმისათვის, რომ ავირჩიოთ საუკეთესო აპარატი, უნდა შევაფასოთ $A$ ფაქტორი. მიღებული შედეგების სწორი ინტერპრეტაცია საჭიროებს $B$ ფაქტორის გათვალისწინებას. მით უმეტეს, რომ ლაბორატორიებს შორის განსხვავება შეიძლება გამოწვეული იყოს ადგილობრივი პირობების განსხვავებით (ზღვის წყლის ტიპი), რომელიც გათვალისწინებული უდა იქნას. ბოლოს, $A$ და $B$ ფაქტორებს შორის შეიძლება იყოს ურთიერთქმედება, რადგან ერთი ლაბორატორიისათვის კარგი აპარატი შეიძლება ცუდი გამოდგეს სხვა ლაბორატორიისათვის [3].

| A / B | $A_1$ | | | $A_2$ | | | $A_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B_1$ | 3.6 | 3.8 | 4.1 | 2.9 | 3.1 | 3.0 | 2.7 | 2.5 | 2.9 |
| $B_2$ | 4.2 | 4.0 | 4.1 | 3.3 | 2.9 | 3.2 | 3.7 | 3.5 | 3.6 |
| $B_3$ | 3.8 | 3.5 | 3.6 | 3.6 | 3.7 | 3.5 | 3.2 | 3.0 | 3.4 |
| $B_4$ | 3.4 | 3.2 | 3.2 | 3.4 | 3.6 | 3.5 | 3.6 | 3.8 | 3.7 |

50. ცხრილში მოყვანილია სხვადასხვა სოფელში განთავსებული ფერმერების ნაკვეთების ნიადაგებში ნიტრატებისა და ფოსფატების კონცენტრაციების (მგ/კგ) გაზომვის შედეგები ერთი და იგივე წლის ოთხ სხვადასხვა თვეში. გამოიკვლიეთ ნიადაგებში ნიტრატებისა და ფოსფატების შემცველობებზე გაზომვების დროის და ტერიტორიალური მდებარეობის ფაქტორების გავლენა.

ნიადაგებში ნიტრატების შემცველობა. ცხრილი ა.

| სოფლის რიგითი ნომერი | ნაკვეთის რიგითი ნომერი | ივლისი | სექტემბერი | ოქტომბერი | ნოემბერი |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 343.61 | 10.3 | 38.5 | 30.2 |
| | 2 | 34.54 | 15.5 | 40 | 25.2 |
| | 3 | 121.78 | 17 | 30.2 | 30.5 |
| | 4 | 306.42 | 17 | 15.5 | 12.8 |
| | 5 | 13.19 | 13.2 | 22.5 | 25.5 |
| 2 | 6 | 34.54 | 15.5 | 27.4 | 24.3 |
| | 7 | 34.54 | 13.2 | 22.7 | 25.2 |
| | 8 | 43.39 | 15.2 | 20.5 | 12.5 |
| | 9 | 11.64 | 11.6 | 19.5 | 21.3 |
| 3 | 10 | 19.48 | 20 | 20.5 | 22.2 |
| | 11 | 54.46 | 13.95 | 27.6 | 25.7 |
| 4 | 12 | 96.97 | 16.8 | 30.5 | 28.7 |
| 5 | 13 | 136.8 | 15.2 | 34.5 | 25.2 |
| 6 | 14 | 121.77 | 15.6 | 153.6 | 17 |
| | 15 | 136.82 | 20.3 | 160.2 | 150 |
| | 16 | 108.93 | 20 | 136.8 | 100 |

ნიადაგებში ფოსფატების შემცველობა. ცხრილი ბ.

| სოფლის რიგითი ნომერი | ნაკვეთის რიგითი ნომერი | ივლისი | სექტემბერი | ოქტომბერი | ნოემბერი |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1071 | 200 | 642 | 471 |
| | 2 | 183.6 | 100 | 580.2 | 200 |
| | 3 | 104 | 70 | 100.2 | 102.2 |
| | 4 | 91.8 | 190 | 104 | 60.5 |
| | 5 | 318 | 183 | 70 | 70 |
| 2 | 6 | 269 | 189 | 55 | 40 |
| | 7 | 171 | 61 | 70.2 | 80.2 |
| | 8 | 104 | 30 | 90.3 | 70.2 |
| | 9 | 122 | 30.6 | 147 | 100 |
| 3 | 10 | 318 | 120 | 147 | 90.8 |
| | 11 | 91.8 | 257 | 120.8 | 100.2 |
| 4 | 12 | 355 | 30.5 | 200 | 170.5 |
| 5 | 13 | 844 | 35 | 514 | 305 |
| 6 | 14 | 336 | 53 | 924 | 800 |
| | 15 | 226 | 52 | 200 | 170 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 16 | 330 | 52 | 134 | 120 |

51. ცხრილში მოცემულია მონაცემები, რომლებიც მიღებულია $y = 2x + 3$ ფუნქციონალურ დამოკიდებულებაზე $N(\cdot;0,4)$ ნორმალურად განაწილებული ადიტიური ხმაურის დამატებით. ცხრილში მოცემული მონაცემებით აღადგინეთ და გამოიკვლიეთ წრფივი რეგრესია.

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0.5 | 1 | 1.2 | 1.4 | 2.3 | 2.7 | 6 | 6.2 | 7 | 8 |
| $y$ | 5.33 | 2.92 | 3.94 | 8.15 | 8.73 | 8.09 | 19.11 | 13.37 | 13.49 | 17.21 |

# ლიტერატურა

## ძირითადი ლიტერატურა


1. Тьюрин Ю. Н., Макаров А. А. Статистический анализ данных на компьютере.- М: ИНФА, 1998, 528 с.
2. Холлендер М., Вулф А. Непараметрические методы статистики. – М: Финансы и статистика, 1983, 518 с.
3. Пустылник Е.И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений.- М.: Наука, 1968, 288 с.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.- М.: Изд – во физико – матматческой литературы, 1958, 664 с.
   ვენტცელი ე.ს. ალბათობათა თეორია.- თბილისი, განათლება, 1980, 638 გვ.


## დამხმარე ლიტერატურა


5. Айвазян С. А., Бухсштабер В. М., Енюков И. С., Месшалкин Л. Д. Прикладная статистика. Класификация и снижение размерности. Справочние издание под ред. Айвазяна С. А. -. М: финансы и статистика, 1989, 607 с.
6. Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика. Основы моделирования и нервичная обработка данных. Справочное издание под ред. Айвазяна С. А. -. М: Финннансы и статистика, 1983, 471 с.
7. Айвазян С. А., Енюков И. С., Месшалкин Л. Д. Прикладная статистика. Исследование зависимостей. Справочное издание под ред. Айвазяна С. А. – М: Финансы и статистика, 1985, 471 с.
8. Афифи А., Эйзен С. Статистический анализ. Подход с использованием ЭВМ. – М: Мир, 1982, 488 с.
9. Тьюки Дж. Анализ результатов наблюдений. Разведочный анализ. – М: Мир, 1981, 693 с.


## ლიტერატურა საგნის ღრმად შესწავლისათვის


10. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей.- М.: Наука, 1988, 448 с.
11. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения.- М.: Мир, Том. 1, 1984, 527 с.
12. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения.- М.: Мир, Том 2, 1984, 551 с.
13. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей (Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы).- М.: Наука, 1973, 494 с.
14. Кендалл М. Дж., Стьюарт А. Теория распределений.- М.: Наука, 1966, 587.
15. Кендалл М. Дж., Стьюарт А. Статистические выводы и связи.- М.: Наука, 1973, 899 с.
16. Кендалл М. Дж., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды.- М.: Наука, 1976, 736 с.
17. Вальд А. Последоватеоьный анализ.- М.: Физматгиз, 1960.
18. Ван дер Варден Б.Л. Математическая статистика.- М.: ИЛ, 1960.
19. Блекуелл Д., Гиршик М.А. Теория игр и статистических решений.- М.: ИЛ, 1958.

20. Леман Э. Проверка статистических гипотез.- М.: Наука, 1964, 498 с.
21. Уилкс С. Математическая статистика.- М.: Мир, 1967.
22. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения.- М.: Мир, 1974, 491 с.
23. Крамер Г. Математические методы статистики.- М.: Мир, 1975, 648 с.
24. Закс Ш. Теория статистических выводов.- М.: Мир, 1975, 776 с.
25. Ширяев А.Н. Статистический последовательный анализ.- М.: Наука, 1976, 271 с.
26. Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применения.- М.: Наука, 1968, 547 с.
27. Ермаков С. М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование.- М.: Наука, 1982, 294 с.
28. Кульбак С. Теория информации и статистика.- М.: Наука, 1967, 408 с.
29. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики.- М.: Наука, 1983, 415 с.
30. Качиашвили К. И. Байесовские алгоритмы проверки многих гипотез.- Тбилиси: Ганатлеба, 1989, 144 с.
31. Тёрнер Д. Вероятность. статистика и исследование операции.- М.: Статистика, 1976, 432 с.
32. Вайнберг Дж., Шумекер Дж. Статистика.- М.: Статистика, 1979, 390 с.
33. Кокс Д., Хинкли Д. Теоретическая статистика.- М.: Мир, 1978, 560 с.
34. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория. – М.: Мир, 1980, 536 с.
35. Бард Й. Нелинейное оценивание параметров.- М.: Статистика, 1979, 349 с.
36. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ.- М.: Мир, 1980, 456 с.
37. Демиденко Е. З. Линейная и нелинейная регрессии.- М.: Финансы и статистика, 1981, 302 с.
38. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных.- М.: Мир, 1989, 540 с.
39. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов.- М.: Мир, 1982, 428 с.
40. Клейнен Дж. Статистические методы в имитационном моделировании. Выпуск 1.- М.: Статистика, 1978, 222 с.
41. Клейнен Дж. Статистические методы в имитационном моделировании. Выпуск 2.- М.: Статистика, 1978, 335 с.
42. Иберла К. Факторный анализ.- М.: Статистика, 1980, 398 с.
43. Райфа Г., Шлейфер Р. Прикладная теория статистических решений.- М.: Статистика, 1977, 307 с.
44. Барра Ж. Р. Основные понятия математической статистика.- М.: Мир, 1974, 275 с.
45. Большаков И. А., Ракошиц В. С. Прикладная теория случайных потоков.- М.: Сов. Радио, 1978, 248 с.
46. Хьюбер П. Робастность в статистике.- М.: Мир, 1984, 303 с.
47. Поллард Дж. Справочник по вычислительным методам статистики.- М.: Финансы и статистика, 1982, 344 с.
48. Мэйндональд Дж. Вычислительные алгоритмы в прикладной статистике.- М.: Финансы и статистика, 1988, 350 с.
49. Аренс Х., Лёйтер Ю. Многомерный дисперсионный анализ.- М.: Финансы и статистика, 1985, 230 с.
50. Дэйвид Г. Порядковые статистики.- М.: Наука, 1979, 335 с.
51. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик.- М.: Наука, 1984, 303 с.
52 Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ –. М: 1963, 500 с.
53. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов –. М: Мир, 1976, 756 с.
54. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятноятей и математической статистике.- М.: Наука, 1985, 640 с.
55. Кокрен У. Методы выборочного исследования.- М.: Статистика, 1976, 440 с.
56. Примак А.В., Кафаров В.В., Качиашвили К.И. Системный анализ контроля и управления качеством воздуха и воды.- Киев: Наукова думка, 1991, 360 с. (наука и технический прогресс)

57. Aczel A. D. Complete business statistics.- Irwin McGraw-Hill. Inc., 1996, 863 p.
58. Law A. M., Kelton W. D. Simulation modeling and analysis.- Irwin McGraw-Hill. Inc., 1991, 759.
59. Eppen G.D., Gould F.J., Schmidt C.P., Moore J.H. and Weatherford L.R. Management Science. Decision Modeling with Spreadsheets.- Prentice Hall, 1993, 762 p.
60. Kennedy W.J. and Gentle J.E. Statistical Computing. New York, Marcel Dekker, 1980.
61. Lebart L., Morineau A. and Warwick A. Multivariate Descriptive Statistical Analysis. New York, J. Wiley and Sonws, 1984.
62. Mood A.M., Graybill F.A. and Boes D.C. Introduction to the Theory of Statistics. New York, McGraw-Hill, 1974.
63. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა ეკონომისტებისათვის / ნ. ლაზრიევას რედაქციით, თბილისი, 2000, 661 გვ.
64. დოჭვირი ბ. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა. ლექციების კურსი ეკონომიკური ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის, ნაწილი I და II, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1984.
65. მანია გ. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა. სახელმძღვანელო ეკონომიკური ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1976.

**დანართი 1.** ბინომიალური განაწილების ზედა ბოლოების ალბათობები:

$n=2$ (1) 10, $p=.05$ (.05) .45, 1/3; $n=2$ (1) 25, $p=.50$ [2].

როდესაც $B$ – ს აქვს ბინომიალური განაწილება $n$ და $p_0$ პარამეტრებით, ცხრილები იკითხება შემდეგნაირად:

1. როდესაც $p_0 < .5$ $(b,n)$ - თვის ცხრილში $p = p_0$ - თვის მოყვანილია $P_{p_0}\{B \geq b\}$. თუ მონცემული $(b,n)$ – თვის ცხრილში $p = p_0$ - თვის დაბეჭდილია $\alpha$, მაშინ $b(\alpha, n, p_0) = b$.
2. როდესაც $p_0 > .5$ ბოლოების ალბათობები შეიძლება მივიღოთ განტოლებიდან $P_{p_0}\{B \geq b\} = P_{1-p_0}\{B \leq n-b\}$. მაგალითად, როდესაც $n=10$, $p_0 = .7,\ b = 8$ ვპოულობთ $P_{.7}\{B \geq 8\} = P_{..3}\{B \leq 2\} = 1 - P_{..3}\{B \geq 3\} = 1 - .6172 = .3828$.
3. როდესაც $p_0 = .5$ $(b,n)$ - თვის შესაბამისი უჯრედის შემცველობა ცხრილში $p = .5$ - თვის არის $P_{.5}\{B \geq b\} = P_{.5}\{B \leq (n-b)\}$. თუ $(b,n)$ - თვის ცხრილში $p = .5$ - თვის დაბეჭდილია $\alpha$, მაშინ $b(\alpha, n, 1/2) = b$.

$p = .05$

| b | n = 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 1 | .0975 | .1426 | .1855 | .2262 | .2649 | .3017 | .3366 | .3698 | .4013 |
| 2 | .0025 | .0073 | .0140 | .0226 | .0328 | .0444 | .0572 | .0712 | .0861 |
| 3 | | .0001 | .0005 | .0012 | .0022 | .0038 | .0058 | .0084 | .0115 |
| 4 | | | .0000 | .0000 | .0001 | .0002 | .0004 | .0006 | .0010 |
| 5 | | | | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 |
| 6 | | | | | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 7 | | | | | | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 8 | | | | | | | .0000 | .0000 | .0000 |
| 9 | | | | | | | | .0000 | .0000 |
| 10 | | | | | | | | | .0000 |

$p = .10$

| b | n = 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 1 | .1900 | .2710 | .3439 | .4095 | .4686 | .5217 | .5695 | .6126 | .6513 |
| 2 | .0100 | .0280 | .0523 | .0815 | .1143 | .1497 | .1869 | .2252 | .2639 |
| 3 | | .0010 | .0037 | .0086 | .0159 | .0257 | .0381 | .0530 | .0702 |
| 4 | | | .0001 | .0005 | .0013 | .0027 | .0050 | .0083 | .0128 |
| 5 | | | | .0000 | .0001 | .0002 | .0004 | .0009 | .0016 |
| 6 | | | | | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0001 |
| 7 | | | | | | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| 8 | | | | | | | .0000 | .0000 | .0000 |
| 9 | | | | | | | | .0000 | .0000 |
| 10 | | | | | | | | | .0000 |

$p = .15$

| $b$ | $n$ = 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 1 | .2775 | .3859 | .4780 | .5563 | .6229 | .6794 | .7275 | .7684 | .8031 |
| 2 | .0225 | .0608 | .1095 | .1648 | .2235 | .2834 | .3428 | .4005 | .4557 |
| 3 | | .0034 | .0120 | .0266 | .0473 | .0738 | .1052 | .1409 | .1798 |
| 4 | | | .0005 | .0022 | .0059 | .0121 | .0214 | .0339 | .0500 |
| 5 | | | | .0001 | .0004 | .0012 | .0029 | .0056 | .0099 |
| 6 | | | | | .0000 | .0001 | .0002 | .0006 | .0014 |
| 7 | | | | | | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 |
| 8 | | | | | | | .0000 | .0000 | .0000 |
| 9 | | | | | | | | .0000 | .0000 |
| 10 | | | | | | | | | .0000 |

$p = .20$

| $b$ | $n$ = 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 1 | .3600 | .4880 | .5904 | .6723 | .7379 | .7903 | .8322 | .8658 | .8926 |
| 2 | .0400 | .1040 | .1808 | .2627 | .3446 | .4233 | .4967 | .5638 | .6242 |
| 3 | | .0080 | .0272 | .0579 | .0989 | .1480 | .2031 | .2618 | .3222 |
| 4 | | | .0016 | .0067 | .0170 | .0333 | .0563 | .0856 | .1209 |
| 5 | | | | .0003 | .0016 | .0047 | .0104 | .0196 | .0328 |
| 6 | | | | | .0001 | .0004 | .0012 | .0031 | .0064 |
| 7 | | | | | | .0000 | .0001 | .0003 | .0009 |
| 8 | | | | | | | .0000 | .0000 | .0001 |
| 9 | | | | | | | | .0000 | .0000 |
| 10 | | | | | | | | | .0000 |

$p = .25$

| $b$ | $n$ = 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 1 | .4375 | .5781 | .6836 | .7627 | .8220 | .8665 | .8999 | .9249 | .9437 |
| 2 | .0625 | .1563 | .2617 | .3672 | .4661 | .5551 | .6329 | .6997 | .7560 |
| 3 | | .0156 | .0508 | .1035 | .1694 | .2436 | .3215 | .3993 | .4744 |
| 4 | | | .0039 | .0156 | .0376 | .0706 | .1138 | .1657 | .2241 |
| 5 | | | | .0010 | .0046 | .0129 | .0273 | .0489 | .0781 |
| 6 | | | | | .0002 | .0013 | .0042 | .0100 | .0197 |
| 7 | | | | | | .0001 | .0004 | .0013 | .0035 |
| 8 | | | | | | | .0000 | .0001 | .0004 |
| 9 | | | | | | | | .0000 | .0000 |
| 10 | | | | | | | | | .0000 |

$p = .30$

| $b$ | $n$ = 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 1 | .5100 | .6570 | .7599 | .8319 | .8824 | .9176 | .9424 | .9596 | .9718 |
| 2 | .0900 | .2160 | .3483 | .4718 | .5798 | .6706 | .7447 | .8040 | .8507 |
| 3 | | .0270 | .0837 | .1631 | .2557 | .3529 | .4482 | .5372 | .6172 |
| 4 | | | .0081 | .0308 | .0705 | .1260 | .1941 | .2703 | .3504 |
| 5 | | | | .0024 | .0109 | .0288 | .0580 | .0988 | .1503 |
| 6 | | | | | .0007 | .0038 | .0113 | .0253 | .0473 |
| 7 | | | | | | .0002 | .0013 | .0043 | .0106 |
| 8 | | | | | | | .0001 | .0004 | .0016 |
| 9 | | | | | | | | .0000 | .0001 |
| 10 | | | | | | | | | .0000 |

$p = 1/3$

| $b$ | $n$ = 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 1 | .5556 | .7037 | .8025 | .8683 | .9122 | .9415 | .9610 | .9740 | .9827 |
| 2 | .1111 | .2593 | .4074 | .5391 | .6488 | .7366 | .8049 | .8569 | .8959 |
| 3 | | .0370 | .1111 | .2099 | .3196 | .4294 | .5318 | .6228 | .7009 |
| 4 | | | .0123 | .0453 | .1001 | .1733 | .2586 | .3497 | .4407 |
| 5 | | | | .0041 | .0178 | .0453 | .0879 | .1448 | .2131 |
| 6 | | | | | .0014 | .0069 | .0197 | .0424 | .0766 |
| 7 | | | | | | .0005 | .0026 | .0083 | .0197 |
| 8 | | | | | | | .0002 | .0010 | .0034 |
| 9 | | | | | | | | .0001 | .0004 |
| 10 | | | | | | | | | .0000 |

