

დ. ბორბიძე, ლ. ჯიქიძე, ზ. ციციშვილი,
მ. ლოსაბერიძე, ლ. ქვარცხავა

**მეთოდური მითითებები
ლაბორატორიული
სამუშაოებისათვის თეორიულ
მექანიკაში**



დამტკიცებულია დამზარე სახელმძღვანელოდ
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სარედაქციო-
საგამომცემლო საბჭოს მიერ

თბილისი 2017

რეცენზენტები: პროფესორი გურამ ზალათურია
პროფესორი თამაზ ოზგაძე

კომპიუტერული უზრუნველყოფა: ლ.ჯიქიძე,

ს.მუხაშავერია, გ.შალიტაური

საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, 2017

ISBN

<http://www.gtu.ge/publishinghouse/>

ყველა უფლება დაცულია. ამ წიგნის არცერთი ნაწილი (იქნება ეს ტექსტი, ფოტო, ილუსტრაცია თუ სხვა) არანაირი ფორმით და საშუალებით (იქნება ეს ელექტრონული თუ მექანიკური), არ შეიძლება გამოყენებულ იქნას გამომცემლის წერილობითი ნებართვის გარეშე.

საავტორო უფლებების დარღვევა ისჯება კანონით.



წინასიტყვაობა

საინჟინრო საქმიანობის ყოველმხრივმა და სწრაფმა განვითარებამ, რომელიც თავის მხრივ ითვალისწინებს თეორიისა და პრაქტიკის შერწყმას, შექმნა იმისი აუცილებელი პირობა, რომ საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში საინჟინრო კადრების მომზადების ყველა ეტაპზე შეიქმნას რესურსები და დაისახოს მიზნები იმისათვის, რომ მომზადდეს თანამედროვე მოთხოვნების შესაბამისი კონკურენტუნარიანი, საინჟინრო განათლების საფუძვლების მქონე საპროექტო და პრაქტიკულ საექსპლოატაციო საქმიანობაზე ორიენტირებული სპეციალისტი (მშენებელი, აგროინჟინერი, ენერგეტიკოსი, სატრანსპორტო - მანქანათმშენებელი, სამთო-გეოლოგი და სხვა), რომელიც მყარი ბაზისური ცოდნითა და ტრანსფერული უნარებით შეძლებს დინამიკურად ცვლებად გარემოში ორიენტაციას, სამშენებლო ნორმებისა და წესების დაცვით საპროექტო და საექსპლოატაციო საქმიანობის განხორციელებას.

აღნიშნული მიზნებისა და ამოცანების გადაწყვეტა ეფუძნება რა ახალ და თანამედროვე სწავლების მეთოდებს, რომლებსაც ითვალისწინებს საბაკალავრო პროგრამა ზოგად-ტექნიკურ დისციპლინებში, როგორცაა თეორიული მექანიკა- გულისხმობს არსებული თეორიული ცოდნის გამყარებას ლაბორატორიულ- პრაქტიკული მეცადინეობების საშუალებით. დღეისათვის არსებული საათები ლაბორატორიულ-პრაქტიკული მეცადინეობებისა საშუალებას აძლევს სტუდენტს მოსინჯოს საკუთარი ცოდნის რეალიზება ასეთი სახის დამოუკიდებელი სამუშაოების შესრულებისას.

ზემოთ აღნიშნულიდან გამომდინარე, ავტორთა კოლექტივმა მიზნად დაისახა დაეხმაროს სტუდენტს ამ მიზნების

რელიზაციაში და მოკლე თეორიულ მასალასთან ერთად წარმოადგინა ლაბორატორიული სამუშაოების შესრულების ნიმუშები.

ავტორთა კოლექტივის აზრით წარმოდგენილი დამხმარე სახელმძღვანელო დაწერილია ისე, რომ საგნის პროფესორის სათანადო მითითებების შედეგად გამოადგება საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის თითქმის ყველა სპეციალობის სტუდენტებს.

ავტორთა კოლექტივი გულითად მადლობას უძღვნის ყველას, ვინც მოგვაწვდის საქმიან შენიშვნებს, რომლებიც იქნება გათვალისწინებული შემდგომ გამოცემებში. განსაკუთრებით გვინდა აღვნიშნოთ პროფესორ გურამ ბაღათურიას წვლილი, რომელმაც წაიკითხა ხელნაწერი და ბევრი სასარგებლო რჩევა მოგვცა. აგრეთვე დიდი მადლობა გვინდა მოვუხადოთ ტექნიკური დახმარებისათვის პროფესორ ა.ი.გორგიძის სახელობის მექანიკის სამეცნიერო-სასწავლო ლაბორატორიის ლაბორანტებს სალომე მუხაშავერიასა (მაგისტრი) და გიორგი შალიტაურს (მაგისტრანტი).

შესავალი

მატერიის მოძრაობის ყველა ფორმა წარმოადგენს მექანიკური მოძრაობის ზოგად მხარეს და მას ყოველთვის თან ახლავს მატერიის მოძრაობის სხვა ფორმები.

პირველი ზარბაზნების შექმნისა და ხელოვნური მშენებლობის ეპოქა საჭიროა მივიჩნიოთ იმ გამოცდილებების დაგროვების საწყის ეტაპად, რომლებიც შემდგომში საფუძვლად დაედო მექანიკური კანონების ფორმულირებას.

თანამედროვე ტექნიკის განვითარება ინჟინრების წინაშე აყენებს მრავალფეროვან ამოცანებს, რომლებიც დაკავშირებულია სხვადასხვა ნაგებობების (სახლები, ხიდები, არხები, კაშხლები და ა.შ) გათვლასთან, ყველანაირი მანქანების, მექანიზმების, ძრავების დაპროექტებასთან, წარმოებასთან და ექსპლოატაციასთან. კერძოდ ისეთი ობიექტებისა, როგორცაა მანქანები, ელმავლები, საზღვაო და სამდინარო ხომალდები, თვითმფრინავები, რაკეტები, კოსმოსური ხომალდები და სხვა.

მიუხედავად არსებული პრობლემების მრავალფეროვნებისა, მათი გადაწყვეტა გარკვეულწილად დაფუძნებულია ზოგიერთ ზოგად პრინციპზე და გააჩნიათ საერთო მეცნიერული საფუძველი. ეს იმით აიხსნება, რომ დასახელებულ ამოცანებში მნიშვნელოვანი ადგილი უჭირავს იმ საკითხებს, რომლებიც საჭიროებს ამა თუ იმ სხეულების მოძრაობისა და წონასწორობის კანონების შესწავლას.

ტექნიკის განვითარების თანამედროვე ეტაპს ახლავს მანქანათა მასობრივი გამოყენება, მათი ნომენკლატურის უწყვეტი ზრდა კონსტრუქციების არსებითი გართულებით, მოქმედების ახალი პრინციპების სწრაფი ათვისებით. ეს თავისთავად დაკავშირებულია იმ გრანდიოზულ მშენებლობებთან რომლებიც

ხორციელდება თანამედროვე ეტაპზე და იმ პროექტებთან, რომელთა განხორციელებაც დაგეგმილია მომავალში. ყოველივე ამან მიგვიყვანა თეორიული მექანიკის იმ იდეებისა და მეთოდების ფართო პოპულარიზაციამდე, რომლებიც გამოიყენება ტექნიკურ გამოთვლებში.

თეორიული მექანიკა არის მეცნიერება, რომლის ძირითად ამოცანას წარმოადგენს ნივთიერი სხეულების მექანიკური მოძრაობისა და წონასწორობის ზოგადი კანონების შესწავლა.

თეორიულ მექანიკაში ნივთიერი სხეულების ქვეშ იგულისხმება აბსოლუტურად მყარი სხეული.

აბსოლუტურად მყარი სხეული (მყარი სხეული) - ეს არის იმ სხეულის მოდელი, რომლის ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი არ იცვლება ნებისმიერი მექანიკური ზემოქმედებისას.

ნივთიერი სხეულების მექანიკური მოძრაობა ეწოდება მათი მდებარეობის ცვლილებას სხვა სხეულების მიმართ სივრცესა და დროში.

თეორიულ მექანიკაში შესასწავლ ყველაზე მარტივ ობიექტს წარმოადგენს ნივთიერი წერტილი.

ნივთიერი წერტილი ეწოდება სასრული მასის მქონე ობიექტს, რომლის მდებარეობა სივრცეში განისაზღვრება გეომეტრიული წერტილით. საზოგადოდ, ნივთიერი წერტილი იმ სხეულების მოდელია, რომელთა ზომები მოცემულ პირობებში შეიძლება უგულვებელვყოთ.

ნებისმიერი ნივთიერი სხეული შეიძლება განვიხილოთ, როგორც უსასრულო რაოდენობის წერტილების ერთობლიობა

მექანიკური სისტემა ეწოდება ერთმანეთთან ურთიერთმოქმედ ნივთიერ წერტილთა ერთობლიობას. მყარი სხეული წარმოადგენს მექანიკური სისტემის კერძო შემთხვევას.

თეორიული მექანიკა იყოფა სამ ნაწილად. ეს ნაწილებია: სტატიკა, კინემატიკა და დინამიკა.

თეორიული მექანიკა წარმოადგენს არა მარტო მსოფლმხედველობით დისციპლინას, არამედ ფუნდამენტს უმრავლესი ზოგადტექნიკური და მათი მაპროფილებელი საგნებისა, რომელთა შესწავლაც აუცილებელია თანამედროვე ინჟინრებისათვის. ამ ფუნდამენტურ დისციპლინას აგრეთვე გააჩნია დამოუკიდებელი პრაქტიკული მნიშვნელობა მექანიკური მოწყობილობების მუშაობის პრინციპების შესასწავლად, რომლის გარეშეც შეუძლებელია შეგნებულად მიიღო მონაწილეობა თუნდაც მანქანების დაპროექტებაში, დამზადებასა და ექსპლუატაციაში.

თეორიული მექანიკის მეთოდებმა ფართო გამოყენება ჰპოვა უწყვეტი გარემოს მოძრაობისა და წონასწორობის საკითხების შესწავლაში (ანუ დრეკადობის თეორიის ამოცანებში), ჰიდროდინამიკასა და გაზების დინამიკაში, ასევე სამოქალაქო და სამრეწველო მშენებლობაში, მანქანათმშენებლობაში, ავიაციაში გემთმშენებლობაში და ტექნიკის სხვა სფეროში. ეს მეთოდები ფართოდ არის დაკავშირებული ტექნიკის მრავალფეროვან ამოცანებთან და პირველ რიგში მანქანათა ავტომატური რეგულირების პროცესებთან, თვითმფრინავებისა და გემების დინამიკასთან, გიროსკოპული მოწყობილობების თეორიასთან, სამთო საქმესთან, მეტალურგიასთან, ტრანსპორტთან და სხვა.

მექანიკა ასტრონომიასა და მათემატიკასთან ერთად არის ერთ-ერთი უძველესი მეცნიერება, რომლის წარმოშობა და განვითარება განპირობებულია ტექნიკის მოთხოვნილებით.

ყოველივე ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე შეიძლება ცხადად წარმოვიდგინოთ, თუ რაოდენ დიდი მნიშვნელობა აქვს

მექანიკას, როგორც მეცნიერებას, თანამედროვე ტექნიკური პროგრესის განვითარებაში.

სტატიკა

სტატიკა არის თეორიული მექანიკის ნაწილი, რომელიც შეისწავლის ნივთიერ სხეულზე მოქმედი ძალთა სისტემის უმარტივეს სახეზე დაყვანისა და წონასწორობის პირობებს.

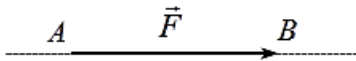
სტატიკის ძირითადი პრინციპები ეყრდნობა რა ნიუტონის კანონებს, გარკვეული აბსტრაქტული დაშვებებისა (ნივთიერი წერტილი, აბსოლუტურად მყარი სხეული) და ჰიპოთეზების საფუძველზე, რომლებიც გამყარებულია ლოგიკურად აგებულ თეორიულ კვლევებსა და პრაქტიკულ დაკვირვებებზე (ლაბორატორიული ცდები), ხელს შეუწყობს როგორც ბაკალავრიატის, ისე სამაგისტრო პროგრამის სამშენებლო და მისი მომიჯნავე სპეციალობის სტუდენტებს ისეთი საგნების და დისციპლინების საფუძვლიანად შესწავლაში, როგორიცაა მასალათა გამძლეობა, სამშენებლო მექანიკა, გრუნტების მექანიკა, კონსტრუქციების თეორია, სამშენებლო მანქანები.

§1. სტატიკის პრინციპები

პრინციპი I: ყოველ ძალას აქვს გარკვეული სიდიდე, მოდების წერტილი და გეზი. ამ პრინციპიდან ჩანს, რომ ძალა წარმოადგენს ვექტორულ სიდიდეს. ამიტომ, როცა საქმე გვექნება ძალასთან, ვიგულისხმებთ, რომ საქმე გვაქვს ვექტორთან და პირიქით (ნახ.1.1).

წრფეს, რომელზედაც ძალა მდებარეობს, ძალის ფუძე ეწოდება. ძალის სიდიდის საზომ ერთეულად საერთაშორისო

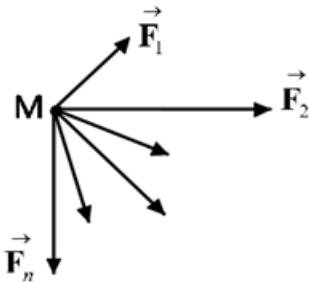
ერთეულთა სისტემაში მიღებულია ერთი ნიუტონი (ნ), ხოლო ტექნიკურ ერთეულთა სისტემაში - ერთი კილოგრამი (კგ). ნიუტონსა და კილოგრამ ძალას შორის არსებობს შემდეგი დამოკიდებულება: $1\text{ნ} = 0,102\text{კგ}$ ($1\text{კგ} \cong 9.81\text{ნ}$)



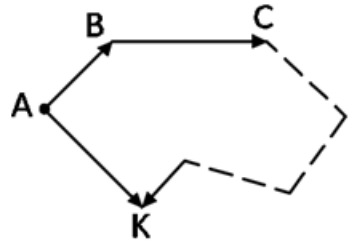
ნახ. 1.1

პრინციპი II: თუ ერთ წერტილზე რამდენიმე ძალა მოქმედებს, მაშინ ამ ძალების ერთობლიობა ერთი ისეთი ძალის ტოლფასია, რომელიც ამ

წერტილზეა მოდებული და შემდგენი ძალების გეომეტრიული ჯამის ტოლია (ნახ.1.2; 1.3).



ნახ.1.2



ნახ.1.3

M წერტილზე $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ძალების მოქმედება შეიძლება შეიცვალოს ერთი \vec{F} ძალის მოქმედებით, რომელსაც ამ ძალების ტოლქმედი ეწოდება

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n \quad (1.1)$$

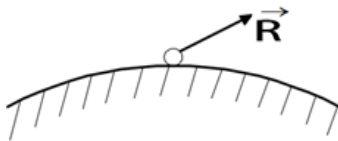
თავისუფალი ნივთიერი წერტილი ეწოდება ისეთ წერტილს, რომელსაც შეუძლია მოძრაობა ნებისმიერი მიმართულებით.

პრინციპი III: იმისათვის, რომ თავისუფალი ნივთიერი წერტილი იყოს წონასწორობაში, აუცილებელი და საკმარისია რომ მასზე მოდებული ძალების ტოლქმედი იყოს ნულის ტოლი.

ამ პრინციპიდან გამომდინარე იგულისხმება, რომ თუ წერტილზე მოდებული ძალების ტოლქმედი ნულის ტოლია, მაშინ წერტილი უძრავია.

თუ ნივთიერი წერტილის მოძრაობა რაიმე გეომეტრიული ან ფიზიკური პირობებით შეზღუდულია, მაშინ წერტილს არათავისუფალი ეწოდება.

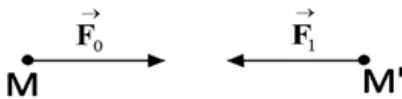
ნივთიერი წერტილის მოძრაობის შეზღუდვის გამომწვევ პირობებს მექანიკაში ბმებს უწოდებენ.



ნახ.1.4

პრინციპი IV: ყოველი ბმა შეიძლება გამოსახოს ძალის საშუალებით, რომელიც იმავე მექანიკურ მოქმედებას ახდენს, რასაც აღნიშნული ბმა (ნახ. 1.4).

ძალას, რომლითაც შეიძლება შევცვალოთ ბმის მოქმედება, რეაქციის ძალა ეწოდება.



ნახ. 1.5

პრინციპი V: ძალები, რომლებიც გამოსახავენ ორი ნივთიერი წერტილის ურთიერთქმედებას, სიდიდებით ტო-

ლია, მიმართულებით საწინააღმდეგო და მდებარეობენ ერთ ფუძეზე. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, მექანიკაში განიხილება აბსოლუტურად მყარი სხეული, ე.ი ისეთი სხეული, რომლის ორ წერტილს შორის მანძილი უცვლელია

პრინციპი VI: მყარ სხეულზე მოდებული ორი პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ძალა არავითარ მექანიკურ მოქმედებას არ ახდენს ამ სხეულზე.

ორი პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ძალა ეწოდება ისეთ ძალებს, რომელთა სიდიდეები ტოლია, მდებარეობენ ერთ ფუძეზე და მოგეზულნი არიან ერთმანეთის საწინააღმდეგოდ.

პრინციპი VII: თუ მყარი სხეული წონასწორობაშია ორი ძალის მოქმედებით, მაშინ ისინი პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ძალებია.

თეორემა I: მყარ სხეულზე მოქმედი ძალა სრიალა ვექტორია.

ამ თეორემიდან გამომდინარე, შეიძლება ვთქვათ, რომ მექანიკური მოქმედების შეუცვლელად მყარ სხეულზე მოქმედი ძალა შეიძლება გავასრიალოთ თავისი ფუძის გასწვრივ და მოვდოთ მის რომელიმე სხვა წერტილში, რომელიც მყარ სხეულს ეკუთვნის.

თეორემა II (სამი ძალის თეორემა): თუ წონასწორობაში მყოფ მყარ სხეულზე მოქმედებს სამი არაპარალელური ძალა და მათგან ორი ძალის ფუძეები ერთ წერტილში გადაიკვეთება, მაშინ მესამე ძალის ფუძეც იმავე წერტილში გადაიკვეთება და სამივე ძალა ერთ სიბრტყეში მდებარეობს.

§2. თავმოყრილი ძალები და მათი წონასწორობა

თავმოყრილი ეწოდება ისეთ ძალებს, რომელთა მოქმედების ფუძეები ერთ წერტილში გადაიკვეთება. ამ წერტილს თავმოყრის ცენტრი ეწოდება.

ვთქვათ, მყარ სხეულზე მოქმედებს თავმოყრილ ძალთა სისტემა: $\vec{F}_1(X_1, Y_1, Z_1)$, $\vec{F}_2(X_2, Y_2, Z_2)$, ..., $\vec{F}_n(X_n, Y_n, Z_n)$ და ამ

ძალთა სისტემის მოქმედებით სხეული წონასწორობაშია. რადგან მყარ სხეულზე მოდებული ძალა სრიალა ვექტორია, ამიტომ ყველა ეს ძალა ფუძეების გასწვრივ გასრიალებს და შეიძლება მოვდოთ თავმოყრის ცენტრში. შესაბამისად მივიღებთ ერთ წერტილზე მოდებულ ძალთა სისტემას, რომლის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ძალთა სისტემის ტოლქმედი იყოს ნულის ტოლი. ეს ასე ჩაიწერება

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = 0. \quad (2.1)$$

თუ ამ ვექტორულ ტოლობას დავაგეგმილებთ საკოორდინატო ღერძებზე, მივიღებთ

$$\begin{cases} X = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{k=1}^n X_k = 0, \\ Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \sum_{k=1}^n Y_k = 0, \\ Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \sum_{k=1}^n Z_k = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

(2.1) და (2.2) განტოლებები წარმოადგენენ როგორც თავმოყრილი ძალების წონასწორობის, ასევე თავისუფალი ნივთიერი წერტილის წონასწორობის განტოლებებს.

თუ ნივთიერი წერტილი არათავისუფალია, მაშინ (2.1) ვექტორულ ტოლობაში დაემატება ზმის შესაბამისი რეაქციის \vec{R} ძალა და წონასწორობის ვექტორულ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე

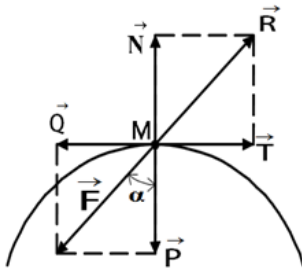
$$\vec{R} + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = 0, \quad (2.3)$$

რომელიც სკალარული სახით შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\begin{cases} R_x + \sum_{k=1}^n X_k = 0, \\ R_y + \sum_{k=1}^n Y_k = 0, \\ R_z + \sum_{k=1}^n Z_k = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

§3. სრიალის ხახუნი. სხეულის წონასწორობა ხახუნის გათვალისწინებით

ბუნებაში არსებული სხეულები ეხებიან რა ერთმანეთს ზედაპირებით, წარმოქმნიან ხახუნს.



ნახ. 3.1

ვთქვათ, ნივთიერი M წერტილი ძევს რაიმე მყარი სხეულის (S) ზედაპირზე და მასზე მოქმედებს რაიმე \vec{F} ძალა. ზედაპირის მოქმედება ნივთიერ წერტილზე გამოისახება

რეაქციის \vec{R} ძალით, რომელიც წონასწორობის შემთხვევაში \vec{F} ძალის სიდიდის ტოლია და მის საწინააღმდეგოდ არის მიმართული. დავშალოთ \vec{F} და \vec{R} ძალები ნივთიერი წერტილის და ზედაპირის შეხების წერტილში გავლებული მხებისა და ნორმალის მიმართულებით (ნახ.3.1).

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{Q} \quad (3.1)$$

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N} \quad (3.2)$$

\vec{P} წარმოადგენს ძალას რომელიც M წერტილს აჭერს (S) ზედაპირზე. მას წნევის ძალას უწოდებენ. \vec{Q} არის ძალა რომელიც ცდილობს M წერტილი (S) ზედაპირზე ამოძრავოს, ამიტომ მას მამოძრავებელ ძალას უწოდებენ. \vec{T} ძალას ხახუნის ძალა ეწოდება ხოლო \vec{N} ძალას – ნორმალური რეაქციის ძალა.

თუ \vec{Q} ძალა იზრდება და \vec{P} ძალა უცვლელია, მაშინ მიიღწევა \vec{Q} ძალის ისეთი მნიშვნელობა, როდესაც წონასწორობა დაირღვევა და წერტილი დაიწყებს მოძრაობას. \vec{T} ძალის სიდიდე დაძვრის მომენტში აღვნიშნოთ $|\vec{T}_0|$ – ით. წონასწორობის დროს გაქვს $|\vec{Q}| = |\vec{T}|$.

ფრანგმა მეცნიერმა კულონმა ცდების შედეგად დაადგინა, რომ წერტილის დაძვრის მომენტში \vec{T} ძალის სიდიდის შეფარდება \vec{P} ძალის სიდიდეზე მუდმივია და არ არის დამოკიდებული (S) ზედაპირის იმ ნაწილის სიდიდეზე, რომლითაც წერტილი სხეულის ზედაპირს ეხება. ამ ფარდობის გამომსახველ რიცხვს – f -ს ხახუნის კოეფიციენტი ეწოდება. ამრიგად გვექნება

$$\frac{|\vec{T}_0|}{|P|} = f \quad (3.3)$$

ხახუნის კოეფიციენტი დამოკიდებულია სხეულისა და ნივთიერი წერტილის შემადგენელ ნივთიერებაზე და მათი ზედაპირების მდგომარეობაზე, ე.ი. რა ნივთიერებებისაგან არის დამზადებული ზედაპირი და წერტილი. ასევე რა მდგომარეობაში იმყოფება ზედაპირი და წერტილი, უძრავია თუ მოძრავი, მშრალია თუ სველი.

ხახუნის კოეფიციენტს ე.წ. ხახუნის კუთხესთან აკავშირებენ შემდეგი ტოლობის საშუალებით

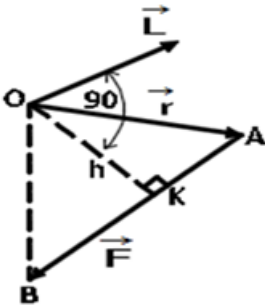
$$f = \operatorname{tg} \varphi \quad (3.5)$$

წერტილის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია უშუალოდ მოდებული ძალის მიერ ზედაპირის ნორმალთან შედგენილი კუთხე (ნახ. 3.1) ნაკლები იყოს ხახუნის კუთხეზე.

თუ $f = 0$ მაშინ $\vec{T} = 0$ და ზედაპირს სავსებით გვლუვი ზედაპირი ეწოდება. თუ $f \neq 0$, მაშინ ზედაპირს მქისე ეწოდება.

§4. ძალის ვექტორული მომენტი წერტილის მიმართ

\vec{F} ძალის ვექტორული მომენტი O წერტილის მიმართ ეწოდება \vec{L} ვექტორს, რომლის სიგრძე \vec{F} ძალის სიდიდისა და h მხრის ნამრავლის ტოლია, მოდებულია O წერტილზე იმ სიბრტყის მართობულად, რომელიც O წერტილზე და \vec{F} ძალაზე გადის და მიმართულია ისე, რომ \vec{F} ძალა O წერტილს დადებითი მიმართულებით უვლიდეს (ნახ. 4.1).



ნახ. 4.1

O წერტილს მომენტის ცენტრი ეწოდება. \vec{L} ვექტორის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით $|\vec{L}| = |\vec{F}|h$. თუ

ძალის ვექტორული მომენტის განმარტებას შევადარებთ ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლის განმარტებას, მაშინ გვექნება

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (4.1)$$

სადაც \vec{r} ძალის მოდების წერტილის რადიუს-ვექტორია მომენტის ცენტრის მიმართ. თუ (4.1) ტოლობას დავაგეგმილებთ საკოორდინატო ღერძებზე, გვექნება

$$\begin{cases} L_x = yZ - zY, \\ L_y = zX - xZ, \\ L_z = xY - yX. \end{cases} \quad (4.2)$$

აქ $L_x, L_y, L_z - \vec{L}$ ვექტორის გეგმილება საკოორდინატო ღერძებზე, $X, Y, Z - \vec{r}$ ძალის გეგმილება ამავე ღერძებზე, ხოლო x, y, z - ძალის მოდების წერტილის კოორდინატებია.

ვექტორული მომენტის თვისებები:

1. ვექტორული მომენტი ნულის ტოლია, თუ ძალა უდრის ნულს ან მისი ფუძე გადის მომენტთა ცენტრზე.

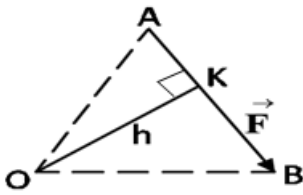
2. თუ ძალას შევუცვლით გეზს, პირდაპირ წინააღმდეგზე, მაშინ ვექტორული მომენტიც შეიცვლის გეზს პირდაპირწინააღმდეგზე.

3. ვექტორული მომენტი არ შეიცვლება თუ ძალას მის ფუძეზე გავასრიალებთ.

ტექნიკურ ერთეულთა სისტემაში მომენტის საზომ ერთეულად მიღებულია კილოგრამმეტრი, საერთაშორისო ერთეულთა სისტემაში კი - ნიუტონმეტრი.

§5. ძალის სკალარული მომენტი წერტილის მიმართ

დავუშვათ, რომ \vec{F} ძალა მოდებულია A წერტილზე, ხოლო მომენტთა ცენტრად ავირჩიოთ O წერტილი. O წერტილიდან \vec{F} ძალის ფუძეზე დავუშვათ OK მართობი, რომლის სიგრძე აღვნიშნოთ h -ით. მას ძალის მხარი ეწოდება.



ნახ. 5.1

\vec{F} ძალის სკალარული მომენტი O წერტილის მიმართ ეწოდება \vec{F} ძალის სიდიდისა და მისი h მხრის ნამრავლს აღებული „+“ ან „-“ ნიშნით, იმის მიხედვით, თუ როგორ უვლის

\vec{F} ძალა O წერტილს (ნახ. 5.1).

თუ სკალარულ მომენტს აღვნიშნავთ L -ით, მაშინ

$$L = \pm |\vec{F}|h \quad (5.1)$$

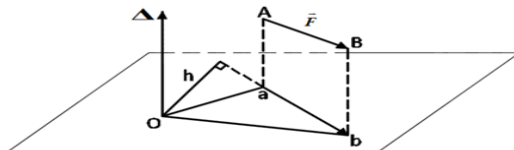
სკალარული მომენტის თვისებები:

1. ძალის სკალარული მომენტი ნულის ტოლია, თუ ძალა უდრის ნულს ან მისი ფუძე გადის მომენტთა ცენტრზე.
2. თუ ძალას შევუცვლით გეზს პირდაპირ წინააღმდეგზე, მაშინ სკალარული მომენტი შეიცვლის ნიშანს.
3. ძალის სკალარული მომენტი არ შეიცვლება, თუ ძალას გავასრიალებთ მისი ფუძის გასწვრივ.

§6. ძალის მომენტი ღერძის მიმართ

დავუშვათ, რომ მოცემულია \vec{F} ძალა და Δ ღერძი, რომლებიც ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობენ. ავირჩიოთ Δ ღერძზე ნებისმიერი O

წერტილი და ამ წერტილზე გავატაროთ Δ ღერძის



ნახ. 6.1

მართობული სიბრტყე და მასზე დავაგეგმილოთ \vec{F} ძალა. გეგმილი აღვნიშნოთ \vec{ab} ვექტორით (ნახ. 6.1)

ძალის მომენტი ღერძის მიმართ არის ამ ღერძის პერპენდიკულარულ სიბრტყეზე მოცემული ძალის გეგმილის სკალარული მომენტი ღერძისა და სიბრტყის გადაკვეთის წერტილის მიმართ

$$L_{\Delta} = \text{მ(ო)მ}_{\Delta} \vec{F} = \text{მ(ო)მ}_0 \vec{ab} \quad (6.1)$$

ძალის ღერძის მიმართ მომენტის თვისებები:

1. ღერძის მიმართ ძალის მომენტი ნულის ტოლია, თუ ძალა უდრის ნულს ან ძალა და ღერძი ერთ სიბრტყეში მდებარეობენ (კერძოდ, ძალის ფუძე კვეთს ღერძს ან მისი პარალელურია).
2. ღერძის მიმართ მომენტი შეიცვლის ნიშანს, თუ ძალას შევუცვლით გეზს.
3. ღერძის მიმართ მომენტი არ შეიცვლება, თუ ძალას გავასრიალებთ მისი ფუძის გასწვრივ.

§7. დამოკიდებულება ძალის ვექტორულ მომენტსა და ღერძის მიმართ მომენტს შორის. ძალის მომენტი კოორდინატთა ღერძების მიმართ

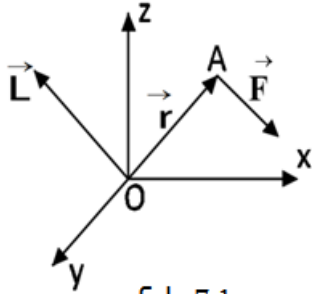
სამართლიანია შემდეგი თეორემა

თეორემა: ღერძის მიმართ ძალის მომენტი უდრის ამ ღერძზე აღებული ნებისმიერი წერტილის მიმართ ძალის ვექტორული მომენტის გეგმილს ამ ღერძზე.

თუ \vec{L} არის \vec{F} ძალის ვექტორული მომენტი Δ ღერძის O წერტილის მიმართ (ნახ. 6.1), მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$L_{\Delta} = \text{ბიპ}_\Delta \vec{L} = |\vec{L}| \cos \alpha \quad (7.1)$$

სადაც α არის კუთხე, რომელსაც \vec{L} ვექტორი შეადგენს Δ ღერძის დადებით მიმართულეხასთან.



ნახ. 7.1

დავუშვათ მოცემულია $\vec{F}(X, Y, Z)$ ძალა, რომლის მოდების A წერტილის კოორდინატები $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის მიმართ არის x, y, z და უნდა განისაზღვროს ამ ძალის მომენტები კოორდინატთა სისტემის ღერძების მიმართ.

მოცემული \vec{F} ძალის ვექტორული \vec{L} მომენტი O წერტილის მიმართ (ნახ. 7.1) განისაზღვრება (4.1) ფორმულით. რადგან ძალის ვექტორული მომენტის გეგმილი რაიმე ღერძზე არის ამ ღერძის მიმართ ამავე ძალის მომენტი, ამიტომ \vec{F} ძალის მომენტები საკოორდინატო ღერძების მიმართ განისაზღვრება (4.2) ფორმულებით.

§8. ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი

ძალთა სისტემა ეწოდება იმ ძალთა ერთობლიობას, რომლებიც გარკვეული სახით მოქმედებენ ნივთიერი სხეულის სხვადასხვა წერტილებში.

ვთქვათ მოცემულია სივრცეში ნებისმიერად განლაგებული $\vec{F}_1(X_1, Y_1, Z_1)$, $\vec{F}_2(X_2, Y_2, Z_2)$, ..., $\vec{F}_n(X_n, Y_n, Z_n)$ ძალთა სისტემა, რომელთა მოდების წერტილებია $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, ..., $A_n(x_n, y_n, z_n)$.

ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი ეწოდება შემდგენი ძალების გეომეტრიულ ჯამს.

თუ ნაკრებ ვექტორს აღვნიშნავთ $\vec{F}(X, Y, Z)$ –ით, მაშინ

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (8.1)$$

ამ ტოლობის საკოორდინატო ღერძებზე დაგეგმილებით მივიღებთ

$$\begin{cases} X = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{k=1}^n X_k, \\ Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \sum_{k=1}^n Y_k, \\ Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \sum_{k=1}^n Z_k. \end{cases} \quad (8.2)$$

ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორის სიდიდე და მიმართულება შესაბამისად განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით

$$|\vec{F}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (8.3)$$

$$\cos(\vec{F}, \vec{i}) = \frac{X}{|\vec{F}|}, \quad \cos(\vec{F}, \vec{j}) = \frac{Y}{|\vec{F}|}, \quad \cos(\vec{F}, \vec{k}) = \frac{Z}{|\vec{F}|}. \quad (8.4)$$

რაიმე წერტილის მიმართ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორული მომენტი ეწოდება ამავე წერტილის მიმართ შემდგენი ძალების ვექტორული მომენტების გეომეტრიულ ჯამს.

მომენტთა ცენტრის მიმართ ნაკრები ვექტორული მომენტი აღვნიშნოთ $\vec{L}(L_x, L_y, L_z)$ –ით. მაშინ გვექნება

$$\vec{L} = (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2) + \dots + (\vec{r}_n \times \vec{F}_n) = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{F}_k) \quad (8.5)$$

სადაც $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ წარმოადგენენ ძალების მოდების წერტილების რადიუს-ვექტორებს მომენტის ცენტრის მიმართ.

თუ (8.5) ტოლობას დავაგეგმილებთ კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ

$$\begin{cases} L_x = \sum_{k=1}^n (y_k Z_k - z_k Y_k), \\ L_y = \sum_{k=1}^n (z_k X_k - x_k Z_k), \\ L_z = \sum_{k=1}^n (x_k Y_k - y_k X_k). \end{cases} \quad (8.6)$$

ძალთა სისტემის ნაკრები მომენტის სიდიდე და მიმართულება შესაბამისად განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით

$$|\vec{L}| = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} \quad (8.7)$$

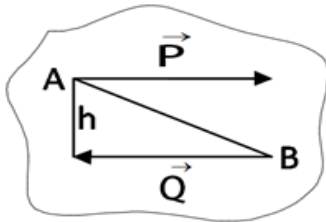
$$\cos(\vec{L}, \vec{i}) = \frac{L_x}{|\vec{L}|}, \quad \cos(\vec{L}, \vec{j}) = \frac{L_y}{|\vec{L}|}, \quad \cos(\vec{L}, \vec{k}) = \frac{L_z}{|\vec{L}|}. \quad (8.8)$$

აქ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – საკოორდინატო ღერძების მგეზავი (მიმმართველი) ერთეულოვანი ვექტორებია.

მტკიცდება, რომ თუ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია, მაშინ ამ ძალთა სისტემის ნაკრები მომენტის მნიშვნელობა დამოკიდებული არ არის მომენტის ცენტრის არჩევაზე.

კერძოდ, თუ ძალთა სისტემის ნაკრები მომენტის მნიშვნელობა რაიმე ცენტრის მიმართ ნულის ტოლია, მაშინ ის ნულის ტოლი იქნება ნებისმიერი სხვა ცენტრის მიმართ.

§9. წვეილძალის ცნება. წვეილძალის სკალარული და ვექტორული მომენტი



ნახ. 9.1

წყვილძალა ეწოდება ისეთი ორი ძალის ერთობლიობას, რომელთა სიდიდეები ტოლია, მდებარეობენ პარალელურ ფუძე-ებზე და მიმართული არიან ურთი-ერთსაწინააღმდეგოდ (ნახ. 9.1)

სიბრტყეს, რომელშიც ძევეს წყვილ-ძალა, წყვილძალის მოქმედების სიბრტყე ეწოდება. წყვილძალას სიმბოლოურად ასე აღნიშნავენ: (\vec{P}, \vec{Q}) – წყვილძალა.

წყვილძალის შემადგენელ ძალებს შორის უმოკლეს მანძილს h - წყვილძალის მხარი ეწოდება.

განმარტებიდან გამომდინარე ცხადია, რომ წყვილძალის შემადგენელი ძალების ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{Q} \quad (9.1)$$

რადგან წყვილძალის ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია, ამიტომ ნაკრები მომენტი დამოუკიდებელი იქნება მომენტის ცენტრის არჩევისაგან.

განმარტება: წყვილძალის სკალარული მომენტი ეწოდება მისი შემადგენელი ერთ-ერთი ძალის სკალარულ მომენტს მეორე ძალის მოდების წერტილის მიმართ

$$L = M(\vec{P}, \vec{Q}) = M(\vec{Q})_A = M(\vec{P})_B. \quad (9.2)$$

ამრიგად, წყვილძალის სკალარული მომენტი ეწოდება წყვილძალის ერთ-ერთი ძალის სიდიდისა და მისი მხრის ნამრავლს ადებულს „+“ ან „-“ ნიშნით იმის მიხედვით თუ როგორი მიმართულების ბრუნვას აქვს ადგილი.

$$L = \pm |\vec{Q}|h = \pm |\vec{P}|h \quad (9.3)$$

განმარტება: წყვილძალის ვექტორული მომენტი ეწოდება მისი შემადგენელი ერთ-ერთი ძალის ვექტორულ მომენტს მეორე ძალის მოდების წერტილის მიმართ

$$\vec{L} = \overrightarrow{\text{მომ}}(\vec{P}, \vec{Q}) = \overrightarrow{\text{მომ}}_A \vec{Q} = \overrightarrow{\text{მომ}}_B \vec{P}. \quad (9.4)$$

უნდა აღვნიშნოთ, რომ წყვილძალის ვექტორული მომენტი თავისუფალი ვექტორია, მოდებულია მისი მოქმედების სიბრტყის ნებისმიერ წერტილში ამ სიბრტყის მართობულად და სიდიდით წყვილძალის სკალარული მომენტის აბსოლუტური მნიშვნელობის ტოლია.

§10. ძალთა სისტემის დაყვანა უმარტივეს სახეზე სიბრტყეზე და სივრცეში

ვთქვათ მოცემულია ერთ სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერად განლაგებული $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ძალთა სისტემა მოდებული ერთ მყარ სხეულზე. ამ ძალების მოდების წერტილები შესაბამისად იყოს A_1, A_2, \dots, A_n .

თეორემა: ერთ სიბრტყეზე მდებარე ყოველი ძალთა სისტემა შეიძლება დაყვანილი იქნას ნებისმიერ წერტილზე მოდებულ ერთ ძალამდე და ერთ წყვილძალამდე. ძალა ტოლია ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორისა, ხოლო წყვილძალის მომენტი ტოლია ძალთა სისტემის ნაკრები სკალარული მომენტისა ამ წერტილის მიმართ.

ანალოგიური თეორემა გვაქვს სივრცითი ძალების შემთხვევაში.

თეორემა: სივრცეში მდებარე ყოველი ძალთა სისტემა შეიძლება დაყვანილი იქნას ნებისმიერ წერტილზე მოდებულ

ერთ ძალამდე და ერთ წყვილძალამდე. ძალა ტოლია ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორისა, ხოლო წყვილძალის ვექტორული მომენტი ტოლია სისტემის ნაკრები ვექტორული მომენტისა ამ წერტილის მიმართ.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{F},$$

$$\overrightarrow{M}_0 \vec{F}_1 + \overrightarrow{M}_0 \vec{F}_2 + \dots + \overrightarrow{M}_0 \vec{F}_n = \vec{L}.$$

§11. ნებისმიერი ბრტყელ ძალთა სისტემის წონასწორობა.

სტატიკის ძირითადი თეორემა

გავეცნოთ სტატიკის ძირითად თეორემას ერთ სიბრტყეზე მდებარე ძალთა სისტემის წონასწორობის შესახებ.

თეორემა: თუ თავისუფალ მყარ სხეულზე მოქმედებს ერთ სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი ძალთა სისტემა, მაშინ ამ სხეულის წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა, რომ მასზე მოდებული ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები სკალარული მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ ნულის ტოლი იყოს.

ვთქვათ მოცემული გვაქვს Oxy სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი ძალთა სისტემა $\vec{F}_1(X_1, Y_1), \vec{F}_2(X_2, Y_2), \dots, \vec{F}_n(X_n, Y_n)$. ამ ძალების მოდების წერტილები შესაბამისად იყოს $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$. მაშინ ზემოთ მოყვანილი თეორემის თანახმად აღნიშნული წონასწორობის პირობა ასე ჩაიწერება :

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = 0, \quad L = \sum_{k=1}^n L_k = 0. \quad (11.1)$$

$$(11.1) \text{ ტოლობებს შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე } X = \sum_{k=1}^n X_k = 0,$$

$$Y = \sum_{k=1}^n Y_k = 0, \quad L = \sum_{k=1}^n (x_k Y_k - y_k X_k) = 0. \quad (11.2)$$

ამ განტოლებებს სიბრტყეზე მდებარე ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებები ეწოდება. პირველ ორ განტოლებას გეგმილების განტოლება ეწოდება, ხოლო მესამეს- მომენტების განტოლება.

§12. ნებისმიერი სივრცითი ძალთა სისტემის წონასწორობა

თეორემა: თუ თავისუფალ მყარ სხეულზე მოქმედებს ნებისმიერი სივრცითი ძალთა სისტემა, მაშინ ამ სხეულის წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა, რომ მასზე მოდებული ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები ვექტორული მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ ნულის ტოლი იყოს.

ვთქვათ მოცემულია სივრცეში მყარ სხეულზე მოდებული, წონასწორობაში მყოფი ნებისმიერი ძალთა სისტემა $\vec{F}_1(X_1, Y_1, Z_1), \vec{F}_2(X_2, Y_2, Z_2), \dots, \vec{F}_n(X_n, Y_n, Z_n)$. შესაბამისად, მათი მოდების წერტილები იყოს $A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), \dots, A_n(x_n, y_n, z_n)$. მაშინ ზემოთ მოყვანილი თეორემიდან გამომდინარე, წონასწორობის პირობები ასე ჩაიწერება:

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = 0, \quad \vec{L} = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{F}_k) = 0 \quad (12.1)$$

(12.1) ვექტორული ტოლობები განსაზღვრავს მყარ სხეულზე მოდებული ნებისმიერი სივრცითი ძალთა სისტემის წონასწორობის ვექტორულ განტოლებებს.

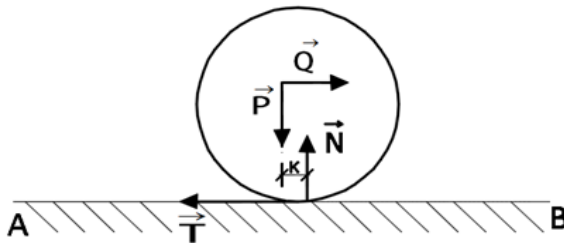
ეს ვექტორული ტოლობები სკალარულად შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$\begin{cases} X = \sum_{k=1}^n X_k = 0, \\ Y = \sum_{k=1}^n Y_k = 0, \\ Z = \sum_{k=1}^n Z_k = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} L_x = \sum_{k=1}^n (y_k Z_k - z_k Y_k) = 0, \\ L_y = \sum_{k=1}^n (z_k X_k - x_k Z_k) = 0, \\ L_z = \sum_{k=1}^n (x_k Y_k - y_k X_k) = 0. \end{cases} \quad (12.2)$$

(12.2) განტოლებები წარმოადგენს მყარ სხეულზე მოდებული ნებისმიერი სივრცითი ძალათა სისტემის წონასწორობის განტოლებებს დეკარტის კოორდინატებში.

§13. გორვის ხახუნი

ვთქვათ AB ჰორიზონტალურ მქისე ზედაპირზე მდებარეობს წრიული ცილინდრი, რომლის წონაა P , ხოლო რადიუსი - R (ნახ.13.1)



ნახ. 13.1

ამ ცილინდრის O წერტილზე, რომელიც ამ სხეულის ვერტიკალურ კვეთაში მიღებული წრეწირის ცენტრს წარმოადგენს, AB სიბრტყის პარალელურად მოვდოთ \vec{Q} ძალა ისე, რომ

ცილინდრი დარჩეს წონასწორობაში. \vec{Q} ძალის მოქმედება იწვევს ცილინდრისა და სიბრტყის შეხების არეში \vec{T} ხახუნის ძალის წარმოშობას, რომელიც სიდიდით \vec{Q} ძალის სიდიდის ტოლია და მიმართულებით მისი საწინააღმდეგოა. ისინი ქმნიან წყვილძალას, რომელიც შეიძლება გაწონასწორდეს მხოლოდ წყვილძალით, რომლის ერთ-ერთი ძალა იქნება \vec{P} ძალა, ხოლო მეორე უნდა იყოს ისეთი \vec{N} ძალა, რომელიც სიდიდით \vec{P} ძალის სიდიდის ტოლია და მოდებულია სიბრტყის მართობულად ცილინდრისა და სიბრტყის შეხების არეში ისე, რომ მისი ფუძე არ ემთხვეოდეს \vec{P} ძალის ფუძეს. ასეთი \vec{N} ძალის წარმოშობა შეიძლება აიხსნას დეფორმაციით ცილინდრისა და ზედაპირის შეხების არეში. ამდენად, \vec{N} ძალის ფუძე დაშორებული იქნება \vec{P} ძალის ფუძისაგან გარკვეულ მანძილზე. ეს დაშორება აღვნიშნოთ K –თი.

თუ შევადგენთ წონასწორობის განტოლებებს ცილინდრზე მოდებული ძალებისათვის, მივიღებთ:

$$T = Q, \quad N = P, \quad \text{მ(ო)მ}_0 \vec{N} - T \cdot R = 0. \quad (13.1)$$

ამ განტოლებებში \vec{N} ძალის მომენტი O წერტილის მიმართ ახასიათებს გორვის ხახუნს. თუ \vec{Q} ძალის სიდიდეს თანდათანობით გავზრდით, ცილინდრი დარჩება წონასწორობაში მანამდე, ვიდრე $|\vec{Q}|$ არ მიაღწევს ზღვრულ მნიშვნელობას; $|\vec{Q}|$ –ს მატება გამოიწვევს $|\vec{T}|$ –ს მატებას, ამიტომ გადიდდება $\text{მ(ო)მ}_0 \vec{N}$.

ცდების შედეგად მტკიცდება, რომ \vec{N} ძალის მომენტის მაქსიმალური მნიშვნელობა, რომლის დროსაც ირღვევა ცილინდრის წონასწორობა, პროპორციულია ცილინდრის სიბრტყეზე წნევისა:

$$L_0 = f^* N \quad (13.2)$$

სადაც L_0 -ით აღნიშნულია \vec{N} ძალის O წერტილის მიმართ მომენტის მაქსიმალური მნიშვნელობა. f^* -ს გორვის ხახუნის კოეფიციენტი ეწოდება, მას სიგრძის განზომილება აქვს და სიდიდით K -მონაკვეთის მაქსიმალური მნიშვნელობის ტოლია.

K მონაკვეთის სიგრძე იმდენად მცირეა, რამდენადაც ცილინდრისა და სიბრტყის დეფორმაცია, ამიტომ გორვის ხახუნის კოეფიციენტი იმდენად უფრო მცირეა, რამდენადაც მყარია სხეულის შემადგენელი მასალები.

§14. ძალთა სისტემის ინვარიანტები. ძალთა სისტემის უმარტივეს სახეზე დაყვანის კერძო შემთხვევები

ვთქვათ მყარ სხეულზე მოდებული ნებისმიერი სივრცითი ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორია $\vec{F}(X, Y, Z)$, ხოლო რაიმე ცენტრის მიმართ მისი ნაკრები ვექტორული მომენტია $\vec{L}(L_x, L_y, L_z)$. როგორც ცნობილია, ძალთა ნებისმიერი სისტემა სავსებით განსაზღვრულია, თუ ვიცით მისი ნაკრები ვექტორი და ნაკრები ვექტორული მომენტი. ეს უკანასკნელები კი განისაზღვრებიან მათი გეგმილებით. ამიტომ X, Y, Z, L_x, L_y, L_z სიდიდეებს უწოდებენ ნებისმიერი ძალთა სისტემის კოორდინატებს. ცხადია, რომ ამ კოორდინატების მნიშვნელობები დამოკიდებულია კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე.

სიდიდეებს, რომელთა მნიშვნელობები არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე (სხვანაირად, დაყვანის ცენტრის არჩევაზე), ინვარიანტებს უწოდებენ.

I. ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორის კვადრატი არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე, ამიტომ მას ძალთა სისტემის პირველ ინვარიანტს უწოდებენ

$$I_1 = X^2 + Y^2 + Z^2 \quad (14.1)$$

II. როგორც ცნობილია, ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე, ამიტომ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორისა და ნაკრები ვექტორული მომენტის სკალარულ ნამრავლს, ამ ძალთა სისტემის მეორე ინვარიანტს უწოდებენ

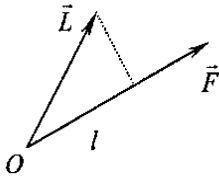
$$I_2 = (\vec{F} \cdot \vec{L}) = XL_x + YL_y + ZL_z \quad (14.2)$$

III. მტკიცდება, რომ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორული მომენტის გეგმილი ნაკრებ ვექტორზე ასევე ინვარიანტია. აღვნიშნოთ მისი მნიშვნელობა l -ით (ნახ. 14.1). გვექნება

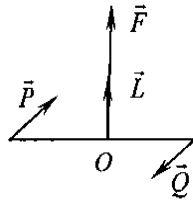
$$l = \text{პეპ}_{\vec{F}} \vec{L} = \frac{(\vec{F} \cdot \vec{L})}{|\vec{F}|} = \frac{I_2}{\sqrt{I_1}} \quad (14.3)$$

იმის გამო, რომ l წარმოადგენს \vec{L} ვექტორის გეგმილს \vec{F} ვექტორზე, ცხადია მას უნდა ქონდეს მინიმალური მნიშვნელობა. ამ უმცირეს მნიშვნელობას $|\vec{L}|$ სიდიდე მიაღწევს მაშინ, როცა \vec{L} პარალელურია \vec{F} -ის.

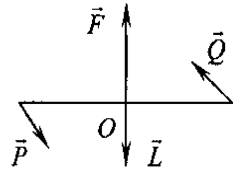
ერთი ძალისა და წყვილძალისაგან შედგენილ სისტემას, რომელშიც ძალა და წყვილძალის ვექტორული მომენტი კოლინეარული ვექტორებია, ძალთხრახნი ეწოდება.



ნახ. 14.1



ნახ. 14.2



ნახ. 14.3

14.2 ნახაზზე ნაჩვენებია მარცხენა ძალთხრახნი, ხოლო 14.3 ნახაზზე – მარჯვენა ძალთხრახნი.

მოვიყვანოთ ის კერძო შემთხვევები, როდესაც ძალთა სისტემა დაიყვანება უმარტივეს სახეზე.

1) თუ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი განსხვავებულია ნულისაგან, ხოლო ნაკრები ვექტორული მომენტი ნულის ტოლია, მაშინ ძალთა სისტემა დაიყვანება ტოლქმედ ძალაზე ($\vec{F} \neq 0, \vec{L} = 0$)

2) თუ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია, ხოლო ნაკრები ვექტორული მომენტი ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ ძალთა სისტემა დაიყვანება წყვილძალაზე ($\vec{F} = 0, \vec{L} \neq 0$)

3) თუ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები ვექტორული მომენტი განსხვავებულია ნულისაგან, მაგრამ ნულის ტოლია ამ ძალთა სისტემის მეორე ინვარიანტი, მაშინ ძალთა სისტემა დაიყვანება ტოლქმედ ძალაზე ($\vec{F} \neq 0, \vec{L} \neq 0, I_2 = 0$)

4) თუ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი, ნაკრები ვექტორული მომენტი და ამ ძალთა სისტემის მეორე ინვარიანტი

ნულისაგან განსხვავებული სიდიდეებია, მაშინ ძალთა სისტემა დაიყვანება ძალთხრახნზე (დინამაზე) ($\vec{F} \neq 0, \vec{L} \neq 0, I_2 \neq 0$).

დავწეროთ ძალთხრახნის ცენტრალური ღერძის განტოლება

$$\frac{L_x - yZ + zY}{X} = \frac{L_y - zX + xZ}{Y} = \frac{L_z - xZ + zX}{Z} \quad (14.4)$$

5) თუ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები ვექტორული მომენტი ორივე ნულის ტოლია, მაშინ ძალთა სისტემა იმყოფება წონასწორობაში.

§15. ორი პარალელური ძალის შეკრება

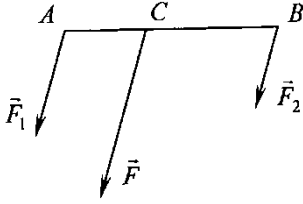
განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც მყარ სხეულზე მოქმედებს ორი პარალელური ძალა. გავცნოთ მათი შეკრების წესს.

I. ძალებს აქვთ ერთნაირი მიმართულება (ნახ. 15.1).

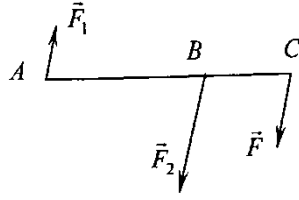
ვიგულისხმობთ, რომ მოცემული გვაქვს ორი ერთნაირი მიმართულების მქონე პარალელური \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალა. ცხადია, რომ მათი ნაკრები \vec{F} ვექტორი, რომელიც მოცემული ძალების გეომეტრიული ჯამია

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (15.1)$$

სიდიდით მოცემული ძალების სიდიდეების ტოლია და აქვს მათი მიმართულება. ამგვარად, ნაკრები ვექტორი ნულისაგან განსხვავებულია. ეს იმას ნიშნავს, რომ მოცემული ძალთა სისტემის ტოლქმედი არსებობს.



ნახ. 15.1



ნახ. 15.2

სამართლიანია შემდეგი თეორემა

თეორემა: ორი ერთმხრივ მიმართული პარალელური ძალის ტოლქმედი სიდიდით მოცემული ძალების სიდიდეების ჯამის ტოლია, მიმართულია იმავე მხრივ და მდებარეობს ფუძეზე, რომელიც ამ ძალების მოდების წერტილების შემაერთებელი წრფის მონაკვეთს შიგნიდან ყოფს შემდგენი ძალების სიდიდეების უკუპროპორციულ ნაწილებად

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_1| + |\vec{F}_2|, \quad \frac{AC}{BC} = \frac{|\vec{F}_2|}{|\vec{F}_1|} \quad (15.2)$$

II. ძალებს აქვთ სხვადასხვა მიმართულება (ნახ. 15.2).

ვიგულისხმობთ, რომ მოცემული გვაქვს ორი სხვადასხვა მიმართულების მქონე პარალელური \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალა, რომელთა სიდიდეები ტოლი არ არის. მაშინ მათი ნაკრები ვექტორის სიდიდე ძალების სიდიდეების სხვაობის ტოლია და ექნება უდიდესი ძალის მიმართულება.

სამართლიანია შემდეგი თეორემა

თეორემა: ორი საპირისპიროდ მიმართული პარალელური ძალის ტოლქმედი სიდიდით მოცემული ძალების სიდიდეების სხვაობის ტოლია, აქვს უდიდესი ძალის მიმართულება და

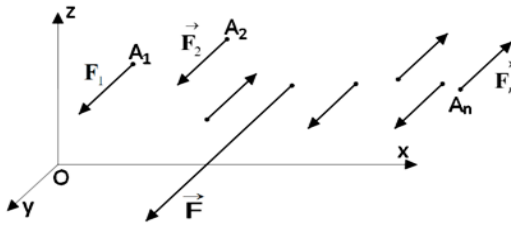
მდებარეობს ფუძეზე, რომელიც ამ ძალების მოდების წერტილების შემაერთებელი წრფის მონაკვეთს გარედან ყოფს შემდეგნი ძალების სიდიდეების უკუპროპორციულ ნაწილებად

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_2| - |\vec{F}_1|, \quad \frac{AC}{BC} = \frac{|\vec{F}_2|}{|\vec{F}_1|} \quad (15.3)$$

თუ შესაკრები ძალების რიცხვი ორზე მეტია, მაშინ ამ ძალების შესაკრებად შეგვიძლია შეკრების წესი მიმდევრობით გამოვიყენოთ.

§16. პარალელური ძალების ცენტრი

ვთქვათ, მყარ სხეულზე მოქმედებს პარალელური $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ძალთა სისტემა, რომლის ნაკრები ვექტორი განსხვავებულია ნულისაგან. მაშინ ამ ძალთა სისტემას გააჩნია ტოლქმედი. მის



ნახ. 16.1

მოსაძებნად წყვილ-წყვილად შევკრიბოთ სისტემაში შემავალი ძალები ძალთა შეკრების წესის დაც-

ვით, საიდანაც გაირკვევა ტოლქმედის მიმართულება. ტოლქმედის მოდების წერტილის მდებარეობა დამოკიდებულია ძალების სიდიდეებზე და მათ შორის მანძილებზე, ამიტომ თუ ყველა ძალას მოვაბრუნებთ მათი მოდების წერტილების გარშემო ერთი და იმავე კუთხით, ისე რომ ძალები პარალელურნი დარჩნენ მაშინ ტოლქმედის მოდების C წერტილი არ შეიცვლის

თავის ადგილს. ამ წერტილს პარალელურ ძალთა ცენტრი ეწოდება (ნახ.16.1).

პარალელურ ძალთა ცენტრი ეწოდება ისეთ წერტილს, რომელზეც გადის ტოლქმედის ფუძე, მისი მდებარეობა დამოკიდებულია ძალების სიდიდეებზე, მათი მოდების წერტილებზე და არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ როგორ ვაბრუნებთ ძალებს მათი მოდების წერტილების გარშემო.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ პარალელური ძალების ცენტრის კოორდინატები, საჭიროა შევარჩიოთ $Oxyz$ სისტემა ისე, რომ ძალები პარალელური იყოს Oy ღერძის. მაშინ ამ ძალების გეგმილები იქნება

$$\vec{F}_1(0, F_1, 0), \vec{F}_2(0, F_2, 0), \dots, \vec{F}_n(0, F_n, 0), \quad (16.1)$$

სადაც $F_k = \pm |\vec{F}_k|$. დადებითია, თუ \vec{F}_k ძალის მიმართულება ემთხვევა Oy ღერძის მიმართულებას, წინააღმდეგ შემთხვევაში უარყოფითია. თუ ტოლქმედის სიდიდეს აღვნიშნავთ F -ით, მაშინ გვექნება

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_n \quad (16.2)$$

თუ ძალების მოდების წერტილებია $A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), A_3(x_3, y_3, z_3), \dots, A_n(x_n, y_n, z_n)$, ხოლო ტოლქმედის მოდების C წერტილის კოორდინატებია (x_c, y_c, z_c) და გამოვითვლით F ტოლქმედის მომენტს Oz ღერძის მიმართ, გვექნება

$$F \cdot x_c = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n = \sum_{k=1}^n F_k x_k \quad (16.3)$$

საიდანაც

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k x_k}{F} \quad (16.4)$$

ანალოგიურად მოიძებნება y_c და z_c კოორდინატები, თუ x და z ღერძებს შემოვებრუნებთ 90° -ით. ამრიგად მივიღებთ

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k x_k}{F}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k y_k}{F}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k z_k}{F} \quad (16.5)$$

(16.5) ტოლობა შეგვიძლია ჩავწეროთ ერთი ვექტორული სახით

$$x_c \vec{i} + y_c \vec{j} + z_c \vec{k} = \frac{\sum_{k=1}^n F_k (x_k \vec{i} + y_k \vec{j} + z_k \vec{k})}{F} \quad (16.6)$$

თუ C წერტილის რადიუს-ვექტორს აღვნიშნავთ \vec{r}_c - თი, ხოლო A_k - წერტილებისას \vec{r}_k - თი ($k=1, \dots, n$), მაშინ (16.6) ფორმულა ასე გადაიწერება

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k \vec{r}_k}{F} \quad (16.7)$$

სადაც $\vec{r}_c = x_c \vec{i} + y_c \vec{j} + z_c \vec{k}$, ხოლო $\vec{r}_k = x_k \vec{i} + y_k \vec{j} + z_k \vec{k}$.

უკანასკნელი ფორმულა განსაზღვრავს პარალელური ძალების ცენტრის რადიუს-ვექტორს.

§17. პარალელური ძალების წონასწორობა

როგორც ჩვენთვის ცნობილია სივრცეში მყარ სხეულზე მოდებული ნებისმიერი ძალთა სისტემის წონასწორობის პირობა (12.2) გამოსახულებებით მოიცემა. დავუშვათ რომ მყარ სხეულზე მოქმედებს პარალელურ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ძალთა სისტემა. ავარჩიოთ კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ Ox ღერძი იყოს მოცემული ძალების პარალელური. მაშინ ამ ღერძზე ძალების გეგმილები იქნება

$$\vec{F}_1(F_1, 0, 0), \vec{F}_2(F_2, 0, 0), \dots, \vec{F}_n(F_n, 0, 0).$$

თუ მათი მოდების წერტილებია $A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), \dots, A_n(x_n, y_n, z_n)$, მაშინ წონასწორობის განტოლებებს ექნებათ შემდეგი სახე

$$\begin{cases} F_1 + F_2 + \dots + F_n = 0, \\ z_1 F_1 + z_2 F_2 + \dots + z_n F_n = 0, \\ y_1 F_1 + y_2 F_2 + \dots + y_n F_n = 0. \end{cases} \quad (17.1)$$

ამრიგად მივიღეთ სამი განტოლება რადგან მოცემული ძალების გეგმილები Oy და Oz ღერძებზე და მომენტები Ox ღერძის მიმართ ნულის ტოლია.

§18. სიმძიმის ცენტრი

განვიხილოთ $M_k(x_k, y_k, z_k)$, $k = \overline{1, n}$ ნივთიერ წერტილთა სისტემა. როგორც ცნობილია ყოველი ნივთიერი წერტილი მიიზიდება დედამიწის მიერ ძალით, რომელსაც სიმძიმის ძალა ეწოდება. იგი მიმართულია დედამიწის ცენტრისკენ და მის სიდიდეს ნივთიერი წერტილის წონა ეწოდება. ყოველ M_k , $k = \overline{1, n}$ წერტილზე მოქმედი სიმძიმის ძალა შესაბამისად აღვნიშნოთ \vec{P}_k – თი. რადგან მანძილები ნივთიერ წერტილთა შორის მცირეა, ვიდრე მანძილები ამ წერტილებიდან დედამიწის ცენტრამდე, ამიტომ ამ წერტილთა სიმძიმის ძალები შეიძლება ჩავთვალოთ მუდმივ და პარალელურ ძალებად. შევკრიბოთ ეს ძალები შეკრების კანონის მიხედვით, მივიღებთ ერთ \vec{P} ძალას, რომელსაც ნივთიერ წერტილთა სისტემის სიმძიმის ძალა ეწოდება. იგი წარმოადგენს მოცემული ძალების ტოლქმედს და მოდებულია პარალელური ძალების ცენტრში. ამ წერტილს ნივთიერ წერტილთა სისტემის სიმძიმის ცენტრი ეწოდება.

რადგან სიმძიმის ცენტრი ამავე დროს წარმოადგენს მოცემული პარალელური ძალების ცენტრს, ამიტომ (16.5) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n P_k x_k}{P}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n P_k y_k}{P}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n P_k z_k}{P} \quad (18.1)$$

სადაც $P = \sum_{k=1}^n P_k$. (18.1) ფორმულებში მრიცხველში მყოფ

გამოსახულებებს მოცემული ნივთიერ წერტილთა სისტემის სტატიკური მომენტები ეწოდება შესაბამისად Oyz , Oxz და Oxy სიბრტყეების მიმართ.