$p = .35$

| $b$ | $n$ = 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 1 | .5775 | .7254 | .8215 | .8840 | .9246 | .9510 | .9681 | .9793 | .9865 |
| 2 | .1225 | .2818 | .4370 | .5716 | .6809 | .7662 | .8309 | .8789 | .9140 |
| 3 | | .0429 | .1265 | .2352 | .3529 | .4677 | .5722 | .6627 | .7384 |
| 4 | | | .0150 | .0540 | .1174 | .1998 | .2936 | .3911 | .4862 |
| 5 | | | | .0053 | .0223 | .0556 | .1061 | .1717 | .2485 |
| 6 | | | | | .0018 | .0090 | .0253 | .0536 | .0949 |
| 7 | | | | | | .0006 | .0036 | .0112 | .0260 |
| 8 | | | | | | | .0002 | .0014 | .0048 |
| 9 | | | | | | | | .0001 | .0005 |
| 10 | | | | | | | | | .0000 |

$p = .40$

| $b$ | $n$ = 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 1 | .6400 | .7840 | .8704 | .9222 | .9533 | .9720 | .9832 | .9899 | .9940 |
| 2 | .1600 | .3520 | .5248 | .6630 | .7667 | .8414 | .8936 | .9295 | .9536 |
| 3 | | .0640 | .1792 | .3174 | .4557 | .5801 | .6846 | .7682 | .8327 |
| 4 | | | .0256 | .0870 | .1792 | .2898 | .4059 | .5174 | .6177 |
| 5 | | | | .0102 | .0410 | .0963 | .1737 | .2666 | .3669 |
| 6 | | | | | .0041 | .0188 | .0498 | .0994 | .1662 |
| 7 | | | | | | .0016 | .0085 | .0250 | .0548 |
| 8 | | | | | | | .0007 | .0038 | .0123 |
| 9 | | | | | | | | .0003 | .0017 |
| 10 | | | | | | | | | .0001 |

$p = .45$

| $b$ | $n$ = 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 1 | 6975 | .8336 | .9085 | .9497 | .9723 | .9848 | .9916 | .9954 | .9975 |
| 2 | .2025 | .4253 | .6090 | .7438 | .8364 | .8976 | .9368 | .9615 | .9767 |
| 3 | | .0911 | .2415 | .4069 | .5585 | .6836 | .7799 | .8505 | .9004 |
| 4 | | | .0410 | .1312 | .2553 | .3917 | .5230 | .6386 | .7340 |
| 5 | | | | .0185 | .0692 | .1529 | .2604 | .3786 | .4956 |
| 6 | | | | | .0083 | .0357 | .0885 | .1658 | .2616 |
| 7 | | | | | | .0037 | .0181 | .0498 | .1020 |
| 8 | | | | | | | .0017 | .0091 | .0274 |
| 9 | | | | | | | | .0008 | .0045 |
| 10 | | | | | | | | | .0003 |

$p = .50$

| $b$ | $n$ = 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | .7500 | | | | | | | |
| 2 | .2500 | .5000 | .6875 | | | | | |
| 3 | | .1250 | .3125 | .5000 | .6563 | | | |
| 4 | | | .0625 | .1875 | .3438 | .5000 | .6367 | |
| 5 | | | | .0313 | .1094 | .2266 | .3633 | .5000 |
| 6 | | | | | .0156 | .0625 | .1445 | .2539 |
| 7 | | | | | | 0078 | .0352 | .0898 |
| 8 | | | | | | | .0039 | .0195 |
| 9 | | | | | | | | .0020 |

$p = .50$

| | | | | $n$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 5 | .6230 | | | | | | | |
| 6 | .3770 | .5000 | .6128 | | | | | |
| 7 | .1719 | .2744 | .3872 | .5000 | .6047 | | | |
| 8 | .0547 | .1133 | .1938 | .2905 | .3953 | .5000 | .5982 | |
| 9 | .0107 | .0327 | .0730 | .1334 | .2120 | .3036 | .4018 | .5000 |
| 10 | .0010 | .0059 | .0193 | .0461 | .0898 | .1509 | .2272 | .3145 |
| 11 | | .0005 | .0032 | .0112 | .0287 | .0592 | .1051 | .1662 |
| 12 | | | .0002 | .0017 | .0065 | .0176 | .0384 | .0717 |
| 13 | | | | .0001 | .0009 | .0037 | .0106 | .0245 |
| 14 | | | | | .0001 | .0005 | .0021 | .0064 |
| 15 | | | | | | .0000 | .0003 | .0012 |
| 16 | | | | | | | .0000 | .0001 |
| 17 | | | | | | | | .0000 |

$p = .50$

| | | | | $n$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 9 | .5927 | | | | | | | |
| 10 | .4073 | .5000 | .5881 | | | | | |
| 11 | .2403 | .3238 | .4119 | .5000 | .5841 | | | |
| 12 | .1189 | .1796 | .2517 | .3318 | .4159 | .5000 | .5806 | |
| 13 | .0481 | .0835 | .1316 | .1917 | .2617 | .3388 | .4194 | .5000 |
| 14 | .0154 | .0318 | .0577 | .0946 | .1431 | .2024 | .2706 | .3450 |
| 15 | .0038 | .0096 | .0207 | .0392 | .0669 | .1050 | .1537 | .2122 |
| 16 | .0007 | .0022 | .0059 | .0133 | .0262 | .0466 | .0758 | .1148 |
| 17 | .0001 | .0004 | .0013 | .0036 | .0085 | .0173 | .0320 | .0539 |
| 18 | .0000 | .0000 | .0002 | .0007 | .0022 | .0053 | .0113 | .0216 |
| 19 | | .0000 | .0000 | .0001 | .0004 | .0013 | .0033 | .0073 |
| 20 | | | .0000 | .0000 | .0001 | .0002 | .0008 | .0020 |
| 21 | | | | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 | .0005 |
| 22 | | | | | .0000 | .0000 | .0000 | .0001 |
| 23 | | | | | | .0000 | .0000 | .0000 |
| 24 | | | | | | | .0000 | .0000 |
| 25 | | | | | | | | .0000 |

**დანართი 2**. პუასონის განაწილება (ალბათობები $\lambda^i e^{-\lambda}/i!$, გამრავლებული $10^6$ - ზე)

| $i$ | λ = 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 904837 | 818731 | 740818 | 670320 | 606531 | 548812 | 496585 | 449329 | 406570 | 367879 |
| 1 | 90484 | 163746 | 222245 | 268128 | 303265 | 329287 | 347610 | 359463 | 365913 | 367879 |
| 2 | 4524 | 16375 | 33337 | 53626 | 75816 | 98786 | 121663 | 143785 | 164661 | 183940 |
| 3 | 151 | 1092 | 3334 | 7150 | 12636 | 19757 | 28388 | 38343 | 49398 | 61313 |
| 4 | 4 | 55 | 250 | 715 | 1580 | 2964 | 4968 | 7669 | 11115 | 15328 |
| 5 | | 2 | 15 | 57 | 158 | 356 | 696 | 1227 | 2001 | 3066 |
| 6 | | | 1 | 4 | 13 | 36 | 81 | 164 | 300 | 511 |
| 7 | | | | | 1 | 3 | 8 | 19 | 39 | 73 |
| 8 | | | | | | | 1 | 2 | 4 | 9 |
| 9 | | | | | | | | | | 1 |

| $i$ | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 332871 | 301194 | 272532 | 246597 | 223130 | 201897 | 182684 | 165299 | 149569 | 135335 |
| 1 | 366158 | 361433 | 354291 | 345236 | 334695 | 323034 | 310562 | 297538 | 284180 | 270671 |
| 2 | 201387 | 216860 | 230289 | 241665 | 251021 | 258428 | 263978 | 267784 | 269971 | 270671 |
| 3 | 73842 | 86744 | 99792 | 112777 | 125510 | 137828 | 149587 | 160671 | 170982 | 180447 |
| 4 | 20307 | 26023 | 32432 | 39472 | 47067 | 55131 | 63575 | 72302 | 81216 | 90224 |
| 5 | 4467 | 6246 | 8432 | 11052 | 14120 | 17642 | 21615 | 26029 | 30862 | 36089 |
| 6 | 819 | 1249 | 1827 | 2579 | 3530 | 4705 | 6124 | 7809 | 9773 | 12030 |
| 7 | 129 | 214 | 339 | 516 | 756 | 1075 | 1487 | 2008 | 2653 | 3437 |
| 8 | 18 | 32 | 55 | 90 | 142 | 215 | 316 | 452 | 630 | 859 |
| 9 | 2 | 4 | 8 | 14 | 24 | 38 | 60 | 90 | 133 | 191 |
| 10 | | 1 | 1 | 2 | 4 | 6 | 10 | 16 | 25 | 38 |
| 11 | | | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 7 |
| 12 | | | | | | | | | 1 | 1 |

| $i$ | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 | 2,6 | 2,7 | 2,8 | 2,9 | 3,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 122456 | 110803 | 100259 | 90718 | 82085 | 74274 | 67206 | 60810 | 55023 | 49787 |
| 1 | 257159 | 243767 | 230595 | 217723 | 205212 | 193111 | 181455 | 170268 | 159567 | 149361 |
| 2 | 270016 | 268144 | 265185 | 261268 | 256516 | 251045 | 244964 | 238375 | 231373 | 224042 |
| 3 | 189012 | 196639 | 203308 | 209014 | 213763 | 217572 | 220468 | 222484 | 223660 | 224042 |
| 4 | 99231 | 108151 | 116902 | 125409 | 133602 | 141422 | 148816 | 155739 | 162154 | 168031 |
| 5 | 41677 | 47587 | 53775 | 60196 | 66801 | 73539 | 80360 | 87214 | 94049 | 100819 |
| 6 | 14587 | 17448 | 20614 | 24078 | 27834 | 31867 | 36162 | 40700 | 45457 | 50409 |
| 7 | 4376 | 5484 | 6773 | 8255 | 9941 | 11836 | 13948 | 16280 | 18832 | 21604 |
| 8 | 1149 | 1508 | 1947 | 2477 | 3106 | 3847 | 4708 | 5698 | 6827 | 8102 |
| 9 | 268 | 369 | 498 | 660 | 863 | 1111 | 1412 | 1773 | 2200 | 2701 |
| 10 | 56 | 81 | 114 | 158 | 216 | 289 | 381 | 496 | 638 | 810 |
| 11 | 11 | 16 | 24 | 35 | 49 | 68 | 94 | 126 | 168 | 221 |
| 12 | 2 | 3 | 5 | 7 | 10 | 15 | 21 | 29 | 41 | 55 |
| 13 | | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 13 |
| 14 | | | | | | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| 15 | | | | | | | | | | 1 |

| $i$ | λ = 3,1 | 3,2 | 3,3 | 3,4 | 3,5 | 3,6 | 3,7 | 3,8 | 3,9 | 4,0 | $i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 45049 | 40762 | 36883 | 33373 | 30197 | 27324 | 24724 | 22371 | 20242 | 18316 | 0 |
| 1 | 139653 | 130439 | 121714 | 113469 | 105691 | 98365 | 91477 | 85009 | 78943 | 73263 | 1 |
| 2 | 216461 | 208702 | 200829 | 192898 | 184959 | 177058 | 169233 | 161517 | 153940 | 146525 | 2 |
| 3 | 223677 | 222616 | 220912 | 218617 | 215785 | 212469 | 208720 | 204588 | 200122 | 195367 | 3 |
| 4 | 173350 | 178093 | 182252 | 185825 | 188812 | 191222 | 193066 | 194359 | 195119 | 195367 | 4 |
| 5 | 107477 | 113979 | 120286 | 126361 | 132169 | 137680 | 142869 | 147713 | 152193 | 156293 | 5 |
| 6 | 55530 | 60789 | 66158 | 71604 | 77098 | 82608 | 88102 | 93551 | 98925 | 104196 | 6 |
| 7 | 24592 | 27789 | 31189 | 34779 | 38549 | 42484 | 46568 | 50785 | 55115 | 59540 | 7 |
| 8 | 9529 | 11116 | 12865 | 14781 | 16865 | 19118 | 21538 | 24123 | 26869 | 29770 | 8 |
| 9 | 3282 | 3952 | 4717 | 5584 | 6559 | 7647 | 8854 | 10185 | 11643 | 13231 | 9 |
| 10 | 1018 | 1265 | 1557 | 1899 | 2296 | 2753 | 3276 | 3870 | 4541 | 5292 | 10 |
| 11 | 287 | 368 | 467 | 587 | 730 | 901 | 1102 | 1337 | 1610 | 1925 | 11 |
| 12 | 74 | 98 | 128 | 166 | 213 | 270 | 340 | 423 | 523 | 642 | 12 |
| 13 | 18 | 24 | 33 | 43 | 57 | 75 | 97 | 124 | 157 | 197 | 13 |
| 14 | 4 | 6 | 8 | 11 | 14 | 19 | 26 | 34 | 44 | 56 | 14 |
| 15 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 5 | 6 | 9 | 11 | 15 | 15 |
| 16 | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 16 |
| 17 | | | | | | | | | 1 | 1 | 17 |

| $i$ | 4,1 | 4,2 | 4,3 | 4,4 | 4,5 | 4,6 | 4,7 | 4,8 | 4,9 | 5,0 | $i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 16573 | 14996 | 13569 | 12277 | 11109 | 10052 | 9095 | 8230 | 7447 | 6738 | 0 |
| 1 | 67948 | 62981 | 58345 | 54020 | 49990 | 46238 | 42748 | 39503 | 36488 | 33690 | 1 |
| 2 | 139293 | 132261 | 125441 | 118845 | 112479 | 106348 | 100457 | 94807 | 89396 | 84224 | 2 |
| 3 | 190368 | 185165 | 179799 | 174305 | 168718 | 163068 | 157383 | 151691 | 146014 | 140374 | 3 |
| 4 | 195127 | 194424 | 193284 | 191736 | 189808 | 187528 | 184925 | 182029 | 178867 | 175467 | 4 |
| 5 | 160004 | 163316 | 166224 | 168728 | 170827 | 172525 | 173830 | 174748 | 175290 | 175467 | 5 |
| 6 | 109336 | 114321 | 119127 | 123734 | 128120 | 132270 | 136167 | 139798 | 143153 | 146223 | 6 |
| 7 | 64040 | 68593 | 73178 | 77775 | 82363 | 86920 | 91426 | 95862 | 100207 | 104445 | 7 |
| 8 | 32820 | 36011 | 39333 | 42776 | 46329 | 49979 | 53713 | 57517 | 61377 | 65278 | 8 |
| 9 | 14951 | 16805 | 18793 | 20913 | 23165 | 25545 | 28050 | 30676 | 33416 | 36266 | 9 |
| 10 | 6130 | 7058 | 8081 | 9202 | 10424 | 11751 | 13184 | 14724 | 16374 | 18138 | 10 |
| 11 | 2285 | 2695 | 3159 | 3681 | 4264 | 4914 | 5633 | 6425 | 7294 | 8242 | 11 |
| 12 | 781 | 943 | 1132 | 1350 | 1599 | 1884 | 2206 | 2570 | 2978 | 3434 | 12 |
| 13 | 246 | 305 | 374 | 457 | 554 | 667 | 798 | 949 | 1123 | 1321 | 13 |
| 14 | 72 | 91 | 115 | 144 | 178 | 219 | 268 | 325 | 393 | 472 | 14 |
| 15 | 20 | 26 | 33 | 42 | 53 | 67 | 84 | 104 | 128 | 157 | 15 |
| 16 | 5 | 7 | 9 | 12 | 15 | 19 | 25 | 31 | 39 | 49 | 16 |
| 17 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 14 | 17 |
| 18 | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 18 |
| 19 | | | | | | | | | 1 | 1 | 19 |

| $i$ | 5,1 | 5,2 | 5,3 | 5,4 | 5,5 | 5,6 | 5,7 | 5,8 | 5,9 | 6,0 | $i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 6097 | 5517 | 4992 | 4517 | 4087 | 3698 | 3346 | 3028 | 2739 | 2479 | 0 |
| 1 | 31093 | 28686 | 26455 | 24390 | 22477 | 20708 | 19072 | 17560 | 16163 | 14873 | 1 |
| 2 | 79288 | 74584 | 70107 | 65852 | 61812 | 57982 | 54355 | 50923 | 47680 | 44618 | 2 |
| 3 | 134790 | 129279 | 123856 | 118533 | 113323 | 108234 | 103275 | 98452 | 93771 | 89235 | 3 |

| i | λ = 5,1 | 5,2 | 5,3 | 5,4 | 5,5 | 5,6 | 5,7 | 5,8 | 5,9 | 6,0 | i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 171857 | 168063 | 164109 | 160020 | 155819 | 151528 | 147167 | 142755 | 138312 | 133853 | 4 |
| 5 | 175294 | 174785 | 173955 | 172821 | 171401 | 169711 | 167770 | 165596 | 163208 | 160623 | 5 |
| 6 | 149000 | 151480 | 153660 | 155539 | 157117 | 158397 | 159382 | 160076 | 160488 | 160623 | 6 |
| 7 | 108557 | 112528 | 116343 | 119987 | 123449 | 126717 | 129782 | 132635 | 135268 | 137677 | 7 |
| 8 | 69205 | 73143 | 77077 | 80991 | 84871 | 88702 | 92470 | 96160 | 99760 | 103258 | 8 |
| 9 | 39216 | 42261 | 45390 | 48595 | 51866 | 55192 | 58564 | 61970 | 65398 | 68838 | 9 |
| 10 | 20000 | 21976 | 24057 | 26241 | 28526 | 30908 | 33382 | 35943 | 38585 | 41303 | 10 |
| 11 | 9273 | 10388 | 11591 | 12882 | 14263 | 15735 | 17298 | 18952 | 20696 | 22529 | 11 |
| 12 | 3941 | 4502 | 5119 | 5797 | 6537 | 7343 | 8216 | 9160 | 10175 | 11264 | 12 |
| 13 | 1546 | 1801 | 2087 | 2408 | 2766 | 3163 | 3603 | 4087 | 4618 | 5199 | 13 |
| 14 | 563 | 669 | 790 | 929 | 1087 | 1265 | 1467 | 1693 | 1946 | 2228 | 14 |
| 15 | 191 | 232 | 279 | 334 | 398 | 472 | 557 | 655 | 766 | 891 | 15 |
| 16 | 61 | 75 | 92 | 113 | 137 | 165 | 199 | 237 | 282 | 334 | 16 |
| 17 | 18 | 23 | 29 | 36 | 44 | 54 | 67 | 81 | 98 | 118 | 17 |
| 18 | 5 | 7 | 8 | 11 | 14 | 17 | 21 | 26 | 32 | 39 | 18 |
| 19 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 | 12 | 19 |
| 20 | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 20 |
| 21 | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 21 |