ნივთიერ წერტილთა სისტემის სტატიკური მომენტი რაიმე სიბრტყის მიმართ სიმძიმის ცენტრის სტატიკური მომენტის ტოლია.

პარალელური ძალების ცენტრის განმარტებიდან შეგვიძლია შემდეგი თვისებები გამოვიყენოთ:

1) თუ წერტილთა სისტემა მოთავსებულია წრფეზე ან სიბრტყეზე, მაშინ სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს შესაბამისად ამ წრფეზე ან სიბრტყეზე.

2) თუ წერტილთა სისტემა მოთავსებულია რომელიმე შერეული ამოზნექილი ფართეულის შიგნით, მაშინ მისი სიმძიმის ცენტრიც ამ ფართეულის შიგნითაა მოთავსებული.

3) თუ წერტილთა სისტემა მოთავსებულია რომელიმე შერეული ამოზნექილი ბრტყელი წირის შიგნით, მაშინ მისი სიმძიმის ცენტრიც მოთავსებულია ამ წირის შიგნით.

4) თუ მოცემულ სისტემას გავყოფთ რამდენიმე ნაწილად და წარმოვიდგენთ, რომ თითო ნაწილის მაგივრად აღებულია ნივთიერი წერტილი, რომლის წონა უდრის შესაბამისი ნაწილის

წონას და თანხვდება აღებული ნაწილის სიმძიმის ცენტრს, მაშინ ამ სისტემას იგივე სიმძიმის ცენტრი ექნება რაც მოცემულს.

5) თუ სისტემა სიმეტრიულია რომელიმე სიბრტყის (ან წრფის, ან წერტილის) მიმართ, მაშინ სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს ამ სიბრტყეზე (ან წრფეზე, ან წერტილზე).

კინემატიკის საგანი

კინემატიკა წარმოადგენს თეორიული მექანიკის იმ ნაწილს, რომელშიც შეისწავლება ნივთიერი სხეულების მექანიკური მოძრაობის გეომეტრიული თვისებები მათი მასებისა და მათზე მოქმედი ძალების გათვალისწინების გარეშე. ანუ კინემატიკა შეისწავლის ნივთიერი სხეულების მექანიკურ მოძრაობას გეომეტრიული თვალსაზრისით იმ ფაქტორებისაგან დამოუკიდებლად, რომლებიც განაპირობებენ მოძრაობის ამა თუ იმ ხასიათს. კინემატიკა, როგორც მექანიკის დამოუკიდებელი ნაწილი, ჩამოყალიბდა შედარებით უფრო გვიან.

კინემატიკა მთლიანად ეყრდნობა გეომეტრიაში არსებულ აქსიომებსა და დაშვებებს, მაგრამ განსხვავდება მისგან იმით, რომ გარდა სივრცისა, რომელსაც გაივლის მოძრავი ნივთიერი სხეული, კიდევ განიხილავს დროს, რომლის განმავლობაშიც ხდება მოძრაობა.

ნივთიერი სხეულების მექანიკური მოძრაობა ხდება სივრცესა და დროში, ამიტომ ეს ორი ცნება კინემატიკის ძირითადი ცნებებია. თეორიულ მექანიკაში სივრცის ქვეშ განიხილავენ ევკლიდეს სამგანზომილებიან სივრცეს, ხოლო დრო წარმოადგენს უწყვეტად ცვალებად სკალარულ სიდიდეს, რომელიც არ არის დამოკიდებული სხეულების მოძრაობაზე და ერთნაირია სივრცის ყოველ წერტილში.

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ მოცემული სხეულის მდებარეობა რომელიმე სხვა სხეულის მიმართ, ამ უკანასკნელთან აკავშირებენ კოორდინატთა რაიმი სისტემას, რომელსაც **ათვლის სისტემას** უწოდებენ. სხეული მოძრაობს არჩეული ათვლის სისტემის მიმართ, თუ დროის განმავლობაში ხდება მისი ერთი მაინც წერტილის კოორდინატების ცვლილება, წინააღმდეგ შემთხვევაში სხეული მოცემული ათვლის სისტემის მიმართ იქნება უძრავი (წონასწორობაში). ერთი და იგივე სხეულის მოძრაობა ათვლის სხვადასხვა სისტემის მიმართ შეიძლება იყოს სრულიად განსხვავებული, ამიტომ „მოძრაობის“ და „უძრავობის“ ცნებები ფარდობითი ცნებებია და მათ აქვთ აზრი მხოლოდ იმ ათვლის სისტემის მითითებისას, რომლის მიმართაც ისინი განიხილება.

სხეულის მოძრაობა ითვლება ცნობილად, როდესაც გვეძლევა შესაძლებლობა განვსაზღვროთ მისი მდებარეობა არჩეული ათვლის სისტემის მიმართ დროის ყოველ მომენტში. ამა თუ იმ ობიექტის მოძრაობის შესწავლისას ყოველთვის ვირჩევთ დროის საწყის მომენტს, საიდანაც იწყება მოძრაობის შესწავლა. დროის ნებისმიერ ორ მომდევნო მომენტს შორის სხვაობას ეწოდება **დროის შუალედი**.

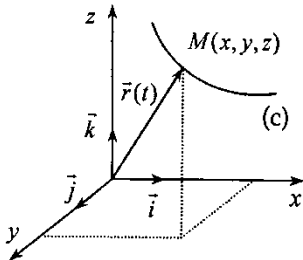
კინემატიკის ამოცანების ამოსახსნელად აუცილებელია, რომ მოძრაობა როგორღაც იყოს მოცემული. კინემატიკურად სხეულის მოძრაობის მოცემა ნიშნავს მოცემული იყოს ამ სხეულის მდებარეობა ათვლის სისტემის მიმართ დროის ნებისმიერ მომენტში.

ამგვარად, კინემატიკის ძირითადი ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: ვიცით რა მოცემული სხეულის მოძრაობის კანონი,

უნდა განვსაზღვროთ სხეულის (მთლიანად) ან მისი შემადგენელი ყოველი წერტილის (ცალ-ცალკე) მოძრაობის ყველა კინემატიკური მახასიათებელი.

§19. წერტილის მოძრაობის განტოლებები

წერტილის მოძრაობა ითვლება ცნობილად, თუ მითითებულია დამოკიდებულება, რომელიც საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ მისი მდებარეობა არჩეული ათვლის სისტემის მიმართ დროის ნებისმიერ მომენტში.



ნახ. 19.1

ვთქვათ $M(x, y, z)$ წერტილი ასრულებს მოძრაობას უძრავი $Oxyz$ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის მიმართ (ნახ. 19.1). ამ სისტემის მიმართ მისი მდებარეობა დროის ყოველ მომენტში განისაზღვრება სამი x, y, z კოორდინატის საშუალებით, რომლებიც წერტილის მოძრაობისას იცვლება დროის განმავლობაში.

შესაბამისად x, y, z კოორდინატები წარმოადგენენ დროის რაიმე ფუნქციებს.

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t) \quad (19.1)$$

ამ განტოლებებით სავსებით განისაზღვრება წერტილის მოძრაობა, ამიტომ (19.1) განტოლებათა სისტემას ეწოდება წერტილის მოძრაობის განტოლებათა სისტემა დეკარტეს კოორდინატებში. იგულისხმება, რომ $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ ფუნქციები უწყვეტი, ცალსახა და უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია.

შევნიშნოთ, რომ კინემატიკის ერთ-ერთი ძირითადი ამოცანაა წერტილის მოძრაობის ტრაექტორის განსაზღვრა მისი მოცემული მოძრაობის განტოლებების მიხედვით. ამ ამოცანის ამოსახსნელად საკმარისია (19.1) სისტემიდან გამოვრიცხოთ დრო (t - პარამეტრი), რაც მოგვცემს შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = 0, \\ \Phi_2(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (19.2)$$

რომელშიც შემავალი თითოეული განტოლება სივრცეში განსაზღვრავს რაიმე ზედაპირს, ხოლო თვითონ (19.2) სისტემა ამ ორი ზედაპირის გადაკვეთის წირია, რაც წარმოადგენს მოძრავი წერტილის ტრაექტორიას.

მოძრავი $M(x, y, z)$ წერტილის მდებარეობა ტრაექტორიაზე დროის ყოველ მომენტში განისაზღვრება კოორდინატთა სათავეს მიმართ ამ წერტილის $\vec{r}(t)$ რადიუს-ვექტორით, რომელიც მოძრაობის პროცესში იცვლის როგორც სიგრძეს, ისე მიმართულებასაც და მისი ბოლო განსაზღვრავს წერტილის მდებარეობას (ნახ. 19.2). ამგვარად, თუ ცნობილია მოძრავი წერტილის რადიუს-ვექტორი როგორც დროის ვექტორ-ფუნქცია, მაშინ ცნობილია მისი მოძრაობის კანონი. განტოლებას

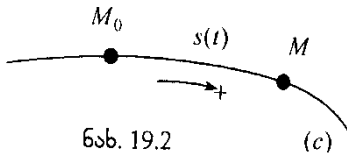
$$\vec{r} = \overrightarrow{f(t)} \quad (19.3)$$

ეწოდება წერტილის მოძრაობის ვექტორული განტოლება. იგი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad (19.4)$$

სადაც \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} საკოორდინატო ღერძების მიმმართველი ერთეულოვანი ვექტორებია (ორტებია), ხოლო $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ —

$M(x, y, z)$ წერტილის კოორდინატებია და განისაზღვრებიან (19.1) სისტემიდან.



ნახ. 19.2

ვთქვათ, წინასწარ ცნობილია $M(x, y, z)$ წერტილის მოძრაობის (c) ტრაექტორია, მასზე განსაზღვრულია მისი

საწყისი მდებარეობა და მოძრაობის დადებითი მიმართულება. მაშინ ამ წერტილის მდებარეობას ტრაექტორიაზე განსაზღვრავს $M_0M = s(t)$ რკალის სიგრძე (ნახ. 19.2). მოძრაობის პროცესში ამ რკალის სიგრძე იცვლება დროის განმავლობაში, ამიტომ იგი წარმოადგენს დროის ფუნქციას. განტოლებას

$$s = s(t) \quad (19.5)$$

ეწოდება წერტილის მოძრაობის ბუნებრივი განტოლება.

ცხადია, რომ წერტილის მოძრაობის ბუნებრივი განტოლებით სარგებლობა მოსახერხებელია იმ შემთხვევაში, როდესაც წერტილის ტრაექტორია წინასწარ ცნობილია.

§20. წერტილის სიჩქარე

წერტილის სიჩქარე - ეს არის ვექტორული სიდიდე, რომელიც ახასიათებს სივრცეში ამ წერტილის მოძრაობის სისწრაფესა და მიმართულებას.

ვთქვათ, წერტილის მოძრაობის კანონი მოიცემა (19.4) ტოლობით, ანუ ვექტორული ფორმით.

წერტილის ვექტორული სიჩქარე ეწოდება რადიუს - ვექტორის პირველი რიგის წარმოებულს დროთი

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (20.1)$$

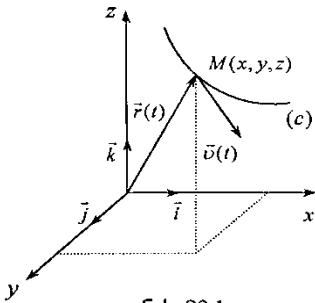
ზოგადი თეორიიდან გამომდინარე შეიძლება დავასკვნათ, რომ წერტილის სიჩქარის ვექტორი მიმართულია ტრაექტორიის მოცემულ წერტილებში ტრაექტორიისადმი გავლებული მხების გასწვრივ, მოძრაობის მიმართულებით.

წერტილის ვექტორული სიჩქარის გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე გამოითვლება ფორმულებით:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt},$$

$$v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (20.2)$$

სიჩქარის სიდიდე განისაზღვრება ტოლობით



ნახ. 20.1

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}, \quad (20.3)$$

ხოლო მიმართულება განისაზღვრება ფორმულებით

$$\cos(\vec{v}; \vec{i}) = \frac{v_x}{|\vec{v}|}, \quad \cos(\vec{v}; \vec{j}) = \frac{v_y}{|\vec{v}|}, \quad \cos(\vec{v}; \vec{k}) = \frac{v_z}{|\vec{v}|}. \quad (20.4)$$

თუ სიჩქარის სიდიდე არ იცვლება მოძრაობის პროცესში, მაშინ ასეთ მოძრაობას **თანაზარი მოძრაობა** ეწოდება.

წერტილის ვექტორული სიჩქარე შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau}, \quad (20.5)$$

სადაც s მრუდწირული კოორდინატია (ტრანექტორიის რკალის ელემენტია), $\vec{\tau}$ – ერთეულოვანი ვექტორია, რომელიც მიმართულია ტრანექტორიის მხების გასწვრივ s მრუდწირული კოორდინატის ზრდის მიმართულებით. იგი დამოკიდებული არ არის მოძრაობის მიმართულებაზე და განსაზღვრავს ტრანექტორიის მოცემულ წერტილში გავლებული მხების მიმართველ ვექტორს (ორტს). სიდიდე

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (20.6)$$

წარმოადგენს წერტილის სკალარულ სიჩქარეს, ე.ი. წერტილის სკალარული სიჩქარე ეწოდება მოძრავი წერტილის მრუდწირული კოორდინატის პირველი რიგის წარმოებულს დროთი. ეს სიდიდე წერტილის ვექტორული სიჩქარის გეგმილია ამ წერტილში ტრანექტორიისადმი გავლებულ მხებზე. რადგან წერტილის სიჩქარის ვექტორი მიმართულია მხების გასწვრივ, ამიტომ

$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}. \quad (20.7)$$

სავსებით ცხადია, რომ (20.7) ტოლობაში v და $\vec{\tau}$ დროის ფუნქციებია, რადგან სიჩქარის \vec{v} – ვექტორი მრუდწირული მოძრაობისას დროის განმავლობაში იცვლის როგორც მიმართულებას, ისე სიდიდეს.

SI სისტემაში სიჩქარის განზომილებაა: $[v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{\text{მ}}{\text{წმ}}$.

§21. წერტილის აჩქარება. აჩქარების დაშლა მხებ და ნორმალურ მდგენელებად

წერტილის არათანაბარი მრუდწირული მოძრაობისას იცვლება მისი სიჩქარის როგორც სიდიდე, ისე მიმართულებაც. წერტილის აჩქარება ახასიათებს მისი სიჩქარის სიდიდისა და მიმართულების ცვლილების სისწრაფეს.

ვთქვათ, წერტილის მოძრაობა მოიცემა ვექტორული სახით – (19.4) და მისი ვექტორული სიჩქარეა $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$.

წერტილის ვექტორული აჩქარება ეწოდება ამ წერტილის ვექტორული სიჩქარის პირველი რიგის წარმოებულს დროთი, ან მისი რადიუს–ვექტორის მეორე რიგის წარმოებულს დროთი

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (21.1)$$

თუ w_x, w_y, w_z – წერტილის ვექტორული აჩქარების გეგმილება საკოორდინატო ღერძებზე, მაშინ ისინი განისაზღვრებიან შემდეგი ფორმულებით

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad w_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad w_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (21.2)$$

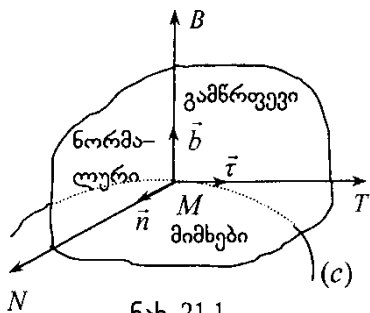
აჩქარების სიდიდე გამოითვლება ფორმულით

$$\begin{aligned} |\vec{w}| &= \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}, \quad (21.3) \end{aligned}$$

ხოლო მიმართულება ტოლობებით:

$$\cos(\hat{\vec{w}}; \hat{\vec{i}}) = \frac{w_x}{|\vec{w}|}, \quad \cos(\hat{\vec{w}}; \hat{\vec{j}}) = \frac{w_y}{|\vec{w}|}, \quad \cos(\hat{\vec{w}}; \hat{\vec{k}}) = \frac{w_z}{|\vec{w}|}. \quad (21.4)$$

უნდა აღვნიშნოთ, რომ \vec{w} ვექტორი ტრაექტორიის მოცემულ წერტილში გამავალ მიმხებ სიბრტყეში ძევს და მიმართულია ტრაექტორიის ჩაზნექილობისაკენ.



ნახ. 21.1

ტრაექტორიის მოცემულ წერტილში მიმხებ სიბრტყესთან ერთად შეიძლება გავავლოთ ნორმალური და გამწრფველი სიბრტყეები. ეს სიბრტყეები ერთმანეთის მართობული სიბრტყეებია. მათი გადაკვეთის წრფეებია მხები, მთავარი ნორ-

მალი და ბინორმალი. ცხადია, ისინიც ურთიერთმართობული წრფეებია. თუ მათზე ავარჩევთ დადებით მიმართულებებს, მივიღებთ ურთიერთმართობულ ღერძებს. ეს ურთიერთმართობული სამღერძი ქმნის მართკუთხა კოორდინატა სისტემას, რომელსაც ნატურალური ანუ ბუნებრივი კოორდინატა სისტემა ეწოდება.

წერტილის მოძრაობის ბუნებრივი ხერხით მოცემისას მისი აჩქარება შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\vec{w} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}, \quad (21.5)$$

სადაც v წერტილის სკალარული სიჩქარეა, ρ - სიძრუდის რადიუსია ტრაექტორიის მოცემულ წერტილში, ხოლო $\vec{\tau}$ და \vec{n} შესაბამისად მხების და მთავარი ნორმალის მგეზავი ვექტორებია, რომლებიც ბინორმალის მგეზავ ვექტორთან დაკავშირებული არიან ტოლობით: $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$.

(21.5) ტოლობაში პირველი შესაკრები წარმოადგენს ვექტორს, რომელიც მიმართულია მხების გასწვრივ და მას აჩქარების მხები მდგენელი ეწოდება. მეორე შესაკრები წარმოადგენს ვექტორს, რომელიც მიმართულია ნორმალის გასწვრივ და მას აჩქარების ნორმალური მდგენელი ეწოდება. ყოველივე აქედან

გამომდინარე, წერტილის სრული აჩქარებისათვის გვექნება გამოსახულება

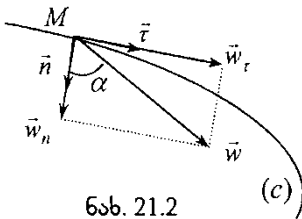
$$\vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n} \quad (21.6)$$

და მისი გეგმილები ბუნებრივი კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე ტოლია

$$w_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad w_b = 0,$$

ეს კი ნიშნავს, რომ აჩქარების ვექტორი მდებარეობს მიმხებ სიბრტყეში და მიმართულია სიმრუდის ცენტრისკენ. მისი სიდიდე და მიმართულება გამოითვლება ფორმულებით:

$$|\vec{w}| = \sqrt{|\vec{w}_\tau|^2 + |\vec{w}_n|^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{|\vec{w}_\tau|}{|\vec{w}_n|}. \quad (21.7)$$



ნახ. 21.2

აქ α არის კუთხე \vec{w}_τ და \vec{w}_n ვექტორებს შორის (ნახ. 21.2).

თუ წერტილის მოძრაობისას სკალარული სიჩქარე მუდმივია, ან ტრაექტორიის რომელიმე წერტილში აღწევს თავის მინიმალურ ან მაქსიმალურ მნიშვნელობებს, მაშინ მისი მხები აჩქარება ნულის ტოლია.

ნორმალური აჩქარება ნულის ტოლია, თუ მოძრაობა წრფივია, ან ტრაექტორიის წირის გადაღუნვის წერტილებში ($\rho = \infty$), ან იმ წერტილებში, სადაც სკალარული სიჩქარე ნულის ტოლია ($v = 0$).

როგორც ვნახეთ, მხები აჩქარება წარმოიშობა მხოლოდ წერტილის სიჩქარის სიდიდის ცვლილებისას, ხოლო ნორმალური აჩქარება კი წერტილის მრუდწირული მოძრაობის დროს სიჩქარის ვექტორის მიმართულების ცვლილებისას. შესაბამისად, მხები აჩქარება ახასიათებს წერტილის სიჩქარის სიდიდის ცვლილებას, ნორმალური აჩქარება კი მისი მიმართულების ცვლილებას.

წერტილის **თანაბარი მოძრაობა** ეწოდება მის მოძრაობას მუდმივი სკალარული სიჩქარით ($v = const$).

წერტილის მოძრაობას ეწოდება **თანაბრადცვლადი**, თუ მისი მხები აჩქარების სიდიდე მუდმივია ($w_\tau = const$).

თუ ამოვხსნით

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = w_\tau$$

დიფერენციალურ განტოლებებს შემდეგ საწყის პირობებში:

როცა $t = t_0$, $s = s_0$, $v = v_0$, მივიღებთ

ა) თანაბარი მოძრაობის განტოლებას: $s = v(t - t_0) + s_0$.

ბ) თანაბრადცვლადი მოძრაობის განტოლებას და სიჩქარეს:

$$s = \frac{w_\tau}{2}(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + s_0, \quad v = w_\tau(t - t_0) + v_0.$$

SI სისტემაში აჩქარების განზომილებაა: $[w] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{მ}{წმ^2}$.

მყარი სხეულის უმარტივესი მოძრაობები

§22. ზოგადი დებულებები

ყველა ნივთიერი სხეული მათზე მოდებული დატვირთვების მოქმედებით იცვლის თავის ფორმას და ზომებს, ე.ი. დეფორმირდება. მაგრამ ბევრ შემთხვევაში როგორც ბუნებრივი, ისე

ხელოვნური მყარი სხეულების დეფორმაციები იმდენად მცირეა, რომ შეიძლება მათი უგულებელყოფა ამ სხეულების მოძრაობისა და წონასწორობის გამოკვლევისას და განვიხილოთ ისინი როგორც არადეფორმადი სხეულები (აბსოლუტურად მყარი სხეულები).

მყარი სხეულის მოძრაობისას მისი ცალკეული წერტილები ზოგად შემთხვევაში მოძრაობენ განსხვავებულ ტრაექტორიებზე და დროის ყოველ მომენტში გააჩნიათ სხვადასხვა სიჩქარე და აჩქარება. ამასთან ერთად არსებობს კინემატიკური მახასიათებლები, რომლებიც მყარი სხეულის ყველა წერტილისათვის ერთნაირია. აქედან გამომდინარე შეიძლება ვთქვათ, რომ მყარი სხეულის კინემატიკის ძირითად ამოცანას წარმოადგენს მთლიანად მყარი სხეულის მოძრაობის კანონის დადგენა და მისი, როგორც მყარი სხეულის ცალკეული წერტილების კინემატიკური მახასიათებლების განსაზღვრა.

აუცილებელია აგრეთვე დავაზუსტოთ თუ რას ნიშნავს „მყარი სხეულის მოძრაობის მოცემა“. ჩვენ შემდგომში ვიგულისხმებთ, რომ მყარი სხეულის მოძრაობა მოცემულია, თუ მოცემულია წესი, რომლის მიხედვითაც შესაძლებელია მყარი სხეულის ნებისმიერი წერტილის მდებარეობის განსაზღვრა არჩეული კოორდინატთა სისტემის მიმართ დროის ნებისმიერ მომენტში.

იმ დამოუკიდებელ პარამეტრთა რიცხვს, რომლებიც ცალსახად განსაზღვრავენ მყარი სხეულის მდებარეობას სივრცეში განსახილავი ათვლის სისტემის მიმართ, მყარი სხეულის თავისუფლების ხარისხი ეწოდება.

მყარი სხეულის მოძრაობა ბევრად არის დამოკიდებული მის თავისუფლების ხარისხზე. ერთი და იგივე თავისუფლების ხარისხის მქონე სხეულს შეუძლია შეასრულოს ერთმანეთისაგან

განსხვავებული სხვადასხვა სახის მოძრაობა. თავისუფალი მყარი სხეულის თავისუფლების ხარისხი ზოგად შემთხვევაში ექვსის ტოლია. მართლაც, მის მდებარეობას სივრცეში რაიმე კოორდინატთა სისტემის მიმართ, მაგალითად დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის მიმართ, განსაზღვრავს მისი რომელიმე, ერთ წრფეზე არამდებარე სამი წერტილის მდებარეობა. მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობისას მანძილი ამ სხეულის ნებისმიერ ორ წერტილს შორის რჩება უცვლელი. ეს ადებს ფიქსირებული წერტილების კოორდინატებს სამ პირობას. სამი წერტილის ცხრა კოორდინატიდან დამოუკიდებელია მხოლოდ ექვსი, დარჩენილი სამი კოორდინატი კი განისაზღვრება იმ სამი განტოლებიდან, რომლებიც განსაზღვრავენ მანძილებს აღებულ სამ წერტილს შორის.

დამოუკიდებელ პარამეტრთა რანგში შეიძლება განხილულ იქნას წერტილთა ნებისმიერი ექვსი კოორდინატი ან სხვა ექვსი დამოუკიდებელი პარამეტრი, რომლებიც წარმოადგენენ სამი ან უფრო მეტი წერტილის კოორდინატების ფუნქციებს. ყოველივე აქედან გამომდინარე შეიძლება ვთქვათ, რომ თავისუფალი ნივთიერი წერტილის თავისუფლების ხარისხია სამი; რაიმე უძრავ ზედაპირზე მოძრავი წერტილის თავისუფლების ხარისხია ორი; უძრავ წირზე მოძრავი წერტილის თავისუფლების ხარისხია ერთი.

სანამ გადავიდოდეთ მყარი სხეულის მოძრაობის კერძო შემთხვევების შესწავლაზე, მოვიყვანოთ ერთი მეტად მნიშვნელოვანი თეორემა, რომელიც სამართლიანია მყარი სხეულის მოძრაობისას.

თეორემა (გრასჰოფის): აბსოლუტურად მყარი სხეულის ნებისმიერი ორი წერტილის სიჩქარეთა გეგმილები ამ წერტილებზე გამავალ წრფეზე ერთმანეთის ტოლია.

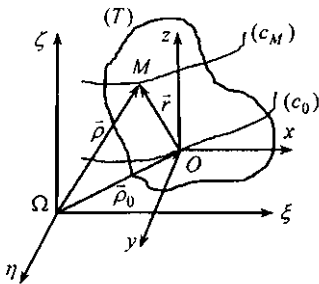
ამგვარად, თუ \vec{v}_A და \vec{v}_B მყარი სხეულის ნებისმიერი ორი წერტილის სიჩქარეებია, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\text{გეგ}_{AB} \vec{v}_A = \text{გეგ}_{AB} \vec{v}_B .$$

§23. მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა

მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა ეწოდება მის ისეთ მოძრაობას, როდესაც მისი ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთი მოძრაობის პროცესში რჩება თავისი საწყისი მდებარეობის პარალელური.

მაგალითად, ველოსიპედის პედლები ასრულებენ გადატანით მოძრაობას მისი ჩარჩოს მიმართ; ასევე შიგაწვის ძრავის



ნახ. 23.1

ცილინდრებში დგუშები ასრულებენ გადატანით მოძრაობას ცილინდრების მიმართ და ა.შ. ამგვარად, გადატანითად მოძრავი სხეულის წერტილთა ტრანექტორიები შეიძლება იყოს არა მარტო წრფეები, არამედ ნებისმიერი მრუდი წირები, მათ შორის წრეწირებიც.

ჩამოვყალიბოთ გადატანითად მოძრავი მყარი სხეულის ძირითადი თვისებების განმსაზღვრელი თეორემა.

თეორემა: გადატანითად მოძრავი მყარი სხეულის ყველა წერტილი აღწერს კონგრუენტულ ტრანექტორიებს და დროის ყოველ მომენტში გააჩნიათ გეომეტრიულად ტოლი სიჩქარე და აჩქარება.

ამგვარად, თუ (C_M) და (C_O) წარმოადგენენ (ნახ.23.1) მყარი (T) სხეულის ნებისმიერი ორი M და O წერტილის ტრანექტორიებს, მაშინ ისინი კონგრუენტული (თავსებადი) ტრანექტორიებია. გარდა ამისა, თუ \vec{v}_M, \vec{w}_M და \vec{v}_O, \vec{w}_O შესაბამისად ამავე წერტილების სიჩქარე და აჩქარებაა, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ თანაფარდობებს:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O, \quad \vec{w}_M = \vec{w}_O.$$

ყოველივე ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე შეიძლება დავასკვნათ, რომ მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა სავსებით ხასიათდება მისი რომელიმე ერთი წერტილის მოძრაობით და თუ ცნობილია ამ წერტილის კოორდინატები, როგორც დროის ფუნქციები, ანუ

$$\xi_0 = f_1(t), \quad \eta_0 = f_2(t), \quad \zeta_0 = f_3(t), \quad (23.1)$$

მაშინ ცნობილია მყარი სხეულის მოძრაობის კანონიც. (23.1) განტოლებები წარმოადგენენ მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობის განტოლებებს.

დავწეროთ მყარი (T) სხეულის ნებისმიერი M წერტილის გადატანითი მოძრაობის განტოლება. ეს განტოლება ვექტორული სახით ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_0 + \vec{r}, \quad (23.2)$$

ხოლო გეგმილებში იგი მოგვცემს შემდეგ განტოლებებს:

$$\xi = \xi_0 + x, \quad \eta = \eta_0 + y, \quad \zeta = \zeta_0 + z, \quad (23.3)$$

სადაც ξ_0, η_0, ζ_0 განისაზღვრებიან (6.1) ტოლობებით, ხოლო x, y, z წარმოადგენს M წერტილის კოორდინატებს მოძრავი $Oxyz$ სისტემის მიმართ. აქედან გამომდინარე შეიძლება დავასკვნათ, რომ გადატანითი მოძრაობის შემთხვევაში სხეულის

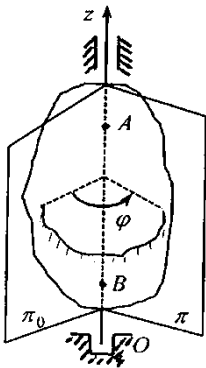
მოძრაობის შესასწავლად საკმარისია შევისწავლოთ მისი ერთი რომელიმე წერტილის მოძრაობა.

როგორც ვხედავთ, მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობისას მისი მდებარეობა განისაზღვრება მისი რომელიმე ერთი წერტილის კოორდინატებით, ეს კი ნიშნავს, რომ გადატანითად მოძრავი სხეულის თავისუფლების ხარისხი სამის ტოლია.

§24. მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო. ბრუნვის კუთხური სიჩქარე და აჩქარება

მყარი სხეულის უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვა ეწოდება მის ისეთ მოძრაობას, როდესაც სხეულის ორი წერტილი რჩება უძრავი მოძრაობის მთელი დროის განმავლობაში.

ცხადია ამ შემთხვევაში უძრავი რჩება სხეულის ყველა ის წერტილი, რომელიც ორ უძრავ წერტილზე გამავალ წრფეზე მდებარეობს და ამ სხეულს ეკუთვნის. ამ წრფეს მყარი სხეულის ბრუნვის ღერძი ეწოდება.



ნახ. 24.1

სხეულის ყველა ის წერტილი, რომელიც არ მდებარეობს ბრუნვის ღერძზე, მოძრაობს ბრუნვის ღერძის მართობულ სიბრტყეებში და აღწერენ წრეწირებს, რომელთა ცენტრები ამ ღერძზე მდებარეობენ.

ვთქვათ მყარი სხეულის ბრუნვის ღერძი ემთხვევა Oz ღერძს (მისი დადებითი მიმართულება ნაჩვენებია ნახაზზე 24.1) და დადებით ბრუნვად მივიღოთ სხეულის ბრუნვა საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. დროის ყოველ მომენტში

უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის მდებარეობა განისაზღვრება ღერძთან უძრავად დაკავშირებული უძრავი Π ნახევარსიბრტყითა და სხეულთან უძრავად დაკავშირებული მოძრავი Π_0 ნახევარსიბრტყით შექმნილი ორწახნაგა კუთხის შესაბამისი ხაზოვანი φ კუთხით. φ კუთხეს მობრუნების კუთხე ეწოდება. ეს კუთხე დადებითია, თუ იგი ათვლილია უძრავი ნახევარსიბრტყიდან საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით და უარყოფითია, თუ ათვლილია საათის ისრის მოძრაობის თანხვედნით მიმართულებით.

ცხადია, რომ მობრუნების კუთხე წარმოადგენს დროის ფუნქციას და თუ მოცემულია დამოკიდებულება

$$\varphi = f(t), \quad (24.1)$$

მაშინ ცნობილია მბრუნავი სხეულის მდებარეობა დროის ყოველ მომენტში. (24.1) განტოლებას ეწოდება უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის ბრუნვის განტოლება.

უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის თავისუფლების ხარისხი ერთი ტოლია. რადგან მისი მდებარეობა განისაზღვრება მხოლოდ ერთი პარამეტრით - მობრუნების φ კუთხით.

მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის დასახასიათებლად შემოვიტანოთ ბრუნვის სკალარული კუთხური სიჩქარისა და სკალარული კუთხური აჩქარების ცნება.

სხეულის **სკალარული ბრუნვის კუთხური სიჩქარე** ეწოდება მობრუნების კუთხის პირველი რიგის წარმოებულს დროთი

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (24.2)$$

იგი ახასიათებს დროის მოცემულ მომენტში მობრუნების კუთხის ცვლილების სისწრაფეს და მიმართულებას. როცა

$\omega > 0$, მაშინ ბრუნვა ხდება საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით; როცა $\omega < 0$ - საათის ისრის მოძრაობის თანხვედნილი მიმართულებით. თუ სხეული ასრულებს $n \frac{\text{ბრ}}{\text{წთ}}$ ში, მაშინ მისი კუთხური სიჩქარე განისაზღვრება ფორმულით

$$\omega = \frac{\pi n \text{ რად}}{30 \text{ წმ}}. \quad (24.3)$$

მყარი სხეულის **ბრუნვის სკალარული კუთხური აჩქარება** ეწოდება ბრუნვის სკალარული კუთხური სიჩქარის პირველი რიგის, ან მობრუნების კუთხის მეორე რიგის წარმოებულს დროთი

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\omega}{dt^2}. \quad (24.4)$$

იგი ახასიათებს კუთხური სიჩქარის ცვლილების სისწრაფეს და მიმართულებას. თუ $\varepsilon > 0$, მაშინ კუთხური სიჩქარის ცვლილება ხდება საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, ხოლო თუ $\varepsilon < 0$ - საათის ისრის მოძრაობის თანხვედნილი მიმართულებით.

იმ შემთხვევაში, როდესაც φ და ω სიდიდეების ცვლილებების მიმართულებები ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ ბრუნვას ეწოდება აჩქარებული, წინააღმდეგ შემთხვევაში - შენელებული.

ბრუნვას ეწოდება თანაბარი, თუ მოძრაობის პროცესში ბრუნვის სკალარული კუთხური სიჩქარე რჩება მუდმივი ($\omega = \text{const}$)

ბრუნვას ეწოდება თანაბრადცვლადი, თუ სხეულის ბრუნვის სკალარული კუთხური აჩქარება მოძრაობის პროცესში რჩება მუდმივი ($\varepsilon = \text{const}$).

თუ ამოვხსნით $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ დიფერენციალურ განტო-

ლებებს შემდეგ საწყის პირობებში:

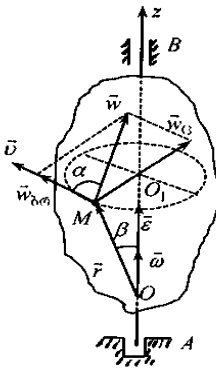
როცა $t = t_0$, $\varphi = \varphi_0$, $\omega = \omega_0$, მივიღებთ

ა) თანაბარი ბრუნვის განტოლებას: $\varphi = \omega(t - t_0) + \varphi_0$.

ბ) თანაბრადცვლადი ბრუნვის განტოლებას და კუთხურ სიჩქარეს:

$$\varphi = \frac{\varepsilon}{2}(t - t_0)^2 + \omega_0(t - t_0) + \varphi_0, \quad \omega = \varepsilon(t - t_0) + \omega_0.$$

აღვნიშნოთ, რომ უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის ყველა წერტილს ერთნაირი სკალარული კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება აქვს.



ნახ. 24.2

შემოვიღოთ ვექტორული კუთხური სიჩქარის ცნება.

ვექტორული კუთხური სიჩქარე ეწოდება თავისუფალ $\vec{\omega}$ ვექტორს, რომლის სიგრძე სკალარული კუთხური სიჩქარის აბსოლუტური სიდიდის ტოლია, მდებარეობს ბრუნვის ღერძზე, მოდებულია მის ნებისმიერ წერტილში და მიმართულია ისე, რომ სხეული $\vec{\omega}$ ვექტორის მიმართ ასრულებს დადებით

ბრუნვას. კუთხური სიჩქარის ვექტორი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{k}. \quad (24.5)$$

ვექტორული კუთხური აჩქარება ეწოდება ვექტორული კუთხური სიჩქარის პირველი რიგის წარმოებულს დროთი

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \vec{k} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \vec{k}, \quad (24.6)$$

სადაც $\vec{k} - Oz$ ღერძის მგეზავი ვექტორია.

ცხადია, რომ ვექტორული კუთხური აჩქარება არის ვექტორი, რომლის სიგრძე სკალარული კუთხური აჩქარების აბსოლუტური მნიშვნელობის ტოლია და მდებარეობს ბრუნვის ღერძზე, რადგან $\vec{\omega}$ ვექტორი ბრუნვის ღერძზე მდებარეობს და მისი მიმართულება მუდმივია.

უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი მყარი სხეულის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე გამოითვლება ფორმულით

$$\vec{v} = (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (24.7)$$

(24.7) ფორმულას **ვილერის ფორმულა** ეწოდება. ეს ფორმულა სკალარულად შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$\begin{cases} v_x = \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y = \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z = \omega_x y - \omega_y x. \end{cases} \quad (24.8)$$

სადაც $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ - $\vec{\omega}$ ვექტორის გეგმილებია საკოორდინატო ღერძებზე, რომელთა სათავეა O წერტილი, ხოლო x, y, z - \vec{r} ვექტორის გეგმილებია იმავე ღერძებზე.

უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი მყარი სხეულის ნებისმიერი წერტილის აჩქარება გამოითვლება ფორმულით

$$\vec{w} = (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{v}). \quad (24.9)$$

ამ ფორმულაში პირველი შესაკრები წარმოადგენს ვექტორს, რომელსაც აქვს მხების მიმართულება. ამიტომ მას მხები ან ბრუნვითი აჩქარება ეწოდება. მეორე შესაკრები წარმოადგენს ვექტორს, რომელსაც აქვს ნორმალის მიმართულება. ამიტომ მას

ნორმალური ან ღერძისკენული აჩქარება ეწოდება. შესაბამისად შეიძლება დავწეროთ

$$\vec{w}_{\text{ბო}} = (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}), \quad \vec{w}_{\text{ც}} = (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (24.10)$$

შევნიშნოთ, რომ იმდენად, რამდენადაც უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი მყარი სხეულის ყოველი წერტილის მოძრაობის ტრაექტორია წარმოადგენს წრეწირს, რომლის რადიუსი ტოლია ამ წერტილიდან ბრუნვის ღერძამდე მანძილისა, ამიტომ

$$v = \omega R, \quad w_{\text{ბო}} = \varepsilon R, \quad w_{\text{ც}} = \omega^2 R,$$

$$w = \sqrt{w_{\text{ბო}}^2 + w_{\text{ც}}^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

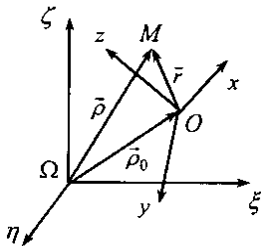
SI სისტემაში ბრუნვის კუთხური სიჩქარისა და კუთხური აჩქარების განზომილებებია:

$$[\omega] = \frac{[\varphi]}{[t]} = \frac{\text{რად}}{\text{წმ}}, \quad [\varepsilon] = \frac{[\dot{\omega}]}{[t]} = \frac{\text{რად}}{\text{წმ}^2}.$$

წერტილის რთული მოძრაობა

§25. წერტილის რთული მოძრაობის განტოლებები

აქამდე ჩვენ განვიხილავდით ნივთიერი M წერტილის მოძრაობას რაიმე უძრავი $Oxyz$ სისტემის მიმართ. მაგრამ ხში-



რად თვითონ $Oxyz$ სისტემა არის მოძრავი. ამიტომ ასეთ შემთხვევაში ბუნებრივია უძრავ სისტემად უნდა ავიჩიოთ რომელიმე სხვა $\Omega\xi\eta\zeta$ სისტემა. ამ სისტემის მიმართ წერტილი შეასრულებს მოძრაობას, რომელსაც რთული მოძრაობა ეწოდება.

ჩავთვალოთ, რომ M წერტილი მოძრაობს მოძრავი $Oxyz$ სისტემის მიმართ, ამავე დროს $Oxyz$ სისტემა მოძრაობს უძრავი $\Omega\xi\eta\zeta$ სისტემის მიმართ. M წერტილის კოორდინატები მოძრავი სისტემის მიმართ იყოს (x, y, z) , უძრავი სისტემის მიმართ - (ξ, η, ζ) , ხოლო O წერტილის კოორდინატები უძრავი სისტემის მიმართ იყოს (ξ_0, η_0, ζ_0) .

M წერტილის მოძრაობას მოძრავი $Oxyz$ სისტემის მიმართ ფარდობითი მოძრაობა ეწოდება.

M წერტილის მოძრაობას უძრავი $\Omega\xi\eta\zeta$ სისტემის მიმართ რთული ანუ აბსოლუტური მოძრაობა ეწოდება.

M წერტილის მოძრაობას უძრავი $\Omega\xi\eta\zeta$ სისტემის მიმართ, როდესაც დროის აღებულ მომენტში იგი უძრავია მოძრავი $Oxyz$ სისტემის მიმართ, წარმტანი მოძრაობა ეწოდება.

ასევე განიმარტება წერტილის მოძრაობის ტრაექტორია, სიჩქარე და აჩქარება.

Ox ღერძის მიერ $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$ ღერძებთან შედგენილი კუთხეების კონუსები აღვნიშნოთ l_1, m_1, n_1 -ით; Oy ღერძის მიერ შედგენილი კუთხეების კოსინუსები l_2, m_2, n_2 -ით; ხოლო Oz ღერძის მიერ შედგენილი კუთხეების კოსინუსები l_3, m_3, n_3 -ით; თუ Ox , Oy და Oz ღერძების ორტებს შესაბამისად \vec{i} , \vec{j} და \vec{k} ვექტორებით აღვნიშნავთ, მაშინ M წერტილის რთული მოძრაობის ვექტორულ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე

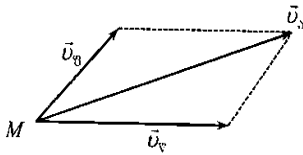
$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_0 + \vec{r} = \vec{\rho}_0 + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (25.1)$$

რომელიც გვაძლევს შემდეგ სკალარულ განტოლებებს

$$\begin{cases} \xi = \xi_0 + l_1 x + l_2 y + l_3 z, \\ \eta = \eta_0 + m_1 x + m_2 y + m_3 z, \\ \zeta = \zeta_0 + n_1 x + n_2 y + n_3 z. \end{cases} \quad (25.2)$$

§26. სიჩქარეთა შეკრების კანონი

თეორემა: წერტილის რთული მოძრაობისას მისი აბსოლუტური სიჩქარე ფარდობითი და წარმტანი სიჩქარეების გეომეტრიულ-ჯამის ტოლია



$$\vec{v}_s = \vec{v}_g + \vec{v}_f. \quad (26.1)$$

თუ ცნობილია კუთხე \vec{v}_g და \vec{v}_f ვექტორებს შორის - $(\vec{v}_g; \vec{v}_f)$ მაშინ აბსოლუტური სიჩქარის სიდიდე გამოითვლება ფორმულით

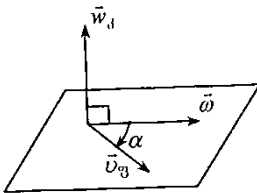
$$|\vec{v}_s| = \sqrt{|\vec{v}_g|^2 + |\vec{v}_f|^2 + 2|\vec{v}_g||\vec{v}_f|\cos(\vec{v}_g; \vec{v}_f)}. \quad (26.2)$$

§27. აჩქარებათა შეკრების კანონი (კორიოლისის თეორემა)

კორიოლისის თეორემა: წერტილის რთული მოძრაობისას მისი აბსოლუტური აჩქარება ფარდობითი, წარმტანი და კორიოლისის აჩქარებათა გეომეტრიული ჯამის ტოლია

$$\vec{w}_s = \vec{w}_g + \vec{w}_f + \vec{w}_კ. \quad (27.1)$$

ეს ფორმულა გამოსახავს კორიოლისის თეორემას. კორიოლისის



აჩქარება განისაზღვრება

ფორმულით:

$$\vec{w}_კ = 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_g) \quad (27.2)$$

კორიოლისის აჩქარებით ხასიათდება წერტილის წარმტანი სიჩქარის ცვლილება მისი

ფარდობითი მოძრაობის შედეგად და ფარდობითი სიჩქარის ვექტორის მიმართულების ცვლილება, როდესაც წარმტანი მოძრაობა ბრუნვითია.

კორლიოსის აჩქარების სიდიდე ტოლია:

$$|\vec{w}_3| = 2|\vec{\omega}||\vec{v}_3| \sin(\vec{\omega}; \hat{\vec{v}}_3). \quad (27.3)$$

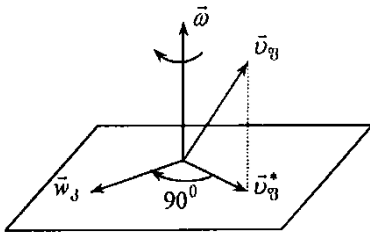
კორლიოსის აჩქარება ნულის ტოლია, როცა:

1) $\vec{v}_3 = 0$, ე.ი წერტილის ფარდობითი სიჩქარე დროის მოცემულ მომენტში ნულის ტოლია.

2) $\vec{\omega} = 0$, ე.ი წერტილის წარმტანი მოძრაობა გადატანითია.

3) $\sin(\vec{\omega}; \hat{\vec{v}}_3) = 0$, ე.ი წერტილი ისე მოძრაობს, რომ მისი

ფარდობითი მოძრაობის სიჩქარის ვექტორი ვექტორული კუთხური სიჩქარის ვექტორის პარალელურია.



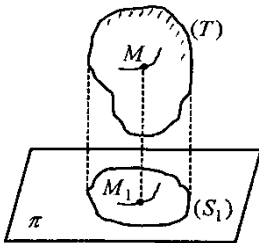
კორლიოსის აჩქარების ვექტორის მიმართულებას მეტწილად განსაზღვრავენ **ჟუკოვსკის წესით**: \vec{v}_3 - ვექტორი დავაგეგმილოთ $\vec{\omega}$ - ვექტორის მართობულ სიბრტყეში და გეგმილი - \vec{v}_3^* შემო-

ვაბრუნოთ $\vec{\omega}$ - ვექტორის გარშემო 90° -იანი კუთხით წარმტანი მოძრაობის (ბრუნვის) მიმართულებით.

მყარი სხეულის ბრტყელი მოძრაობა

§28. სხეულის ბრტყელი მოძრაობის განტოლებები

მყარი სხეულის ბრტყელი ანუ ბრტყელ-პარალელური მოძრაობა ეწოდება ისეთ მოძრაობას, როდესაც მანძილი სხეულის ნებისმიერი წერტილიდან რაიმე უძრავ სიბრტყემდე მოძრაობის პროცესში რჩება უცვლელი.

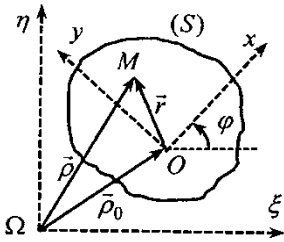


დავუშვათ (T) მყარი სხეული ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას რაიმე უძრავი π სიბრტყის მიმართ. განმარტების თანახმად მანძილი (T) სხეულის M წერტილიდან π სიბრტყემდე უცვლელია. თუ დავაგვიგმილებთ სხეულს π სიბრტყეზე, მივიღებთ S_1 ფიგურას, რომელიც სხეულის სივრცეში მოძრაობისას გადაადგილდება π სიბრტყეზე. (T) სხეულის M წერტილის ტრეექტორია ბრტყელი წირია, მისი სიბრტყე π სიბრტყის პარალელურია და (S_1) ფიგურის M_1 წერტილი ისეთივე მოძრაობას ასრულებს, რასაც (T) სხეულის M წერტილი. ამიტომ M წერტილის მოძრაობის მაგივრად საკმარისია შევისწავლოთ M_1 წერტილის მოძრაობა.

აქედან გამომდინარე, იმისათვის რომ შევისწავლოთ მყარი (T) სხეულის ბრტყელი მოძრაობა რაიმე უძრავი π სიბრტყის მიმართ, საკმარისია შევისწავლოთ (T) სხეულის π სიბრტყის პარალელური სიბრტყით გადაკვეთისას მიღებული ბრტყელი (S) ფიგურის მოძრაობა თავისავე სიბრტყეში.

დავუშვათ (S) ფიგურა მოძრაობს რაიმე უძრავი $\Omega\xi\eta$ კოორდინატთა სისტემის მიმართ. (S) ფიგურასთან უძრავად

დავაკავშიროთ Oxy სისტემა. ცხადია, რომ როდესაც (S)



ფიგურა მოძრაობს, მაშინ მასთან ერთად მოძრაობს Oxy სისტემაც.

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ (S) ფიგურის მდებარეობა უძრავი სისტემის მიმართ, საჭიროა ვიცოდეთ O წერტილის მდებარეობა $\Omega\xi\eta$ სისტემის მიმართ და Oxy სისტემის მობრუნებს კუთხე O წერტილის გარშემო. O წერტილს პოლუსი ეწოდება.

O წერტილის კოორდინატები $\Omega\xi\eta$ სისტემის მიმართ აღვნიშნოთ ξ_0 და η_0 -ით, ხოლო მობრუნების კუთხე φ ასოთი.

განტოლებები

$$\xi_0 = f_1(t), \eta_0 = f_2(t), \varphi = f_3(t) \quad (28.1)$$

წარმოადგენენ მყარი სხეულის ბრტყელი მოძრაობის განტოლებებს.

მყარი სხეულის ნებისმიერი M წერტილის ბრტყელი მოძრაობის ვექტორული განტოლებაა

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_0 + x\vec{i} + y\vec{j}, \quad (28.2)$$

რომელიც სკალარული სახით ასე ჩაიწერება

$$\begin{cases} \xi = \xi_0 + x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ \eta = \eta_0 + x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{cases} \quad (28.3)$$

ამ განტოლებებში \vec{i} და \vec{j} შესაბამისად Ox და Oy ღერძების ორტებია, ξ_0 , η_0 და φ განისაზღვრებიან (28.1) ტოლობებით, ხოლო x და y წარმოადგენენ მუდმივ სიდიდეებს. (28.3) განტოლებებს მყარი სხეულის ნებისმიერი წერტილის ბრტყელი მოძრაობის განტოლებები ეწოდება.

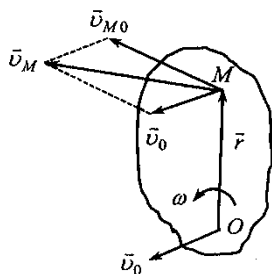
§29. სიჩქარეთა განაწილება მყარი სხეულის ბრტყელი მოძრაობის დროს

წინასწარ მოვიყვანოთ ორი მეტად მნიშვნელოვანი თეორემა, რომლებიც სამართლიანია მყარი სხეულის ბრტყელი მოძრაობისას.

თეორემა1: მყარი ბრტყელი ფიგურის მოძრაობა თავის სიბრტყეში შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც გადატანითი და ნებისმიერი წერტილის მიმართ ბრუნვითი მოძრაობების ერთობლიობა.

თეორემა2: მყარი ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი არაგადატანითი მოძრაობა თავის სიბრტყეში შეიძლება განხორციელდეს როგორც გარკვეული წერტილის გარშემო ბრუნვა.

ბრტყელი ფიგურის წერტილების **სიჩქარეთა მყისი ცენტრი** ეწოდება ბრტყელი ფიგურის სიბრტყეში მდებარე იმ წერტილს, რომლის გარშემოც ხორციელდება ბრტყელი ფიგურის ბრუნვა



და რომლის სიჩქარე დროის ადებულ მომენტში ნულის ტოლია. მყისი ეწოდება იმიტომ, რომ ამ წერტილის მდებარეობას შეესაბამება დროის გარკვეული მომენტი და არა შუალედი. ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი \$M\$ წერტილის სიჩქარე ტოლია \$O\$ პოლუსის სიჩქარისა და ბრტყელი

ფიგურის პოლუსის გარშემო ბრუნვისას \$M\$ წერტილის ბრუნვითი მოძრაობის სიჩქარის გეომეტრიული ჯამისა:

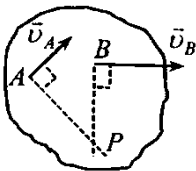
$$\vec{v}_M = \vec{v}_0 + \vec{v}_{M0} \quad (29.1)$$

აქ \vec{v}_0 – პოლუსის სიჩქარეა, \vec{v}_{M0} – M წერტილის სიჩქარე მისი პოლუსის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობისას და გამოითვლება ფორმულით

$$\vec{v}_{M0} = (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

როგორც აღვნიშნეთ, მყარი სხეულის ბრტყელი მოძრაობის შემთხვევაში არსებობს ბრუნვის ცენტრი, რომელსაც სიჩქარეთა მყის ცენტრს უწოდებენ და რომლის სიჩქარე დროის ადებულ მომენტში ნულის ტოლია.

შევნიშნოთ, რომ ბრტყელი ფიგურის წერტილების სიჩქარეთა მყისი ცენტრი ყოველთვის არსებობს, თუ ბრუნვის კუთხური სიჩქარე – $\vec{\omega}$ ნულისაგან განსხვავებულია.



ნახ. 29.1

თუ ცნობილია ბრტყელი ფიგურის ნებისმიერი ორი A და B წერტილის სიჩქარის ვექტორთა მიმართულებები, მაშინ სიჩქარეთა მყისი ცენტრი მდებარეობს სიჩქარეთა ვექტორებისადმი მათი მოდების წერტილებზე გავლებული მართობული

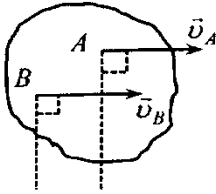
წრფეების გადაკვეთის P წერტილში (ნახ. 29.1).

თუ A და B წერტილების სიჩქარეთა ვექტორები პარალელურია, მაშინ შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

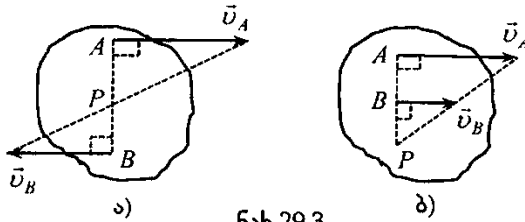
1) A და B წერტილებზე სიჩქარეთა ვექტორებისადმი გავლებული მართობული წრფეები პარალელურია.

2) როდესაც ეს მართობული წრფეები თანხვედრილია.

როცა მართობები პარალელურია, მაშინ მყისი ცენტრი არ არსებობს, ან როგორც სხვანაირად იტყვიან, არსებობს უსასრულოებაში (ნახ 29.2). ამ შემთხვევაში სხეული ასრულებს მყის გადატანით მოძრაობას.

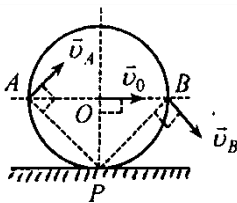


ნახ. 29.2



ნახ.29.3

როცა მართობები თანხვედრილია და ცნობილია A და B წერტილების სიჩქარეთა სიდიდეები, მაშინ მყისი ცენტრის მდებარეობა განსაზღვრული იქნება. მართლაც, ასეთ შემთხვევაში AB წრფე \vec{v}_A და \vec{v}_B სიჩქარეთა ვექტორების მართობია და თუ $\vec{v}_A \neq \vec{v}_B$, მაშინ მყისი ცენტრი მდებარეობს AB წრფესა და სიჩქარეთა ვექტორების ბოლოების შემაერთებელი წრფის გადაკვეთის P წერტილში (ნახ 29.3 ა, ბ).



ნახ.29.4

აღვნიშნოთ, რომ უძრავ ზედაპირზე დისკის უსრიალოდ გორვისას მისი წერტილების სიჩქარეთა მყისი ცენტრი დროის ყოველ მომენტში იქნება ზედაპირების შეხების P წერტილი (ნახ. 29.4).

დინამიკის საგანი

დინამიკა არის თეორიული მექანიკის ნაწილი, რომელიც შეისწავლის ნივთიერი წერტილის ან სხეულების მექანიკური მოძრაობისა და ურთიერთქმედების ზოგად კანონებს მათზე მოქმედი ძალების გათვალისწინებით.

როგორც თავის დროზე აღვნიშნეთ, ნივთიერი სხეულების მექანიკური მოძრაობა ეწოდება მათი მდებარეობის ცვლილებას სხვა სხეულების მიმართ სივრცესა და დროში.

ნივთიერი სხეულების მექანიკური ურთიერთქმედება ეს არის ნივთიერი სხეულების ისეთი ურთიერთქმედება, რომელიც ცვლის ან ცდილობს შეცვალოს მათი მექანიკური მოძრაობის ხასიათი.

დინამიკა თეორიული მექანიკის უფრო ზოგადი ნაწილია და გააჩნია განსაკუთრებული მნიშვნელობა მრავალი პრაქტიკული ამოცანის ამოსახსნელად ტექნიკის სხვადასხვა სფეროში. დინამიკაში შეისწავლება ისეთი ძალთა სისტემები, რომლებიც არ იმყოფებიან წონასწორობაში და ამით დინამიკა არსებითად განსხვავდება სტატიკისაგან. დინამიკა ასევე ძირფესვიანად განსხვავდება კინემატიკისაგან, სადაც მოძრაობა ფასდება მხოლოდ გეომეტრიული თვალსაზრისით, მისი გამომწვევი მიზეზებისაგან დამოუკიდებლად. დინამიკა თეორიული მექანიკის უფრო ზოგადი ნაწილია. იგი იყენებს სტატიკისა და კინემატიკის შედეგებს და ადგენს ნივთიერი წერტილებისა და სხეულების მოძრაობის ზოგად კანონებს ამ მოძრაობის გამომწვევი მიზეზების გათვალისწინებით.

როგორც ცნობილია, მოძრაობის გამომწვევი მიზეზი არის ძალა. შემდგომში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ძალები ცვალებადი

სიდიდეებია, კერძოდ ისინი დამოკიდებულია წერტილის მდებარეობაზე, სიჩქარეზე და დროზე

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t).$$

თუ სხვადასხვა წერტილს მოვდებთ ერთი და იგივე ძალას და შევადარებთ მის მოქმედებას ამ წერტილებზე, ვნახავთ, რომ გარკვეული დროის შემდეგ ამ წერტილებს ექნებათ გავლილი სხვადასხვა მანძილი და შექმნილი სხვადასხვა სიჩქარე. ამ გარემოებას მივყავართ სხეულების ინერტულობის ცნებასთან.

ინერტულობა არის სხეულების ის თვისება, რომლის მიხედვითაც ისინი მათზე მოქმედი ძალების გავლენით იცვლიან მოძრაობის სიჩქარეს.

სხეულების ინერტულობის ხარისხი განისაზღვრება იმის მიხედვით, თუ ნივთიერების რა რაოდენობას შეიცავს ის.

დინამიკას საფუძვლად უდევს კანონები, რომლებიც პირველად ფორმულირებული იყო ნიუტონის მიერ და ისინი ცნობილია მოძრაობის კანონების სახელწოდებით. ამ კანონების მართებულობა შემოწმებულია ცდებითა და დაკვირვებებით, ასევე ადამიანების პრაქტიკული გამოცდილებით. გავეცნოთ მათ.

§30. დინამიკის კანონები

პირველი კანონი (ინერციის კანონი): თუ ნივთიერ წერტილზე არავითარი ძალა არ მოქმედებს, ან მოქმედებს გაწონასწორებულ ძალთა სისტემა, მაშინ იგი უძრავია ან მოძრაობს წრფივად და თანაბრად.

ამ აქსიომის პირველ ავტორად ითვლება გ.გალილეი (იტალიელი მეცნიერი 1564–1642). ეს აქსიომა ფორმულით შეიძლება ასე გამოისახოს

$$\vec{v} = \overrightarrow{const} \quad (30.1)$$

სადაც \vec{v} წერტილის ვექტორული სიჩქარეა.

თუ წერტილი მოძრაობს ძალის მოქმედების გარეშე, მაშინ ამბობენ რომ იგი ასრულებს ინერციულ მოძრაობას.

იმ ათვლის სისტემას, რომლის მიმართაც ადგილი აქვს ინერციის კანონს, ინერციულ (უძრავ) ათვლის სისტემას უწოდებენ.

მზის სისტემაში ინერციულ ათვლის სისტემად დიდი სიზუსტით მიღებულია ის კორდინატთა სისტემა, რომლის სათავე მდებარეობს მზის ცენტრში, ხოლო ღერძები მიმართულია ე.წ.უძრავი ვარსკვლავებისაკენ.

მეორე კანონი (დინამიკის ძირითადი კანონი): ნივთიერ წერტილზე მოქმედი ძალის მიერ გამოწვეულ აჩქარებას აქვს ძალის მიმართულება და სიდიდით ძალის სიდიდის პროპორციულია.

თუ \vec{F} – წერტილზე მოქმედი ძალაა, ხოლო \vec{w} – ძალის მიერ გამოწვეული აჩქარება, მაშინ

$$\vec{F} = m\vec{w} \quad (30.2)$$

სადაც $m = \frac{|\vec{F}|}{|\vec{w}|}$ – პროპორციულობის კოეფიციენტია და წარმოად-

გენს ნივთიერი წერილის მასას. მას ინერტულ მასას უწოდებენ.

(30.2) განტოლებას დინამიკის ძირითადი განტოლება ეწოდება.

იმ ნივთიერი წერტილისათვის, რომელზეც მოქმედებს \vec{G} – სიმძიმის ძალა, გვექნება

$$m = \frac{G}{g} \quad (30.3)$$

აქ G – ნივთიერი წერტილის წონაა (სიმძიმის ძალა), g – სიმძიმის ძალის აჩქარებაა (თავისუფალი ვარდნის აჩქარება). სიმძიმის ძალის აჩქარების მნიშვნელობა დამოკიდებულია ნივთიერი წერტილის გეოგრაფიულ მდებარეობაზე და საშუალო განედებისათვის ტოლია $g = 9,81 \text{ მ/წმ}^2$. საზოგადოდ მისი მნიშვნელობა მეტია პოლუსზე და ნაკლებია ეკვატორზე. (30.3) ტოლობით განსაზღვრულ სიდიდეს წონადი მასა ეწოდება. მიღებულია (დიდი სიზუსტით), რომ წონადი და ინერტული მასის რიცხვითი მნიშვნელობები ერთი და იგივეა.

ამგვარად, **სხეულის მასა** ეწოდება სკალარულ სიდიდეს, რომელიც დამოკიდებულია ამ სხეულში არსებული ნივთიერების რაოდენობაზე და განსაზღვრავს მისი ინერტულობის ხარისხს.

თეორიული მექანიკის მოსაზრებებიდან გამომდინარე, სხეულის მასა მუდმივი სიდიდეა და არ არის დამოკიდებული ამ სხეულის მოძრაობაზე.

მესამე კანონი (ქმედებისა და უკუქმედების კანონი): ძალები, რომლებიც გამოსახავენ ორი ნივთიერი წერტილის ურთიერთქმედებას, სიდიდით ტოლია, ერთ ფუძეზე მდებარეობენ და მიმართულებით ურთიერთსაწინააღმდეგოა.

ამგვარად, ყოველი ქმედება იწვევს მის ტოლ და საწინააღმდეგო უკუქმედებას.

მეოთხე კანონი (ძალთა მოქმედების დამოუკიდებლობის კანონი): თუ ნივთიერ წერტილზე მოქმედებს რამოდენიმე ძალა, მაშინ ამ წერტილის აჩქარება ტოლია თითოეული ძალის მიერ გამოწვეული აჩქარებათა გეომეტრიული ჯამის.

თუ ნივთიერ წერტილზე მოქმედებს $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ძალები, რომლებიც წერტილს შესაბამისად ანიჭებენ $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n$ აჩქარებებს, მაშინ $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \dots + \vec{w}_n$.

§31. ნივთიერი წერტილისა დაწერტილთა სისტემის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები

ნივთიერი წერტილი ეწოდება სხეულს, რომელიც შეიცავს ნივთიერების გარკვეულ რაოდენობას და მისი მდებარეობა სივრცეში განისაზღვრება გეომეტრიული წერტილით.

ნივთიერ წერტილთა სისტემა ეწოდება წერტილთა ისეთ ერთობლიობას, რომელშიც ყოველი წერტილის მდებარეობა და მოძრაობა დამოკიდებულია დანარჩენი წერტილების მდებარეობაზე და მოძრაობაზე.