| i | 6,1 | 6,2 | 6,3 | 6,4 | 6,5 | 6,6 | 6,7 | 6,8 | 6,9 | 7,0 | i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2243 | 2029 | 1836 | 1662 | 1503 | 1360 | 1231 | 1114 | 1008 | 912 | 0 |
| 1 | 13682 | 12582 | 11569 | 10634 | 9772 | 8978 | 8247 | 7574 | 6954 | 6383 | 1 |
| 2 | 41729 | 39006 | 36441 | 34029 | 31760 | 29629 | 27628 | 25751 | 23990 | 22341 | 2 |
| 3 | 84848 | 80612 | 76527 | 72595 | 68814 | 65183 | 61702 | 58368 | 55178 | 52129 | 3 |
| 4 | 129393 | 124948 | 120530 | 116151 | 111822 | 107553 | 103351 | 99225 | 95182 | 91226 | 4 |
| 5 | 157860 | 154936 | 151868 | 148674 | 145369 | 141969 | 138490 | 134946 | 131351 | 127717 | 5 |
| 6 | 160491 | 160100 | 159461 | 158585 | 157483 | 156166 | 154648 | 152939 | 151053 | 149003 | 6 |
| 7 | 139856 | 141803 | 143515 | 144992 | 146234 | 147243 | 148020 | 148569 | 148895 | 149003 | 7 |
| 8 | 106640 | 109897 | 113018 | 115994 | 118815 | 121475 | 123967 | 126284 | 128422 | 130377 | 8 |
| 9 | 72278 | 75707 | 79113 | 82484 | 85811 | 89082 | 92286 | 95415 | 98457 | 101405 | 9 |
| 10 | 44090 | 46938 | 49841 | 52790 | 55777 | 58794 | 61832 | 64882 | 67935 | 70983 | 10 |
| 11 | 24450 | 26456 | 28545 | 30714 | 32959 | 35276 | 37661 | 40109 | 42614 | 45171 | 11 |
| 12 | 12429 | 13669 | 14986 | 16381 | 17853 | 19402 | 21028 | 22728 | 24503 | 26350 | 12 |
| 13 | 5832 | 6519 | 7263 | 8064 | 8926 | 9850 | 10837 | 11889 | 13005 | 14188 | 13 |
| 14 | 2541 | 2887 | 3268 | 3687 | 4144 | 4644 | 5186 | 5774 | 6410 | 7094 | 14 |
| 15 | 1033 | 1193 | 1373 | 1573 | 1796 | 2043 | 2317 | 2618 | 2949 | 3311 | 15 |
| 16 | 394 | 462 | 540 | 629 | 730 | 843 | 970 | 1113 | 1272 | 1448 | 16 |
| 17 | 141 | 169 | 200 | 237 | 279 | 327 | 382 | 445 | 516 | 596 | 17 |
| 18 | 48 | 58 | 70 | 84 | 101 | 120 | 142 | 168 | 198 | 232 | 18 |
| 19 | 15 | 19 | 23 | 28 | 34 | 42 | 50 | 60 | 72 | 85 | 19 |
| 20 | 5 | 6 | 7 | 9 | 11 | 14 | 17 | 20 | 25 | 30 | 20 |
| 21 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 10 | 21 |
| 22 | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 22 |
| 23 | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 23 |

| | λ | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | 8,1 | 8,2 | 8,3 | 8,4 | 8,5 | 8,6 | 8,7 | 8,8 | 8,9 | 9,0 | $i$ |
| 21 | 71 | 83 | 97 | 113 | 131 | 152 | 175 | 201 | 231 | 264 | 21 |
| 22 | 26 | 31 | 37 | 43 | 51 | 59 | 69 | 81 | 93 | 108 | 22 |
| 23 | 9 | 11 | 13 | 16 | 19 | 22 | 26 | 31 | 36 | 42 | 23 |
| 24 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 11 | 13 | 16 | 24 |
| 25 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 25 |
| 26 | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 26 |
| 27 | | | | | | | | | 1 | 1 | 27 |

| | 9,1 | 9,2 | 9,3 | 9,4 | 9,5 | 9,6 | 9,7 | 9,8 | 9,9 | 10,0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 112 | 101 | 91 | 83 | 75 | 68 | 61 | 55 | 50 | 45 | 0 |
| 1 | 1016 | 930 | 850 | 778 | 711 | 650 | 594 | 543 | 497 | 454 | 1 |
| 2 | 4624 | 4276 | 3954 | 3655 | 3378 | 3121 | 2883 | 2663 | 2459 | 2270 | 2 |
| 3 | 14025 | 13113 | 12256 | 11452 | 10696 | 9987 | 9322 | 8698 | 8114 | 7567 | 3 |
| 4 | 31906 | 30160 | 28496 | 26911 | 25403 | 23969 | 22606 | 21311 | 20082 | 18917 | 4 |
| 5 | 58069 | 55494 | 53002 | 50593 | 48266 | 46020 | 43855 | 41770 | 39763 | 37833 | 5 |
| 6 | 88072 | 85091 | 82154 | 79262 | 76421 | 73632 | 70899 | 68224 | 65609 | 63055 | 6 |
| 7 | 114493 | 111834 | 109147 | 106438 | 103714 | 100981 | 98246 | 95514 | 92790 | 90079 | 7 |
| 8 | 130236 | 128609 | 126883 | 125065 | 123160 | 121178 | 119123 | 117004 | 114827 | 112599 | 8 |
| 9 | 131683 | 131467 | 131113 | 130623 | 130003 | 129256 | 128388 | 127405 | 126310 | 125110 | 9 |
| 10 | 119832 | 120950 | 121935 | 122786 | 123502 | 124086 | 124537 | 124857 | 125047 | 125110 | 10 |
| 11 | 99133 | 101158 | 103090 | 104926 | 106661 | 108293 | 109819 | 111236 | 112542 | 113736 | 11 |
| 12 | 75176 | 77555 | 79895 | 82192 | 84440 | 86634 | 88770 | 90843 | 92847 | 94780 | 12 |
| 13 | 52623 | 54885 | 57156 | 59431 | 61706 | 63976 | 66236 | 68481 | 70707 | 72908 | 13 |
| 14 | 34205 | 36067 | 37968 | 39904 | 41872 | 43869 | 45892 | 47937 | 50000 | 52077 | 14 |
| 15 | 20751 | 22121 | 23540 | 25006 | 26519 | 28076 | 29677 | 31319 | 33000 | 34718 | 15 |
| 16 | 11802 | 12720 | 13683 | 14691 | 15746 | 16846 | 17992 | 19183 | 20419 | 21699 | 16 |
| 17 | 6318 | 6884 | 7485 | 8123 | 8799 | 9513 | 10266 | 11058 | 11891 | 12764 | 17 |
| 18 | 3194 | 3518 | 3867 | 4242 | 4644 | 5074 | 5532 | 6021 | 6540 | 7091 | 18 |
| 19 | 1530 | 1704 | 1893 | 2099 | 2322 | 2563 | 2824 | 3105 | 3408 | 3732 | 19 |
| 20 | 696 | 784 | 880 | 986 | 1103 | 1230 | 1370 | 1522 | 1687 | 1866 | 20 |
| 21 | 302 | 343 | 390 | 442 | 499 | 563 | 633 | 710 | 795 | 889 | 21 |
| 22 | 125 | 144 | 165 | 189 | 215 | 245 | 279 | 316 | 358 | 404 | 22 |
| 23 | 49 | 57 | 67 | 77 | 89 | 102 | 118 | 135 | 154 | 176 | 23 |
| 24 | 19 | 22 | 26 | 30 | 35 | 41 | 48 | 55 | 64 | 73 | 24 |
| 25 | 7 | 8 | 10 | 11 | 13 | 16 | 18 | 22 | 25 | 29 | 25 |
| 26 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 26 |
| 27 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 27 |
| 28 | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 28 |
| 29 | | | | | | | | | | 1 | 29 |

| | 10,1 | 10,2 | 10,3 | 10,4 | 10,5 | 10,6 | 10,7 | 10,8 | 10,9 | 11,0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 41 | 37 | 34 | 30 | 28 | 25 | 23 | 20 | 18 | 17 | 0 |
| 1 | 415 | 379 | 346 | 317 | 289 | 264 | 241 | 220 | 201 | 184 | 1 |
| 2 | 2095 | 1934 | 1784 | 1646 | 1518 | 1400 | 1291 | 1190 | 1097 | 1010 | 2 |
| 3 | 7054 | 6574 | 6125 | 5705 | 5313 | 4946 | 4603 | 4283 | 3984 | 3705 | 3 |

| | λ | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *i* | 10,1 | 10,2 | 10,3 | 10,4 | 10,5 | 10,6 | 10,7 | 10,8 | 10,9 | 11,0 | *i* |
| 4 | 17811 | 16764 | 15773 | 14834 | 13946 | 13107 | 12313 | 11564 | 10856 | 10189 | 4 |
| 5 | 35979 | 34199 | 32492 | 30855 | 29287 | 27786 | 26350 | 24978 | 23667 | 22415 | 5 |
| 6 | 60565 | 58139 | 55777 | 53482 | 51252 | 49089 | 46991 | 44960 | 42995 | 41095 | 6 |
| 7 | 87387 | 84716 | 82072 | 79458 | 76878 | 74334 | 71830 | 69367 | 66949 | 64577 | 7 |
| 8 | 110326 | 108013 | 105668 | 103296 | 100902 | 98493 | 96072 | 93646 | 91218 | 88794 | 8 |
| 9 | 123810 | 122415 | 120931 | 119364 | 117720 | 116003 | 114219 | 112375 | 110475 | 108526 | 9 |
| 10 | 125048 | 124863 | 124559 | 124139 | 123606 | 122963 | 122215 | 121365 | 120418 | 119378 | 10 |
| 11 | 114817 | 115782 | 116633 | 117368 | 117987 | 118492 | 118882 | 119159 | 119323 | 119378 | 11 |
| 12 | 96637 | 98415 | 100110 | 101719 | 103239 | 104667 | 106003 | 107243 | 108386 | 109430 | 12 |
| 13 | 75080 | 77218 | 79318 | 81375 | 83385 | 85344 | 87248 | 89094 | 90877 | 92595 | 13 |
| 14 | 54165 | 56259 | 58315 | 60450 | 62539 | 64618 | 66683 | 68730 | 70754 | 72753 | 14 |
| 15 | 36471 | 38258 | 40071 | 41912 | 43777 | 45663 | 47567 | 49485 | 51415 | 53352 | 15 |
| 16 | 23022 | 24388 | 25795 | 27243 | 28729 | 30252 | 31810 | 33403 | 35026 | 36680 | 16 |
| 17 | 13678 | 14633 | 15629 | 16666 | 17744 | 18863 | 20022 | 21220 | 22458 | 23734 | 17 |
| 18 | 7675 | 8292 | 8943 | 9629 | 10351 | 11108 | 11902 | 12732 | 13600 | 14504 | 18 |
| 19 | 4080 | 4451 | 4848 | 5271 | 5720 | 6197 | 6703 | 7237 | 7802 | 8397 | 19 |
| 20 | 2060 | 2270 | 2497 | 2741 | 3003 | 3285 | 3586 | 3908 | 4252 | 4618 | 20 |
| 21 | 991 | 1103 | 1225 | 1357 | 1502 | 1658 | 1827 | 2010 | 2207 | 2419 | 21 |
| 22 | 455 | 511 | 573 | 642 | 717 | 799 | 889 | 987 | 1093 | 1210 | 22 |
| 23 | 200 | 227 | 257 | 290 | 327 | 368 | 413 | 463 | 518 | 578 | 23 |
| 24 | 84 | 96 | 110 | 126 | 143 | 163 | 184 | 208 | 235 | 265 | 24 |
| 25 | 34 | 39 | 45 | 52 | 60 | 69 | 79 | 90 | 103 | 117 | 25 |
| 26 | 13 | 15 | 18 | 21 | 24 | 28 | 32 | 37 | 43 | 49 | 26 |
| 27 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 20 | 27 |
| 28 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 28 |
| 29 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 29 |
| 30 | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 30 |

| | 11,1 | 11,2 | 11,3 | 11,4 | 11,5 | 11,6 | 11,7 | 11,8 | 11,9 | 12,0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 15 | 14 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 8 | 7 | 6 | 0 |
| 1 | 163 | 157 | 140 | 128 | 116 | 106 | 97 | 89 | 81 | 74 | 1 |
| 2 | 931 | 858 | 790 | 727 | 670 | 617 | 568 | 522 | 481 | 442 | 2 |
| 3 | 3445 | 3202 | 2976 | 2764 | 2568 | 2385 | 2214 | 2055 | 1907 | 1770 | 3 |
| 4 | 9559 | 8965 | 8406 | 7879 | 7382 | 6915 | 6476 | 6062 | 5674 | 5309 | 4 |
| 5 | 21221 | 20082 | 18997 | 17963 | 16979 | 16043 | 15153 | 14307 | 13504 | 12741 | 5 |
| 6 | 39259 | 37487 | 35778 | 34130 | 32544 | 31017 | 29549 | 28137 | 26782 | 25481 | 6 |
| 7 | 62253 | 59979 | 57755 | 55584 | 53465 | 51400 | 49388 | 47432 | 45530 | 43682 | 7 |
| 8 | 86376 | 83970 | 81579 | 79206 | 76856 | 74529 | 72231 | 69962 | 67725 | 65523 | 8 |
| 9 | 106531 | 104496 | 102427 | 100328 | 98204 | 96060 | 93900 | 91728 | 89548 | 87364 | 9 |
| 10 | 118249 | 117036 | 115743 | 114374 | 112935 | 111430 | 109863 | 108239 | 106562 | 104837 | 10 |
| 11 | 119324 | 119164 | 118899 | 118533 | 118068 | 117508 | 116854 | 116110 | 115281 | 114368 | 11 |
| 12 | 110375 | 111220 | 111964 | 112607 | 113149 | 113591 | 113933 | 114175 | 114320 | 114363 | 12 |
| 13 | 94243 | 95820 | 97322 | 98747 | 100093 | 101358 | 102539 | 103636 | 104647 | 105570 | 13 |
| 14 | 74721 | 76656 | 78553 | 80409 | 82219 | 83982 | 85694 | 87350 | 88950 | 90489 | 14 |
| 15 | 55294 | 57236 | 59177 | 61110 | 63035 | 64946 | 66841 | 68716 | 70567 | 72391 | 15 |
| 16 | 38360 | 40065 | 41793 | 43541 | 45306 | 47086 | 48877 | 50678 | 52484 | 54293 | 16 |
| 17 | 25047 | 26396 | 27780 | 29198 | 30648 | 32129 | 33639 | 35176 | 36739 | 38325 | 17 |
| 18 | 15446 | 16424 | 17440 | 18492 | 19581 | 20706 | 21865 | 23060 | 24288 | 25550 | 18 |
| 19 | 9023 | 9682 | 10372 | 11095 | 11852 | 12641 | 13465 | 14322 | 15212 | 16137 | 19 |

| $i$ | λ 11,1 | 11,2 | 11,3 | 11,4 | 11,5 | 11,6 | 11,7 | 11,8 | 11,9 | 12,0 | $i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 5008 | 5422 | 5860 | 6324 | 6815 | 7332 | 7877 | 8450 | 9051 | 9682 | 20 |
| 21 | 2647 | 2892 | 3153 | 3433 | 3732 | 4050 | 4388 | 4748 | 5129 | 5533 | 21 |
| 22 | 1336 | 1472 | 1620 | 1779 | 1951 | 2136 | 2334 | 2547 | 2774 | 3018 | 22 |
| 23 | 645 | 717 | 796 | 882 | 975 | 1077 | 1187 | 1307 | 1435 | 1575 | 23 |
| 24 | 298 | 335 | 375 | 419 | 467 | 521 | 579 | 642 | 712 | 787 | 24 |
| 25 | 132 | 150 | 169 | 191 | 215 | 242 | 271 | 303 | 339 | 378 | 25 |
| 26 | 57 | 65 | 74 | 84 | 95 | 108 | 122 | 138 | 155 | 174 | 26 |
| 27 | 23 | 27 | 31 | 35 | 41 | 46 | 53 | 60 | 68 | 78 | 27 |
| 28 | 9 | 11 | 12 | 14 | 17 | 19 | 22 | 25 | 29 | 33 | 28 |
| 29 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 14 | 29 |
| 30 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 30 |
| 31 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 31 |
| 32 | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 32 |

| $i$ | 12,1 | 12,2 | 12,3 | 12,4 | 12,5 | 12,6 | 12,7 | 12,8 | 12,9 | 13,0 | $i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 0 |
| 1 | 67 | 61 | 56 | 51 | 47 | 42 | 39 | 35 | 32 | 29 | 1 |
| 2 | 407 | 374 | 344 | 317 | 291 | 268 | 246 | 226 | 208 | 191 | 2 |
| 3 | 1641 | 1522 | 1412 | 1309 | 1213 | 1124 | 1042 | 965 | 894 | 828 | 3 |
| 4 | 4966 | 4643 | 4341 | 4057 | 3791 | 3541 | 3307 | 3088 | 2882 | 2690 | 4 |
| 5 | 12017 | 11330 | 10679 | 10062 | 9477 | 8924 | 8400 | 7905 | 7436 | 6994 | 5 |
| 6 | 24233 | 23037 | 21892 | 20794 | 19744 | 18740 | 17781 | 16864 | 15988 | 15153 | 6 |
| 7 | 41889 | 40151 | 38467 | 36836 | 35258 | 33733 | 32259 | 30837 | 29464 | 28141 | 7 |
| 8 | 63358 | 61230 | 59142 | 57095 | 55091 | 53129 | 51212 | 49339 | 47511 | 45730 | 8 |
| 9 | 85181 | 83000 | 80828 | 78665 | 76515 | 74381 | 72266 | 70171 | 68100 | 66054 | 9 |
| 10 | 103069 | 101261 | 99418 | 97544 | 95644 | 93720 | 91777 | 89819 | 87849 | 85870 | 10 |
| 11 | 113376 | 112308 | 111168 | 109959 | 108686 | 107352 | 105961 | 104516 | 103023 | 101483 | 11 |
| 12 | 114321 | 114180 | 113947 | 113624 | 113215 | 112720 | 112142 | 111484 | 110749 | 109940 | 12 |
| 13 | 106406 | 107153 | 107811 | 108380 | 108860 | 109251 | 109554 | 109769 | 109897 | 109940 | 13 |
| 14 | 91965 | 93376 | 94720 | 95994 | 97197 | 98326 | 99381 | 100360 | 101263 | 102087 | 14 |
| 15 | 74185 | 75946 | 77670 | 79355 | 80997 | 82594 | 84143 | 85641 | 87086 | 88475 | 15 |
| 16 | 56103 | 57909 | 59709 | 61500 | 63279 | 65043 | 66788 | 68513 | 70213 | 71886 | 16 |
| 17 | 39932 | 41558 | 43201 | 44859 | 46529 | 48206 | 49895 | 51586 | 53279 | 54972 | 17 |
| 18 | 26843 | 28167 | 29521 | 30903 | 32312 | 33746 | 35204 | 36683 | 38183 | 39702 | 18 |
| 19 | 17095 | 18086 | 19111 | 20168 | 21258 | 22379 | 23531 | 24713 | 25925 | 27164 | 19 |
| 20 | 10342 | 11033 | 11753 | 12504 | 13286 | 14099 | 14942 | 15816 | 16721 | 17657 | 20 |
| 21 | 5959 | 6409 | 6884 | 7383 | 7908 | 8459 | 9036 | 9640 | 10272 | 10930 | 21 |
| 22 | 3278 | 3554 | 3849 | 4162 | 4493 | 4845 | 5216 | 5609 | 6023 | 6459 | 22 |
| 23 | 1724 | 1885 | 2058 | 2244 | 2442 | 2654 | 2880 | 3122 | 3378 | 3651 | 23 |
| 24 | 869 | 958 | 1055 | 1159 | 1272 | 1393 | 1524 | 1665 | 1816 | 1977 | 24 |
| 25 | 421 | 468 | 519 | 575 | 636 | 702 | 774 | 852 | 937 | 1028 | 25 |
| 26 | 196 | 219 | 246 | 274 | 306 | 340 | 378 | 420 | 465 | 514 | 26 |
| 27 | 88 | 99 | 112 | 126 | 142 | 159 | 178 | 199 | 222 | 248 | 27 |
| 28 | 38 | 43 | 49 | 56 | 63 | 71 | 81 | 91 | 102 | 115 | 28 |
| 29 | 16 | 18 | 21 | 24 | 27 | 31 | 35 | 40 | 46 | 52 | 29 |
| 30 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 13 | 15 | 17 | 20 | 22 | 30 |
| 31 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 31 |
| 32 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 32 |
| 33 | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 33 |
| 34 | | | | | | | | | | 1 | 34 |