თუ სისტემის წერტილებს შორის მანძილები იცვლება, მაშინ მას ცვლადი ანუ დეფორმადი სისტემა ეწოდება. თუ სისტემის წერტილებს შორის მანძილები უცვლელია, მაშინ მას უცვლადი სისტემა ეწოდება.

ნივთიერი წერტილის მოძრაობის შესწავლისას მასზე მოდებული ძალები დავყოთ აქტიურ (უშუალოდ მოდებული ძალები) და პასიურ (რეაქციის ძალები) ძალებად. ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობის შესწავლისას ხელსაყრელია სისტემაზე მოდებული ძალების დაყოფა შიგა და გარე ძალებად.

შიგა ძალები ეწოდება იმ ძალებს, რომლებითაც სისტემაში შემავალი წერტილები ურთიერთქმედებენ ერთმანეთთან.

გარე ძალები ეწოდება იმ ძალებს, რომლებითაც სისტემაში შემავალი წერტილები ურთიერთქმედებენ სისტემის გარეთ მყოფ წერტილებთან.

ნივთიერ წერტილთა სისტემაში შემავალ $M_k(x_k, y_k, z_k)$ წერტილზე მოქმედი შიგა და გარე ძალები აღვნიშნოთ $\vec{F}_k^{(a)}(X_k^{(a)}, Y_k^{(a)}, Z_k^{(a)})$ და $\vec{F}_k^{(b)}(X_k^{(b)}, Y_k^{(b)}, Z_k^{(b)})$ –თი.

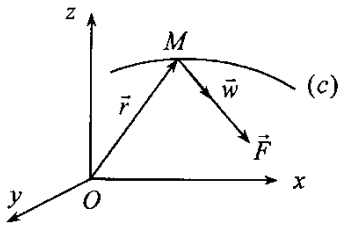
ნივთიერ წერტილთა სისტემაზე მოქმედი შიგა ძალების ნაკრები ვექტორი და ნაკრები ვექტორული მომენტი ნულის ტოლია

$$\vec{F}^{(a)} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(a)} = 0, \quad \vec{L}^{(a)} = \sum_{k=1}^n \vec{L}_k^{(a)} = 0.$$

ნივთიერ წერტილთა სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორი და ნაკრები ვექტორული მომენტი საზოგადოდ ნულისაგან განსხვავებულია

$$\vec{F}^{(b)} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(b)}, \quad \vec{L}^{(b)} = \sum_{k=1}^n \vec{L}_k^{(b)}.$$

განვიხილოთ თავისუფალი $M(x, y, z)$ ნივთიერი წერილი,



რომლის აჩქარებაა \vec{w} , ხოლო მასზე მოქმედი ძალაა $\vec{F}(X, Y, Z)$. ამ წერტილისათვის სამართლიანია (1.2) ტოლობა, რომელსაც მივცეთ შემდეგი სახე

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (31.1)$$

აქ $\vec{r}(x, y, z)$ არის $M(x, y, z)$ ნივთიერი წერტილის რადიუს–ვექტორი კოორდინატა სისტემის სათავის მიმართ. (31.1) განტოლება წარმოადგენს თავისუფალი ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას ვექტორული სახით.

განტოლებათა სისტემას

$$\left\{ m \frac{d^2 x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z \right. \quad (31.2)$$

ეწოდება თავისუფალი ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა დეკარტის კოორდინატებში.

განტოლებათა სისტემას

$$\left\{ m w_\tau = F_\tau, \quad m w_n = F_n, \quad m w_b = F_b \right. \quad (31.3)$$

ან რაც იგივეა

$$\left\{ m \frac{d v}{dt} = F_\tau, \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n, \quad 0 = F_b \right. \quad (31.4)$$

ეწოდება ნივთიერი წერტილის მოძრაობის ბუნებრივი განტოლებები. აქ $w_\tau, w_n, w_b, F_\tau, F_n, F_b$ – შესაბამისად წერტილის აჩქარებისა და მასზე მოქმედი ძალის გეგმილებია ბუნებრივ კოორდინატთა ღერძებზე (მხები, ნორმალი, ბინორმალი).

ახლა განვიხილოთ $M_k(x_k, y_k, z_k), k = \overline{1, n}$ ნივთიერ წერტილთა სისტემა. M_k წერტილის მასა აღვნიშნოთ m_k –თი, აჩქარება \vec{w}_k –თი, მასზე მოქმედი შიგა და გარე ძალები $\vec{F}_k^{(ა)}, \vec{F}_k^{(ბ)}$ –თი. მაშინ წერტილთა სისტემის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს ვექტორული სახით ექნება შემდეგი სახე

$$m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \vec{F}_k^{(ა)} + \vec{F}_k^{(ბ)}, \quad k = \overline{1, n} \quad (31.5)$$

სადაც $\vec{w}_k = \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2}$. განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} = X_k^{(a)} + X_k^{(b)} \\ m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} = Y_k^{(a)} + Y_k^{(b)} \\ m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} = Z_k^{(a)} + Z_k^{(b)} \end{cases} \quad (31.6)$$

წარმოადგენს ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს სკალარული სახით (დეკარტის კოორდინატებში).

§32. დინამიკის ორი ძირითადი ამოცანა

პირველი ამოცანა: მოცემულია ნივთიერი წერტილის მოძრაობის განტოლებები $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$ და მისი მასა $-m$. საძიებელია ნივთიერ წერტილზე მოქმედი $\vec{F}(X, Y, Z)$ ძალა, რომელმაც გამოიწვია ეს მოძრაობა.

ამოცანის ამოსახსნელად ვისარგებლოთ (31.2) განტოლებათა სისტემით, რომელიც საშუალებას მოგვცემს განვსაზღვროთ წერტილზე მოქმედი ძალის სიდიდე და მიმართულება:

$$\text{ძალის გეგმილები: } X = m \frac{d^2 f_1}{dt^2}, \quad Y = m \frac{d^2 f_2}{dt^2}, \quad Z = m \frac{d^2 f_3}{dt^2}.$$

ძალის სიდიდე:

$$|\vec{F}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

ძალის მიმართულება:

$$\cos(\vec{F}; \vec{i}) = \frac{X}{|\vec{F}|}, \quad \cos(\vec{F}; \vec{j}) = \frac{Y}{|\vec{F}|}, \quad \cos(\vec{F}; \vec{k}) = \frac{Z}{|\vec{F}|}.$$

მეორე ამოცანა: მოცემულია ნივთიერ წერტილზე მოქმედი ძალა $\vec{F}(X, Y, Z)$ და მისი მასა $-m$. საძიებელია ნივთიერი წერტილის მოძრაობის კანონი: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

ამოცანის ამოსახსნელად ისევ ვსარგებლობთ (31.2) განტოლებათა სისტემით, რომელსაც მივცეთ შემდეგი სახე:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{X}{m}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{Y}{m}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{Z}{m}$$

სისტემაში შემავალი თითოეული განტოლების მარჯვენა მხარე ცნობილი ფუნქციაა. თუ მოვახდენთ სისტემაში შემავალი განტოლებების ინტეგრებას და ინტეგრების მუდმივებს განვსაზღვრავთ შემდეგი საწყისი პირობების საფუძველზე:

$$\text{როცა } t = t_0,$$

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \text{ (საწყისი მდებარეობის კოორდინატები)}$$

$$v_x = v_{x0}, \quad v_y = v_{y0}, \quad v_z = v_{z0}, \text{ (საწყისი სიჩქარის გეგმილები)}$$

მივიღებთ მეორე ამოცანის ამოხსნას:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

§33. ნივთიერი წერტილის წრფივი მოძრაობა

როგორც ცნობილია, ნივთიერი წერტილის მოძრაობას ეწოდება წრფივი, თუ ის მოძრაობს წრფეზე.

იმისათვის, რომ ნივთიერი წერტილი ასრულებდეს წრფივ მოძრაობას, საჭიროა მასზე მოქმედებდეს მუდმივი მიმართულების ძალა, ხოლო საწყისი სიჩქარეს ქონდეს ძალის მიმართულება.

ვთქვათ m მასის ნივთიერი წერტილი ასრულებს წრფივ მოძრაობას Ox ღერძის გასწვრივ. მაშინ ძალას და აჩქარებას

ექნება წრფის მიმართულება. შესაბამისად, (31.1) განტოლებას წერტილის წრფივი მოძრაობის შემთხვევაში ექნება შემდეგი სახე

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X \quad (33.1)$$

თუ მოვახდენთ ამ განტოლების ინტეგრებას, მივიღებთ ნივთიერი წერტილის წრფივი მოძრაობის განტოლებას

$$x = f(t, c_1, c_2) \quad (33.2)$$

ინტეგრების c_1 და c_2 მუდმივები განისაზღვრებიან საწყისი პირობებიდან, რომლებსაც წრფივი მოძრაობის შემთხვევაში აქვს შემდეგი სახე: როცა $t = t_0$, $x = x_0$, $v = v_0$.

მექანიკური რხევები

ჩვენს სამყაროში, მრავალი მოვლენის შესწავლის დროს მნიშვნელოვან როლს თამაშობს რხევითი მოძრაობა, რხევით მოძრაობას ასრულებენ ატომები მოლეკულებში, რხევას განიცდის ელექტრომაგნიტური ველი, რხევებს ასრულებენ დრეკადი სხეულები და სხვა. არსებითი მნიშვნელობა აქვს რხევების თეორიას მთელ რიგ დისციპლინებში: აკუსტიკაში, ელექტროტექნიკაში, რადიოტექნიკაში, მასალათა გამძლეობაში და სხვა. უკანასკნელ პერიოდში დიდი მნიშვნელობა ენიჭება რხევითი პროცესების შესწავლას ქიმიკაში, ბიოლოგიაში და მედიცინაში.

ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ დრეკადი სხეულების უმარტივეს რხევით მოძრაობებს და შემოვისაზღვრებით იმ მარტივი შემთხვევით, როდესაც რხევის პროცესი განისაზღვრება მხოლოდ ერთი კორდინატით (და მისი ცვლილებებით): ეს კორდინატი შეიძლება სხვადასხვა იყოს. მაგალითად, ქანქარის

გადახრის კუთხე, ზამბარის წაგრძელება, ღეროს ჩაღუნვის სიდიდე და სხვა. ყველა ამ პროცესს ის საერთო თვისება ახასიათებს, რომ სისტემის მდგომარეობა ხასიათდება ერთი სიდიდით (მექანიკაში კოორდინატებით), რომელიც დროის მიხედვით განიცდის ცვლილებას ერთი და იგივე პერიოდული კანონით.

თეორიული მექანიკა სწავლობს სასრული რაოდენობის ნივთიერ წერტილთა სისტემის რხევებს. იმ დამოუკიდებელ განზოგადებულ კოორდინატთა (პარამეტრთა) რაოდენობას, რომელიც განსაზღვრავს სისტემის მდებარეობას დროის ნებისმიერი მომენტისათვის, ეწოდება სისტემის თავისუფლების ხარისხი.

ნივთიერ წერტილთა სისტემის რხევის დიფერენციალური განტოლებები მიიღება ნიუტონის კანონისა და დინამიკური წონასწორობის პრინციპის გამოყენებით. მაგრამ არსებობს ამ განტოლებების მიღების მეორე გზაც, რომელიც ეყრდნობა ენერჯის ცვლილებას. ეს უკანასკნელი ზოგჯერ უფრო მოსახერხებელია შემდეგ მოსაზრებათა გამო:

1) ენერჯის გამოსახულება არაუარყოფითი სკალარია, ამიტომ შეიძლება მარტივად ჩაიწეროს.

2) ძალები, რომლებიც მუშაობს არ ასრულებენ, განტოლებაში არ მიიღებენ მონაწილეობას.

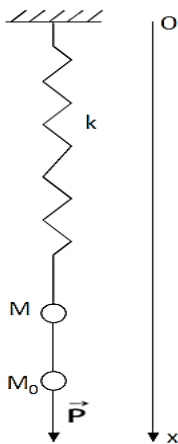
როგორც ცნობილია, სასრულ ნივთიერ წერტილთა სისტემის რხევის შესწავლა დაიყვანება ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნაზე. როდესაც მიღებულ განტოლებათა სისტემა წრფივია, მაშინ ამბობენ, რომ ნივთიერ წერტილთა სისტემა ასრულებს წრფივ რხევას, ხოლო, როდესაც განტოლებათა სისტემა არაწრფივია, მაშინ- არაწრფივ რხევას.

ზემოთ მოყვანილი ნივთიერ წერტილთა სისტემის წრფივი და არაწრფივი რხევის განმარტება შეიძლება შევცვალოთ შემდეგნაირად: როდესაც კინეტიკური და პოტენციური ენერგიები ანალიზურად შეიძლება წარმოდგენილ იქნას შესაბამისად, როგორც განზოგადებული სიჩქარეებისა და კოორდინატების კვადრატული ფორმები, მაშინ სისტემის რხევას ეწოდება წრფივი, წინააღმდეგ შემთხვევაში - არაწრფივი.

ზოგადად, რხევად სისტემათა შორის გვხვდება თავისთავად წრფივი და არაწრფივი შემთხვევები. თუ სისტემა მდგრადი წონასწორობის მახლობლობაში აწარმოებს არაწრფივ რხევებს, მაშინ ასეთი სისტემის შეცვლა შეიძლება მიახლოებით წრფივი სისტემით.

§34. თავისუფალი ანუ ჰარმონიული რხევა

ყველა ცნობილ რხევით მოძრაობებს შორის უმარტივესია ჰარმონიული რხევა. შევისწავლოთ m მასის მქონე M წერტი-



ლის წრფივი მოძრაობა, რომელიც გამოწვეულია $\vec{F} = -\lambda \vec{r}$ ცენტრალური ძალის მოქმედებით, სადაც \vec{F} , \vec{r} წრფის გასწვრივ მიმართული ვექტორებია, ხოლო λ - დადებითი მუდმივი. \vec{F} ძალის ქვეშ შეიძლება წარმოვიდგინოთ დრეკადი ძალები, რომლებიც ემორჩილებიან ჰუკის კანონს. სხვანაირად \vec{F} ძალას აღმდგენ ძალას უწოდებენ, რომელიც ცდილობს m მასის მქონე M წერტილი დააბრუნოს წონასწორობის მდგომარეობაში; რადგან M წერტილის საწყისი სიჩქარე

მიმართულია წრფის გასწვრივ ამიტომ \vec{F} ძალის გავლენით M წერტილი შეასრულებს წრფივ მოძრაობას.

წარმოვადგინოთ სისტემა, რომელიც შედგება უწონადი λ სიხისტის მქონე ზამბარებისაგან და მასზე მიკავშირებული m მასის მქონე მატერიალური წერტილისაგან, რომელიც ასრულებს რხევას ზამბარის ღერძის გასწვრივ. ჩავთვალოთ, რომ ზამბარის ღერძი ემთხვევა Ox (ნახ.34.1). ღერძს ვთქვათ, M_0 წერტილი შეესაბამება M წერტილის საწყის მდგომარეობას. ყველა გარე ძალა, რომელიც მოქმედებს M წერტილზე, წონასწორობაშია. წერტილის გადახრა საწყისი M_0 მდგომარეობიდან რაიმე t დროში აღვნიშნოთ $x(t)$ - თი, მაშინ აღმდგენი ძალის გეგმილი Ox ღერძის მიმართულებაზე ტოლი იქნება $F = -\lambda x$. ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად გვექნება

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k^2 x(t) = 0, \quad (34.1)$$

სადაც

$$k^2 = \frac{\lambda}{m}. \quad (34.2)$$

როგორც ცნობილია (34.1) წარმოადგენს მეორე რიგის ერთგვაროვან მუდმივკოეფიციენტებიან დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის ზოგადი ამონახსნი ასე ჩაიწერება:

$$x(t) = A \cos kt + B \sin kt \quad (34.3)$$

სადაც A და B ნებისმიერი მუდმივებია, რომლებიც განისაზღვრებიან საწყისი პირობებიდან. თუ $t=0$ მომენტისათვის გვეცოდინება წერტილის საწყისი მდებარეობა x_0 და საწყისი სიჩქარე v_0 , მაშინ (34.3) - დან მივიღებთ

$$A = x_0, \quad B = \frac{v_0}{k}. \quad (34.4)$$

ხშირ შემთხვევაში უფრო მოსახერხებელია (34.3) ამოხსნა ჩავწერთ ერთი ფუნქციის საშუალებით

$$x(t) = a \sin(kt + \alpha) \quad (34.5)$$

სადაც

$$A = a \sin \alpha, \quad B = a \cos \alpha, \quad (34.6)$$

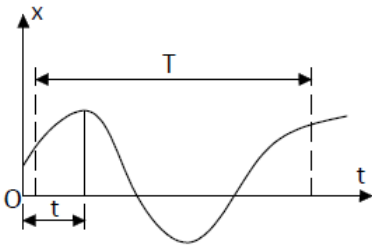
ხოლო a და α განისაზღვრებიან საწყისი პირობებიდან

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}, \quad \alpha = \arctg \frac{k x_0}{v_0}. \quad (34.7)$$

როგორც (34.6)-დან ჩანს, ჰარმონიული რხევის დროს მდგომარეობა აღიწერება სინუსოიდალური ფუნქციის საშუალებით. k სიდიდეს, რომელიც შედის (34.1) დიფერენციალურ განტოლებაში და განისაზღვრება მატერიალურ წერტილთა თავისებურებებით, ეწოდება წრიული სიხშირე. k დაკავშირებულია რხევის T პერიოდთან და v სიხშირესთან შემდეგი ფორმულებით

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\lambda}}, \quad v = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{m}}, \quad (34.8)$$

სხვანაირად v წარმოადგენს რხევათა რიცხვს დროის ერთეულში, ხოლო T არის დრო, რომელიც საჭიროა ერთი სრული რხევის შესასრულებლად. ცხადია, რომ a არის ამპლიტუდა, რომელიც M წერტილის წონასწორობის მდგომარეობიდან მაქსიმალური გადახრის ტოლია. იმისათვის, რომ ჰარმონიული რხევა



სრულად დავახასიათოთ, აუცილებელია ვიცოდეთ რხევის სიხშირე და ამპლიტუდა, ამისათვის კი საჭიროა α სიდიდის განხილვაც, რომელსაც უწოდებენ რხევის საწყის ფაზას. (34.7) ტოლობიდან ჩანს, რომ α არის კუთხე, რომელიც დამოკიდებულია t დროის შერჩევაზე. მართლაც, პერიოდულ მოძრაობას არ აქვს არც დასაწყისი და არც დასასრული, ამიტომ (34.7) პირობას აქვს ნებისმიერი ხასიათი. აქედან შეგვიძლია გავაკეთოთ დასკვნა, α –ს აქვს გარკვეული ფიზიკური მნიშვნელობა. თუ (34.5) დამოკიდებულება ძალაში შედის $t = 0$ მომენტიდან, მაშინ ადგილი აქვს გარე პირობების მოულოდნელ შეცვლას, რომელიც მოქმედებს სისტემაზე. ამ შემთხვევაში α საწყისი ფაზა ხელს უწყობს ამ საწყისი პირობების განხორციელებას, როგორც ეს ჩანს ტოლობიდან

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k x_0}{v_0} \quad (34.9)$$

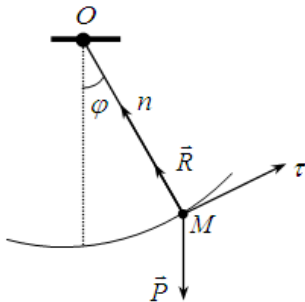
თუ შევისწავლით ორ პერიოდულ მოვლენას, რომელთაც ერთი-დაიგივე სიხშირე და სხვადასხვა ფაზა α_1 და α_2 აქვთ, მაშინ სხვაობას $\alpha_1 - \alpha_2$ ფაზათა სხვაობას უწოდებენ. ფაზათა სხვაობა გვიჩვენებს, თუ რამდენად ჩამორჩება ან უსწრებს ერთი მოვლენა მეორეს. ამიტომ მრავალი მოვლენის შესწავლის დროს ფაზათა სხვაობას აქვს დიდი ფიზიკური მნიშვნელობა, ვიდრე რხევის საწყისი ფაზის აბსოლუტურ მნიშვნელობას.

როგორც მიღებული შედეგებიდან ჩანს, მატერიალური წერტილი $\frac{T}{4}$ დროში მიაღწევს მიზიდულობის ცენტრს, რა საწყისი მანძილითაც არ უნდა იყოს დაშორებული ცენტრიდან. ასეთ მოძრაობას უწოდებენ ავტოქრონულს. ამავე დროს, ეს

მოდრაობა იზოქრონულია, ვინაიდან არ არის დამოკიდებული ამპლიტუდაზე.

§35. მათემატიკური ქანქარა. ფიზიკური ქანქარა

მათემატიკური ქანქარა (საქანნი) ეწოდება ნივთიერ (მძიმე) წერტილს, რომელიც დაკიდებულია უჭიმადი და უწონადი ძაფის საშუალებით უძრავ წერტილზე და მოძრაობს სიმძიმის ძალის მოქმედებით ვერტიკალურ სიბრტყეში.



განვიხილოთ უძრავ საკიდზე (O წერტილი) ჩამოკიდებული l სიგრძის უჭიმადი და უწონადი ძაფზე მიმაგრებული m მასის ნივთიერი M წერტილი, რომელიც მოძრაობს ვერტიკალურ სიბრტყეში წრეწირის რკალზე საწყისი მდგომარეობიდან გადახრილი რაიმე $\varphi = \varphi(t)$ კუთხით. შევადგინოთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \mu^2 \sin \varphi = 0, \tag{35.1}$$

სადაც $\mu^2 = \frac{g}{l}$ (აქ g სიმძიმის ძალის აჩქარებაა) .

როგორც ვხედავთ (35.1) წარმოადგენს მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის ამოხსნა ვერ ხერხდება ელემენტარულ ფუნქციებში. მაგრამ თუ დავუშვებთ, რომ გადახრის φ კუთხე მცირეა (ე.ი. ქანქარა ასრულებს მცირე რხევებს), მაშინ $\sin \varphi \approx \varphi$ და (35.1) განტოლება ასე გადაიწერება

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \mu^2\varphi = 0. \quad (35.2)$$

ეს კი ჰგავს ჰარმონიულ რხევის დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის ამოხსნაც შეიძლება ჩაიწეროს

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\mu t + \alpha) \quad (35.3)$$

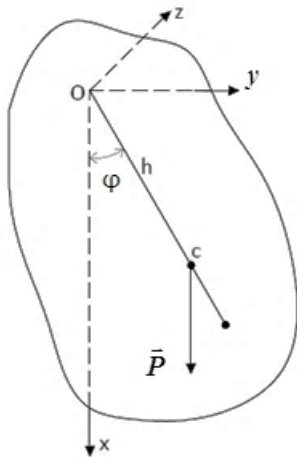
სახით, ხოლო რხევის პერიოდი განისაზღვრება ფორმულით

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (35.4)$$

თუ ჩავწერთ (35.1) განტოლების ზუსტ ამონახსნს, მაშინ რხევის პერიოდი განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right] \quad 5.5)$$

(35.3) ფორმულაში φ_0 არის საწყისი გადახრის კუთხე; აქედან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ რაც მეტია φ_0 კუთხე, მით მეტია რხევის პერიოდი, ე.ი მათემატიკურ საქანს არ აქვს იზოქრონო-



ზის თვისება, იმისათვის რომ მათემატიკურ საქანს (ქანქარას) გააჩნდეს იზოქრონობის თვისება საჭიროა გადახრის კუთხის ზრდასთან ერთად, შევამციროთ საქანის სიგრძე. ამ შემთხვევაში M წერტილი იმოდრავებს არა წრეწირზე, არამედ სხვა მრუდზე, რომელსაც ციკლოიდს უწოდებენ.

ფიზიკური ქანქარა ეწოდება ნებისმიერი ფორმის მყარ სხეულს, რომელსაც შეუძლია იბრუნოს სიმძიმის

ძალის მოქმედებით ჰორიზონტალური ღერძის გარშემო, თუ ის არ გადის სხეულის სიმძიმის ცენტრზე. ამ ბრუნვის ღერძს დაკიდვის ღერძი ეწოდება. თუ ბრუნვის ღერძს დავამთხვევთ Oz ღერძს, ხოლო ვერტიკალურ სიბრტყეს შევუთავსებთ საკოორდინატო Oxy სიბრტყეს, რომელიც მართობულია Oz ღერძის და გადის სხეულის სიმძიმის ცენტრზე, მაშინ რხევის განტოლებას ექნება სახე

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \sin \varphi = 0, \quad (35.6)$$

სადაც $\omega^2 = \frac{mgh}{I_0}$, I_0 - სხეულის ინერციის მომენტი Oz ღერძის მიმართ, φ გადახრის კუთხეა, m - მყარი სხეულის მასა, g - სიმძიმის ძალის აჩქარება, h - მანძილია დაკიდვის წერტილსა და მასების ცენტრს შორის. (35.6) განტოლების მსგავსება (35.1) და (34.1) განტოლებებთან, გვადლევს საშუალებას ანალოგიური დაშვების პირობებში, (იგულისხმება რომ $\sin \varphi \approx \varphi$) (35.6)

ჩავწეროთ შემდეგნაირად

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0. \quad (35.7)$$

თუ დავაკვირდებით, (35.7) ჰგავს (35.2) -ს ამიტომ მისი ამოხსნა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \alpha).$$

ამ შემთხვევაში რხევის პერიოდი გამოითვლება ფორმულით

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mgh}}. \quad (35.8)$$

აქვე მოვიყვანოთ ინერციის მომენტის განმარტებას. სხეულის ინერციის მომენტი რაიმე ბრუნვის ღერძის მიმართ ტოლია ამ

სხეულის მასისა და ბრუნვის ღერძამდე მანძილის კვადრატის ნამრავლისა.

§36. ნივთიერ წერტილთა სისტემის მასათა ცენტრი. თეორემა მასათა ცენტრის მოძრაობის შესახებ

ნივთიერ წერტილთა სისტემის მასათა ცენტრი (ინერციის ცენტრი) ეწოდება გეომეტრიულ C წერტილს, რომლის რადიუს-ვექტორი განისაზღვრება ტოლობით

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k}{M} \quad (36.1)$$

სადაც \vec{r}_c – მასათა ცენტრის რადიუს-ვექტორია კორდინატთა სისტემის სათავის მიმართ, m_k და \vec{r}_k შესაბამისად M_k წერტილის მასა და რადიუს-ვექტორია კორდინატთა სისტემის სათავის მიმართ, ხოლო $M = \sum_{k=1}^n m_k$ – მთელი სისტემის მასაა.

(36.1) ვექტორული ტოლობა სკალარულად ასე ჩაიწერება

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{M}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{M}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{M}. \quad (36.2)$$

თეორემა: ნივთიერ წერტილთა სისტემის მასათა ცენტრი მოძრაობს ისე, როგორც ერთი ნივთიერი წერტილი, რომელშიც თავმოყრილია მთელი სისტემის მასა და მოქმედებს ძალა, რომელიც გარე ძალების ნაკრები ვექტორის ტოლია

$$M \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = \vec{F}^{(s)} \quad (36.3)$$

(36.3) ტოლობის სკალარული სახეა

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = X^{(8)}, \quad M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = Y^{(8)}, \quad M \frac{d^2 z_c}{dt^2} = Z^{(8)} \quad (36.4)$$

უკანასკნელი ფორმულები გვიჩვენებს, რომ შიგა ძალები ვერ ახდენს გავლენას მასათა ცენტრის მოძრაობაზე. მასათა ცენტრის თეორემა საშუალებას იძლევა გამოვიყენოთ იგი ნივთიერ წერტილთა სისტემის ან მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობის შესასწავლად. უნდა აღვნიშნოთ ისიც, რომ მასათა ცენტრის მოძრაობის თეორემა წარმოადგენს ძირითად თეორემას რეაქტიული მოძრაობის თეორიაში.

კერძო შემთხვევაში, როცა სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია, გვაქვს

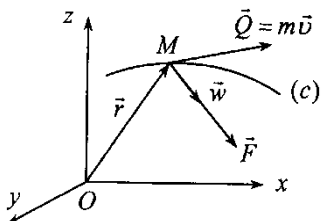
$$\frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = 0, \quad \text{საიდანაც} \quad \vec{r}_c = \vec{c}_1 t + \vec{c}_2.$$

ამგვარად, თუ ნივთიერ წერტილთა სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია, მაშინ სისტემის მასების ცენტრი ასრულებს წრფივ და თანაბარ მოძრაობას.

§37. ნივთიერი წერტილისა და წერტილთა

სისტემის მოძრაობის რაოდენობა. ძალის იმპულსი. თეორემები მოძრაობის რაოდენობის შესახებ

ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობა ეწოდება ამ წერტილის მასისა და სიჩქარის ნამრავლს.



თუ m ნივთიერი წერტილის მასაა, $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ – მისი სიჩქარე, მაშინ

$$\vec{Q} = m\vec{v} \quad (37.1)$$

(37.1) ტოლობის სკალარული სახეა

$$Q_x = m v_x, \quad Q_y = m v_y, \quad Q_z = m v_z \quad (37.2)$$

ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობის რაოდენობა ეწოდება სისტემაში შემავალი წერტილების მოძრაობის რაოდენობების გეომეტრიულ ჯამს.

თუ სისტემის $M_k(x_k, y_k, z_k)$ წერტილის მასაა m_k , ხოლო სიჩქარე $\vec{v}_k(v_{kx}, v_{ky}, v_{kz})$, მაშინ

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k \quad (37.3)$$

(37.3) ტოლობის სკალარული სახეა

$$Q_x = \sum_{k=1}^n m_k v_{kx}, \quad Q_y = \sum_{k=1}^n m_k v_{ky}, \quad Q_z = \sum_{k=1}^n m_k v_{kz} \quad (37.4)$$

ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობის რაოდენობა ტოლია სისტემის მასების ცენტრის მოძრაობის რაოდენობის, თუ მასში თავმოყრილია მთელი სისტემის მასა

$$\vec{Q} = M \vec{v}_c \quad (37.5)$$

აქ M ნივთიერ წერტილთა სისტემის მასაა, ხოლო \vec{v}_c – მასების ცენტრის სიჩქარეა.

ძალის ელემენტარული იმპულსი ეწოდება ძალის და დროის უსასრულოდ მცირე შუალედის ნამრავლს

$$d\vec{S} = \vec{F} dt.$$

ძალის სრული იმპულსი დროის სასრულო $(t_0; t_1)$ შუალედში ეწოდება დროის ამავე შუალედში განსაზღვრულ ინტეგრალს ძალის ელემენტარული იმპულსიდან

$$\vec{S} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt \quad (37.6)$$

აქ $\vec{F}(X,Y,Z)$ ნივთიერ წერტილზე მოქმედი ძალაა. (37.6)

ტოლობის სკალარული სახეა

$$S_x = \int_{t_0}^{t_1} X dt, \quad S_y = \int_{t_0}^{t_1} Y dt, \quad S_z = \int_{t_0}^{t_1} Z dt \quad (37.7)$$

თეორემა 1: ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის წარმოებული დროთი ამ წერტილზე მოქმედი ძალის ტოლია

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F} \quad (37.8)$$

თეორემა 2: ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილება დროის სასრულ შუალედში ტოლია ამ წერტილზე მოქმედი ძალის სრული იმპულსისადროის იმავე შუალედში

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt \quad (37.9)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა წერტილზე მოქმედი ძალა ნულის ტოლია $-\vec{F} = 0$, მაშინ ამ წერტილის მოძრაობის რაოდენობა მუდმივია

$$\vec{Q} = \vec{Q}_0 = \overrightarrow{const}$$

ეს ნიშნავს იმას, რომ ნივთიერი წერტილი მოძრაობს მუდმივი სიჩქარით, ე.ი. ასრულებს თანაბარ მოძრაობას.

თეორემა 3: ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობის რაოდენობის წარმოებული დროთი სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორის ტოლია

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^{(g)} \quad (37.10)$$

თეორემა 4: ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილება დროის სასრულ შუალედში ტოლია

სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორის სრული იმპულსისა დროის იმავე შუალედში

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}^{(g)} dt \quad (37.11)$$

იმ კერძო შემთხვევაში, როცა წერტილთა სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია $-\vec{F}^{(g)} = 0$, მაშინ სისტემის მოძრაობის რაოდენობა მუდმივია $\vec{Q} = \overrightarrow{const}$.

SI სისტემაში მოძრაობის რაოდენობისა და ძალის იმპულსის განზომილებაა

$$[Q] = [m][v] = \text{კგ} \frac{\text{მ}}{\text{წმ}} = \text{კგ} \frac{\text{მ}}{\text{წმ}^2} \text{წმ} = \text{ნ} \cdot \text{წმ}, \quad [S] = [F][t] = \text{ნ} \cdot \text{წმ}$$

§38. ძალის მუშაობა. სიმძლავრე. ძალის ველი. პოტენციალური ველი

ვთქვათ ნივთიერ წერტილზე მოქმედებს $\vec{F}(X, Y, Z)$ ძალა, რომელიც იწვევს მის უსასრულოდ მცირე $d\vec{r}(dx, dy, dz)$ გადაადგილებას. აქ $\vec{r}(x, y, z)$ ნივთიერი წერტილის რადიუს-ვექტორია კოორდინატთა სათავის მიმართ.

ძალის ელემენტარული მუშაობა ეწოდება ძალისა და ელემენტარული გადაადგილების სკალარულ ნამრავლს

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos(\vec{F}; \hat{d\vec{r}}) \quad (38.1)$$

შევნიშნოთ, რომ მუშაობა სკალარული სიდიდეა. მუშაობის განმარტებიდან გამომდინარე, შეიძლება მოვიყვანოთ მისი რამოდენიმე თვისება:

1) თუ კუთხე ძალის მიმართულებასა და გადაადგილების მიმართულებას შორის მახვილია, მაშინ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა დადებითი რიცხვით გამოისახება.

2) თუ ძალა გადაადგილების მართობულია, მაშინ მის მიერ შესრულებული მუშაობა ნულის ტოლია.

3) თუ კუთხე ძალის მიმართულებასა და გადაადგილების მიმართულებას შორის ბლაგვია, მაშინ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა უარყოფითი რიცხვით გამოისახება.

SI სისტემაში მუშაობის განზომილებაა:

$$[A] = [F][L] = \text{ნ} \cdot \text{მ} = \text{ჯ} (\text{ჯოული})$$

რამდენიმე ძალის ტოლქმედის მიერ შესრულებული მუშაობა მდგენელი ძალების მიერ შესრულებული მუშაობების ალგებრული ჯამია.

ძალის მუშაობა შესრულებული რაიმე გადაადგილებაზე ტოლია შემადგენელ გადაადგილებებზე შესრულებული მუშაობების ალგებრული ჯამის.

ძალის მიერ შესრულებული სრული მუშაობა M_0M მრუდზე ტოლია M_0M მრუდზე აღებული მრუდწირული ინტეგრალის ძალის ელემენტარული მუშაობიდან

$$A = \int_{M_0M} (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \int_{M_0M} (Xdx + Ydy + Zdz) \quad (38.2)$$

შევნიშნოთ, რომ თუ წერტილის მოძრაობის განტოლებებია $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, მაშინ

$$(\vec{F} \cdot d\vec{r}) = Xdx + Ydy + Zdz = (Xv_x + Yv_y + Zv_z)dt = (\vec{F} \cdot \vec{v})dt$$

შესაბამისად,

$$A = \int_{t_0}^{t_1} (\vec{F} \cdot \vec{v})dt \quad (38.3)$$

დროის ერთეულში შესრულებულ მუშაობას ეწოდება სიმ-
ძლავრე

$$N = \frac{(\vec{F} \cdot d\vec{r})}{dt} = (\vec{F} \cdot \vec{v}) \quad (38.4)$$

ამ ტოლობის მიხედვით ძალის მუშაობა შეიძლება ჩაიწეროს შემ-
დეგი ტოლობით

$$A = \int_{t_0}^{t_1} N dt \quad (38.5)$$

SI სისტემაში სიმძლავრის განზომილებაა:

$$[N] = [F][v] = \text{ნ} \frac{\text{მ}}{\text{წმ}} = \frac{\text{ჯ}}{\text{წმ}} = \text{ვატი}$$

ვთქვათ ნივთიერ წერტილზე მომედებს წერტილის მდებარეობაზე დამოკიდებული ძალა $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, ე.ი.

$$X = X(x, y, z), \quad Y = Y(x, y, z), \quad Z = Z(x, y, z).$$

ძალის ველი ეწოდება სივრცეს (ან სივრცის ნაწილს), რომლის ყოველ წერტილში მოქმედებს ძალა, რომელიც ამ წერტილის კოორდინატების ცალსახა ფუნქციაა.

თუ ძალა არ არის ცხადად დამოკიდებული დროზე, მაშინ ძალის ველს სტაციონარული ველი ეწოდება.

თუ ძალა ცხადად დამოკიდებულია დროზე, მაშინ ძალის ველს არასტაციონარული ველი ეწოდება.

ვთქვათ არსებობს წერტილის მდებარეობაზე დამოკიდებული ისეთი $U(x, y, z)$ ფუნქცია, რომელიც წერტილზე მოქმედ ძალასთან დაკავშირებულია ტოლობით

$$dU = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) \quad (38.6)$$

ასეთ შემთხვევაში ძალის ველს პოტენციალურ ველს უწოდებენ, ხოლო $U(x, y, z)$ – ფუნქციას ძალთა ფუნქციას ანუ პოტენციალს.

იმისათვის რომ ძალის ველი იყოს პოტენციალური ველი, აუცილებელი და საკმარისია, რომ

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)\vec{k} = 0 \quad (38.7)$$

თუ ძალის ველი პოტენციალურია, მაშინ

$$A = \int_{M_0M} (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \int_{M_0M} dU = U_M - U_{M_0} \quad (38.8)$$

ამგვარად, ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა პოტენციალურ ველში ტოლია ძალთა ფუნქციის ნაზრდისა და არ არის დამოკიდებული წერტილის ტრაექტორიაზე, არამედ დამოკიდებულია ძალთა ფუნქციის მნიშვნელობაზე საწყის და საბოლოო წერტილებში.

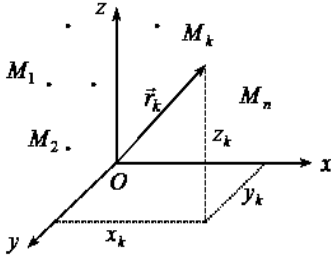
პოტენციალურ ველში ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა ყოველ შეკრულ ტრაექტორიაზე ნულის ტოლია.

§39. ინერციის მომენტები

ინერციის მომენტების გამოკვლევა, მასათა ცენტრის განსაზღვრა და ზოგიერთი სხვა ამოცანა, რომელიც დაკავშირებულია სხეულში მასათა განაწილებასთან, წარმოადგენს მასათა გეომეტრიის საგანს.

დინამიკის კანონების ჩამოყალიბებისას აღვნიშნეთ, რომ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის შესწავლისას მისი ინერტულობის განმსაზღვრელი არის მისი მასა. როდესაც შეისწავლება მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა, მაშინ მისი ინერტულობის ზომას წარმოადგენს სხეულის მასა, ხოლო თუ მყარი სხეული ასრულებს ბრუნვას უძრავი ღერძის გარშემო, მაშინ მისი ინერტულობის საზომია ე.წ. ინერციის მომენტი.

აღვნიშნოთ, რომ მყარი სხეულის (როგორც ნივთიერ წერტილთა უსასრულო სისტემის) მოძრაობა დამოკიდებულია არა მარტო ამ სხეულის მასაზე, არამედ მასში ამ მასის განაწილებაზეც. ამდენად, მყარ სხეულში მასების განაწილების



დასახასიათებლად მექანიკაში შემოაქვთ ინერციის მომენტის ცნება.

ვთქვათ მოცემულია $M_k(x_k, y_k, z_k), k = \overline{1, n}$ ნივთიერ წერტილთა სისტემა. m_k იყოს M_k წერტილის მასა, ხოლო \vec{r}_k –

ამ წერტილის რადიუსვექტორი კოორდინატთა სისტემის სათავის მიმართ.

პოლარული ინერციის მომენტი (ინერციის მომენტი წერტილის მიმართ):

$$I_0 = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) \quad (39.1)$$

ინერციის მომენტები საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ:

$$I_{oyz} = \sum_{k=1}^n m_k x_k^2, \quad I_{oxz} = \sum_{k=1}^n m_k y_k^2, \quad I_{oxy} = \sum_{k=1}^n m_k z_k^2. \quad (39.2)$$

სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა: $I_{oyz} + I_{oxz} + I_{oxy} = I_0$.

ინერციის მომენტები საკოორდინატო ღერძების მიმართ:

$$I_x = \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2),$$

$$I_y = \sum_{k=1}^n m_k (z_k^2 + x_k^2), \quad (39.3)$$

$$I_z = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2).$$

სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა: $I_x + I_y + I_z = 2I_0$.

ცენტრიდანული ინერციის მომენტები (ინერციის ნამრავლები):

$$I_{xy} = \sum_{k=1}^n m_k x_k y_k, \quad I_{yz} = \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k, \quad I_{xz} = \sum_{k=1}^n m_k x_k z_k \quad (39.4)$$

ინერციის მომენტი კოორდინატთა სათავეზე გამავალი ნებისმიერი ღერძის მიმართ: ვთქვათ Δ არის კოორდინატთა სათავეზე გამავალი ნებისმიერი ღერძი, ხოლო $\vec{e}(l, m, n)$ ამ ღერძის მიმართეული ერთეულოვანი ვექტორია, l, m, n –მიმართულების კოსინუსებია.

ნივთიერ წერტილთა სისტემის ინერციის მომენტი კოორდინატთა სათავეზე გამავალი ნებისმიერი Δ ღერძის მიმართ გამოითვლება ფორმულით:

$$I_\Delta = I_x l^2 + I_y m^2 + I_z n^2 - 2I_{xy} lm - 2I_{xz} ln - 2I_{yz} mn \quad (39.5)$$

თუ გვსურს განვსაზღვროთ რომელიმე მყარი სხეულის ინერციის მომენტი, უნდა ვისარგებლოთ შემდეგი ფორმულებით:

პოლარული ინერციის მომენტი:

$$I_0 = \int_{(M)} (x^2 + y^2 + z^2) dm = \int_{(V)} \rho (x^2 + y^2 + z^2) dv \quad (39.6)$$

ინერციის მომენტები საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ:

$$I_{oyz} = \int_{(M)} x^2 dm = \int_{(V)} \rho x^2 dv, \\ I_{oxz} = \int_{(M)} y^2 dm = \int_{(V)} \rho y^2 dv, \quad (39.7)$$

$$I_{oxy} = \int_{(M)} z^2 dm = \int_{(V)} \rho z^2 dv .$$

ინერციის მომენტები საკოორდინატო ღერძების მიმართ:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{(M)} (y^2 + z^2) dm = \int_{(V)} \rho (y^2 + z^2) dv , \\ I_y &= \int_{(M)} (x^2 + z^2) dm = \int_{(V)} \rho (x^2 + z^2) dv , \\ I_z &= \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm = \int_{(V)} \rho (x^2 + y^2) dv . \end{aligned} \quad (39.8)$$

ცენტრიდანული ინერციის მომენტები:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_{(M)} xy dm = \int_{(V)} \rho xy dv , \\ I_{xz} &= \int_{(M)} xz dm = \int_{(V)} \rho xz dv , \\ I_{yz} &= \int_{(M)} yz dm = \int_{(V)} \rho yz dv . \end{aligned} \quad (39.9)$$

ამ ფორმულებში dm – მყარი სხეულის ელემენტარული ნაწილაკის მასაა, dv – მოცულობა, ρ – სიმკვრივე.

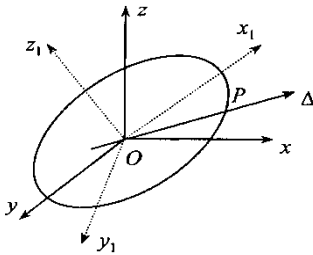
ინერციის მომენტი პარალელური ღერძების მიმართ (ჰიუგენს–შტეინერის თეორემა):

რომელიმე ღერძის მიმართ ნივთიერ წერტილთა სისტემის ინერციის მომენტი ტოლია მასების ცენტრზე გამავალი ამ ღერძის პარალელური ღერძის მიმართ ინერციის მომენტისა და სისტემის მასისა და ღერძებს შორის მანძილის კვადრატის ნამრავლის ჯამის

$$I_{\Delta} = I_C + Md^2 \quad (39.10)$$

ამ ფორმულაში I_C მასების C ცენტრზე გამავალი Δ ღერძის პარალელურიღერძის მიმართ სისტემის ინერციის მომენტია, d — ამ ღერძებს შორის მანძილი, M — სისტემის მასა.

ინერციის ელიფსოიდი. ინერციის მომენტი კოორდინატთა სისტემის სათავეზე გამავალი ნებისმიერი Δ ღერძის მიმართ,



რომელიც გამოითვლება (39.5) ფორმულით, დამოკიდებულია O წერტილზე და Δ ღერძის მიმართულების l, m, n კოსინუსებზე. როგორ შეიცვლება ინერციის მომენტი, როცა ვცვლით Δ ღერძის მიმართულებას? ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა (39.5) ფორმულა, რომელსაც შეიძლება მივცეთ შემდეგი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია: Δ ღერძზე ავირჩიოთ ისეთი $P(x, y, z)$ წერტილი, რომლის დაშორება O წერტილიდან განისაზღვრება ტოლობით

$$OP = \frac{1}{\sqrt{I_\Delta}}.$$

ცხადია, რომ $x = \frac{l}{\sqrt{I_\Delta}}$, $y = \frac{m}{\sqrt{I_\Delta}}$, $z = \frac{n}{\sqrt{I_\Delta}}$. ამის

გათვალისწინებით (39.5) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy - 2I_{xz} xz - 2I_{yz} yz = 1 \quad (39.11)$$

ეს განტოლება წარმოადგენს მეორე რიგის ზედაპირის განტოლებას, რომლის ცენტრი მდებარეობს O წერტილში. რადგან x, y, z კოორდინატები ლეზულობენ სასრულ მნიშვნელობებს, l, m, n სიდიდეები ნაკლებია ერთზე, ხოლო $I_\Delta \neq 0$, ამიტომ

(39.11) განტოლება წარმოადგენს ელიფსოიდის განტოლებას. მას **ინერციის ელიფსოიდი** ეწოდება.

ამ ელიფსოიდის მთავარ ღერძებს *ინერციის მთავარი ღერძები* ეწოდება O წერტილის მიმართ. თუ O წერტილი წარმოადგენს მასების ცენტრს, მაშინ მთავარ ღერძებს *ინერციის მთავარი ცენტრალური ღერძები* ეწოდება, ხოლო *ელიფსოიდს-ინერციის ცენტრალური ელიფსოიდი*.

თუ ელიფსოიდის მთავარი ღერძები კოორდინატთა სისტემის ღერძებს ემთხვევა, მაშინ ელიფსოიდის განტოლებაში არ შევა ინერციის ნამრავლები და (39.11) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$I_{x_1} x_1^2 + I_{y_1} y_1^2 + I_{z_1} z_1^2 = 1 \quad (39.12)$$

§40. ნივთიერი წერტილისა და წერტილთა სისტემის კინეტიკური ენერჯია

ვთქვათ მოცემულია m მასის ნივთიერი წერტილი, რომლის სიჩქარეა $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$.

ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერჯია ეწოდება მისი მასისა და სიჩქარის კვადრატის ნამრავლის ნახევარს

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \quad (40.1)$$

SI სისტემაში კინეტიკური ენერჯიის განზომილებაა:

$$[T] = [m][v^2] = \text{კგ} \frac{\text{მ}^2}{\text{წმ}^2} = \text{ნ} \cdot \text{მ} = \text{ჯ} (\text{ჯოული})$$

თეორემა: ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერჯიის ცვლილება დროის რომელიმე სასრულ შუალედში, ტოლია წერტილზე მოქმედი ძალის მიერ შესრულებული მუშაობისა შესაბამის გადაადგილებაზე დროის იმავე შუალედში.

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{M_0, M} (\vec{F} \cdot d\vec{r}) \quad (40.2)$$

თუ ძალის ველი პოტენციალურია, ე.ი. $dU = (\vec{F} \cdot d\vec{r})$, სადაც U – ძალთა ფუნქციაა, მაშინ

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = U - U_0 \quad (40.3)$$

ე.ი. კინეტიკური ენერჯიის ნაზრდი ძალთა ფუნქციის ნაზრდის ტოლია.

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $\Pi(x, y, z) = -U(x, y, z)$ და ვუწოდოთ მას ნივთიერი წერტილის პოტენციალური ენერჯია. მაშინ (40.3) ტოლობას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე:

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi = \frac{mv_0^2}{2} + \Pi_0 = h = const.$$

ამგვარად, პოტენციალურ ველში ნივთიერი წერტილის კინეტიკური და პოტენციალური ენერჯიების ჯამი მუდმივი სიდიდეა.

ნივთიერ წერტილთა სისტემის კინეტიკური ენერჯია ეწოდება სისტემაში შემავალი წერტილების კინეტიკური ენერჯიების ჯამს

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} (v_{kx}^2 + v_{ky}^2 + v_{kz}^2) \quad (40.4)$$

აქ $m_k - M_k(x_k, y_k, z_k)$ წერტილის მასაა, ხოლო $\vec{v}_k(v_{kx}, v_{ky}, v_{kz})$ მისი სიჩქარე.

კენიგის თეორემა: ნივთიერ წერტილთა სისტემის კინეტიკური ენერგია შეიძლება წარმოდგენილ იქნას ორი შესაკრების სახით: პირველი შესაკრები არის ნივთიერ წერტილთა სისტემის მასების ცენტრის კინეტიკური ენერგია, რომელშიც თავმოყრილია მთელი სისტემის მასა, ხოლო მეორე შესაკრები არის მასათა ცენტრის მიმართ ნივთიერ წერტილთა სისტემის ფარდობითი მოძრაობის კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + T_{\text{ფ}} \quad (40.5)$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევები:

1) ნივთიერ წერტილთა სისტემა ასრულებს გადატანით მოძრაობას. მაშინ (40.5) ფორმულა გვაძლევს

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 \quad (40.6)$$

2) ნივთიერ წერტილთა სისტემა ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას რაიმე Δ ღერძის გარშემო. მაშინ

$$T = \frac{1}{2} I_{\Delta} \omega^2 \quad (40.7)$$

სადაც ω – ღერძის მიმართ სისტემის ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა, ხოლო I_{Δ} – სისტემის ინერციის მომენტია ბრუნვის ღერძის მიმართ.

3) ნივთიერ წერტილთა სისტემა ასრულებს ნებისმიერ მოძრაობას. ეს მოძრაობა შეიძლება წარმოდგენილ იქნას როგორც გადატანითი და ბრუნვითი მოძრაობების ერთობლიობა. ამიტომ

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2. \quad (40.8)$$

(40.8) ტოლობაში პირველი შესაკრები განსაზღვრავს გადატანითი მოძრაობის კინეტიკურ ენერგიას, ხოლო მეორე შესაკრები

– ბრუნვითი მოძრაობის კინეტიკურ ენერგიას. I_C არის სისტემის ინერციის მომენტი მასათა ცენტრზე გამავალი ბრუნვის ღერძის მიმართ, ω – სისტემის ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა ამ ღერძის მიმართ.

თეორემა ნივთიერ წერტილთა სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების შესახებ: ნივთიერ წერტილთა სისტემის კინეტიკური ენერგიის ცვლილება დროის რაიმე სასრულ შუალედში ტოლია სისტემაზე მოქმედი შიგა და გარე ძალების მიერ შესრულებულ მუშაობათა ჯამის დროის იმავე შუალედში

$$T - T_0 = \int_{M_0M} \sum_{k=1}^n (\vec{F}_k^{(a)} \cdot d\vec{r}_k) + \int_{M_0M} \sum_{k=1}^n (\vec{F}_k^{(b)} \cdot d\vec{r}_k). \quad (40.9)$$

თუ ძალის ველი პოტენციალურია, ე.ი.

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k^{(a)} \cdot d\vec{r}_k) + \sum_{k=1}^n (\vec{F}_k^{(b)} \cdot d\vec{r}_k) = dU,$$

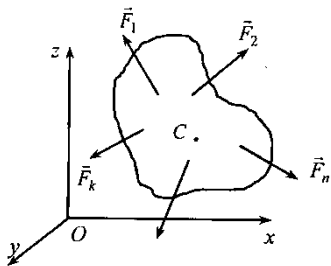
სადაც $U = U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$ ძალთა ფუნქციაა, მაშინ

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = h = const \quad (40.10)$$

აქ $\Pi = -U$ – წერტილთა სისტემის პოტენციალური ენერგიაა.

ამგვარად, პოტენციალურ ველში ნივთიერ წერტილთა სისტემის კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების ჯამი მუდმივი სიდიდეა. (40.10) ტოლობა განსაზღვრავს სისტემის მექანიკური ენერგიის შენახვის კანონს.

§41. მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა



ვთქვათ მყარი (T) სხეული ასრულებს გადატანით მოძრაობას მასზე მოქმედი $\vec{F}_k, k = \overline{1, n}$ ძალების გავლენით. როგორც ცნობილია, ამ შემთხვევაში ყველა მის წერტილს თავსებადი

ტრანექტორიები აქვთ და გააჩნიათ გეომეტრიულად ტოლი სიჩქარე და აჩქარება. ამდენად, მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა სავსებით დახასიათდება მისი მასების ცენტრის მოძრაობით, რომლის მოძრაობის ვექტორული განტოლებაა

$$M \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = \vec{F}^{(g)} \quad (41.1)$$

სადაც M –ით აღნიშნულია სხეულის მასა, \vec{r}_c – თი კი მასების ცენტრის რადიუს-ვექტორი კოორდინატა სისტემის სათავის მიმართ. (41.1) განტოლების სკალარული სახეა

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = X^{(g)}, \quad M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = Y^{(g)}, \quad M \frac{d^2 z_c}{dt^2} = Z^{(g)} \quad (41.2)$$

ეს განტოლებები გამოსახავენ მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს. აღსანიშნავია, რომ შიგა ძალები მოძრაობის განტოლებებში არ მონაწილეობს, რადგან მათი ჯამი ნულის ტოლია.

§42. მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო

ვთქვათ მყარ (T) სხეულზე მოქმედი $\vec{F}_k, k = \overline{1, n}$ ძალები იწვევენ მის ბრუნვას უძრავი Oz ღერძის გარშემო. როგორც ცნობილია, ასეთი მოძრაობის მისაღებად საკმარისია დავამაგროთ

მყარი სხეულის რომელიმე ორი წერტილი, რომლებიც ბრუნვის ღერძზე მდებარეობენ.

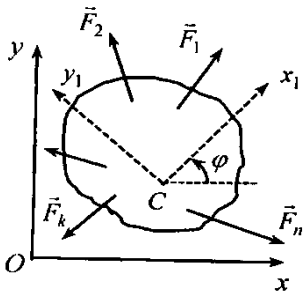
მტკიცდება, რომ უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი მყარი სხეულის ბრუნვის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$I_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = L_z \quad (42.1)$$

ამ ფორმულაში I_z არის მყარი სხეულის ინერციის მომენტი ბრუნვის Oz ღერძის მიმართ, φ – მობრუნების კუთხეა, ხოლო L_z – მყარ სხეულზე მოქმედი ძალების ნაკრები მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ (მაბრუნებელი მომენტი).

§43. მყარი სხეულის ბრტყელ-პარალელური მოძრაობა

ვთქვათ მყარი (T) სხეული ასრულებს ბრტყელ-პარალელ-



ლურ მოძრაობას, ე.ი. მანძილი მისი ყოველი წერტილიდან რაიმე უძრავ სიბრტყეზე მოძრაობის პროექციაში რჩება უცვლელი. ვიგულისხმობთ, რომ ეს უძრავი სიბრტყე Oxy სიბრტყეა და მყარ სხეულზე მოდებული ყველა ძალა მდებარეობს უძრავი სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეში

რომელიც მასების $C(x_c, y_c)$ ცენტრზე გადის. კუთხე, რომელსაც მოძრავი Cx_1y_1 სისტემის Cx_1 ღერძი შეადგენს Ox ღერძთან აღვნიშნოთ φ -ით, ხოლო მყარ სხეულზე მოქმედი $\vec{F}_k, k = \overline{1, n}$

გარე ძალების ნაკრები ვექტორი $\vec{F}(X, Y)$ -ით. თუ გავიხსენებთ იმასაც, რომ მყარი სხეულის ბრტყელ-პარალელური მოძრაობა შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც გადატანილი და რაიმე ღერძის მიმართ ბრუნვითი მოძრაობების ერთობლიობა, მაშინ განტოლებები

$$M \frac{d\vec{w}_c}{dt} = \vec{F}, \quad (43.1)$$

$$I_c \frac{d\omega}{dt} = L_c, \quad (43.2)$$

წარმოადგენენ მყარი სხეულის ბრტყელი მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს. ამ განტოლებებში M სხეულის მასაა, \vec{w}_c მისი მასების ცენტრის აჩქარებაა, I_c ინერციის მომენტია C წერტილზე Oxy სიბრტყის მართობულად გამავალი ღერძის მიმართ, ω ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა, ხოლო L_c სხეულზე მოდებული გარე ძალების ნაკრები მომენტია C წერტილის მიმართ. (43.1) და (43.2) განტოლებები მოგვცემს შემდეგ განტოლებათა სისტემას

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = X, \quad M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = Y, \quad I_c \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = L_c \quad (43.3)$$

დარტყმის ელემენტარული თეორია

§44. დარტყმის ცნება. დარტყმის თეორიის ძირითადი

განტოლება

ბუნებაში საკმაოდ ხშირად შეინიშნება ისეთი მოვლენები, როდესაც ნივთიერი სხეულების ურთიერთქმედება განისაზღვრება დროის მცირე შუალედით (წამის მეათასედი,

მეთათასედი და ა.შ.). მიუხედავად დროის შუალედის ასეთი სიმცირისა, ამ დროს წარმოიშობა იმდენად დიდი ძალები, რომ მათი იმპულსი დროის ამ მცირე შუალედშიაღწევს საკმარისად დიდ მნიშვნელობას და ვღებულობთ ნივთიერი სხეულების სიჩქარეთა მკვეთრ, თითქმის მყისიერ ცვლილებას. ნივთიერი სხეულების ასეთ ხანმოკლე ურთიერთქმედებას უწოდებენ დარტყმას. ამ დროს წარმოშობილ ძალებს დარტყმით ძალებს უწოდებენ, ხოლო დარტყმითი ძალის იმპულსს, წარმოქმნილს დარტყმის განმავლობაში, უწოდებენ დარტყმით (მყისიერ) იმპულსს.

ამგვარად, **მოვლენას**, როდესაც ძალიან მცირე დროის τ შუალედში ნივთიერი სხეულების ურთიერთქმედებისას მათი წერტილების სიჩქარეები სასრული სიდიდით იცვლება, ეწოდება **დარტყმა**.

დარტყმის დროს სხეულზე მოქმედი ძალები დიდია ($\frac{1}{\tau}$ რიგის). ამის გამო სხეულთა ურთიერთქმედების საზომად განიხილება არა დარტყმითი ძალები, არამედ მათი იმპულსები. დარტყმითი ძალის იმპულსი

$$\vec{S}_{\text{დ}} = \int_0^{\tau} \vec{F}_{\text{დ}} dt = \vec{F}_{\text{დ}}^{\text{საშ}} \tau$$

სასრული სიდიდეა.

ვინაიდან დროის შუალედში τ ძალიან მცირეა, არადარტყმითი ძალების მოქმედება შეიძლება უგულებელვყოთ. ასევე შეიძლება უგულებელვყოთ სხეულის წერტილების გადაადგილება დარტყმის დროს.

აღნიშნოთ წერტილის სიჩქარე დარტყმის საწყისში \vec{v} -თი, ხოლო დარტყმის დასასრულს \vec{u} -თი. მაშინ მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემის თანახმად

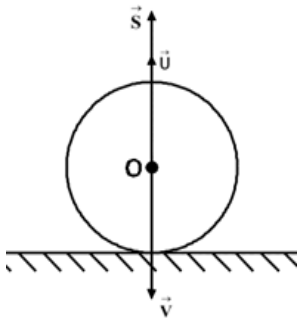
$$m(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{S}_{\text{გ}}$$

ეს განტოლება წარმოადგენს დარტყმის თეორიის ძირითად განტოლებას.

დარტყმის შუალედში წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილება ტოლია დარტყმითი ძალების ნაკრები იმპულსის.

§45. ალდგენის კოეფიციენტი

ორი სხეულის დარტყმის შედეგად აღძრული დარტყმითი იმპულსის სიდიდე დამოკიდებულია არა მარტო სხეულების მასასა და სიჩქარეზე არამედ დამოკიდებულია აგრეთვე სხეულების დრეკად თვისებებზე. ამ თვისებების მახასიათებელ სიდიდეს ეწოდება ალდგენის კოეფიციენტი. განვიხილოთ



ნახ. 45.1

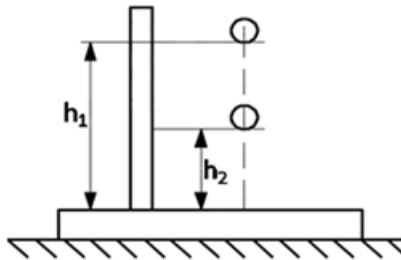
ბურთულა, რომელიც ვარდება ვერტიკალურად უძრავ ჰორიზონტალურ ფილაზე. დარტყმის პროცესი შეიძლება დავეოთ ორ ფაზად. ბურთულას სიჩქარე v - დან მცირდება ნულამდე. ბურთულა ამ დროს დეფორმირდება და მისი კინეტიკური ენერგია $\frac{mv^2}{2}$ გადადის პოტენციალურ ენერგიაში.

დარტყმის მეორე ფაზაში ბურთულა დრეკადი ძალების მოქმედებით აღიდგენს თავის ფორმას და

პოტენციალური ენერგია გადადის კინეტიკურ ენერგიაში $\frac{mu^2}{2}$.

ამ დროს ბურთულას მექანიკური ენერგის აღდგენა მთლიანად არ ხდება $u > v$. დარტყმის ბოლოს სხეულის სიჩქარის მოდულის შეფარდება დარტყმის დასაწყისში სხეულის სიჩქარის მოდულთან წარმოადგენს აღდგენის კოეფიციენტს $k = \frac{u}{v}$. სხვადასხვა სხეულებისათვის დარტყმის კოეფიციენტი განისაზღვრება ცდების საშუალებით. $0 \leq k \leq 1$. თუ $k = 1$ დარტყმა არის აბსოლუტურად დრეკადი. თუ $k = 0$, დარტყმა არის აბსოლუტურად არადრეკადი. ამ შემთხვევაში დარტყმა მთავრდება პირველ ფაზაში.

ვთქვათ გვინდა გავიგოთ რომელიმე ნივთიერების აღდგენის კოეფიციენტი, ამ ნივთიერებისაგან ამზადებენ ბირთვს და მასიურ ფილას. ფილას მოათავსებენ უძრავ მდგომარეობაში ჰორიზონტალურად და მასზე რაიმე h_1 სიმაღლიდან საწყისი სიჩქარის გარეშე ჩამოაგდებენ ბირთვს. დაცემის შემდეგ ბირთვი ახტება h_2 სიმაღლეზე, $h_2 < h_1$. ბირთვი ვარდება ფილაზე $v = \sqrt{2gh_1}$ სიჩქარით. შემდგომ ახტება $u = \sqrt{2gh_2}$ სიჩქარით. თუ



ნახ. 45.2

აღდგენის კოეფიციენტის განმსაზღვრელ ფორმულაში შევიტანთ ამ სიდიდეებს, მივიღებთ

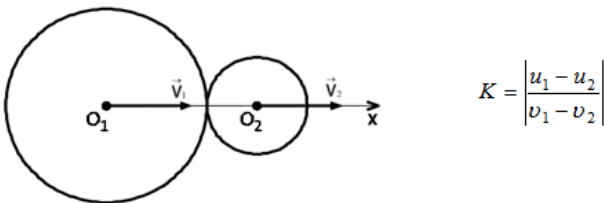
$$k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}.$$

ამ ფორმულის საშუალებით შეიძლება აღდგენის კოეფიციენტის მნიშვნელობის დადგენა.

§46. ორი ბირთვის პირდაპირი ცენტრალური დარტყმა

თუ ორი ბირთვის დარტყმისას მათი შეხების წერტილში გატარებული საერთო ნორმალი გადის მათ მასათა ცენტრებზე და მასათა ცენტრების სიჩქარეები დარტყმის დასაწყისში მიმართულია ამ საერთო ნორმალის გასწვრივ, მაშინ დარტყმას ეწოდება პირდაპირი ცენტრალური დარტყმა.