| i | λ = 13,1 | 13,2 | 13,3 | 13,4 | 13,5 | 13,6 | 13,7 | 13,8 | 13,9 | 14,0 | i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 27 | 24 | 22 | 20 | 19 | 17 | 15 | 14 | 13 | 12 | 1 |
| 2 | 175 | 161 | 148 | 136 | 125 | 115 | 105 | 97 | 89 | 81 | 2 |
| 3 | 766 | 709 | 657 | 608 | 562 | 520 | 481 | 445 | 411 | 380 | 3 |
| 4 | 2510 | 2341 | 2183 | 2035 | 1897 | 1768 | 1648 | 1535 | 1429 | 1331 | 4 |
| 5 | 6575 | 6180 | 5807 | 5455 | 5123 | 4810 | 4514 | 4236 | 3974 | 3727 | 5 |
| 6 | 14356 | 13596 | 12872 | 12183 | 11526 | 10902 | 10308 | 9743 | 9206 | 8696 | 6 |
| 7 | 26867 | 25639 | 24458 | 23322 | 22230 | 21181 | 20173 | 19207 | 18280 | 17392 | 7 |
| 8 | 43994 | 42304 | 40661 | 39064 | 37512 | 36007 | 34547 | 33132 | 31762 | 30435 | 8 |
| 9 | 64036 | 62046 | 60088 | 58161 | 56269 | 54410 | 52588 | 50802 | 49054 | 47344 | 9 |
| 10 | 83887 | 81901 | 79916 | 77936 | 75963 | 73998 | 72046 | 70107 | 68185 | 66282 | 10 |
| 11 | 99901 | 98281 | 96626 | 94940 | 93227 | 91489 | 89730 | 87953 | 86162 | 84359 | 11 |
| 12 | 109059 | 108109 | 107094 | 106017 | 104880 | 103687 | 102441 | 101146 | 99804 | 98418 | 12 |
| 13 | 109898 | 109773 | 109566 | 109279 | 108914 | 108473 | 107957 | 107370 | 106713 | 105989 | 13 |
| 14 | 102833 | 103500 | 104087 | 104595 | 105024 | 105373 | 105644 | 105836 | 105951 | 105989 | 14 |
| 15 | 89807 | 91080 | 92291 | 93439 | 94522 | 95539 | 96488 | 97369 | 98181 | 98923 | 15 |
| 16 | 73530 | 75141 | 76717 | 78255 | 79753 | 81208 | 82618 | 83981 | 85295 | 86558 | 16 |
| 17 | 56661 | 58345 | 60019 | 61683 | 63333 | 64966 | 66580 | 68173 | 69741 | 71283 | 17 |
| 18 | 41237 | 42786 | 44348 | 45920 | 47500 | 49086 | 50675 | 52266 | 53856 | 55442 | 18 |
| 19 | 28432 | 29725 | 31043 | 32385 | 33750 | 35135 | 36539 | 37962 | 39400 | 40852 | 19 |
| 20 | 18623 | 19619 | 20644 | 21698 | 22781 | 23892 | 25030 | 26193 | 27383 | 28597 | 20 |
| 21 | 11617 | 12332 | 13074 | 13846 | 14645 | 15473 | 16329 | 17213 | 18125 | 19064 | 21 |
| 22 | 6917 | 7399 | 7904 | 8433 | 8987 | 9565 | 10168 | 10797 | 11452 | 12132 | 22 |
| 23 | 3940 | 4246 | 4571 | 4913 | 5275 | 5656 | 6057 | 6478 | 6921 | 7385 | 23 |
| 24 | 2151 | 2336 | 2533 | 2743 | 2967 | 3205 | 3457 | 3725 | 4008 | 4308 | 24 |
| 25 | 1127 | 1233 | 1348 | 1470 | 1602 | 1744 | 1895 | 2056 | 2229 | 2412 | 25 |
| 26 | 568 | 626 | 689 | 758 | 832 | 912 | 998 | 1091 | 1191 | 1299 | 26 |
| 27 | 275 | 306 | 340 | 376 | 416 | 459 | 507 | 558 | 613 | 674 | 27 |
| 28 | 129 | 144 | 161 | 180 | 201 | 223 | 248 | 275 | 305 | 337 | 28 |
| 29 | 58 | 66 | 74 | 83 | 93 | 105 | 117 | 131 | 146 | 163 | 29 |
| 30 | 25 | 29 | 33 | 37 | 42 | 47 | 53 | 60 | 68 | 76 | 30 |
| 31 | 11 | 12 | 14 | 16 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 | 34 | 31 |
| 32 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 13 | 15 | 32 |
| 33 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 33 |
| 34 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 34 |
| 35 | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 35 |

| i | 14,1 | 14,2 | 14,3 | 14,4 | 14,5 | 14,6 | 14,7 | 14,8 | 14,9 | 15,0 | i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | 0 |
| 1 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 7 | 6 | 6 | 5 | 5 | 1 |
| 2 | 75 | 69 | 63 | 58 | 53 | 49 | 45 | 41 | 38 | 34 | 2 |
| 3 | 352 | 325 | 300 | 277 | 256 | 237 | 219 | 202 | 186 | 172 | 3 |
| 4 | 1239 | 1153 | 1073 | 999 | 929 | 864 | 803 | 747 | 694 | 645 | 4 |
| 5 | 3494 | 3275 | 3070 | 2876 | 2694 | 2523 | 2362 | 2211 | 2069 | 1936 | 5 |
| 6 | 8212 | 7752 | 7316 | 6902 | 6510 | 6139 | 5787 | 5454 | 5138 | 4839 | 6 |
| 7 | 16541 | 15726 | 14946 | 14199 | 13486 | 12804 | 12152 | 11530 | 10937 | 10370 | 7 |
| 8 | 29153 | 27913 | 26715 | 25559 | 24443 | 23367 | 22330 | 21331 | 20370 | 19444 | 8 |
| 9 | 45673 | 44040 | 42447 | 40894 | 39380 | 37907 | 36472 | 35078 | 33723 | 32407 | 9 |
| 10 | 64399 | 62537 | 60700 | 58887 | 57101 | 55343 | 53614 | 51915 | 50247 | 48611 | 10 |
| 11 | 82547 | 80730 | 78910 | 77089 | 75270 | 73456 | 71648 | 69850 | 68062 | 66287 | 11 |

| $i$ | λ 14,1 | 14,2 | 14,3 | 14,4 | 14,5 | 14,6 | 14,7 | 14,8 | 14,9 | 15,0 | $i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 96993 | 95530 | 94034 | 92507 | 90951 | 89371 | 87769 | 86148 | 84510 | 82859 | 12 |
| 13 | 105200 | 104349 | 103437 | 102469 | 101446 | 100371 | 99247 | 98076 | 96862 | 95607 | 13 |
| 14 | 105951 | 105839 | 105651 | 105396 | 105069 | 104672 | 104209 | 103681 | 103089 | 102436 | 14 |
| 15 | 99594 | 100195 | 100723 | 101181 | 101367 | 101881 | 102125 | 102298 | 102402 | 102436 | 15 |
| 16 | 87768 | 88923 | 90021 | 91063 | 92045 | 92967 | 93827 | 94626 | 95361 | 96034 | 16 |
| 17 | 72795 | 74277 | 75724 | 77135 | 78509 | 79842 | 81133 | 82380 | 83581 | 84736 | 17 |
| 18 | 57023 | 58596 | 60158 | 61708 | 63243 | 64761 | 66259 | 67735 | 69187 | 70613 | 18 |
| 19 | 42317 | 43793 | 45277 | 46768 | 48264 | 49763 | 51263 | 52762 | 54257 | 55747 | 19 |
| 20 | 29834 | 31093 | 32373 | 33873 | 34992 | 36327 | 37678 | 39044 | 40422 | 41810 | 20 |
| 21 | 20031 | 21025 | 22045 | 23090 | 24161 | 25250 | 26375 | 27517 | 28680 | 29865 | 21 |
| 22 | 12838 | 13570 | 14329 | 15114 | 15924 | 16761 | 17623 | 18511 | 19424 | 20362 | 22 |
| 23 | 7870 | 8378 | 8909 | 9462 | 10039 | 10640 | 11264 | 11911 | 12584 | 13280 | 23 |
| 24 | 4624 | 4957 | 5308 | 5677 | 6065 | 6472 | 6899 | 7345 | 7812 | 8300 | 24 |
| 25 | 2608 | 2816 | 3036 | 3270 | 3518 | 3780 | 4057 | 4348 | 4656 | 4980 | 25 |
| 26 | 1414 | 1538 | 1670 | 1811 | 1962 | 2123 | 2294 | 2475 | 2668 | 2873 | 26 |
| 27 | 739 | 809 | 884 | 966 | 1054 | 1148 | 1249 | 1357 | 1473 | 1596 | 27 |
| 28 | 372 | 410 | 452 | 497 | 546 | 598 | 656 | 717 | 784 | 855 | 28 |
| 29 | 181 | 201 | 223 | 247 | 273 | 301 | 332 | 366 | 403 | 442 | 29 |
| 30 | 85 | 95 | 106 | 118 | 132 | 147 | 163 | 181 | 200 | 221 | 30 |
| 31 | 39 | 44 | 49 | 55 | 62 | 69 | 77 | 86 | 96 | 107 | 31 |
| 32 | 17 | 19 | 22 | 25 | 28 | 32 | 35 | 40 | 45 | 50 | 32 |
| 33 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 23 | 33 |
| 34 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 34 |
| 35 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 35 |
| 36 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 36 |
| 37 | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 37 |

**დანართი 3.** სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა ბოლოს ალბათობები. ცხრილში მოცემული $x$ - თვის მოყვანილია $P(X \geq x)$, სადაც $X$ აქვს განაწილება $N(0,1)$. ამრიგად, თუ $x$ ისეთია, რომ $P(X \geq x) = \alpha$, მაშინ $z_{(\alpha)} = x$ [2].

| x | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .0 | .5000 | .4960 | .4920 | .4880 | .4840 | .4801 | .4761 | .4721 | .4681 | .4641 |
| .1 | .4602 | .4562 | .4522 | .4483 | .4443 | .4404 | .4364 | .4325 | .4286 | .4247 |
| .2 | .4207 | .4168 | .4129 | .4090 | .4052 | .4013 | .3974 | .3936 | .3897 | .3859 |
| .3 | .3821 | .3783 | .3745 | .3707 | .3669 | .3632 | .3594 | .3557 | .3520 | .3483 |
| .4 | .3446 | .3409 | .3372 | .3336 | .3300 | .3264 | .3228 | .3192 | .3156 | .3121 |
| .5 | .3085 | .3050 | .3015 | .2981 | .2946 | .2912 | .2877 | .2843 | .2810 | .2776 |
| .6 | .2743 | .2709 | .2676 | .2643 | .2611 | .2578 | .2546 | .2514 | .2483 | .2451 |
| .7 | .2420 | .2389 | .2358 | .2327 | .2296 | .2266 | .2236 | .2206 | .2177 | .2148 |
| .8 | .2119 | .2090 | .2061 | .2033 | .2005 | .1977 | .1949 | .1922 | .1894 | .1867 |
| .9 | .1841 | .1814 | .1788 | .1762 | .1736 | .1711 | .1685 | .1660 | .1635 | .1611 |
| 1.0 | .1587 | .1562 | .1539 | .1515 | .1492 | .1469 | .1446 | .1423 | .1401 | .1379 |
| 1.1 | .1357 | .1335 | .1314 | .1292 | .1271 | .1251 | .1230 | .1210 | .1190 | .1170 |
| 1.2 | .1151 | .1131 | .1112 | .1093 | .1075 | .1056 | .1038 | .1020 | .1003 | .0985 |
| 1.3 | .0968 | .0951 | .0934 | .0918 | .0901 | .0885 | .0869 | .0853 | .0838 | .0823 |
| 1.4 | .0808 | .0793 | .0778 | .0764 | .0749 | .0735 | .0721 | .0708 | .0694 | .0681 |
| 1.5 | .0668 | .0655 | .0643 | .0630 | .0618 | .0606 | .0594 | .0582 | .0571 | .0559 |
| 1.6 | .0548 | .0537 | .0526 | .0516 | .0505 | .0495 | .0485 | .0475 | .0465 | .0455 |
| 1.7 | .0446 | .0436 | .0427 | .0418 | .0409 | .0401 | .0392 | .0384 | .0375 | .0367 |
| 1.8 | .0359 | .0351 | .0344 | .0336 | .0329 | .0322 | .0314 | .0307 | .0301 | .0294 |
| 1.9 | .0287 | .0281 | .0274 | .0268 | .0262 | .0256 | .0250 | .0244 | .0239 | .0233 |
| 2.0 | .0228 | .0222 | .0217 | .0212 | .0207 | .0202 | .0197 | .0192 | .0188 | .0183 |
| 2.1 | .0179 | .0174 | .0170 | .0166 | .0162 | .0158 | .0154 | .0150 | .0146 | .0143 |
| 2.2 | .0139 | .0136 | .0132 | .0129 | .0125 | .0122 | .0119 | .0116 | .0113 | .0110 |
| 2.3 | .0107 | .0104 | .0102 | .0099 | .0096 | .0094 | .0091 | .0089 | .0087 | .0084 |
| 2.4 | .0082 | .0080 | .0078 | .0075 | .0073 | .0071 | .0069 | .0068 | .0066 | .0064 |
| 2.5 | .0062 | .0060 | .0059 | .0057 | .0055 | .0054 | .0052 | .0051 | .0049 | .0048 |
| 2.6 | .0047 | .0045 | .0044 | .0043 | .0041 | .0040 | .0039 | .0038 | .0037 | .0036 |
| 2.7 | .0035 | .0034 | .0033 | .0032 | .0031 | .0030 | .0029 | .0028 | .0027 | .0026 |
| 2.8 | .0026 | .0025 | .0024 | .0023 | .0023 | .0022 | .0021 | .0021 | .0020 | .0019 |
| 2.9 | .0019 | .0018 | .0018 | .0017 | .0016 | .0016 | .0015 | .0015 | .0014 | .0014 |
| 3.0 | .0013 | .0013 | .0013 | .0012 | .0012 | .0011 | .0011 | .0011 | .0010 | .0010 |
| 3.1 | .0010 | .0009 | .0009 | .0009 | .0008 | .0008 | .0008 | .0008 | .0007 | .0007 |
| 3.2 | .0007 | .0007 | .0006 | .0006 | .0006 | .0006 | .0006 | .0005 | .0005 | .0005 |
| 3.3 | .0005 | .0005 | .0005 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0003 |
| 3.4 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0002 |

**დანართი 4.** პირსონის განაწილების კვანტილები $\chi^2_{1-p}$ [3].

| Число степеней свободы $f$ | Уровни значимости $p$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,99 | 0,98 | 0,95 | 0,90 | 0,80 | 0,70 | 0,50 | 0,30 |
| 1 | 0,00016 | 0,0006 | 0,0039 | 0,016 | 0,064 | 0,148 | 0,455 | 1,07 |
| 2 | 0,020 | 0,040 | 0,103 | 0,211 | 0,446 | 0,713 | 1,386 | 2,41 |
| 3 | 0,115 | 0,185 | 0,352 | 0,584 | 1,005 | 1,424 | 2,366 | 3,66 |
| 4 | 0,30 | 0,43 | 0,71 | 1,06 | 1,65 | 2,19 | 3,36 | 4,9 |
| 5 | 0,55 | 0,75 | 1,14 | 1,61 | 2,34 | 3,00 | 4,35 | 6,1 |
| 6 | 0,87 | 1,13 | 1,63 | 2,20 | 3,07 | 3,83 | 5,35 | 7,2 |
| 7 | 1,24 | 1,56 | 2,17 | 2,83 | 3,82 | 4,67 | 6,35 | 8,4 |
| 8 | 1,65 | 2,03 | 2,73 | 3,49 | 4,59 | 5,53 | 7,34 | 9,5 |
| 9 | 2,09 | 2,53 | 3,32 | 4,17 | 5,38 | 6,39 | 8,34 | 10,7 |
| 10 | 2,56 | 3,06 | 3,94 | 4,86 | 6,18 | 7,27 | 9,34 | 11,8 |
| 11 | 3,1 | 3,6 | 4,6 | 5,6 | 7,0 | 8,1 | 10,3 | 12,9 |
| 12 | 3,6 | 4,2 | 5,2 | 6,3 | 7,8 | 9,0 | 11,3 | 14,0 |
| 13 | 4,1 | 4,8 | 5,9 | 7,0 | 8,6 | 9,9 | 12,3 | 15,1 |
| 14 | 4,7 | 5,4 | 6,6 | 7,8 | 9,5 | 10,8 | 13,3 | 16,2 |
| 15 | 5,2 | 6,0 | 7,3 | 8,5 | 10,3 | 11,7 | 14,3 | 17,3 |
| 16 | 5,8 | 6,6 | 8,0 | 9,3 | 11,2 | 12,6 | 15,3 | 18,4 |
| 17 | 6,4 | 7,3 | 8,7 | 10,1 | 12,0 | 13,5 | 16,3 | 19,5 |
| 18 | 7,0 | 7,9 | 9,4 | 10,9 | 12,9 | 14,4 | 17,3 | 20,6 |
| 19 | 7,6 | 8,6 | 10,1 | 11,7 | 13,7 | 15,4 | 18,3 | 21,7 |
| 20 | 8,3 | 9,2 | 10,9 | 12,4 | 14,6 | 16,3 | 19,3 | 22,8 |
| 21 | 8,9 | 9,9 | 11,6 | 13,2 | 15,4 | 17,2 | 20,3 | 23,9 |
| 22 | 9,5 | 10,6 | 12,3 | 14,0 | 16,3 | 18,1 | 21,3 | 24,9 |

როდესაც $f > 30$ $\chi^2_{1-p}$ - ის მნიშვნელობა შეიძლება გამოვთვალოთ მიახლოებითი ფორმულით

$$\chi^2_{1-p} = \frac{1}{2}(\sqrt{2f-1} + u_{1-p})^2,$$

სადაც $u_{1-p}$ - არის სტანდარტული ნორმალური განაწილების კვანტილი.

ამ კანონის ალბათობების განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{x/2}, \ x > 0,$$

სადაც $\Gamma(\cdot)$ არის გამა ფუნქცია და ის განსაზღვრულია ნებისმიერი რეალური $a$ რიცხვისათვის შემდეგი ფორმულით:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx.$$

| Число степеней свободы $f$ | Уровни значимости $p$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,99 | 0,98 | 0,95 | 0,90 | 0,80 | 0,70 | 0,50 | 0,30 |
| 23 | 10,2 | 11,3 | 13,1 | 14,8 | 17,2 | 19,0 | 22,3 | 26,0 |
| 24 | 10,9 | 12,0 | 13,8 | 15,7 | 18,1 | 19,9 | 23,3 | 27,1 |
| 25 | 11,5 | 12,7 | 14,6 | 16,5 | 18,9 | 20,9 | 24,3 | 28,2 |
| 26 | 12,2 | 13,4 | 15,4 | 17,3 | 19,8 | 21,8 | 25,3 | 29,3 |
| 27 | 12,9 | 14,1 | 16,2 | 18,1 | 20,7 | 22,7 | 26,3 | 30,3 |
| 28 | 13,6 | 14,8 | 16,9 | 18,9 | 21,6 | 23,6 | 27,3 | 31,4 |
| 29 | 14,3 | 15,6 | 17,7 | 19,8 | 22,4 | 24,6 | 28,3 | 32,5 |
| 30 | 15,0 | 16,3 | 18,5 | 20,6 | 23,4 | 25,5 | 29,3 | 33,5 |

| Число степеней свободы $f$ | Уровни значимости $p$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,20 | 0,10 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,005 | 0,002 | 0,001 |
| 1 | 1,64 | 2,7 | 3,8 | 5,4 | 6,6 | 7,9 | 9,5 | 10,8 |
| 2 | 3,22 | 4,6 | 6,0 | 7,8 | 9,2 | 10,6 | 12,4 | 13,8 |
| 3 | 4,64 | 6,3 | 7,8 | 9,8 | 11,3 | 12,8 | 14,8 | 16,3 |
| 4 | 6,0 | 7,8 | 9,5 | 11,7 | 13,3 | 14,9 | 16,9 | 18,5 |
| 5 | 7,3 | 9,2 | 11,1 | 13,4 | 15,1 | 16,3 | 18,9 | 20,5 |
| 6 | 8,6 | 10,6 | 12,6 | 15,0 | 16,8 | 18,6 | 20,7 | 22,5 |
| 7 | 9,8 | 12,0 | 14,1 | 16,6 | 18,5 | 20,3 | 22,6 | 24,3 |
| 8 | 11,0 | 13,4 | 15,5 | 18,2 | 20,1 | 21,9 | 24,3 | 26,1 |
| 9 | 12,2 | 14,7 | 16,9 | 19,7 | 21,7 | 23,6 | 26,1 | 27,9 |
| 10 | 13,4 | 16,0 | 18,3 | 21,2 | 23,2 | 25,2 | 27,7 | 29,6 |
| 11 | 14,6 | 17,3 | 19,7 | 22,6 | 24,7 | 26,8 | 29,4 | 31,3 |
| 12 | 15,8 | 18,5 | 21,0 | 24,1 | 26,2 | 28,3 | 31 | 32,9 |
| 13 | 17,0 | 19,8 | 22,4 | 25,5 | 27,7 | 29,8 | 32,5 | 34,5 |
| 14 | 18,2 | 21,1 | 23,7 | 26,9 | 29,1 | 31,3 | 34 | 36,1 |
| 15 | 19,3 | 22,3 | 25,0 | 28,3 | 30,6 | 32,8 | 35,5 | 37,7 |
| 16 | 20,5 | 23,5 | 26,3 | 29,6 | 32,0 | 34,3 | 37 | 39,2 |
| 17 | 21,6 | 24,8 | 27,6 | 31,0 | 33,4 | 35,7 | 38,5 | 40,8 |
| 18 | 22,8 | 26,0 | 28,9 | 32,3 | 34,8 | 37,2 | 40 | 42,3 |
| 19 | 23,9 | 27,2 | 30,1 | 33,7 | 36,2 | 38,6 | 41,5 | 43,8 |
| 20 | 25,0 | 28,4 | 31,4 | 35,0 | 37,6 | 40,0 | 43 | 45,3 |
| 21 | 26,2 | 29,6 | 32,7 | 36,3 | 38,9 | 41,4 | 44,5 | 46,8 |
| 22 | 27,3 | 30,8 | 33,9 | 37,7 | 40,3 | 42,8 | 46 | 48,3 |
| 23 | 28,4 | 32,0 | 35,2 | 39,0 | 41,6 | 44,2 | 47,5 | 49,7 |
| 24 | 29,6 | 33,2 | 36,4 | 40,3 | 43,0 | 45,6 | 48,5 | 51,2 |
| 25 | 30,7 | 34,4 | 37,7 | 41,6 | 44,3 | 46,9 | 50 | 52,6 |
| 26 | 31,8 | 35,6 | 38,9 | 42,9 | 45,6 | 48,3 | 51,5 | 54,1 |
| 27 | 32,9 | 36,7 | 40,1 | 44,1 | 47,0 | 49,6 | 53 | 55,5 |
| 28 | 34,0 | 37,9 | 41,3 | 45,4 | 48,3 | 51,0 | 54,5 | 56,9 |
| 29 | 35,1 | 39,1 | 42,6 | 46,7 | 49,6 | 52,3 | 56 | 58,3 |
| 30 | 36,3 | 40,3 | 43,8 | 48,0 | 50,9 | 53,7 | 57,5 | 59,7 |

**დანართი 5.** სტიუდენტის განაწილების კვანტილები $t_{1-\frac{p}{2}}$ [3].

| Число степеней свободы, $f$ | Уровни значимости $p$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,20 | 0,10 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,005 | 0,001 |
| 1 | 3,08 | 6,31 | 12,71 | 31,82 | 63,66 | 127,32 | 636,62 |
| 2 | 1,89 | 2,92 | 4,30 | 6,97 | 9,93 | 14,09 | 31,60 |
| 3 | 1,64 | 2,35 | 3,18 | 4,54 | 5,84 | 7,45 | 12,94 |
| 4 | 1,53 | 2,13 | 2,78 | 3,75 | 4,60 | 5,60 | 8,61 |
| 5 | 1,48 | 2,02 | 2,57 | 3,37 | 4,03 | 4,77 | 6,86 |
| 6 | 1,44 | 1,94 | 2,45 | 3,14 | 3,71 | 4,32 | 5,96 |
| 7 | 1,42 | 1,90 | 2,37 | 3,00 | 3,50 | 4,03 | 5,41 |
| 8 | 1,40 | 1,86 | 2,31 | 2,90 | 3,36 | 3,83 | 5,04 |
| 9 | 1,38 | 1,83 | 2,26 | 2,82 | 3,25 | 3,69 | 4,78 |
| 10 | 1,37 | 1,81 | 2,23 | 2,76 | 3,17 | 3,58 | 4,59 |
| 11 | 1,36 | 1,80 | 2,20 | 2,72 | 3,11 | 3,50 | 4,44 |
| 12 | 1,36 | 1,78 | 2,18 | 2,68 | 3,06 | 3,43 | 4,32 |
| 13 | 1,35 | 1,77 | 2,16 | 2,65 | 3,01 | 3,37 | 4,22 |
| 14 | 1,34 | 1,76 | 2,15 | 2,62 | 2,98 | 3,33 | 4,14 |
| 15 | 1,34 | 1,75 | 2,13 | 2,60 | 2,95 | 3,29 | 4,07 |
| 16 | 1,34 | 1,75 | 2,12 | 2,58 | 2,92 | 3,25 | 4,02 |
| 17 | 1,33 | 1,74 | 2,11 | 2,57 | 2,90 | 3,22 | 3,97 |
| 18 | 1,33 | 1,73 | 2,10 | 2,55 | 2,88 | 3,20 | 3,92 |
| 19 | 1,33 | 1,73 | 2,09 | 2,54 | 2,86 | 3,17 | 3,88 |
| 20 | 1,33 | 1,73 | 2,09 | 2,53 | 2,85 | 3,15 | 3,85 |
| 21 | 1,32 | 1,72 | 2,08 | 2,52 | 2,83 | 3,14 | 3,82 |
| 22 | 1,32 | 1,72 | 2,07 | 2,51 | 2,82 | 3,12 | 3,79 |
| 23 | 1,32 | 1,71 | 2,07 | 2,50 | 2,81 | 3,10 | 3,77 |
| 24 | 1,32 | 1,71 | 2,06 | 2,49 | 2,80 | 3,09 | 3,75 |
| 25 | 1,32 | 1,71 | 2,06 | 2,48 | 2,79 | 3,08 | 3,73 |
| 26 | 1,32 | 1,71 | 2,06 | 2,48 | 2,78 | 3,07 | 3,71 |
| 27 | 1,31 | 1,70 | 2,05 | 2,47 | 2,77 | 3,06 | 3,69 |
| 28 | 1,31 | 1,70 | 2,05 | 2,47 | 2,76 | 3,05 | 3,67 |
| 29 | 1,31 | 1,70 | 2,04 | 2,46 | 2,76 | 3,04 | 3,66 |
| 30 | 1,31 | 1,70 | 2,04 | 2,46 | 2,75 | 3,03 | 3,65 |
| 40 | 1,30 | 1,68 | 2,02 | 2,42 | 2,70 | 2,97 | 3,55 |
| 60 | 1,30 | 1,67 | 2,00 | 2,39 | 2,66 | 2,91 | 3,46 |
| 120 | 1,29 | 1,66 | 1,98 | 2,36 | 2,62 | 2,86 | 3,37 |
| $\infty$ | 1,28 | 1,64 | 1,96 | 2,33 | 2,58 | 2,81 | 3,29 |

ამ კანონის ალბათობების განაწილებას აქვს შ მდეგი სახე:

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

**დანართი 6.** ფიშერის განაწილების კვანტილები $F_{1-p}$ [3].

| $f_2$ \ $f_1$ | Уровень значимости 0,20 | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 12 | 24 | ∞ |
| 1 | 9,5 | 12,0 | 13,1 | 13,7 | 14,0 | 14,3 | 14,9 | 15,2 | 15,6 |
| 2 | 3,6 | 4,0 | 4,2 | 4,2 | 4,3 | 4,3 | 4,4 | 4,4 | 4,5 |
| 3 | 2,7 | 2,9 | 2,9 | 3,0 | 3,0 | 3,0 | 3,0 | 3,0 | 3,0 |
| 4 | 2,4 | 2,5 | 2,5 | 2,5 | 2,5 | 2,5 | 2,5 | 2,4 | 2,4 |
| 5 | 2,2 | 2,3 | 2,3 | 2,2 | 2,2 | 2,2 | 2,2 | 2,2 | 2,1 |
| 6 | 2,1 | 2,1 | 2,1 | 2,1 | 2,1 | 2,1 | 2,0 | 2,0 | 2,0 |
| 7 | 2,0 | 2,0 | 2,0 | 2,0 | 2,0 | 2,0 | 1,9 | 1,9 | 1,8 |
| 8 | 2,0 | 2,0 | 2,0 | 1,9 | 1,9 | 1,9 | 1,8 | 1,8 | 1,7 |
| 9 | 1,9 | 1,9 | 1,9 | 1,9 | 1,9 | 1,8 | 1,8 | 1,7 | 1,7 |
| 10 | 1,9 | 1,9 | 1,9 | 1,8 | 1,8 | 1,8 | 1,7 | 1,7 | 1,6 |
| 11 | 1,9 | 1,9 | 1,8 | 1,8 | 1,8 | 1,8 | 1,7 | 1,6 | 1,6 |
| 12 | 1,8 | 1,8 | 1,8 | 1,8 | 1,7 | 1,7 | 1,7 | 1,6 | 1,5 |
| 13 | 1,8 | 1,8 | 1,8 | 1,8 | 1,7 | 1,7 | 1,6 | 1,6 | 1,5 |
| 14 | 1,8 | 1,8 | 1,8 | 1,7 | 1,7 | 1,7 | 1,6 | 1,6 | 1,5 |
| 15 | 1,8 | 1,8 | 1,8 | 1,7 | 1,7 | 1,7 | 1,6 | 1,5 | 1,5 |
| 16 | 1,8 | 1,8 | 1,7 | 1,7 | 1,7 | 1,6 | 1,6 | 1,5 | 1,4 |
| 17 | 1,8 | 1,8 | 1,7 | 1,7 | 1,7 | 1,6 | 1,6 | 1,5 | 1,4 |
| 18 | 1,8 | 1,8 | 1,7 | 1,7 | 1,6 | 1,6 | 1,5 | 1,5 | 1,4 |
| 19 | 1,8 | 1,8 | 1,7 | 1,7 | 1,6 | 1,6 | 1,5 | 1,5 | 1,4 |
| 20 | 1,8 | 1,8 | 1,7 | 1,7 | 1,6 | 1,6 | 1,5 | 1,5 | 1,4 |
| 22 | 1,8 | 1,7 | 1,7 | 1,6 | 1,6 | 1,6 | 1,5 | 1,4 | 1,4 |
| 24 | 1,7 | 1,7 | 1,7 | 1,6 | 1,6 | 1,6 | 1,5 | 1,4 | 1,3 |

ამ კანონის ალბათობების განაწილებას აქვს შ მდეგი სახე:

$$f_{mn}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(x+1)^{\frac{m+n}{2}}}, \quad (x > 0).$$

Уровень значимости 0,20

| $f_2$ \ $f_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 12 | 24 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 1,7 | 1,7 | 1,7 | 1,6 | 1,6 | 1,6 | 1,5 | 1,4 | 1,3 |
| 28 | 1,7 | 1,7 | 1,7 | 1,6 | 1,6 | 1,6 | 1,5 | 1,4 | 1,3 |
| 30 | 1,7 | 1,7 | 1,6 | 1,6 | 1,6 | 1,5 | 1,5 | 1,4 | 1,3 |
| 40 | 1,7 | 1,7 | 1,6 | 1,6 | 1,5 | 1,5 | 1,4 | 1,4 | 1,2 |
| 60 | 1,7 | 1,7 | 1,6 | 1,6 | 1,5 | 1,5 | 1,4 | 1,3 | 1,2 |
| 120 | 1,7 | 1,6 | 1,6 | 1,5 | 1,5 | 1,5 | 1,4 | 1,3 | 1,1 |
| ∞ | 1,6 | 1,6 | 1,6 | 1,5 | 1,5 | 1,4 | 1,3 | 1,2 | 1,0 |

Уровень значимости 0,05

| $f_2$ \ $f_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 12 | 24 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 164,4 | 199,5 | 215,7 | 224,6 | 230,2 | 234,0 | 244,9 | 249,0 | 254,3 |
| 2 | 18,5 | 19,2 | 19,2 | 19,3 | 19,3 | 19,3 | 19,4 | 19,5 | 19,5 |
| 3 | 10,1 | 9,6 | 9,3 | 9,1 | 9,0 | 8,9 | 8,7 | 8,6 | 8,5 |
| 4 | 7,7 | 6,9 | 6,6 | 6,4 | 6,3 | 6,2 | 5,9 | 5,8 | 5,6 |
| 5 | 6,6 | 5,8 | 5,4 | 5,2 | 5,1 | 5,0 | 4,7 | 4,5 | 4,4 |
| 6 | 6,0 | 5,1 | 4,8 | 4,5 | 4,4 | 4,3 | 4,0 | 3,8 | 3,7 |
| 7 | 5,6 | 4,7 | 4,4 | 4,1 | 4,0 | 3,9 | 3,6 | 3,4 | 3,2 |
| 8 | 5,3 | 4,5 | 4,1 | 3,8 | 3,7 | 3,6 | 3,3 | 3,1 | 2,9 |
| 9 | 5,1 | 4,3 | 3,9 | 3,6 | 3,5 | 3,4 | 3,1 | 2,9 | 2,7 |
| 10 | 5,0 | 4,1 | 3,7 | 3,5 | 3,3 | 3,2 | 2,9 | 2,7 | 2,5 |
| 11 | 4,8 | 4,0 | 3,6 | 3,4 | 3,2 | 3,1 | 2,8 | 2,6 | 2,4 |
| 12 | 4,8 | 3,9 | 3,5 | 3,3 | 3,1 | 3,0 | 2,7 | 2,5 | 2,3 |
| 13 | 4,7 | 3,8 | 3,4 | 3,2 | 3,0 | 2,9 | 2,6 | 2,4 | 2,2 |
| 14 | 4,6 | 3,7 | 3,3 | 3,1 | 3,0 | 2,9 | 2,5 | 2,3 | 2,1 |
| 15 | 4,5 | 3,7 | 3,3 | 3,1 | 2,9 | 2,8 | 2,5 | 2,3 | 2,1 |
| 16 | 4,5 | 3,6 | 3,2 | 3,0 | 2,9 | 2,7 | 2,4 | 2,2 | 2,0 |
| 17 | 4,5 | 3,6 | 3,2 | 3,0 | 2,8 | 2,7 | 2,4 | 2,2 | 2,0 |
| 18 | 4,4 | 3,6 | 3,2 | 2,9 | 2,8 | 2,7 | 2,3 | 2,1 | 1,9 |
| 19 | 4,4 | 3,5 | 3,1 | 2,9 | 2,7 | 2,6 | 2,3 | 2,1 | 1,8 |
| 20 | 4,4 | 3,5 | 3,1 | 2,9 | 2,7 | 2,6 | 2,3 | 2,1 | 1,8 |
| 22 | 4,3 | 3,4 | 3,1 | 2,8 | 2,7 | 2,6 | 2,2 | 2,0 | 1,8 |
| 24 | 4,3 | 3,4 | 3,0 | 2,8 | 2,6 | 2,5 | 2,2 | 2,0 | 1,7 |
| 26 | 4,2 | 3,4 | 3,0 | 2,7 | 2,6 | 2,4 | 2,1 | 1,9 | 1,7 |
| 28 | 4,2 | 3,3 | 2,9 | 2,7 | 2,6 | 2,4 | 2,1 | 1,9 | 1,6 |
| 30 | 4,2 | 3,3 | 2,9 | 2,7 | 2,5 | 2,4 | 2,1 | 1,9 | 1,6 |
| 40 | 4,1 | 3,2 | 2,9 | 2,6 | 2,5 | 2,3 | 2,0 | 1,8 | 1,5 |
| 60 | 4,0 | 3,2 | 2,8 | 2,5 | 2,4 | 2,3 | 1,9 | 1,7 | 1,4 |
| 120 | 3,9 | 3,1 | 2,7 | 2,5 | 2,3 | 2,2 | 1,8 | 1,6 | 1,3 |
| ∞ | 3,8 | 3,0 | 2,6 | 2,4 | 2,2 | 2,1 | 1,8 | 1,5 | 1,0 |

| $f_2$ \ $f_1$ | Уровень значимости 0,01 | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 12 | 24 | ∞ |
| 1 | 4052 | 4999 | 5403 | 5625 | 5764 | 5859 | 5981 | 6106 | 6234 | 6366 |
| 2 | 98,5 | 99,0 | 99,2 | 99,3 | 99,3 | 99,4 | 99,3 | 99,4 | 99,5 | 99,5 |
| 3 | 34,1 | 30,8 | 29,5 | 28,7 | 28,2 | 27,9 | 27,5 | 27,1 | 26,6 | 26,1 |
| 4 | 21,2 | 18,0 | 16,7 | 16,0 | 15,5 | 15,2 | 14,8 | 14,4 | 13,9 | 13,5 |
| 5 | 16,3 | 13,3 | 12,1 | 11,4 | 11,0 | 10,7 | 10,3 | 9,9 | 9,5 | 9,0 |
| 6 | 13,7 | 10,9 | 9,8 | 9,2 | 8,8 | 8,5 | 8,1 | 7,7 | 7,3 | 6,9 |
| 7 | 12,3 | 9,6 | 8,5 | 7,9 | 7,5 | 7,2 | 6,8 | 6,5 | 6,1 | 5,7 |
| 8 | 11,3 | 8,7 | 7,6 | 7,0 | 6,6 | 6,4 | 6,0 | 5,7 | 5,3 | 4,9 |
| 9 | 10,6 | 8,0 | 7,0 | 6,4 | 6,1 | 5,8 | 5,5 | 5,1 | 4,7 | 4,3 |
| 10 | 10,0 | 7,6 | 6,6 | 6,0 | 5,6 | 5,4 | 5,1 | 4,7 | 4,3 | 3,9 |
| 11 | 9,7 | 7,2 | 6,2 | 5,7 | 5,3 | 5,1 | 4,7 | 4,4 | 4,0 | 3,6 |
| 12 | 9,3 | 6,9 | 6,0 | 5,4 | 5,1 | 4,8 | 4,5 | 4,2 | 3,8 | 3,4 |
| 13 | 9,1 | 6,7 | 5,7 | 5,2 | 4,9 | 4,6 | 4,3 | 4,0 | 3,6 | 3,2 |
| 14 | 8,9 | 6,5 | 5,6 | 5,0 | 4,7 | 4,5 | 4,1 | 3,8 | 3,4 | 3,0 |
| 15 | 8,7 | 6,4 | 5,4 | 4,9 | 4,6 | 4,3 | 4,0 | 3,7 | 3,3 | 2,9 |
| 16 | 8,5 | 6,2 | 5,3 | 4,8 | 4,4 | 4,2 | 3,9 | 3,6 | 3,2 | 2,8 |
| 17 | 8,4 | 6,1 | 5,2 | 4,7 | 4,3 | 4,1 | 3,8 | 3,5 | 3,1 | 2,7 |
| 18 | 8,3 | 6,0 | 5,1 | 4,6 | 4,3 | 4,0 | 3,7 | 3,4 | 3,0 | 2,6 |
| 19 | 8,2 | 5,9 | 5,0 | 4,5 | 4,2 | 3,9 | 3,6 | 3,3 | 2,9 | 2,4 |
| 20 | 8,1 | 5,9 | 4,9 | 4,4 | 4,1 | 3,9 | 3,6 | 3,2 | 2,9 | 2,4 |
| 22 | 7,9 | 5,7 | 4,8 | 4,3 | 4,0 | 3,8 | 3,5 | 3,1 | 2,8 | 2,3 |
| 24 | 7,8 | 5,6 | 4,7 | 4,2 | 3,9 | 3,7 | 3,3 | 3,0 | 2,7 | 2,2 |
| 26 | 7,7 | 5,5 | 4,6 | 4,1 | 3,8 | 3,6 | 3,3 | 3,0 | 2,6 | 2,1 |
| 28 | 7,6 | 5,5 | 4,6 | 4,1 | 3,8 | 3,5 | 3,2 | 2,9 | 2,5 | 2,1 |
| 30 | 7,6 | 5,4 | 4,5 | 4,0 | 3,7 | 3,5 | 3,2 | 2,8 | 2,5 | 2,0 |
| 40 | 7,3 | 5,2 | 4,3 | 3,8 | 3,5 | 3,3 | 3,0 | 2,7 | 2,3 | 1,8 |
| 60 | 7,1 | 5,0 | 4,1 | 3,7 | 3,3 | 3,1 | 2,8 | 2,5 | 2,1 | 1,6 |
| 120 | 6,9 | 4,8 | 4,0 | 3,5 | 3,2 | 3,0 | 2,7 | 2,3 | 2,0 | 1,4 |
| ∞ | 6,6 | 4,6 | 3,8 | 3,3 | 3,0 | 2,8 | 2,5 | 2,2 | 1,8 | 1,0 |