თუ \vec{v}_1 და \vec{v}_2 პირველი და მეორე ბირთვების საწყისი სიჩქარეებია, ხოლო \vec{u}_1 და \vec{u}_2 სიჩქარეები დარტყმის შემდეგ, მაშინ აღდგენის კოეფიციენტი ტოლი იქნება ფარდობითი სიჩქარეების შეფარდების



ნახ. 46.3

კინეტიკური ენერჯის დანაკარგი. კარნოს თეორემა. თუ ორი სხეულის კინეტიკური ენერჯია დარტყმის დასაწყისში არის T_0

და კინეტიკური ენერგია დარტყმის შემდეგ T_1 , მაშინ დაკარგული კინეტიკური ენერგიისათვის სამართლიანია თანაფარდობა

$$T_0 - T_1 = \frac{1-k}{1+k} \left[\frac{m_1(v_1 - u_1)^2}{2} + \frac{m_2(v_2 - u_2)^2}{2} \right]$$

ამგვარად, ადგილი აქვს **კარნოს თეორემას**, რომელიც ასე ჩამოყალიბდება: ორი სხეულის დარტყმის შემთხვევაში დაკარგული კინეტიკური ენერგია ტოლია $\frac{1-k}{1+k}$ კოეფიციენტისა და დაკარგული სიჩქარეების შესაბამისი კინეტიკური ენერგიების ნამრავლის.

თუ დარტყმა აბსოლუტურად არადრეკადია, მაშინ $k = 0$ და კარნოს ფორმულა მიიღებს სახეს:

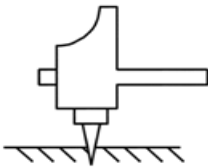
$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2} m_1 (v_1 - u_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - u_2)^2$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც მეორე სხეული უძრავია. მაშინ

$$T_0 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad T_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} T_0$$

ფორმულა გვიჩვენებს თუ როგორი იქნება კინეტიკური ენერგია დარტყმის შემდეგ. განვიხილოთ ორი უკიდურესი შემთხვევა:

1. $m_1 \gg m_2$ დამრტყმელი სხეულის მასა გაცილებით მეტია უძრავი სხეულის მასაზე. მაშინ $m_1 + m_2 \approx m_1$ და $T_1 = T_0$, ე.ი



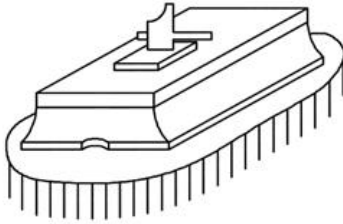
ნახ. 46.4

თუმცა დარტყმა აბსოლუტურად არადრეკადია, კინეტიკური ენერგია თითქმის არ იკარგება. დარტყმის შემდეგ სისტემა იმოძრავებს ისეთივე კინეტიკური ენერგიით.

პრაქტიკულად ლურსმნის ჩაჭედების ან ხიმინჯის ჩასობის დროს ჩაქუჩის მასა უნდა

იყოს გაცილებით მეტი ვიდრე დასარტყმელი საგანია და მაშინ დეფორმაციას არ ექნება ადგილი.

2. დამრტყმელი სხეულის მასა გაცილებით ნაკლებია $m_2 \gg m_1$, მაშინ $T_1 = 0$. ამ შემთხვევაში მთელი კინეტიკური ენერგია გადადის დეფორმაციის ენერგიაში.



ნახ. 46.5

პრაქტიკულად ამ შედეგზეა დამყარებული ის, რომ გრდემლის მასა უნდა იყოს უროს მასაზე ბევრად დიდი, იმისათვის რომ უროს კინეტიკური ენერგია მთლიანად დაიხარჯოს ლითონის დეფორმაციისათვის.

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
პროფესორ ალექსი გორგიძის სახელობის მექანიკის
სამეცნიერო-სასწავლო ლაბორატორია



ლაბორატორიული სამუშაო №1
ვარიანტი №

ჯგუფი №

სტუდენტი:

ხელმძღვანელი:

თარიღი:

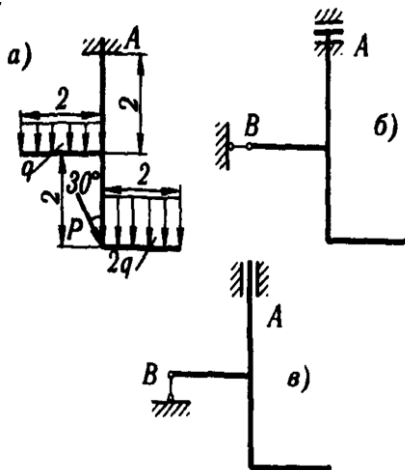
თბილისი – 2017

ვარიანტი №

სქემაზე ნაჩვენებია ტეხილი ლერძის მქონე ძელის დამაგრების სამი ხერხი. ზომები და დატვირთვა სამივე შემთხვევაში ერთნაირია.

განსაზღვრეთ ძელის საყრდენების რეაქციის ძალები დამაგრების იმ შემთხვევისათვის, რომლისთვისაც გამოსაკვლევ რეაქციას აქვს უმცირესი მნიშვნელობა.

| | |
|---|---------------------------|
|  | სახსარი |
|  | უძრავი საყრდენის ფუძე |
|  | მოძრავი საყრდენის ფუძე |
|  | ხისტი ჩამაგრება |
|  | სრილა ჩამაგრება |
|  | ორმაგი სრილა ჩამაგრება |
|  | დემფერი |
|  | სახსრული მოძრავი საყრდენი |



$$P = 25 \text{ კნ}, \quad q = 1$$

კნ/მ. გამოსაკვლევი რეაქცია:

$$M_A$$

დამატებითი საკითხები:

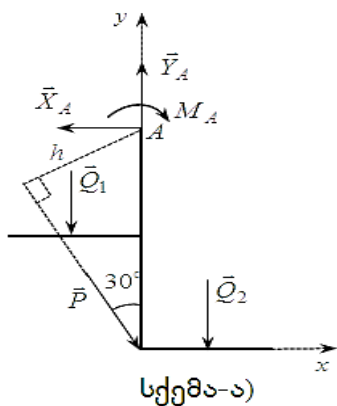
1) რაში მდგომარეობს ნებისმიერი სივრცითი ძალთა სისტემის წონასწორობის თეორემა. დაწერეთ წონასწორობის განტოლებები.

2) განმარტეთ რას ეწოდება ძალის სკალარული მომენტი წერტილის მიმართ. შეადგინეთ ნახაზი და დაწერეთ მისი გამოსათვლელი ფორმულა

3) შეადგინეთ ნახაზი და განმარტეთ რას ეწოდება წვეილ-ძალა. ჩამოაყალიბეთ რას ეწოდება წვეილძალის სკალარული მომენტი.

ამოცანის ამოხსნა

ამოცანის ამოსახსნელად სამივე ვარიანტისათვის შევადგინოთ საანგარიშო სქემა და განვიხილოთ კონსტრუქციაზე მოდებული გაწონასწორებული ძალთა სისტემა. ყველა ვარიანტში კონსტრუქციაზე დადებული ბმები შევცვალოთ შესაბამისი რეაქციის ძალებით: ა) სქემაში – $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, M_A$, ბ) სქემაში – $-\vec{Y}_A, M_A, \vec{X}_B$, ვ) სქემაში – $\vec{X}_A, M_A, \vec{Y}_B$. q და $2q$ ინტენსივობის განაწილებული დატვირთვები შევცვალოთ შესაბამისად \vec{Q}_1 და \vec{Q}_2 შეყურსული ძალებით, რომელთა სიდიდეები ტოლია



$$Q_1 = 2q = 4 \text{ კნ}$$

$$Q_2 = 2 \cdot 2q = 8 \text{ კნ}.$$

იმისათვის, რომ გამოვარკვიოთ, თუ რომელი სქემისათვის აქვს გამოსაკვლევ უცნობ M_A რეაქციას მინიმალური მნიშვნელობა, გამოვთვალოთ იგი სამივე სქემის შემთხვევაში ისე, რომ არ განვსაზღვროთ (თუ ეს

შესაძლებელია) დანარჩენი უცნობი რეაქციები.

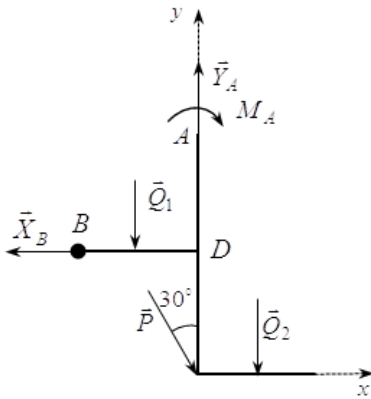
ა) სქემა: შევადგინოთ მომენტთა განტოლება A წერტილის მიმართ

$$\sum M_{Ak} = 0,$$

$$-M_A + Q_1 \cdot 1 + P \cdot 4 \sin 30^\circ - Q_2 \cdot 1 = 0.$$

საიდანაც

$$M_A = Q_1 + 4P \sin 30^\circ - Q_2 = 2 + 50 - 4 = 48 \text{ (კნმ)}.$$



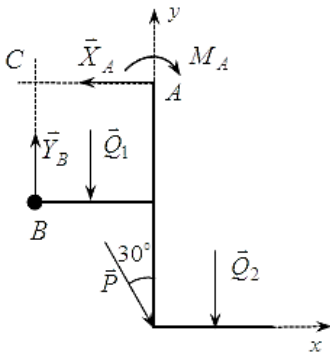
სქემა-ბ)

ბ) სქემა:შევადგინოთ მომენტთა განტოლება \bar{Y}_A და \bar{X}_B ძალების ფუძეების გადაკვეთის D წერტილის მიმართ

$$\sum M_{Dk} = 0,$$

$$-M_A + Q_1 \cdot 1 + P \cdot 2 \sin 30^\circ - Q_2 \cdot 1 = 0 \text{ საიდანაც}$$

$$\begin{aligned} M_A &= Q_1 + 2P \sin 30^\circ - Q_2 = \\ &= 2 + 25 - 4 = 23(\text{კნმ}). \end{aligned}$$



სქემა-გ)

გ) სქემა:შევადგინოთ მომენტთა განტოლება \bar{X}_A და \bar{Y}_B ძალების ფუძეების გადაკვეთის C წერტილის მიმართ

$$\sum M_{Ck} = 0,$$

$$\begin{aligned} M_A - Q_1 \cdot 1 - Q_2 \cdot 3 - P \cos 30^\circ \cdot 2 + \\ + P \sin 30^\circ \cdot 4 = 0 \end{aligned}$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} M_A &= Q_1 \cdot 1 + Q_2 \cdot 3 + P \cos 30^\circ \cdot 2 - P \sin 30^\circ \cdot 4 = \\ &= 2 + 12 + 25\sqrt{3} - 50 \approx 7,3(\text{კნმ}). \end{aligned}$$

რადგან გამოთვლებმა გვიჩვენა, რომ M_A რეაქცია მინიმალურია ვ) – სქემისათვის, ამიტომ ამ სქემისთვის გამოვთვალოთ დანარჩენი უცნობი რეაქციები: \bar{X}_A და \bar{Y}_B .

დავწეროთ წონასწორობის განტოლებები, რომლებიც აღწერს კონსტრუქციაზე მოქმედი ძალების ნაკრები ვექტორის ნულთან ტოლობას:

$$\sum X_k = 0, \quad -X_A + P \cos 60^\circ = 0,$$

$$X_A = P \cos 60^\circ = 25 \cdot 0,5 = 12,5 (\text{კნ}).$$

$$\sum Y_k = 0, \quad Y_B - Q_1 - P \cos 30^\circ - Q_2 = 0,$$

$$Y_B = Q_1 + P \cos 30^\circ + Q_2 = 2 + 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \approx 27,7 (\text{კნ}).$$

ამრიგად, ლაბორატორიული სამუშაოს პირველი ნაწილი შესრულებულია. რაც შეეხება სამუშაოს მეორე ნაწილს, რომელიც დაკავშირებულია თეორიულ მასალასთან, სტუდენტმა იგი უნდა მოიძიოს დამოუკიდებლად შესაბამის ლიტერატურაში და წარმოადგინოს დოკუმენტალურად.

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
პროფესორ ალექსი გორგობის სახელობის მექანიკის
სამეცნიერო-სასწავლო ლაბორატორია



ლაბორატორიული სამუშაო №2

ვარიანტი №

ჯგუფი №

სტუდენტი:

ხელმძღვანელი:

თარიღი:

თბილისი– 2017

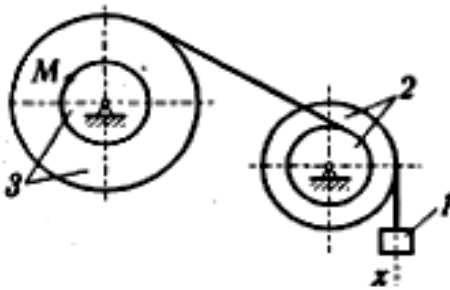
ვარიანტი №

1-ტვირთის მოძრაობის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$x = c_2 t^2 + c_1 t + c_0$, სადაც t -არის დრო, ხოლო c_0, c_1, c_2 –

რაიმე მუდმივებია. დროის საწყის მომენტში, როცა $t = 0$, 1-ტვირთის კოორდინატი არის x_0 , ხოლო მისი სიჩქარე – v_0 . გარდა ამისა ცნობილია, რომ დროის $t = t_2$ მომენტში ტვირთის კოორდინატი ტოლი უნდა იყოს x_2 - ის.

განსაზღვრეთ c_0, c_1, c_0 - კოეფიციენტები, რომლის დროსაც ხორციელდება 1-ტვირთის მოთხოვნილი მოძრაობა. დროის $t = t_1$ მომენტში ასევე განსაზღვრეთ ტვირთისა და მექანიზმის ერთ-ერთი თვალის M წერტილის სიჩქარე და აჩქარება.



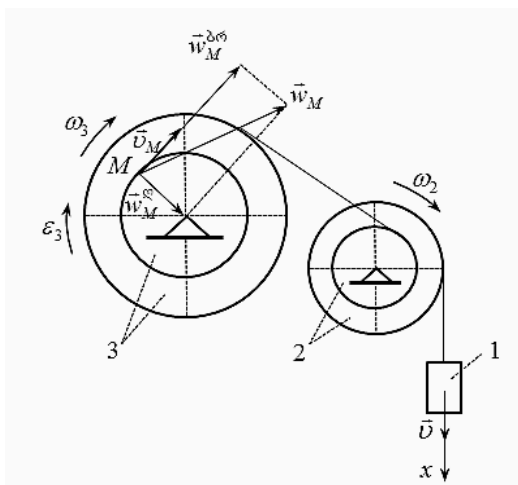
$$\begin{aligned}
 R_2 &= 30\text{სმ} & , \\
 r_2 &= 15\text{სმ} & R_3 = 40\text{სმ} \\
 , r_3 &= 20\text{სმ} & , x_0 = 9\text{სმ} \\
 , v_0 &= 8\text{მ/წმ} & , \\
 x_2 &= 105\text{სმ} & , \\
 t_2 &= 4\text{წმ} & , t_1 = 1\text{წმ}
 \end{aligned}$$

1. დაწერეთ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის განტოლებები (კოორდინატული, ვექტორული და ბუნებრივი სახით)

2. განმარტეთ რას ეწოდება ბრუნვის სკალარული და ვექტორული კუთხური აჩქარება. დაწერეთ გამოსათვლელი ფორმულები

3. განმარტეთ რას ეწოდება მყარი სხეულის ბრტყელ-პარალელური მოძრაობა და დაწერეთ სხეულის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარის გამოსათვლელი ფორმულა ვექტორული და სკალარული სახით.

ამოცანის ამოხსნა



ტვირთის მოძრაობის განტოლებას და სიჩქარეს აქვს შემდეგი სახე:

$$x = c_2 t^2 + c_1 t + c_0 \quad (1)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 2c_2 t + c_1 \quad (2)$$

c_0, c_1, c_2 კოეფიციენტები განვსაზღვროთ შემდეგი პირობებიდან

$$\text{როცა } t_0 = 0, \quad x_0 = 9\text{სმ}, \quad v_0 = 8\text{სმ/წმ}, \quad (3)$$

$$\text{როცა } t_2 = 2\text{წმ}, \quad x_2 = 105\text{სმ}. \quad (4)$$

თუ (3) და (4)-ს ჩავსვამთ (1) და (2) გამოსახულებებში, მივიღებთ

$$c_0 = 9\text{სმ}, \quad c_1 = 8\text{სმ/წმ}, \quad c_2 = 2\text{სმ}.$$

ამგვარად, 1 - ტვირთის მოძრაობის კანონი და სიჩქარე ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$x = 20t^2 + 8t + 9, \quad (5)$$

$$v = 40t + 8, \quad (6)$$

ბოლო აჩქარება $w = \frac{dv}{dt} = 40 \text{ სმ/წმ}^2$.

M წერტილის სიჩქარისა და აჩქარების განსასაზღვრავად გამოვთვალოთ მე-2 და მე-3 თვლების ბრუნვის კუთხური სიჩქარეები. მექანიზმის სქემის შესაბამისად გვექნება:

$$v = \omega_2 R_2, \quad \omega_3 R_3 = \omega_2 r_2,$$

საიდანაც გვექნება

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{r_2}{R_3} = \frac{r_2}{R_2 R_3} v.$$

(6)-ის გათვალისწინებით, შესაბამისი მონაცემების ჩასმის შემდეგ ω_3 - თვის საბოლოოდ გვექნება

$$\omega_3 = 0,5t + 0,1, \quad \varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = 0,5.$$

M წერტილის სიჩქარეს, მის ბრუნვით, ღერძისკენულ და სრულ აჩქარებას ექნება შემდეგი სახე:

$$v_M = \omega_3 r_3 = 10t + 2,$$

$$w_M^{\text{ბრ}} = \varepsilon_3 r_3 = 10, \quad w_M^{\text{ს}} = \omega_3^2 r_3 = 20(0,5t + 0,1)^2.$$

$$\text{როცა } t_1 = 2 \text{ წმ, } v_M = 22 \text{ სმ/წმ, } w_M^{\text{ბრ}} = 10 \text{ სმ/წმ}^2,$$

$$w_M^{\text{ს}} = 24,2 \text{ სმ/წმ}^2,$$

$$w_M \sqrt{(w_M^{\text{ბრ}})^2 + (w_M^{\text{ს}})^2} = \sqrt{100 + 585,64} \approx 26,2 \text{ სმ/წმ}^2.$$

ამრიგად, ლაბორატორიული სამუშაოს პირველი ნაწილი შესრულებულია. რაც შეეხება სამუშაოს მეორე ნაწილს, რომელიც დაკავშირებულია თეორიულ მასალასთან, სტუდენტმა იგი უნდა მოიძიოს დამოუკიდებლად შესაბამის ლიტერატურაში და წარმოადგინოს დოკუმენტალურად.

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
პროფესორ ალექსი გორგობის სახელობის მექანიკის
სამეცნიერო-სასწავლო ლაბორატორია



ლაბორატორიული სამუშაო №1

ვარიანტი №

ჯგუფი №

სტუდენტი:

ხელმძღვანელი:

თარიღი:

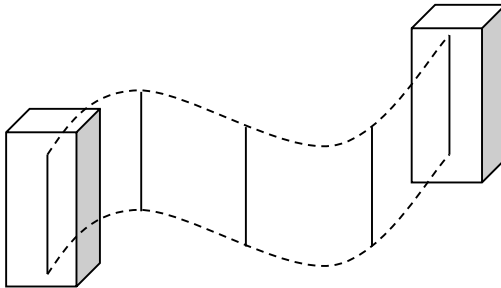
თბილისი– 2017

თანაბრადცვლადი მოძრაობის კინემატიკური
მახასიათებლების განსაზღვრა. ნივთიერი წერტილის დინამიკა

1. გადატანითი მოძრაობა

2. თანაბრადაჩქარებული წრფივი მოძრაობა
3. ნიუტონის კანონები

მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა ეწოდება სხეულის ისეთ მოძრაობას, როდესაც მასში ნებისმიერად აღებული წრფის მონაკვეთი თავისი თავის პარალელური რჩება (ნახ.1). გადატანითი მოძრაობის შემთხვევაში სხეულის ყველა წერტილს ერთნაირი ტრეექტორია, სიჩქარე და აჩქარება აქვთ. მაშასადამე, მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობის შესწავლა დაიყვანება მისი ნებისმიერი წერტილის მოძრაობის შესწავლამდე. მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა წრფივია, თუ მისი ყველა წერტილის ტრეექტორიები პარალელური წრფეებია; მრუდწირულია, თუ სხეულის წერტილების ტრეექტორიები თავსებადი მრუდი წირებია.



ნახ. 1. – მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა

ნითვითი წერტილის ვექტორული აჩქარება გამოითვლება ფორმულით

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \quad (1)$$

სადაც \vec{v} – ვექტორული სიჩქარეა, \vec{r} – რადიუს-ვექტორია.

როგორც ცნობილია, წერტილის **თანაბარი მოძრაობა** ეწოდება მის მოძრაობას მუდმივი სკალარული სიჩქარით ($v = const$).

წერტილის მოძრაობას ეწოდება **თანაბრადცვლადი**, თუ მისი მხევი აჩქარების სიდიდე მუდმივია ($w_\tau = const$). თანაბრადცვლადი მოძრაობის მაგალითებია: სხეულის თავისუფალი ვარდნა, ჰორიზონტთან რაიმე კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობა.

თუ ამოვხსნით

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = w_\tau$$

დიფერენციალურ განტოლებებს შემდეგ საწყის პირობებში:

როცა $t = t_0$, $s = s_0$, $v = v_0$, მივიღებთ

ა) თანაბარი მოძრაობის განტოლებას:

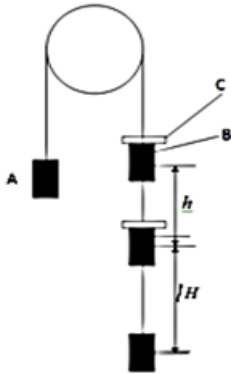
$$s = v(t - t_0) + s_0 \quad (2)$$

ბ) თანაბრადცვლადი მოძრაობის განტოლებას და სიჩქარე

$$s = \frac{w_\tau}{2}(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + s_0 \quad (3)$$

$$v = w_\tau(t - t_0) + v_0 \quad (4)$$

Ox ღერძის გასწვრივ წრფივი მოძრაობის შემთხვევაში, ნულოვან საწყის პირობებში, (2), (3) და (4) განტოლებებს ექნებათ შემდეგი სახე



ქან. 2

$$x(t) = vt, \quad x(t) = \frac{wt^2}{2}, \quad v(t) = wt \quad (5)$$

ა) **სხეულის აჩქარების გამოთვლა**

იმ უბანზე, რომელზეც სხეული ასრულებს აჩქარებულ მოძრაობას, მის მიერ განვლილი მანძილი გამოითვლება

ფორმულით

$$h = \frac{wt^2}{2} \quad (6)$$

სხეულის აჩქარება შესაძლებელია გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$w = \frac{v}{t_1} \quad (7)$$

სადაც v – აჩქარებული მოძრაობის საბოლოო სიჩქარეა.

(6) და (7) ტოლობებიმოგვცემს

$$h = \frac{v^2}{2w} \quad (8)$$

ახლა განვიხილოთ უბანი, სადაც ტვირთი ასრულებს თანაბარ მოძრაობას. ტვირთი ამ უბანს გაივლის v სიჩქარით. გავლილი მანძილი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$H = vt_2 \quad (9)$$

(8) და (9) – დან შეიძლება განვსაზღვროთ სხეულის აჩქარება

$$w = \frac{H^2}{2ht_2^2} \quad (10)$$

ამგვარად, აჩქარების განსასაზღვრავად უნდა გავზომოთ:

1. h – თანაბრადაჩქარებული მოძრაობისას გავლილი მანძილი;
2. H – თანაბრი მოძრაობისას გავლილი მანძილი;
3. t_2 – დრო, რომლის განმავლობაშიც სხეული ასრულებდა თანაბარ მოძრაობას.

$$w_{\text{მძს}} = \frac{H^2}{2ht_2^2}$$

ბ) დინამიკის აქსიომები (ნიუტონის კანონები). კლასიკური

დინამიკა აგებულია ნიუტონის კანონებზე, რომლებიც წარმოადგენენ ნიუტონამდე ცნობილი და თვით მის მიერ ექსპერიმენტული მონაცემებისა და თეორიული მასალის განზოგადების საფუძველზე დადგენილი შედეგებს.

I აქსიომა (ინერციის კანონი): ყოველი სხეული ინარჩუნებს უძრაობას ან თანაბარი წრფივი მოძრაობის მდგომარეობას, სანამ სხვა სხეულთა მოქმედება არ აიძულებს მას შეიცვალოს ეს მდგომარეობა.

სხეულთა მექანიკური ურთიერთქმედების დასახასიათებლად შემოდის ძალის ცნება.

ძალა წარმოადგენს მოცემულ სხეულზე სხვა სხეულების მოქმედების ზომას და აიძულებს მოცემულ სხეულს შეიცვალოს სიჩქარე და მოძრაობის მიმართულება.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ სხეულის გადატანითი მოძრაობა შეიძლება განვიხილოთ როგორც ნივთიერი წერტილის მოძრაობა, მაშინ პირველი აქსიომა ასეც შეიძლება ჩამოვყალიბოთ:

თუ ნივთიერ წერტილზე არავითარი ძალა არ მოქმედებს, მაშინ ის ასრულებს წრფივ და თანაბარ მოძრაობას ან იმყოფება უძრაობაში.

პირველი აქსიომა ფორმულით შეიძლება ასე გამოვსახოთ

$$\vec{v} = \overrightarrow{const},$$

სადაც \vec{v} სხეულის ვექტორული სიჩქარეა.

II აქსიომა (დინამიკის ძირითადი კანონი, ნიუტონის მეორე კანონი). ნივთიერ წერტილზე მოქმედი ძალა პირდაპირპროპორციულია მის მიერ გამოწვეული აჩქარების.

დინამიკის მეორე კანონი ფორმულით ასე გამოისახება:

$$\vec{F} = m\vec{w}$$

სადაც მოქმედი ძალა აღნიშნულია \vec{F} – ით, ხოლო აჩქარება \vec{w} – თი. m პროპორციულობის კოეფიციენტია და მას აქვს გარკვეული ფიზიკური მნიშვნელობა. მას სხეულის მასას უწოდებენ.

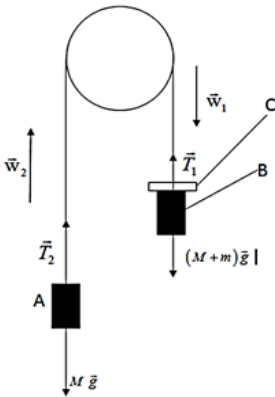
III აქსიომა (ქმედებისა და უკუქმედების კანონი): ორი ნივთიერი წერტილი ერთმანეთზე მოქმედებს ძალებით, რომლებიც სიდიდით ტოლია და მიმართულია ურთიერთსაწინააღმდეგოდ ამ წერტილების შემაერთებელი წრფის გასწვრივ.

გ) თავისუფალი ვარდნის აჩქარების გამოთვლა

უჰაერო სივრცეში დედამიწის მიზიდულობის ძალის მოქმედებით დედამიწის ზედაპირზე ყველა სხეული ვარდება g აჩქარებით. ეს ნიშნავს, რომ დედამიწასთან დაკავშირებულ ათვლის სისტემაში m მასის ყოველ სხეულზე მოქმედებს ძალა

$$\vec{F} = m\vec{g}.$$

ამ ძალას სიმძიმის ძალას უწოდებენ. თავისუფალი ვარდნის \vec{g} აჩქარება და სიმძიმის \vec{F} ძალა უმნიშვნელოდ არიან დამოკიდებულნი ადგილის განედზე. ამის გარდა, \vec{g} და \vec{F} ასევე დამოკიდებული არიან ზღვის დონიდან ადგილის სიმაღლეზე,



ნახ. 3

მაგრამ დედამიწის ცენტრიდან დაშორებასთან ერთად მათ მნიშვნელობებს შორის განსხვავებები მცირდება.

დინამიკის კანონების გამოყენებით შესაძლებელია გაიზომოს თავისუფალი ვარდნის აჩქარების მნიშვნელობა. ნიუტონის პირველი კანონის თანახმად მატერიის თვისებაა იყოს მუდმივ მოძრაობაში და ადგენს, რომ ყოველი სხეული ინარჩუნებს წრფივ და თანაბარ მოძრაობას ან უძრაობას, სანამ სხვა სხეულები არ აიძულებენ მას არსებული მდგომარეობის შეცვლას. კლასიკურ მექანიკაში, რომელსაც ნიუტონის მექანიკას უწოდებენ, სხეულის მოძრაობა აღიწერება ნიუტონის მეორე კანონით: სხეულზე მოქმედი ძალა პირდაპირ პროპორციულია მის მიერ გამოწვეული აჩქარებისა. პროპორციულობის კოეფიციენტს, რომელსაც აღვნიშნავთ m -ით, აქვს ფიზიკური მნიშვნელობა. მას სხეულის მასა ჰქვია. განასხვავებენ მასის რამდენიმე ცნებას: გრავიტაციული, ინერტული. თეორიულ მექანიკაში განიხილავენ გრავიტაციულ და ინერტულ მასებს. ექსპერიმენტულად დამტკიცებულია, რომ გრავიტაციული მასა ინერტულისაგან განსხვავდება 10^{-12} კგ სიზუსტით, ამიტომ შემდგომში განვიხილავთ მხოლოდ ინერტულ მასას. ვგულისხმობთ, რომ ინერტული მასა ეწოდება სიდიდეს, რომელიც დამოკიდებულია ნივთიერების რაოდენობაზე და განსაზღვრავს მის ინერტულობის ხარისხს. ინერტულობა სხეულის თვისებაა შეეწინააღმდეგოს სხვა სხეულების მოქმედებას და შეინარჩუნოს არსებული მდგომარეობა.

გამოვიყვანოთ თავისუფალი ვარდნის აჩქარების გამოსათვლელი სამუშაო ფორმულა.

ატვუდის მანქანის სქემის მიხედვით ტვირთების სისტემის მოძრაობის განტოლებებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} (M + m)w_1 = (M + m)g - T_1, \\ Mw_2 = -Mg + T_2. \end{cases}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ძაფი უწონადია და უჭიმადია, მაშინ ტვირთების აჩქარებები სიდიდით ტოლია და მიმართული არიან ერთმანეთის საწინააღმდეგოდ. აგრეთვე უწონადი ბლოკის შემთხვევაში $T_1 = T_2 = T$ და სისტემიდან მივიღებთ, რომ

$$g = \frac{2M + m}{m} w,$$

სადაც M – ტვირთის მასაა, m – რგოლისებრი ტვირთის მასაა, g – თავისუფალი ვარდნის აჩქარება. თუ უკანასკნელ ფორმულაში ჩავსვამთ w აჩქარების ექსპერიმენტულ მნიშვნელობას, გვექნება

$$g_{\text{მდს}} = \frac{2M + m}{m} \frac{H^2}{2ht_2^2}.$$

სამუშაოს მიზანი: თანაბარცვლადი მოძრაობის კანონების შესწავლა, სხეულის გადატანითი მოძრაობის კინემატიკის და დინამიკის კანონების შემოწმება ატვუდის მანქანის დახმარებით.

ექსპერიმენტის იდეა: ექსპერიმენტის ჩატარება საშუალებას იძლევა, სისტემის სხეულების მახასიათებლების ანალიზის საფუძველზე შესწავლილი იქნეს თანაბრადცვლადი მოძრაობის კანონები. სწორედ ასეთი ანალიზის ჩასატარებლად გამოიყენება ატვუდის მანქანა, რომელიც საშუალებას იძლევა მივიღოთ სხვადასხვა, თავისუფალი ვარდნის აჩქარებასთან შედარებით მცირე აჩქარებები. კინემატიკურ მახასიათებლებში იგულისხმება გავლილი მანძილი, ტვირთის სიჩქარე და აჩქარება, მოძრაობის დრო.

**სხეულის მოძრაობის კანონების შესწავლა მუდმივი
ძალის მოქმედებისას**

ხელსაწყოები და საკუთრობები: დანადგარი FPM – 02 და ტვირთების ნაკრები.

ატვუდის ექსპერიმენტული დანადგარი:(თეორიული აღწერა) ატვუდის ექსპერიმენტული დანადგარი ე.წ. „ატვუდის მანქანა“ წარმოადგენს მბრუნავ ბლოკს რაც შეიძლება მცირე ხახუნით, რომელზეც გადაკიდებულია უწონადი, უჭიმადი წვრილი ძაფი. ძაფის ბოლოებზე დაკიდებულია ერთი და იგივე m მასის ორი ერთნაირი სხეული.

„ატვუდის მანქანა“ განკუთვნილია წრფივი, თანაბრად-ცვლადი მოძრაობის შესასწავლად. კერძოდ, სხეულის თავისუფალი ვარდნის აჩქარების შესასწავლად. ატვუდის მანქანა წარმოადგენს დანადგარს FPM – 02, რომლის საერთო სახე მოცემულია ნახაზ 4-ზე.