| $f_2$ \ $f_1$ | Уровень значимости 0,001 | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 12 | 24 | ∞ |
| 1 | Изменяется от 400 000 до 600 000 | | | | | | | | | |
| 2 | 998 | 999 | 999 | 999 | 999 | 999 | 999 | 999 | 999 | 999 |
| 3 | 167 | 148 | 141 | 137 | 135 | 133 | 131 | 128 | 126 | 123 |
| 4 | 74,1 | 61,3 | 56,2 | 53,4 | 51,7 | 50,5 | 49,0 | 47,4 | 45,8 | 44,1 |
| 5 | 47,0 | 36,6 | 33,2 | 31,1 | 29,8 | 28,8 | 27,6 | 26,4 | 25,1 | 23,8 |
| 6 | 35,5 | 27,0 | 23,7 | 21,9 | 20,8 | 20,0 | 19,0 | 18,0 | 16,9 | 15,8 |
| 7 | 29,2 | 21,7 | 18,8 | 17,2 | 16,2 | 15,5 | 14,6 | 13,7 | 12,7 | 11,7 |
| 8 | 25,4 | 18,5 | 15,8 | 14,4 | 13,5 | 12,9 | 12,0 | 11,2 | 10,3 | 9,3 |
| 9 | 22,9 | 16,4 | 13,9 | 12,6 | 11,7 | 11,1 | 10,4 | 9,6 | 8,7 | 7,8 |
| 10 | 21,0 | 14,9 | 12,6 | 11,3 | 10,5 | 9,9 | 9,2 | 8,5 | 7,6 | 6,8 |
| 11 | 19,7 | 13,8 | 11,6 | 10,4 | 9,6 | 9,1 | 8,3 | 7,6 | 6,9 | 6,0 |
| 12 | 18,6 | 13,0 | 10,8 | 9,6 | 8,9 | 8,4 | 7,7 | 7,0 | 6,3 | 5,4 |
| 13 | 17,8 | 12,3 | 10,2 | 9,1 | 8,4 | 7,9 | 7,2 | 6,5 | 5,8 | 5,0 |
| 14 | 17,1 | 11,8 | 9,7 | 8,6 | 7,9 | 7,4 | 6,8 | 6,1 | 5,4 | 4,6 |
| 15 | 16,6 | 11,3 | 9,3 | 8,3 | 7,6 | 7,1 | 6,5 | 5,8 | 5,1 | 4,3 |
| 16 | 16,1 | 11,0 | 9,0 | 7,9 | 7,3 | 6,8 | 6,2 | 5,6 | 4,9 | 4,1 |
| 17 | 15,7 | 10,7 | 8,7 | 7,7 | 7,0 | 6,6 | 6,0 | 5,3 | 4,6 | 3,9 |
| 18 | 15,4 | 10,4 | 8,5 | 7,5 | 6,8 | 6,4 | 5,8 | 5,1 | 4,5 | 3,7 |
| 19 | 15,1 | 10,2 | 8,3 | 7,3 | 6,6 | 6,2 | 5,6 | 5,0 | 4,3 | 3,5 |
| 20 | 14,8 | 10,0 | 8,1 | 7,1 | 6,5 | 6,0 | 5,4 | 4,8 | 4,2 | 3,4 |
| 22 | 14,4 | 9,6 | 7,8 | 6,8 | 6,2 | 5,8 | 5,2 | 4,6 | 3,9 | 3,2 |
| 24 | 14,0 | 9,3 | 7,6 | 6,6 | 6,0 | 5,6 | 5,0 | 4,4 | 3,7 | 3,0 |
| 26 | 13,7 | 9,1 | 7,4 | 6,4 | 5,8 | 5,4 | 4,8 | 4,2 | 3,6 | 2,8 |
| 28 | 13,5 | 8,9 | 7,2 | 6,3 | 5,7 | 5,2 | 4,7 | 4,1 | 3,5 | 2,7 |
| 30 | 13,3 | 8,8 | 7,1 | 6,1 | 5,5 | 5,1 | 4,6 | 4,0 | 3,4 | 2,6 |
| 40 | 12,6 | 8,2 | 6,6 | 5,7 | 5,1 | 4,7 | 4,2 | 3,6 | 3,0 | 2,2 |
| 60 | 12,0 | 7,8 | 6,2 | 5,3 | 4,8 | 4,4 | 3,9 | 3,3 | 2,7 | 1,9 |
| 120 | 11,4 | 7,3 | 5,8 | 5,0 | 4,4 | 4,0 | 3,5 | 3,0 | 2,4 | 1,6 |
| ∞ | 10,8 | 6,9 | 5,4 | 4,6 | 4,1 | 3,7 | 3,3 | 2,7 | 2,1 | 1,0 |

**დანართი 7.** მანი – უიტნის კრიტერიუმის $U$ სტატისტიკის ზედა კრიტიკული მნიშვნელობები [57].

$n_2 = 3$

| $u$ | $n_1$ = 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.25 | 0.10 | 0.05 |
| 1 | 0.50 | 0.20 | 0.10 |
| 2 | | 0.40 | 0.20 |
| 3 | | 0.60 | 0.35 |
| 4 | | | 0.50 |

$n_2 = 4$

| $u$ | $n_1$ = 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.2000 | 0.0667 | 0.0286 | 0.0143 |
| 1 | 0.4000 | 0.1333 | 0.0571 | 0.0286 |
| 2 | 0.6000 | 0.2667 | 0.1143 | 0.0571 |
| 3 | | 0.4000 | 0.2000 | 0.1000 |
| 4 | | 0.6000 | 0.3143 | 0.1714 |
| 5 | | | 0.4286 | 0.2429 |
| 6 | | | 0.5714 | 0.3429 |
| 7 | | | | 0.4429 |
| 8 | | | | 0.5571 |

$n_2 = 5$

| $n_1$ = 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 0.1667 | 0.0476 | 0.0179 | 0.0079 | 0.0040 |
| 0.3333 | 0.0952 | 0.0357 | 0.0159 | 0.0079 |
| 0.5000 | 0.1905 | 0.0714 | 0.0317 | 0.0159 |
| | 0.2857 | 0.1250 | 0.0556 | 0.0278 |
| | 0.4286 | 0.1964 | 0.0952 | 0.0476 |
| | 0.5714 | 0.2857 | 0.1429 | 0.0754 |
| | | 0.3929 | 0.2063 | 0.1111 |
| | | 0.5000 | 0.2778 | 0.1548 |
| | | | 0.3651 | 0.2103 |
| | | | 0.4524 | 0.2738 |
| | | | 0.5476 | 0.3452 |
| | | | | 0.4206 |
| | | | | 0.5000 |

$n_2 = 6$

| $u$ | $n_1$ = 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.1429 | 0.0357 | 0.0119 | 0.0048 | 0.0022 | 0.0011 |
| 1 | 0.2857 | 0.0714 | 0.0238 | 0.0095 | 0.0043 | 0.0022 |
| 2 | 0.4286 | 0.1429 | 0.0476 | 0.0190 | 0.0087 | 0.0043 |
| 3 | 0.5714 | 0.2143 | 0.0833 | 0.0333 | 0.0152 | 0.0076 |
| 4 | | 0.3214 | 0.1310 | 0.0571 | 0.0260 | 0.0130 |
| 5 | | 0.4286 | 0.1905 | 0.0857 | 0.0411 | 0.0206 |
| 6 | | 0.5714 | 0.2738 | 0.1286 | 0.0628 | 0.0325 |
| 7 | | | 0.3571 | 0.1762 | 0.0887 | 0.0465 |
| 8 | | | 0.4524 | 0.2381 | 0.1234 | 0.0660 |
| 9 | | | 0.5476 | 0.3048 | 0.1645 | 0.0898 |
| 10 | | | | 0.3810 | 0.2143 | 0.1201 |
| 11 | | | | 0.4571 | 0.2684 | 0.1548 |
| 12 | | | | 0.5429 | 0.3312 | 0.1970 |
| 13 | | | | | 0.3961 | 0.2424 |
| 14 | | | | | 0.4654 | 0.2944 |
| 15 | | | | | 0.5346 | 0.3496 |
| 16 | | | | | | 0.4091 |
| 17 | | | | | | 0.4686 |
| 18 | | | | | | 0.5314 |

$n_2 = 7$

| $u$ | $n_1$ = 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.1250 | 0.0278 | 0.0083 | 0.0030 | 0.0013 | 0.0006 | 0.0003 |
| 1 | 0.2500 | 0.0556 | 0.0167 | 0.0061 | 0.0025 | 0.0012 | 0.0006 |
| 2 | 0.3750 | 0.1111 | 0.0333 | 0.0121 | 0.0051 | 0.0023 | 0.0012 |
| 3 | 0.5000 | 0.1667 | 0.0583 | 0.0212 | 0.0088 | 0.0041 | 0.0020 |
| 4 | | 0.2500 | 0.0917 | 0.0364 | 0.0152 | 0.0070 | 0.0035 |
| 5 | | 0.3333 | 0.1333 | 0.0545 | 0.0240 | 0.0111 | 0.0055 |
| 6 | | 0.4444 | 0.1917 | 0.0818 | 0.0366 | 0.0175 | 0.0087 |
| 7 | | 0.5556 | 0.2583 | 0.1152 | 0.0530 | 0.0256 | 0.0131 |
| 8 | | | 0.3333 | 0.1576 | 0.0745 | 0.0367 | 0.0189 |
| 9 | | | 0.4167 | 0.2061 | 0.1010 | 0.0507 | 0.0265 |
| 10 | | | 0.5000 | 0.2636 | 0.1338 | 0.0688 | 0.0364 |
| 11 | | | | 0.3242 | 0.1717 | 0.0903 | 0.0487 |
| 12 | | | | 0.3939 | 0.2159 | 0.1171 | 0.0641 |
| 13 | | | | 0.4636 | 0.2652 | 0.1474 | 0.0825 |
| 14 | | | | 0.5364 | 0.3194 | 0.1830 | 0.1043 |
| 15 | | | | | 0.3775 | 0.2226 | 0.1297 |
| 16 | | | | | 0.4381 | 0.2669 | 0.1588 |
| 17 | | | | | 0.5000 | 0.3141 | 0.1914 |
| 18 | | | | | | 0.3654 | 0.2279 |
| 19 | | | | | | 0.4178 | 0.2675 |
| 20 | | | | | | 0.4726 | 0.3100 |
| 21 | | | | | | 0.5274 | 0.3552 |
| 22 | | | | | | | 0.4024 |
| 23 | | | | | | | 0.4508 |
| 24 | | | | | | | 0.5000 |

| | $n_2 = 8$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $n_1$ | | | | | | | |
| $u$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 0 | 0.1111 | 0.0222 | 0.0061 | 0.0020 | 0.0008 | 0.0003 | 0.0002 | 0.0001 |
| 1 | 0.2222 | 0.0444 | 0.0121 | 0.0040 | 0.0016 | 0.0007 | 0.0003 | 0.0002 |
| 2 | 0.3333 | 0.0889 | 0.0242 | 0.0081 | 0.0031 | 0.0013 | 0.0006 | 0.0003 |
| 3 | 0.4444 | 0.1333 | 0.0424 | 0.0141 | 0.0054 | 0.0023 | 0.0011 | 0.0005 |
| 4 | 0.5556 | 0.2000 | 0.0667 | 0.0242 | 0.0093 | 0.0040 | 0.0019 | 0.0009 |
| 5 | | 0.2667 | 0.0970 | 0.0364 | 0.0148 | 0.0063 | 0.0030 | 0.0015 |
| 6 | | 0.3556 | 0.1394 | 0.0545 | 0.0225 | 0.0100 | 0.0047 | 0.0023 |
| 7 | | 0.4444 | 0.1879 | 0.0768 | 0.0326 | 0.0147 | 0.0070 | 0.0035 |
| 8 | | 0.5556 | 0.2485 | 0.1071 | 0.0466 | 0.0213 | 0.0103 | 0.0052 |
| 9 | | | 0.3152 | 0.1414 | 0.0637 | 0.0296 | 0.0145 | 0.0074 |
| 10 | | | 0.3879 | 0.1838 | 0.0855 | 0.0406 | 0.0200 | 0.0103 |
| 11 | | | 0.4606 | 0.2303 | 0.1111 | 0.0539 | 0.0270 | 0.0141 |
| 12 | | | 0.5394 | 0.2848 | 0.1422 | 0.0709 | 0.0361 | 0.0190 |
| 13 | | | | 0.3414 | 0.1772 | 0.0906 | 0.0469 | 0.0249 |
| 14 | | | | 0.4040 | 0.2176 | 0.1142 | 0.0603 | 0.0325 |
| 15 | | | | 0.4667 | 0.2618 | 0.1412 | 0.0760 | 0.0415 |
| 16 | | | | 0.5333 | 0.3108 | 0.1725 | 0.0946 | 0.0524 |
| 17 | | | | | 0.3621 | 0.2068 | 0.1159 | 0.0652 |
| 18 | | | | | 0.4165 | 0.2454 | 0.1405 | 0.0803 |
| 19 | | | | | 0.4716 | 0.2864 | 0.1678 | 0.0974 |
| 20 | | | | | 0.5284 | 0.3310 | 0.1984 | 0.1172 |
| 21 | | | | | | 0.3773 | 0.2317 | 0.1393 |
| 22 | | | | | | 0.4259 | 0.2679 | 0.1641 |
| 23 | | | | | | 0.4749 | 0.3063 | 0.1911 |
| 24 | | | | | | 0.5251 | 0.3472 | 0.2209 |
| 25 | | | | | | | 0.3894 | 0.2527 |
| 26 | | | | | | | 0.4333 | 0.2869 |
| 27 | | | | | | | 0.4775 | 0.3227 |
| 28 | | | | | | | 0.5225 | 0.3605 |
| 29 | | | | | | | | 0.3992 |
| 30 | | | | | | | | 0.4392 |
| 31 | | | | | | | | 0.4796 |
| 32 | | | | | | | | 0.5204 |

| | | | | | $n_2 = 9$<br>$n_1$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | 0.1000 | 0.0182 | 0.0045 | 0.0014 | 0.0005 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1 | 0.2000 | 0.0364 | 0.0091 | 0.0028 | 0.0010 | 0.0004 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0000 |
| 2 | 0.3000 | 0.0727 | 0.0182 | 0.0056 | 0.0020 | 0.0008 | 0.0003 | 0.0002 | 0.0001 |
| 3 | 0.4000 | 0.1091 | 0.0318 | 0.0098 | 0.0035 | 0.0014 | 0.0006 | 0.0003 | 0.0001 |
| 4 | 0.5000 | 0.1636 | 0.0500 | 0.0168 | 0.0060 | 0.0024 | 0.0010 | 0.0005 | 0.0002 |
| 5 | | 0.2182 | 0.0727 | 0.0252 | 0.0095 | 0.0038 | 0.0017 | 0.0008 | 0.0004 |
| 6 | | 0.2909 | 0.1045 | 0.0378 | 0.0145 | 0.0060 | 0.0026 | 0.0012 | 0.0006 |
| 7 | | 0.3636 | 0.1409 | 0.0531 | 0.0210 | 0.0088 | 0.0039 | 0.0019 | 0.0009 |
| 8 | | 0.4545 | 0.1864 | 0.0741 | 0.0300 | 0.0128 | 0.0058 | 0.0028 | 0.0014 |
| 9 | | 0.5455 | 0.2409 | 0.0993 | 0.0415 | 0.0180 | 0.0082 | 0.0039 | 0.0020 |
| 10 | | | 0.3000 | 0.1301 | 0.0559 | 0.0248 | 0.0115 | 0.0056 | 0.0028 |
| 11 | | | 0.3636 | 0.1650 | 0.0734 | 0.0332 | 0.0156 | 0.0076 | 0.0039 |
| 12 | | | 0.4318 | 0.2070 | 0.0949 | 0.0440 | 0.0209 | 0.0103 | 0.0053 |
| 13 | | | 0.5000 | 0.2517 | 0.1199 | 0.0567 | 0.0274 | 0.0137 | 0.0071 |
| 14 | | | | 0.3021 | 0.1489 | 0.0723 | 0.0356 | 0.0180 | 0.0094 |
| 15 | | | | 0.3552 | 0.1818 | 0.0905 | 0.0454 | 0.0232 | 0.0122 |
| 16 | | | | 0.4126 | 0.2188 | 0.1119 | 0.0571 | 0.0296 | 0.0157 |
| 17 | | | | 0.4699 | 0.2592 | 0.1361 | 0.0708 | 0.0372 | 0.0200 |
| 18 | | | | 0.5301 | 0.3032 | 0.1638 | 0.0869 | 0.0464 | 0.0252 |
| 19 | | | | | 0.3497 | 0.1924 | 0.1052 | 0.0570 | 0.0313 |
| 20 | | | | | 0.3986 | 0.2280 | 0.1261 | 0.0694 | 0.0385 |
| 21 | | | | | 0.4491 | 0.2643 | 0.1496 | 0.0836 | 0.0470 |
| 22 | | | | | 0.5000 | 0.3035 | 0.1755 | 0.0998 | 0.0567 |
| 23 | | | | | | 0.3445 | 0.2039 | 0.1179 | 0.0680 |
| 24 | | | | | | 0.3878 | 0.2349 | 0.1383 | 0.0807 |
| 25 | | | | | | 0.4320 | 0.2680 | 0.1606 | 0.0951 |
| 26 | | | | | | 0.4773 | 0.3032 | 0.1852 | 0.1112 |
| 27 | | | | | | 0.5227 | 0.3403 | 0.2117 | 0.1290 |
| 28 | | | | | | | 0.3788 | 0.2404 | 0.1487 |
| 29 | | | | | | | 0.4185 | 0.2707 | 0.1701 |
| 30 | | | | | | | 0.4591 | 0.3029 | 0.1933 |
| 31 | | | | | | | 0.5000 | 0.3365 | 0.2181 |
| 32 | | | | | | | | 0.3715 | 0.2447 |
| 33 | | | | | | | | 0.4074 | 0.2729 |
| 34 | | | | | | | | 0.4442 | 0.3024 |
| 35 | | | | | | | | 0.4813 | 0.3332 |
| 36 | | | | | | | | 0.5187 | 0.3652 |
| 37 | | | | | | | | | 0.3981 |
| 38 | | | | | | | | | 0.4317 |
| 39 | | | | | | | | | 0.4657 |
| 40 | | | | | | | | | 0.5000 |

$n_2 = 10$

| $u$ | $n_1$ = 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.0909 | 0.0152 | 0.0035 | 0.0010 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1 | 0.1818 | 0.0303 | 0.0070 | 0.0020 | 0.0007 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2 | 0.2727 | 0.0606 | 0.0140 | 0.0040 | 0.0013 | 0.0005 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| 3 | 0.3636 | 0.0909 | 0.0245 | 0.0070 | 0.0023 | 0.0009 | 0.0004 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0000 |
| 4 | 0.4545 | 0.1364 | 0.0385 | 0.0120 | 0.0040 | 0.0015 | 0.0006 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 |
| 5 | 0.5455 | 0.1818 | 0.0559 | 0.0180 | 0.0063 | 0.0024 | 0.0010 | 0.0004 | 0.0002 | 0.0001 |
| 6 | | 0.2424 | 0.0804 | 0.0270 | 0.0097 | 0.0037 | 0.0015 | 0.0007 | 0.0003 | 0.0001 |
| 7 | | 0.3030 | 0.1084 | 0.0380 | 0.0140 | 0.0055 | 0.0023 | 0.0010 | 0.0005 | 0.0002 |
| 8 | | 0.3788 | 0.1434 | 0.0529 | 0.0200 | 0.0080 | 0.0034 | 0.0015 | 0.0007 | 0.0002 |
| 9 | | 0.4545 | 0.1853 | 0.0709 | 0.0276 | 0.0112 | 0.0048 | 0.0022 | 0.0011 | 0.0004 |
| 10 | | 0.5455 | 0.2343 | 0.0939 | 0.0376 | 0.0156 | 0.0068 | 0.0031 | 0.0015 | 0.0005 |
| 11 | | | 0.2867 | 0.1199 | 0.0496 | 0.0210 | 0.0093 | 0.0043 | 0.0021 | 0.0008 |
| 12 | | | 0.3462 | 0.1518 | 0.0646 | 0.0280 | 0.0125 | 0.0058 | 0.0028 | 0.0010 |
| 13 | | | 0.4056 | 0.1868 | 0.0823 | 0.0363 | 0.0165 | 0.0078 | 0.0038 | 0.0014 |
| 14 | | | 0.4685 | 0.2268 | 0.1032 | 0.0467 | 0.0215 | 0.0103 | 0.0051 | 0.0019 |
| 15 | | | 0.5315 | 0.2697 | 0.1272 | 0.0589 | 0.0277 | 0.0133 | 0.0066 | 0.0026 |
| 16 | | | | 0.3177 | 0.1548 | 0.0736 | 0.0351 | 0.0171 | 0.0086 | 0.0034 |
| 17 | | | | 0.3666 | 0.1855 | 0.0903 | 0.0439 | 0.0217 | 0.0110 | 0.0045 |
| 18 | | | | 0.4196 | 0.2198 | 0.1099 | 0.0544 | 0.0273 | 0.0140 | 0.0057 |
| 19 | | | | 0.4725 | 0.2567 | 0.1317 | 0.0665 | 0.0338 | 0.0175 | 0.0073 |
| 20 | | | | 0.5275 | 0.2970 | 0.1566 | 0.0806 | 0.0416 | 0.0217 | 0.0093 |
| 21 | | | | | 0.3393 | 0.1838 | 0.0966 | 0.0506 | 0.0267 | 0.0116 |
| 22 | | | | | 0.3839 | 0.2139 | 0.1148 | 0.0610 | 0.0326 | 0.0144 |
| 23 | | | | | 0.4296 | 0.2461 | 0.1349 | 0.0729 | 0.0394 | 0.0177 |
| 24 | | | | | 0.4765 | 0.2811 | 0.1574 | 0.0864 | 0.0474 | 0.0216 |
| 25 | | | | | 0.5235 | 0.3177 | 0.1819 | 0.1015 | 0.0564 | 0.0262 |
| 26 | | | | | | 0.3564 | 0.2087 | 0.1185 | 0.0667 | 0.0315 |
| 27 | | | | | | 0.3962 | 0.2374 | 0.1371 | 0.0782 | 0.0376 |
| 28 | | | | | | 0.4374 | 0.2681 | 0.1577 | 0.0912 | 0.0446 |
| 29 | | | | | | 0.4789 | 0.3004 | 0.1800 | 0.1055 | 0.0526 |
| 30 | | | | | | 0.5211 | 0.3345 | 0.2041 | 0.1214 | 0.0615 |
| 31 | | | | | | | 0.3698 | 0.2299 | 0.1388 | 0.0716 |
| 32 | | | | | | | 0.4063 | 0.2574 | 0.1577 | 0.0827 |
| 33 | | | | | | | 0.4434 | 0.2863 | 0.1781 | 0.0952 |
| 34 | | | | | | | 0.4811 | 0.3167 | 0.2001 | 0.1088 |
| 35 | | | | | | | 0.5189 | 0.3482 | 0.2235 | 0.1237 |
| 36 | | | | | | | | 0.3809 | 0.2483 | 0.1399 |
| 37 | | | | | | | | 0.4143 | 0.2745 | 0.1575 |
| 38 | | | | | | | | 0.4484 | 0.3019 | 0.1763 |
| 39 | | | | | | | | 0.4827 | 0.3304 | 0.1965 |
| 40 | | | | | | | | 0.5173 | 0.3598 | 0.2179 |
| 41 | | | | | | | | | 0.3901 | 0.2406 |
| 42 | | | | | | | | | 0.4211 | 0.2644 |
| 43 | | | | | | | | | 0.4524 | 0.2894 |
| 44 | | | | | | | | | 0.4841 | 0.3153 |
| 45 | | | | | | | | | 0.5159 | 0.3421 |
| 46 | | | | | | | | | | 0.3697 |
| 47 | | | | | | | | | | 0.3980 |
| 48 | | | | | | | | | | 0.4267 |
| 49 | | | | | | | | | | 0.4559 |
| 50 | | | | | | | | | | 0.4853 |
| | | | | | | | | | | 0.5147 |

**დანართი 8.** უილკოქსონის კრიტერიუმის $W$ სტატისტიკის ქვედა კრიტიკული მნიშვნელობები [29].

| m | n | Q: 0,001 | 0,005 | 0,010 | 0,025 | 0,05 | 0,10 | 2MW |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | | | | | | 4 |
| | 3 | | | | | | | 5 |
| | 4 | | | | | | | 6 |
| | 5 | | | | | | | 7 |
| | 6 | | | | | | | 8 |
| | 7 | | | | | | | 9 |
| | 8 | | | | | | — | 10 |
| | 9 | | | | | | 1 | 11 |
| | 10 | | | | | | 1 | 12 |
| | 11 | | | | | | 1 | 13 |
| | 12 | | | | | | 1 | 14 |
| | 13 | | | | | | 1 | 15 |
| | 14 | | | | | | 1 | 16 |
| | 15 | | | | | | 1 | 17 |
| | 16 | | | | | | 1 | 18 |
| | 17 | | | | | | 1 | 19 |
| | 18 | | | | | — | 1 | 20 |
| | 19 | | | | | 1 | 2 | 21 |
| | 20 | | | | | 1 | 2 | 22 |
| | 21 | | | | | 1 | 2 | 23 |
| | 22 | | | | | 1 | 2 | 24 |
| | 23 | | | | | 1 | 2 | 25 |
| | 24 | | | | | 1 | 2 | 26 |
| | 25 | — | — | — | — | 1 | 2 | 27 |
| 2 | 2 | | | | | | — | 10 |
| | 3 | | | | | | 3 | 12 |
| | 4 | | | | | — | 3 | 14 |
| | 5 | | | | | 3 | 4 | 16 |
| | 6 | | | | | 3 | 4 | 18 |
| | 7 | | | | — | 3 | 4 | 20 |
| | 8 | | | | 3 | 4 | 5 | 22 |
| | 9 | | | | 3 | 4 | 5 | 24 |
| | 10 | | | | 3 | 4 | 6 | 26 |
| | 11 | | | | 3 | 4 | 6 | 28 |
| | 12 | | | — | 4 | 5 | 7 | 30 |
| | 13 | | | 3 | 4 | 5 | 7 | 32 |
| | 14 | | | 3 | 4 | 6 | 8 | 34 |
| | 15 | | | 3 | 4 | 6 | 8 | 36 |
| | 16 | | | 3 | 4 | 6 | 8 | 38 |
| | 17 | | | 3 | 5 | 6 | 9 | 40 |
| | 18 | | — | 3 | 5 | 7 | 9 | 42 |
| | 19 | | 3 | 4 | 5 | 7 | 10 | 44 |
| | 20 | | 3 | 4 | 5 | 7 | 10 | 46 |
| | 21 | | 3 | 4 | 6 | 8 | 11 | 48 |
| | 22 | | 3 | 4 | 6 | 8 | 11 | 50 |
| | 23 | | 3 | 4 | 6 | 8 | 12 | 52 |
| 2 | 24 | | 3 | 4 | 6 | 9 | 12 | 54 |
| | 25 | — | 3 | 4 | 6 | 9 | 12 | 56 |
| 3 | 3 | | | | | 6 | 7 | 21 |
| | 4 | | | | — | 6 | 7 | 24 |
| | 5 | | | | 6 | 7 | 8 | 27 |
| | 6 | | | — | 7 | 8 | 9 | 30 |
| | 7 | | | 6 | 7 | 8 | 10 | 33 |
| | 8 | | — | 6 | 8 | 9 | 11 | 36 |
| | 9 | | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 39 |
| | 10 | | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 42 |
| | 11 | | 6 | 7 | 9 | 11 | 13 | 45 |
| | 12 | | 7 | 8 | 10 | 11 | 14 | 48 |
| | 13 | | 7 | 8 | 10 | 12 | 15 | 51 |
| | 14 | | 7 | 8 | 11 | 13 | 16 | 54 |
| | 15 | | 8 | 9 | 11 | 13 | 16 | 57 |
| | 16 | — | 8 | 9 | 12 | 14 | 17 | 60 |
| | 17 | 6 | 8 | 10 | 12 | 15 | 18 | 63 |
| | 18 | 6 | 8 | 10 | 13 | 15 | 19 | 66 |
| | 19 | 6 | 9 | 10 | 13 | 16 | 20 | 69 |
| | 20 | 6 | 9 | 11 | 14 | 17 | 21 | 72 |
| | 21 | 7 | 9 | 11 | 14 | 17 | 21 | 75 |
| | 22 | 7 | 10 | 12 | 15 | 18 | 22 | 78 |
| | 23 | 7 | 10 | 12 | 15 | 19 | 23 | 81 |
| | 24 | 7 | 10 | 12 | 16 | 19 | 24 | 84 |
| | 25 | 7 | 11 | 13 | 16 | 20 | 25 | 87 |
| 4 | 4 | | | — | 10 | 11 | 13 | 36 |
| | 5 | | — | 10 | 11 | 12 | 14 | 40 |
| | 6 | | 10 | 11 | 12 | 13 | 15 | 44 |
| | 7 | | 10 | 11 | 13 | 14 | 16 | 48 |
| | 8 | | 11 | 12 | 14 | 15 | 17 | 52 |
| | 9 | — | 11 | 13 | 14 | 16 | 19 | 56 |
| | 10 | 10 | 12 | 13 | 15 | 17 | 20 | 60 |
| | 11 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 21 | 64 |
| | 12 | 10 | 13 | 15 | 17 | 19 | 22 | 68 |
| | 13 | 11 | 13 | 15 | 18 | 20 | 23 | 72 |
| | 14 | 11 | 14 | 16 | 19 | 21 | 25 | 76 |
| | 15 | 11 | 15 | 17 | 20 | 22 | 26 | 80 |
| | 16 | 12 | 15 | 17 | 21 | 24 | 27 | 84 |
| | 17 | 12 | 16 | 18 | 21 | 25 | 28 | 88 |
| | 18 | 13 | 16 | 19 | 22 | 26 | 30 | 92 |
| | 19 | 13 | 17 | 19 | 23 | 27 | 31 | 96 |
| | 20 | 13 | 18 | 20 | 24 | 28 | 32 | 100 |
| | 21 | 14 | 18 | 21 | 25 | 29 | 33 | 104 |
| | 22 | 14 | 19 | 21 | 26 | 30 | 35 | 108 |

| m | n | Q 0,001 | 0,005 | 0,010 | 0,025 | 0,05 | 0,10 | 2MW |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 23 | 14 | 19 | 22 | 27 | 31 | 36 | 112 |
| | 24 | 15 | 20 | 23 | 27 | 32 | 38 | 116 |
| | 25 | 15 | 20 | 23 | 28 | 33 | 38 | 120 |
| 5 | 5 | | 15 | 16 | 17 | 19 | 20 | 55 |
| | 6 | | 16 | 17 | 18 | 20 | 22 | 60 |
| | 7 | — | 16 | 18 | 20 | 21 | 23 | 65 |
| | 8 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 70 |
| | 9 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 27 | 75 |
| | 10 | 16 | 19 | 21 | 23 | 26 | 28 | 80 |
| | 11 | 17 | 20 | 22 | 24 | 27 | 30 | 85 |
| | 12 | 17 | 21 | 23 | 26 | 28 | 32 | 90 |
| | 13 | 18 | 22 | 24 | 27 | 30 | 33 | 95 |
| | 14 | 18 | 22 | 25 | 28 | 31 | 35 | 100 |
| | 15 | 19 | 23 | 26 | 29 | 33 | 37 | 105 |
| | 16 | 20 | 24 | 27 | 30 | 34 | 38 | 110 |
| | 17 | 20 | 25 | 28 | 32 | 35 | 40 | 115 |
| | 18 | 21 | 26 | 29 | 33 | 37 | 42 | 120 |
| | 19 | 22 | 27 | 30 | 34 | 38 | 43 | 125 |
| | 20 | 22 | 28 | 31 | 35 | 40 | 45 | 130 |
| | 21 | 23 | 29 | 32 | 37 | 41 | 47 | 135 |
| | 22 | 23 | 29 | 33 | 38 | 43 | 48 | 140 |
| | 23 | 24 | 30 | 34 | 39 | 44 | 50 | 145 |
| | 24 | 25 | 31 | 35 | 40 | 45 | 51 | 150 |
| | 25 | 25 | 32 | 36 | 42 | 47 | 53 | 155 |
| 6 | 6 | — | 23 | 24 | 26 | 28 | 30 | 78 |
| | 7 | 21 | 24 | 25 | 27 | 29 | 32 | 84 |
| | 8 | 22 | 25 | 27 | 29 | 31 | 34 | 90 |
| | 9 | 23 | 26 | 28 | 31 | 33 | 36 | 96 |
| | 10 | 24 | 27 | 29 | 32 | 35 | 38 | 102 |
| | 11 | 25 | 28 | 30 | 34 | 37 | 40 | 108 |
| | 12 | 25 | 30 | 32 | 35 | 38 | 42 | 114 |
| | 13 | 26 | 31 | 33 | 37 | 40 | 44 | 120 |
| | 14 | 27 | 32 | 34 | 38 | 42 | 46 | 126 |
| | 15 | 28 | 33 | 36 | 40 | 44 | 48 | 132 |
| | 16 | 29 | 34 | 37 | 42 | 46 | 50 | 138 |
| | 17 | 30 | 36 | 39 | 43 | 47 | 52 | 144 |
| | 18 | 31 | 37 | 40 | 45 | 49 | 55 | 150 |
| | 19 | 32 | 38 | 41 | 46 | 51 | 57 | 156 |
| | 20 | 33 | 39 | 43 | 48 | 53 | 59 | 162 |
| | 21 | 33 | 40 | 44 | 50 | 55 | 61 | 168 |
| | 22 | 34 | 42 | 45 | 51 | 57 | 63 | 174 |
| | 23 | 35 | 43 | 47 | 53 | 58 | 65 | 180 |
| | 24 | 36 | 44 | 48 | 54 | 60 | 67 | 186 |
| | 25 | 37 | 45 | 50 | 56 | 62 | 69 | 192 |

| m | n | Q 0,001 | 0,005 | 0,010 | 0,025 | 0,05 | 0,10 | 2MW |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 7 | 29 | 32 | 34 | 36 | 39 | 41 | 105 |
| | 8 | 30 | 34 | 35 | 38 | 41 | 44 | 112 |
| | 9 | 31 | 35 | 37 | 40 | 43 | 46 | 119 |
| | 10 | 33 | 37 | 39 | 42 | 45 | 49 | 126 |
| | 11 | 34 | 38 | 40 | 44 | 47 | 51 | 133 |
| | 12 | 35 | 40 | 42 | 46 | 49 | 54 | 140 |
| | 13 | 36 | 41 | 44 | 48 | 52 | 56 | 147 |
| | 14 | 37 | 43 | 45 | 50 | 54 | 59 | 154 |
| | 15 | 38 | 44 | 47 | 52 | 56 | 61 | 161 |
| | 16 | 39 | 46 | 49 | 54 | 58 | 64 | 168 |
| | 17 | 41 | 47 | 51 | 56 | 61 | 66 | 175 |
| | 18 | 42 | 49 | 52 | 58 | 63 | 69 | 182 |
| | 19 | 43 | 50 | 54 | 60 | 65 | 71 | 189 |
| | 20 | 44 | 52 | 56 | 62 | 67 | 74 | 196 |
| | 21 | 46 | 53 | 58 | 64 | 69 | 76 | 203 |
| | 22 | 47 | 55 | 59 | 66 | 72 | 79 | 210 |
| | 23 | 48 | 57 | 61 | 68 | 74 | 81 | 217 |
| | 24 | 49 | 58 | 63 | 70 | 76 | 84 | 224 |
| | 25 | 50 | 60 | 64 | 72 | 78 | 86 | 231 |
| 8 | 8 | 40 | 43 | 45 | 49 | 51 | 55 | 136 |
| | 9 | 41 | 45 | 47 | 51 | 54 | 58 | 144 |
| | 10 | 42 | 47 | 49 | 53 | 56 | 60 | 152 |
| | 11 | 44 | 49 | 51 | 55 | 59 | 63 | 160 |
| | 12 | 45 | 51 | 53 | 58 | 62 | 66 | 168 |
| | 13 | 47 | 53 | 56 | 60 | 64 | 69 | 176 |
| | 14 | 48 | 54 | 58 | 62 | 67 | 72 | 184 |
| | 15 | 50 | 56 | 60 | 65 | 69 | 75 | 192 |
| | 16 | 51 | 58 | 62 | 67 | 72 | 78 | 200 |
| | 17 | 53 | 60 | 64 | 70 | 75 | 81 | 208 |
| | 18 | 54 | 62 | 66 | 72 | 77 | 84 | 216 |
| | 19 | 56 | 64 | 68 | 74 | 80 | 87 | 224 |
| | 20 | 57 | 66 | 70 | 77 | 83 | 90 | 232 |
| | 21 | 59 | 68 | 72 | 79 | 85 | 92 | 240 |
| | 22 | 60 | 70 | 74 | 81 | 88 | 95 | 248 |
| | 23 | 62 | 71 | 76 | 84 | 90 | 98 | 256 |
| | 24 | 64 | 73 | 78 | 86 | 93 | 101 | 264 |
| | 25 | 65 | 75 | 81 | 89 | 96 | 104 | 272 |
| 9 | 9 | 52 | 56 | 59 | 62 | 66 | 70 | 171 |
| | 10 | 53 | 58 | 61 | 65 | 69 | 73 | 180 |
| | 11 | 55 | 61 | 63 | 68 | 72 | 76 | 189 |
| | 12 | 57 | 63 | 66 | 71 | 75 | 80 | 198 |
| | 13 | 59 | 65 | 68 | 73 | 78 | 83 | 207 |
| | 14 | 60 | 67 | 71 | 76 | 81 | 86 | 216 |
| | 15 | 62 | 69 | 73 | 79 | 84 | 90 | 225 |

| $m$ | $n$ | $Q$ 0,001 | 0,005 | 0,010 | 0,025 | 0,05 | 0,10 | 2MW |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 16 | 64 | 72 | 76 | 82 | 87 | 93 | 234 |
| | 17 | 66 | 74 | 78 | 84 | 90 | 97 | 243 |
| | 18 | 68 | 76 | 81 | 87 | 93 | 100 | 252 |
| | 19 | 70 | 78 | 83 | 90 | 96 | 103 | 261 |
| | 20 | 71 | 81 | 85 | 93 | 99 | 107 | 270 |
| | 21 | 73 | 83 | 88 | 95 | 102 | 110 | 279 |
| | 22 | 75 | 85 | 90 | 98 | 105 | 113 | 288 |
| | 23 | 77 | 88 | 93 | 101 | 108 | 117 | 297 |
| | 24 | 79 | 90 | 95 | 104 | 111 | 120 | 306 |
| | 25 | 81 | 92 | 98 | 107 | 114 | 123 | 315 |
| 10 | 10 | 65 | 71 | 74 | 78 | 82 | 87 | 210 |
| | 11 | 67 | 73 | 77 | 81 | 86 | 91 | 220 |
| | 12 | 69 | 76 | 79 | 84 | 89 | 94 | 230 |
| | 13 | 72 | 79 | 82 | 88 | 92 | 98 | 240 |
| | 14 | 74 | 81 | 85 | 91 | 96 | 102 | 250 |
| | 15 | 76 | 84 | 88 | 94 | 99 | 106 | 260 |
| | 16 | 78 | 86 | 91 | 97 | 103 | 109 | 270 |
| | 17 | 80 | 89 | 93 | 100 | 106 | 113 | 280 |
| | 18 | 82 | 92 | 96 | 103 | 110 | 117 | 290 |
| | 19 | 84 | 94 | 99 | 107 | 113 | 121 | 300 |
| | 20 | 87 | 97 | 102 | 110 | 117 | 125 | 310 |
| | 21 | 89 | 99 | 105 | 113 | 120 | 128 | 320 |
| | 22 | 91 | 102 | 108 | 116 | 123 | 132 | 330 |
| | 23 | 93 | 105 | 110 | 119 | 127 | 136 | 340 |
| | 24 | 95 | 107 | 113 | 122 | 130 | 140 | 350 |
| | 25 | 98 | 110 | 116 | 126 | 134 | 144 | 360 |
| 11 | 11 | 81 | 87 | 91 | 96 | 100 | 106 | 253 |
| | 12 | 83 | 90 | 94 | 99 | 104 | 110 | 264 |
| | 13 | 86 | 93 | 97 | 103 | 108 | 114 | 275 |
| | 14 | 88 | 96 | 100 | 106 | 112 | 118 | 286 |
| | 15 | 90 | 99 | 103 | 110 | 116 | 123 | 297 |
| | 16 | 93 | 102 | 107 | 113 | 120 | 127 | 308 |
| | 17 | 95 | 105 | 110 | 117 | 123 | 131 | 319 |
| | 18 | 98 | 108 | 113 | 121 | 127 | 135 | 330 |
| | 19 | 100 | 111 | 116 | 124 | 131 | 139 | 341 |
| | 20 | 103 | 114 | 119 | 128 | 135 | 144 | 352 |
| | 21 | 106 | 117 | 123 | 131 | 139 | 148 | 363 |
| | 22 | 108 | 120 | 126 | 135 | 143 | 152 | 374 |
| | 23 | 111 | 123 | 129 | 139 | 147 | 156 | 385 |
| | 24 | 113 | 126 | 132 | 142 | 151 | 161 | 396 |
| | 25 | 116 | 129 | 136 | 146 | 155 | 165 | 407 |
| 12 | 12 | 98 | 105 | 109 | 115 | 120 | 127 | 300 |
| 12 | 13 | 101 | 109 | 113 | 119 | 125 | 131 | 312 |
| | 14 | 103 | 112 | 116 | 123 | 129 | 136 | 324 |
| | 15 | 106 | 115 | 120 | 127 | 133 | 141 | 336 |
| | 16 | 109 | 119 | 124 | 131 | 138 | 145 | 348 |
| | 17 | 112 | 122 | 127 | 135 | 142 | 150 | 360 |
| | 18 | 115 | 125 | 131 | 139 | 146 | 155 | 372 |
| | 19 | 118 | 129 | 134 | 143 | 150 | 159 | 384 |
| | 20 | 120 | 132 | 138 | 147 | 155 | 164 | 396 |
| | 21 | 123 | 136 | 142 | 151 | 159 | 169 | 408 |
| | 22 | 126 | 139 | 145 | 155 | 163 | 173 | 420 |
| | 23 | 129 | 142 | 149 | 159 | 168 | 178 | 432 |
| | 24 | 132 | 146 | 153 | 163 | 172 | 183 | 444 |
| | 25 | 135 | 149 | 156 | 167 | 176 | 187 | 456 |
| 13 | 13 | 117 | 125 | 130 | 136 | 142 | 149 | 351 |
| | 14 | 120 | 129 | 134 | 141 | 147 | 154 | 364 |
| | 15 | 123 | 133 | 138 | 145 | 152 | 159 | 377 |
| | 16 | 126 | 136 | 142 | 150 | 156 | 165 | 390 |
| | 17 | 129 | 140 | 146 | 154 | 161 | 170 | 403 |
| | 18 | 133 | 144 | 150 | 158 | 166 | 175 | 416 |
| | 19 | 136 | 148 | 154 | 163 | 171 | 180 | 429 |
| | 20 | 139 | 151 | 158 | 167 | 175 | 185 | 442 |
| | 21 | 142 | 155 | 162 | 171 | 180 | 190 | 455 |
| | 22 | 145 | 159 | 166 | 176 | 185 | 195 | 468 |
| | 23 | 149 | 163 | 170 | 180 | 189 | 200 | 481 |
| | 24 | 152 | 166 | 174 | 185 | 194 | 205 | 494 |
| | 25 | 155 | 170 | 178 | 189 | 199 | 211 | 507 |
| 14 | 14 | 137 | 147 | 152 | 160 | 166 | 174 | 406 |
| | 15 | 141 | 151 | 156 | 164 | 171 | 179 | 420 |
| | 16 | 144 | 155 | 161 | 169 | 176 | 185 | 434 |
| | 17 | 148 | 159 | 165 | 174 | 182 | 190 | 448 |
| | 18 | 151 | 163 | 170 | 179 | 187 | 196 | 462 |
| | 19 | 155 | 168 | 174 | 183 | 192 | 202 | 476 |
| | 20 | 159 | 172 | 178 | 188 | 197 | 207 | 490 |
| | 21 | 162 | 176 | 183 | 193 | 202 | 213 | 504 |
| | 22 | 166 | 180 | 187 | 198 | 207 | 218 | 518 |
| | 23 | 169 | 184 | 192 | 203 | 212 | 224 | 532 |
| | 24 | 173 | 188 | 196 | 207 | 218 | 229 | 546 |
| | 25 | 177 | 192 | 200 | 212 | 223 | 235 | 560 |
| 15 | 15 | 160 | 171 | 176 | 184 | 192 | 200 | 465 |
| | 16 | 163 | 175 | 181 | 190 | 197 | 206 | 480 |
| | 17 | 167 | 180 | 186 | 195 | 203 | 212 | 495 |
| | 18 | 171 | 184 | 190 | 200 | 208 | 218 | 510 |

| m | n | Q 0,001 | 0,005 | 0,010 | 0,025 | 0,05 | 0,10 | 2MW |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 19 | 175 | 189 | 195 | 205 | 214 | 224 | 525 |
| | 20 | 179 | 193 | 200 | 210 | 220 | 230 | 540 |
| | 21 | 183 | 198 | 205 | 216 | 225 | 236 | 555 |
| | 22 | 187 | 202 | 210 | 221 | 231 | 242 | 570 |
| | 23 | 191 | 207 | 214 | 226 | 236 | 248 | 585 |
| | 24 | 195 | 211 | 219 | 231 | 242 | 254 | 600 |
| | 25 | 199 | 216 | 224 | 237 | 248 | 260 | 615 |
| 16 | 16 | 184 | 296 | 202 | 211 | 219 | 229 | 528 |
| | 17 | 188 | 201 | 207 | 217 | 225 | 235 | 544 |
| | 18 | 192 | 206 | 212 | 222 | 231 | 242 | 560 |
| | 19 | 196 | 210 | 218 | 228 | 237 | 248 | 576 |
| | 20 | 201 | 215 | 223 | 234 | 243 | 255 | 592 |
| | 21 | 205 | 220 | 228 | 239 | 249 | 261 | 608 |
| | 22 | 209 | 225 | 233 | 245 | 255 | 267 | 624 |
| | 23 | 214 | 230 | 238 | 251 | 261 | 274 | 640 |
| | 24 | 218 | 235 | 244 | 256 | 267 | 280 | 656 |
| | 25 | 222 | 240 | 249 | 262 | 273 | 287 | 672 |
| 17 | 17 | 210 | 223 | 230 | 240 | 249 | 259 | 595 |
| | 18 | 214 | 228 | 235 | 246 | 255 | 266 | 612 |
| | 19 | 219 | 234 | 241 | 252 | 262 | 273 | 629 |
| | 20 | 223 | 239 | 246 | 258 | 268 | 280 | 646 |
| | 21 | 228 | 244 | 252 | 264 | 274 | 287 | 663 |
| | 22 | 233 | 249 | 258 | 270 | 281 | 294 | 680 |
| | 23 | 238 | 255 | 263 | 276 | 287 | 300 | 697 |
| | 24 | 242 | 260 | 269 | 282 | 294 | 307 | 714 |
| | 25 | 247 | 265 | 275 | 288 | 300 | 314 | 731 |
| 18 | 18 | 237 | 252 | 259 | 270 | 280 | 291 | 666 |
| | 19 | 242 | 258 | 265 | 277 | 287 | 299 | 684 |
| | 20 | 247 | 263 | 271 | 283 | 294 | 306 | 702 |
| | 21 | 252 | 269 | 277 | 290 | 301 | 313 | 720 |
| | 22 | 257 | 275 | 283 | 296 | 307 | 321 | 738 |
| | 23 | 262 | 280 | 289 | 303 | 314 | 328 | 756 |
| | 24 | 267 | 286 | 295 | 309 | 321 | 335 | 774 |
| | 25 | 273 | 292 | 301 | 316 | 328 | 343 | 792 |

| m | n | Q 0,001 | 0,005 | 0,010 | 0,025 | 0,05 | 0,10 | 2MW |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 19 | 267 | 283 | 291 | 303 | 313 | 325 | 741 |
| | 20 | 272 | 289 | 297 | 309 | 320 | 333 | 760 |
| | 21 | 277 | 295 | 303 | 316 | 328 | 341 | 779 |
| | 22 | 283 | 301 | 310 | 323 | 335 | 349 | 798 |
| | 23 | 288 | 307 | 316 | 330 | 342 | 357 | 817 |
| | 24 | 294 | 313 | 323 | 337 | 350 | 364 | 836 |
| | 25 | 299 | 319 | 329 | 344 | 357 | 372 | 855 |
| 20 | 20 | 298 | 315 | 324 | 337 | 348 | 361 | 820 |
| | 21 | 304 | 322 | 331 | 344 | 356 | 370 | 840 |
| | 22 | 309 | 328 | 337 | 351 | 364 | 378 | 860 |
| | 23 | 315 | 335 | 344 | 359 | 371 | 386 | 880 |
| | 24 | 321 | 341 | 351 | 366 | 379 | 394 | 900 |
| | 25 | 327 | 348 | 358 | 373 | 387 | 403 | 920 |
| 21 | 21 | 331 | 349 | 359 | 373 | 385 | 399 | 903 |
| | 22 | 337 | 356 | 366 | 381 | 393 | 408 | 924 |
| | 23 | 343 | 363 | 373 | 388 | 401 | 417 | 945 |
| | 24 | 349 | 370 | 381 | 396 | 410 | 425 | 966 |
| | 25 | 356 | 377 | 388 | 404 | 418 | 434 | 987 |
| 22 | 22 | 365 | 386 | 396 | 411 | 424 | 439 | 990 |
| | 23 | 372 | 393 | 403 | 419 | 432 | 448 | 1012 |
| | 24 | 379 | 400 | 411 | 427 | 441 | 457 | 1034 |
| | 25 | 385 | 408 | 419 | 435 | 450 | 467 | 1056 |
| 23 | 23 | 402 | 424 | 434 | 451 | 465 | 481 | 1081 |
| | 24 | 409 | 431 | 443 | 459 | 474 | 491 | 1104 |
| | 25 | 416 | 439 | 451 | 468 | 483 | 500 | 1127 |
| 24 | 24 | 440 | 464 | 475 | 492 | 507 | 525 | 1176 |
| | 25 | 448 | 472 | 484 | 501 | 517 | 535 | 1200 |
| 25 | 25 | 480 | 505 | 517 | 536 | 552 | 570 | 1275 |

**დანართი 9.** ამონარჩევით გამოთვლილი კორელაციის კოეფიციენტის განწილების კვანტილები $r_{1-\frac{p}{2}}$ [3].

| Число степеней свободы $f$ | Уровни значимости $p$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0,10 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,001 |
| 1 | 0,988 | 0,997 | 0,999 | 1,000 | 1,000 |
| 2 | 0,900 | 0,950 | 0,980 | 0,990 | 0,999 |
| 3 | 0,805 | 0,878 | 0,934 | 0,959 | 0,992 |
| 4 | 0,729 | 0,811 | 0,882 | 0,917 | 0,974 |
| 5 | 0,669 | 0,754 | 0,833 | 0,874 | 0,951 |
| 6 | 0,621 | 0,707 | 0,789 | 0,834 | 0,925 |
| 7 | 0,582 | 0,666 | 0,750 | 0,798 | 0,898 |
| 8 | 0,549 | 0,632 | 0,716 | 0,765 | 0,872 |
| 9 | 0,521 | 0,602 | 0,685 | 0,735 | 0,847 |
| 10 | 0,497 | 0,576 | 0,658 | 0,708 | 0,823 |
| 11 | 0,476 | 0,553 | 0,634 | 0,684 | 0,801 |
| 12 | 0,457 | 0,532 | 0,612 | 0,661 | 0,780 |
| 13 | 0,441 | 0,514 | 0,592 | 0,641 | 0,760 |
| 14 | 0,426 | 0,497 | 0,574 | 0,623 | 0,742 |
| 15 | 0,412 | 0,482 | 0,558 | 0,606 | 0,725 |
| 16 | 0,400 | 0,468 | 0,543 | 0,590 | 0,708 |
| 17 | 0,389 | 0,456 | 0,528 | 0,575 | 0,693 |
| 18 | 0,378 | 0,444 | 0,516 | 0,561 | 0,679 |
| 19 | 0,369 | 0,433 | 0,503 | 0,549 | 0,665 |
| 20 | 0,360 | 0,423 | 0,492 | 0,537 | 0,652 |
| 25 | 0,323 | 0,381 | 0,445 | 0,487 | 0,597 |
| 30 | 0,296 | 0,349 | 0,409 | 0,449 | 0,554 |
| 35 | 0,275 | 0,325 | 0,381 | 0,418 | 0,519 |
| 40 | 0,257 | 0,304 | 0,358 | 0,393 | 0,490 |
| 45 | 0,243 | 0,287 | 0,338 | 0,372 | 0,465 |
| 50 | 0,231 | 0,273 | 0,322 | 0,354 | 0,443 |
| 60 | 0,211 | 0,250 | 0,295 | 0,325 | 0,408 |
| 70 | 0,195 | 0,232 | 0,274 | 0,302 | 0,380 |
| 80 | 0,183 | 0,217 | 0,256 | 0,283 | 0,357 |
| 90 | 0,173 | 0,205 | 0,242 | 0,267 | 0,337 |
| 100 | 0,164 | 0,195 | 0,230 | 0,254 | 0,321 |

**დანართი 10.** უილკოქსონის ნიშნების რანგების ჯამების სტატისტიკის ზედა და ქვედა პროცენტული წერტილები

| | $w_1^*$ | $w_2^*$ | $P(W \le w_1^*) = P(W \ge w_2^*)$ |
|---|---|---|---|
| $n = 4$ | 0 | 10 | 0.062 |
| | 1 | 9 | 0.125 |
| $n = 5$ | 0 | 15 | 0.031 |
| | 1 | 14 | 0.062 |
| | 2 | 13 | 0.094 |
| | 3 | 12 | 0.156 |
| $n = 6$ | 0 | 21 | 0.016 |
| | 1 | 20 | 0.031 |
| | 2 | 19 | 0.047 |
| | 3 | 18 | 0.078 |
| | 4 | 17 | 0.109 |
| | 5 | 16 | 0.156 |
| $n = 7$ | 0 | 28 | 0.008 |
| | 1 | 27 | 0.016 |
| | 2 | 26 | 0.023 |
| | 3 | 25 | 0.039 |
| | 4 | 24 | 0.055 |
| | 5 | 23 | 0.078 |
| | 6 | 22 | 0.109 |
| | 7 | 21 | 0.148 |
| $n = 8$ | 0 | 36 | 0.004 |
| | 1 | 35 | 0.008 |
| | 2 | 34 | 0.012 |
| | 3 | 33 | 0.020 |
| | 4 | 32 | 0.027 |
| | 5 | 31 | 0.039 |
| | 6 | 30 | 0.055 |
| | 7 | 29 | 0.074 |
| | 8 | 28 | 0.098 |
| | 9 | 27 | 0.125 |
| $n = 9$ | 1 | 44 | 0.004 |
| | 2 | 43 | 0.006 |
| | 3 | 42 | 0.010 |
| | 4 | 41 | 0.014 |
| | 5 | 40 | 0.020 |
| | 6 | 39 | 0.027 |
| | 7 | 38 | 0.037 |
| | 8 | 37 | 0.049 |
| | 9 | 36 | 0.064 |
| | 10 | 35 | 0.082 |
| | 11 | 34 | 0.102 |
| | 12 | 33 | 0.125 |

| | $w_1^*$ | $w_2^*$ | $P(W \leq w_1^*) = P(W \geq w_2^*)$ |
|---|---|---|---|
| $n = 10$ | 3 | 52 | 0.005 |
| | 4 | 51 | 0.007 |
| | 5 | 50 | 0.010 |
| | 6 | 49 | 0.014 |
| | 7 | 48 | 0.019 |
| | 8 | 47 | 0.024 |
| | 9 | 46 | 0.032 |
| | 10 | 45 | 0.042 |
| | 11 | 44 | 0.053 |
| | 12 | 43 | 0.065 |
| | 13 | 42 | 0.080 |
| | 14 | 41 | 0.097 |
| | 15 | 40 | 0.116 |
| | 16 | 39 | 0.138 |
| $n = 11$ | 5 | 61 | 0.005 |
| | 6 | 60 | 0.007 |
| | 7 | 59 | 0.009 |
| | 8 | 58 | 0.012 |
| | 9 | 57 | 0.016 |
| | 10 | 56 | 0.021 |
| | 11 | 55 | 0.027 |
| | 12 | 54 | 0.034 |
| | 13 | 53 | 0.042 |
| | 14 | 52 | 0.051 |
| | 15 | 51 | 0.062 |
| | 16 | 50 | 0.074 |
| | 17 | 49 | 0.087 |
| | 18 | 48 | 0.103 |
| | 19 | 47 | 0.120 |
| | 20 | 46 | 0.139 |
| $n = 12$ | 7 | 71 | 0.005 |
| | 8 | 70 | 0.006 |
| | 9 | 69 | 0.008 |
| | 10 | 68 | 0.010 |
| | 11 | 67 | 0.013 |
| | 12 | 66 | 0.017 |
| | 13 | 65 | 0.021 |
| | 14 | 64 | 0.026 |
| | 15 | 63 | 0.032 |
| | 16 | 62 | 0.039 |
| | 17 | 61 | 0.046 |
| | 18 | 60 | 0.055 |
| | 19 | 59 | 0.065 |
| | 20 | 58 | 0.076 |
| | 21 | 57 | 0.088 |
| | 22 | 56 | 0.102 |
| | 23 | 55 | 0.117 |
| | 24 | 54 | 0.133 |

იბეჭდება ავტორის მიერ
წარმოდგენილი სახით

გადაეცა წარმოებას 17.10.2004. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 19.10.2004. ბეჭდვა ოფსეტური. ქაღალდის ზომა 210X297 1/4. პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 8,5. სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 5. ტირაჟი 200 ეგზ. შეკვეთა №

გამომცემლობა "ტექნიკური უნივერსიტეტი", თბილისი, კოსტავას 77