2- ფუძეზე დამაგრებულ 1- ვერტიკალურ სვეტზე მიმაგრებულია სამი კრონშტეინი: 3- უძრავი ქვედა კრონშტეინი და ორი მოძრავი კრონშტეინი – 4 -შუა და 5- ზედა; აგრეთვე 6- მილისა.

ფუძე აღჭურვილია მარეგულირებელი 7-ფეხებით, რომელთა დახმარებით შესაძლებელია დანადგარის მდგომარეობის გასწორება.

ზედა მილისაზე, 8-დისკის საშუალებით დამაგრებულია 9-გორგოლაჭი, 10-ბლოკი და 11 -ელექტრომაგნიტი. ბლოკზე გადაკიდებულია 12- ძაფი, რომლის ბოლოებზე დაკიდებულია 13 და 14 ტვირთები.

ძაბვის მიწოდება ელექტრომაგნიტს საშუალებას აძლევს ფრიქციული ქუროს საშუალებით ბლოკი ტვირთებთან ერთად შეაკავოს უძრავ მდგომარეობაში.

შუა და ზედა კრონშტეინები შეიძლება გადავაადგილოთ სვეტის გასწვრივ და დავაფიქსიროთ ნებისმიერ ადგილას. ამგვარად, ვადგენთ მანძილს, რომელსაც გავლის 14 ტვირთი. გავლილი მანძილის განსასაზღვრავად სვეტზე დატანილია მილიმეტრული 15 სკალა. ყველა კრონშტეინს აქვს მდგომარეობის მაჩვენებელი, ხოლო ზედა კრონშტეინს დამატებითი შტრიხი, რომლის მეშვეობით გვიადვილდება ზედა დიდი ტვირთის ქვედა ფუძის თანხვედრა მოძრაობის დასაწყისთან.

შუა კრონშტეინზე დამაგრებული 16 რგოლი და 17 ფოტოელექტრული გადამწოდი. 16 რგოლი ხსნის ვარდნილი დიდი ტვირთიდან დამატებით რგოლისებურ ტვირთს, ხოლო ფოტოელექტრული გადამწოდი ამ დროს წარმოქმნის ელექტრულ იმპულსს, რომელიც აღნიშნავს თანაბარი მოძრაობის დაწყებას.

მართვის ღილაკების დანიშნულება: დანადგარის წინა პანელზე განლაგებულია ღილაკები:

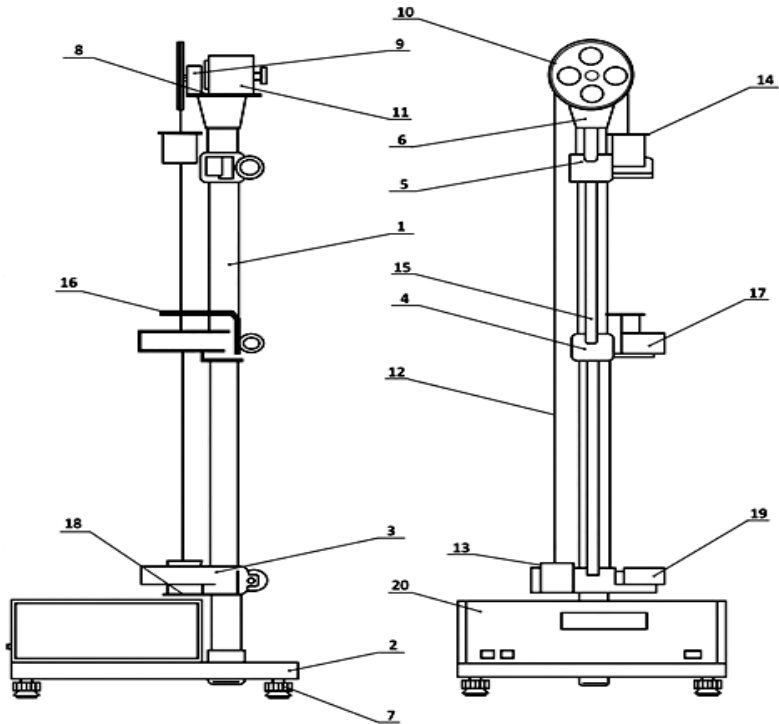
ქსმლი- ამ ღილაკზე დაჭერა იწვევს კვების წყაროს ჩართვას და ციფრული ინდიკატორის ავტომატურ ჩამოყრას (ყველა თანრიგში გამონათდება ციფრი ნული და ფოტოგადამწოდის ნათურა ანთებული);

ბაშვება - ამ ღილაკზე დაჭერა ანთავისუფლებს ელექტრომაგნიტს და იწყება დროის ათვლა;

ჩამოყრა- ინდიკატორის ნულების დამყენებელი. ამ ღილაკზე დაჭერით იწვევს წამმზომის მაჩვენებლების ჩამოყრას და ტვირთების ფიქსაციას მოცემულ მდგომარეობაში ელექტრომაგნიტის საშუალებით;

გაზომვების შესასრულებლად თავიდან თანამიმდევრობით დააჭირეთ ღილაკებს **ქსმლი**, **ბაშვება**, **ჩამოყრა**, რის შემდეგაც დაამაგრეთ ტვირთები მოცემულ სიმაღლეზე და დააფიქსირეთ

ბაშვმეზა ღილაკის დახმარებით. **ბაშვმეზა-ის** ღილაკზე დაჭერით, გაზომეთ ტვირთის მოძრაობის დრო ზედა და ქვედა ფოტოგადაძმოდებს შორის. **ჩამოყვრა** ღილაკზე დაჭერით, გაანულეთ ინდიკატორი და თავიდან დააყენეთ იმავე სიმაღლეზე. გადადით მორიგ გაზომვაზე.



ნახაზი 4— დანადგარი FPM-02

ექსპერიმენტის ჩატარების თანამიმდევრობა

1. გაასწორებთ დანადგარს ისე, რომ იგი იდგეს მყარად; იგულისხმება, რომ იგი გაწონასწორებულია ჰორიზონტალურ და ვერტიკალურ სიბრტყეში თარაზოს საშუალებით;

2. ვამოწმებთ ტვირთების მდგომარეობას, რაც გულისხმობს მათ მიბმას ძაფზე (უჭიმადი) და ამ ძაფის ნორმალურად განთავსება მოძრავ ბლოკზე;
 3. ვერტიკალურ დეგარზე 1 არსებული შკალის საშუალებით 3 და 4 კრონშტეინებს ვაყენებთ 5 სმ-ის დაცილებით;
 4. ხაზიანი 5 კრონშტეინი მოთავსდება ვერტიკალურ დეგარზე 40 სმ-ის სიმაღლეზე. (სიმაღლის ცვლილება შეიძლება);
 5. ვრთავთ ხელსაწყოს **ქსელ** ილიაკზე დაჭერით, ამ დროს ფიქსირდება ბლოკის მდებარეობა ელექტრომაგნიტის მეშვეობით, რომლის დროსაც ტაბლოზე ინდიკაცია არის 0-ები;
 6. მოვთავსოთ ტვირთი (პირობითად მარჯვენა) 5 კრონშტეინის ხაზს შევუსაბამებთ ტვირთის ქვედა ფუძის ხაზს.
 7. ამავე ტვირთზე ვათავსებთ დამატებით რგოლისებრ ტვირთს, რომლის მასა ცნობილია და ტვირთებს ვაჩერებთ ვერტიკალურ სიბრტყეში ისე, რომ არ ირხეოდნენ;
 8. ვაჭერთ ღილაკს **ბაშვება** და ტვირთი იწყებს აჩქარებულ მოძრაობას ვერტიკალურად ქვემოთ;
 9. ვარდნისას რგოლისებრი ტვირთი – დამჭერის საშუალებით მოცილდება ძირითად ტვირთს და ძირითადი ტვირთი აგრძელებს მოძრაობას მუდმივი სიჩქარით;
 - 10.3 და 4 კრონშტეინებზე დამაგრებული ფოტოგადამწოდების სინათლის ნაკადის გადაკვეთის შედეგად ტაბლოზე გამოიხატება ამ კრონშტეინებს შორის არსებული მანძილის გავლის დრო. მონაცემი შეგვაქვს ცხრილში და ამ ცდას გავიმეორებთ 3-ჯერ;
 11. ამის შემდეგ ძირითად ტვირთზე ვამატებთ ტვირთებს და თითოეული დამატებისას ვატარებთ ცდას ზემოთ აღნიშნული მიმდევრობით. თითოეული მნიშვნელობისათვის ცდის შედეგები შეგვაქვს ცხრილში.
- № 1.1 ცხრილში მოყვანილია ექსპერიმენტის შედეგები სხვადასხვა დატვირთვების დროს.

ცხრილი № 1.1

| № | M | | h | H | h | $t_{2(0)}$ | $t_{2(c)}$ | $t_{2(0)}$ | $t_{2(c)}$ | t_{Σ}^2 | U_1 | U_2 | U_3 | L_{Σ} | W_1 | W_2 | W_3 | W_{Σ} | W_{Σ}^2 | შედეგ |
|-----|------|------|----|----|-------|------------|------------|------------|------------|----------------|--------|--------|--------|--------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|--------|
| | ბრ | გრ | | | | წმ | წმ | წმ | გვმ | | გვმ | გვმ | გვმ | გვმ | გვმ ² | გვმ ² | გვმ ² | გვმ ² | გვმ ² | |
| 1. | 60,7 | 10,5 | 20 | 10 | 0,517 | 0,509 | 0,518 | 0,2649 | 0,3868 | 0,3861 | 0,3886 | 0,3929 | 0,3861 | 0,3886 | 0,7482 | 0,7719 | 0,7454 | 0,7552 | 0,7550 | 9,4843 |
| 2. | 60,7 | 21,0 | 20 | 10 | 0,372 | 0,377 | 0,379 | 0,1414 | 0,5376 | 0,5305 | 0,5319 | 0,5305 | 0,5277 | 0,5319 | 1,4451 | 1,4074 | 1,3928 | 1,4151 | 1,4144 | 9,5910 |
| 3. | 60,7 | 31,5 | 20 | 10 | 0,315 | 0,318 | 0,314 | 0,0997 | 0,6349 | 0,6289 | 0,6336 | 0,6289 | 0,6369 | 0,6336 | 2,0161 | 1,9782 | 2,0284 | 2,0076 | 2,0060 | 9,7371 |
| 4. | 60,7 | 10,5 | 20 | 20 | 0,363 | 0,375 | 0,375 | 0,1376 | 0,5510 | 0,5333 | 0,5392 | 0,5333 | 0,5333 | 0,5392 | 0,7587 | 0,7112 | 0,7112 | 0,7270 | 0,7267 | 9,1288 |
| 5. | 60,7 | 21,0 | 20 | 20 | 0,266 | 0,261 | 0,263 | 0,0693 | 0,7519 | 0,7663 | 0,7596 | 0,7605 | 0,7605 | 0,7596 | 1,4265 | 1,4680 | 1,4450 | 1,4465 | 1,4430 | 9,7849 |
| 6. | 60,7 | 31,5 | 20 | 20 | 0,219 | 0,223 | 0,222 | 0,0490 | 0,9132 | 0,8969 | 0,9037 | 0,9009 | 0,9009 | 0,9037 | 2,0833 | 2,0121 | 2,0325 | 2,0426 | 2,0408 | 9,9060 |
| 7. | 60,7 | 10,5 | 20 | 15 | 0,429 | 0,430 | 0,427 | 0,1838 | 0,4662 | 0,4651 | 0,4666 | 0,4651 | 0,4684 | 0,4666 | 0,7246 | 0,7211 | 0,7314 | 0,7257 | 0,7254 | 9,1125 |
| 8. | 60,7 | 21,0 | 20 | 15 | 0,308 | 0,309 | 0,304 | 0,0942 | 0,6493 | 0,6472 | 0,6515 | 0,6472 | 0,6579 | 0,6515 | 1,4050 | 1,3962 | 1,4430 | 1,4147 | 1,4154 | 9,5978 |
| 9. | 60,7 | 31,5 | 20 | 15 | 0,260 | 0,262 | 0,260 | 0,0680 | 0,7692 | 0,7634 | 0,7673 | 0,7692 | 0,7692 | 0,7673 | 1,9724 | 1,9436 | 1,9724 | 1,9628 | 1,9608 | 9,5177 |
| 10. | 60,7 | 10,5 | 30 | 14 | 0,664 | 0,675 | 0,674 | 0,4502 | 0,4518 | 0,4444 | 0,4471 | 0,4444 | 0,4451 | 0,4471 | 0,7290 | 0,7055 | 0,7075 | 0,7140 | 0,7140 | 8,9693 |
| 11. | 60,7 | 21,0 | 30 | 14 | 0,476 | 0,478 | 0,482 | 0,2292 | 0,6302 | 0,6276 | 0,6267 | 0,6224 | 0,6224 | 0,6267 | 1,4185 | 1,4067 | 1,3837 | 1,4030 | 1,4024 | 9,5097 |
| 12. | 60,7 | 31,5 | 30 | 14 | 0,406 | 0,414 | 0,405 | 0,1667 | 0,7389 | 0,7246 | 0,7347 | 0,7407 | 0,7407 | 0,7347 | 1,9504 | 1,8753 | 1,9599 | 1,9285 | 1,9282 | 9,3595 |

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

პროფესორ ალექსი გორგიძის სახელობის მექანიკის
სამეცნიერო-სასწავლო ლაბორატორია



ლაბორატორიული სამუშაო №2

ჯგუფი №

სტუდენტი:

ხელმძღვანელი:

თარიღი:

თბილისი– 2017

სხეულის მოძრაობა ხახუნის გათვალისწინებით

1. სტატიკური და კინემატიკური ხახუნი

2. ხახუნის მნიშვნელობა ბუნებაში და ტექნიკაში

ძირითადი ცნებები

ყველა რეალურ მექანიკურ სისტემაშიდა პროცესში ადგილი აქვს ხახუნს, რომლის შედეგად წარმოიშობა ხახუნის ძალა. უმეტეს შემთხვევაში ამ ძალის წარმოშობა დაკავშირებულია მექანიკური ენერგიის სითბურ ენერგიად გარდაქმნასთან. ერთმანეთისაგან განასხვავებენ გარე ხახუნის ძალებს და შიგა ხახუნის ძალებს.

შიგა ხახუნის ძალა – ეს არის წინააღმდეგობის ძალა, რომელიც წარმოიშობა გარემოს ფენების ურთიერთმიმართ გადაადგილებისას.

გარე ხახუნის ძალაში იგულისხმება წინააღმდეგობის ძალა წარმოშობილი ორი მყარი სხეულის ურთიერთ შეხების დროს, მათი ერთმანეთის მიმართ გადაადგილებისას. თავის მხრივ, გარე ხახუნიც იყოფა სტატიკურ და კინემატიკურ ხახუნად.

სტატიკური ხახუნი(უძრაობის ხახუნი) ვლინდება ერთმანეთის მიმართ უძრავი სხეულების შემხებ ზედაპირებს შორის.

კინემატიკური ხახუნიწარმოიშობა ერთმანეთის მიმართ მოძრავი სხეულების შემხებ ზედაპირებს შორის. მოძრაობის რაობიდან გამომდინარე მიღებულია კინემატიკური ხახუნის ასეთი დაყოფა: სრიალის ხახუნად და გორვის ხახუნად.

სრიალის ხახუნისათვის სრულდება კულონ–ამონტონის კანონი: $\vec{F}_{\text{ხახ}} = -\mu N \vec{v}$ სრიალის ხახუნის ძალა პროპორციულია ნორმალური N წნევის ძალის

$$F_{\text{ხახ}} = \mu N \quad (1)$$

სადაც μ პროპორციულობის კოეფიციენტია. ამ სიდიდეს ფიზიკური მნიშვნელობაც აქვს. მას ხახუნის კოეფიციენტს უწოდებენ. ხახუნის კოეფიციენტი დამოკიდებულია სხეულის ზედაპირის მდგომარეობაზე, ტემპერატურაზე და სხვ. ფაქტორებზე.

ვთქვათ, სხეული მდებარეობს ჰორიზონტულ ზედაპირზე. დავხაროთ ზედაპირი, მაშინ ჰორიზონტთან გარკვეული β კუთხით დახრისას სხეული დაიწყებს სრიალს, ე.ი. უძრაობის ხახუნი შეიცვალა სრიალის ხახუნით. β კუთხეს ხახუნის კუთხეს უწოდებენ და ხახუნის კოეფიციენტთან აკავშირებენ შემდეგი ტოლობის საშუალებით

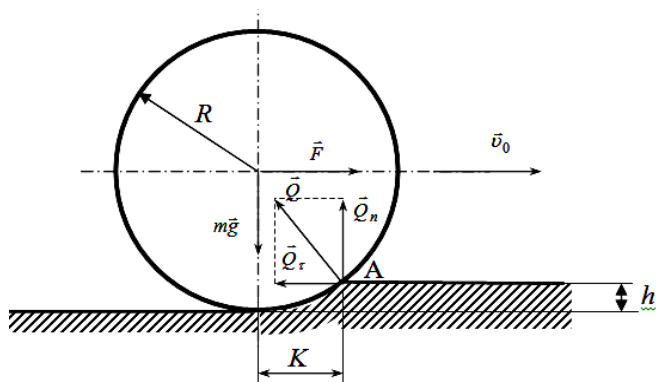
$$\mu = \operatorname{tg} \beta . \quad (2)$$

აღწერილი სიტუაცია შეიძლება გამოვიყენოთ სტატიკური ხახუნის კოეფიციენტის ექსპერიმენტული გზით განსასაზღვრავად.

გამოვიკვლიოთ გორვის ხახუნის წარმოშობის მიზეზები.

განვიხილოთ ცილინდრი, რომელიც მუდმივი \vec{v}_0 სიჩქარით მიგორავს ჰორიზონტულ ზედაპირზე (ნახ.1). ზედაპირის დეფორმაციის გამო მგორავი ცილინდრის წინ წარმოიქმნება თავისებური „საფეხური“.

ვთქვათ \vec{Q} არის „საფეხური“ – ს რეაქციის ძალა, მაშინ \vec{Q} რეაქციის ძალის \vec{Q}_n ნორმალური მდგენელი ტოლია ცილინდრის ზედაპირზე წნევის \vec{N} ძალისა: $Q_n = N$, ხოლო \vec{Q}_τ მხები მდგენელი წარმოადგენს ხახუნის ძალას - $Q_\tau = F_{\text{ხახ.}}$, რომელიც ეწინააღმდეგება ცილინდრის გორვას.



ნახ.1-ჰორიზონტულ სიბრტყეზე მგორავი ცილინდრი

იმისთვის რომ ცილინდრი სიბრტყეზე თანაბრად მიგორავდეს, აუცილებელია: ა) არსებობდეს ხახუნის ძალის მოქმედების მაკომპენსირებელი გარე \vec{F} ძალა; ბ) ცილინდრზე მოქმედი ძალების ჯამური მომენტი იყოს ნულის ტოლი.

შევადგინოთ მომენტების განტოლება A წერტილის მიმართ:

$$mg \cdot K - F_{\text{ხახუნ}} \cdot R = 0 \quad (3)$$

სადაც K წარმოადგენს სიმძიმის ძალის მხარს. (3) ტოლობის ჩაწერისას გათვალისწინებულია, რომ „საფეხური“-ს h სიმაღლე გაცილებით ნაკლებია ცილინდრის R რადიუსზე ($h \ll R$). (3) ტოლობიდან ვღებულობთ გორვის ხახუნის ძალის გამოსათვლელ ფორმულას

$$F_{\text{ხახუნ}} = K \frac{mg}{R}. \quad (4)$$

ამ ფორმულაში შემავალ K სიდიდეს გორვის ხახუნის კოეფიციენტი ჰქვია.

სტატისტიკური ხახუნის μ კოეფიციენტისაგან განსხვავებით K კოეფიციენტი წარმოადგენს სიმძიმის ძალის მხარს და აქვს სიგრძის განზომილება.

K კოეფიციენტის მნიშვნელობა განისაზღვრება ცდებით და დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა მასალისაგან არის დამზადებული სხეულები.

მაგალითად, გორვის ხახუნი წარმოიშვება, როცა ცილინდრს ან ბირთვს გადავაგორებთ მყარი სხეულის ზედაპირზე.

საკონტროლო კითხვები

1. ხახუნის ძალები. მათი თავისებურებები.
2. ხახუნის ძალის დამოკიდებულება მოძრაობის სიჩქარეზე.
3. უძრაობის ხახუნის ძალის და სრიალის ხახუნის ძალის დამოკიდებულება სიბრტყის დახრის კუთხეზე.
4. გამოიყვანეთ (2) და (4) ფორმულა.

დახრილი ქანქარის მეთოდით გარე ხახუნის ძალის შესწავლა

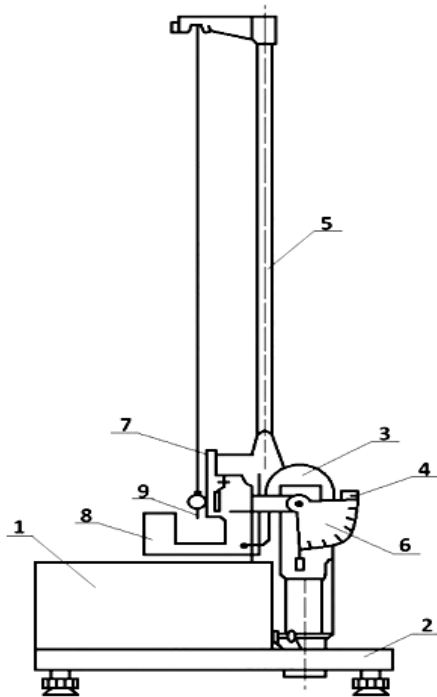
სამუშაოს მიზანი: დახრილი ქანქარის დახმარებით გარე ხახუნის კოეფიციენტის განსაზღვრა

ხელსაწყოები და საკუთრობები: დახრილი ქანქარა, დანადგარი FPM-07, ტვირთების ნაკრები

დანადგარის აღწერა

FPM-07 (დახრილი ქანქარა) დანადგარის საერთო ხედი წარმოდგენილია ნახ.2-ზე. 2 ფუძეზე მიმაგრებულია 1 წამზომი და სვეტი 3 დახრის მექანიზმით. დახრის მექანიზმის 4 სახელურის ბრუნვით შესაძლებელია 5 საყრდენის დახრის კუთხის ცვლილება. დახრის კუთხის ასათვლელად გამოიყენება 6 სკალა. მზიდ 5 საყრდენზე მიმაგრებულია ქანქარა (მაფზე დაკიდული

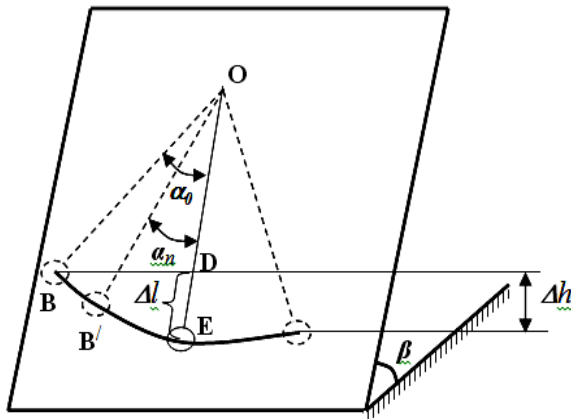
ბირთვი). საყრდენის ფუძეზე დამაგრებულია: ქანქარის გადახრის კუთხის ასათვლელად 7 სკალა და 8 ფოტოგადამწოდი, რომელიც ქანქარის რხევის რიცხვს და დროს აფიქსირებს. 7 სკალას აქვს მოწყობილობა ნიმუშების შესაცვლელად. ქანქარას ბირთვების შეცვლა ხდება 9 მაჩვენებელი ღეროდან ამოხრახვნის გზით.



ნახ.2 - დანადგარი FPM-07

ამ სამუშაოშიგორვის ხახუნის K კოეფიციენტი განისაზღვრება დახრილი ქანქარის მეთოდით, რომელიც წარმოადგენს დახრილ სიბრტყეზე მგორავ, ძაფზე დაკიდებულ ბირთვს

(ნახ.3). ასეთი ქანქარის რხევის მიღება განპირობებულია ვის ხახუნით. K სიდიდის განსასაზღვრავი ფორმულა შეგვიძლია მივიღოთ, თუ n სრული რხევების შესაბამის გაფანტულ ენერგიას და ხახუნის ძალას გავუტოლებთ ერთმანეთს n სრული რხევის შესრულების შემდეგ B მდგომარეობიდან B' მდგომარეობაში გადასვლისას ქანქარა კარგავს $\Delta E = mg\Delta h$ ენერგიას, რომელიც ტოლია წინააღმდეგობის



ნახ. 3- დახრილი ქანქარა

ძალების მიერ შესრულებული მუშაობისა A გადაადგილებაზე (ნახ. 5):

$$\Delta E = \Delta A + \Delta A_1, \quad (5)$$

სადაც $\Delta A = F_{\text{ხახუნ}} S$ -ხახუნის ძალის მუშაობაა, ΔA_1 -ქანქარას საკიდში ხახუნის და გარემოს წინააღმდეგობის დასძლევად შესრულებული მუშაობა, Δh -ბირთვის სიმძიმის ცენტრის მიერ დაკარგული სიმაღლე.

თუ ΔA_1 -ს მისი სიმცირის გამო უგულებელყოფთ, მაშინ

$$mg\Delta h = F_{\text{ბახ}} S . \quad (6)$$

(4)–ის გათვალისწინებით გეომეტრიული გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ

$$mg\Delta l \sin \beta = Km g \cos \beta \frac{S}{R} , \quad (7)$$

საიდანაც K –თვის მივიღებთ

$$K = \frac{\Delta l R}{S} \operatorname{tg} \beta , \quad (8)$$

სადც R – ბირთვის რადიუსია, β – სიბრტყის დახრის კუთხეა.

$$\Delta l = OE - OD .$$

თუ α_0 – ქანქარის გადახრის კუთხეა საწყის მომენტში, α_n – გადახრის კუთხეა n სრული რხევების შემდეგ, L – ქანქარის სიგრძეა, მაშინ მანძილს რომელსაც გაივლის ქანქარის სიმძიმის ცენტრი n რხევის შემდეგ ტოლია

$$S = 4Ln\alpha_{\text{საშ}} ,$$

$$\text{სადაც } \alpha_{\text{საშ}} = \frac{\alpha_0 + \alpha_n}{2} .$$

მივიღოთ რომ α_0 და α_n კუთხეები მცირეა $\left(\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \right)$

, მაშინ გორვის ხახუნის K კოეფიციენტისათვის საბოლოოდ მივიღებთ

$$K = \frac{R \operatorname{tg} \beta (\cos \alpha_n - \cos \alpha_0)}{2n(\alpha_0 + \alpha_n)} \approx R \operatorname{tg} \beta \left(\frac{\alpha_0 - \alpha_n}{4n} \right) . \quad (9)$$

აქ α_0 და α_n – კუთხის მნიშვნელობებია რადიანებში.

სამუშაოს შესრულების თანამიმდევრობა

სავარჯიშო გორვის ხახუნის კოეფიციენტის განსაზღვრა

1) დაამაგრეთ საცდელი ბრტყელი ნიმუში მოწყობილობის 7 სკალაზე (დანადგარი FPM-07).

2) მარეგულირებელი ფეხების დახმარებით ქანქარა დააყენეთ ვერტიკალურ მდგომარეობაში. ამასთან 9 მაჩვენებელი ლერო უნდა იყოს 7 სკალის ნულოვანი ნიშნულის პირდაპირ.

3) ხელსაწყო ჩართეთ ქსელში.

4) სვეტის დახრის მოცემული კუთხისათვის ($25^0 - 60^0$) ბირთვი წონასწორობის მდებარეობიდან გადახარეთ α_0 კუთხით და კლავიშზე ჩამოყრა დაჭერის შემდეგ ბიძგის გარეშე გაუშვით ქანქარა. 7–10 სრული რხევის შემდეგ დააჭირეთ კალავიშს „სდექ“ და ვიზუალურად დააფიქსირეთ ქანქარას გადახრის α_n კუთხე. n , α_0 , α_n მნიშვნელობები შეიტანეთ ცხრილში.

5) β , n , α_0 იმავე მნიშვნელობებისათვის გაიმეორეთ გაზომვები α_n – თვის არანაკლებ 10–15 ჯერ. შედეგები შეიტანეთ ცხრილში.

6) შტანგელფარგლით გაზომეთ ბირთვის რადიუსი R .

7) (9) ფორმულით გამოთვალეთ გორვის ხახუნის კოეფიციენტი.

8) გაიმეორეთ ცდა, შეცვალეთ მოხახუნე წყვილი. ამისათვის საჭიროა ან შეცვალოთ 7 საკალაზე ბრტყელი ნიმუში, ან ქანქარას ბირთვი, ან ორივე ერთად.

9) გამოიტანეთ დასკვნა.

№ 2.2 ცხრილში მოცემულია სხვადასხვა მასალისაგან დამზადებული მოხახუნე ზედაპირებზე ჩატარებული ექსპერიმენტების შედეგები.

| № | მასალის შემადგენლობა | | R | n | β | | φ_0 | | φ_n | | K (ბ.) |
|-----|-------------------------|----------|---|----|---------|---------|-------------|---------|-------------|------------|-----------|
| | ფორფიტა | ზირთვი | | | გრადუსი | გრადუსი | გრადუსი | გრადუსი | გრადუსი | რადიანი | |
| 1. | სპილენძი | სპილენძი | 1 | 15 | 30 | 10 | 0,1744 | 4,5 | 0,0785 | 0,0000923 | |
| 2. | სპილენძი | სპილენძი | 1 | 15 | 45 | 9 | 0,1570 | 3,5 | 0,0610 | 0,00001600 | |
| 3. | სპილენძი | სპილენძი | 1 | 14 | 60 | 11 | 0,1919 | 6,0 | 0,1047 | 0,00002700 | |
| 4. | ალუმინი | ალუმინი | 1 | 10 | 30 | 10 | 0,1744 | 5,0 | 0,0872 | 0,00001259 | |
| 5. | ალუმინი | ალუმინი | 1 | 10 | 45 | 9 | 0,1570 | 4,5 | 0,0785 | 0,00001960 | |
| 6. | ალუმინი | ალუმინი | 1 | 10 | 60 | 8 | 0,1396 | 3,5 | 0,0610 | 0,00003400 | |
| 7. | სპილენძი | ალუმინი | 1 | 15 | 30 | 11 | 0,1919 | 4,0 | 0,0698 | 0,00001180 | |
| 8. | სპილენძი | ალუმინი | 1 | 15 | 45 | 10 | 0,1744 | 2,5 | 0,0436 | 0,00002180 | |
| 9. | სპილენძი | ალუმინი | 1 | 15 | 60 | 9 | 0,1570 | 0,6 | 0,0105 | 0,00004230 | |
| 10. | ალუმინი | სპილენძი | 1 | 12 | 30 | 8 | 0,1396 | 4,5 | 0,0785 | 0,00000735 | |
| 11. | ალუმინი | სპილენძი | 1 | 12 | 45 | 9 | 0,1570 | 4,0 | 0,0698 | 0,00001820 | |
| 12. | ალუმინი | სპილენძი | 1 | 12 | 60 | 10 | 0,1744 | 3,0 | 0,0523 | 0,00004400 | |

ცხრილი № 2.2

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
პროფესორ ალექსი გორგიძის სახელობის მექანიკის
სამეცნიერო-სასწავლო ლაბორატორია



ლაბორატორიული სამუშაო №3

ჯგუფი №

სტუდენტი:

ხელმძღვანელი:

თარიღი:

თბილისი – 2017

ბმული სისტემების რხევების შესწავლა

სამუშაოს მიზანი: ბმული სისტემების რხევების თავისებურებების და ძირითადი მახასიათებლების შესწავლა.

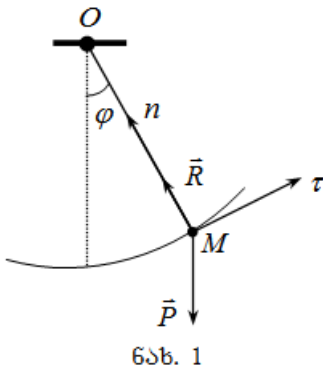
ამოცანა: ორი ბმული ქანქარის თანაფაზური და ფაზასაწინააღმდეგო რხევების პერიოდის და ბიძგების პერიოდის განსაზღვრა.

ხელსაწყოები და საკუთრობები: ხელსაწყო FPM-13, არათავისუფალი სისტემების რხევების გამოსაკვლევა; წამზომი (ბიძგების პერიოდის გასაზომად).

თეორიული ნაწილი

მათემატიკური ქანქარა ეწოდება ისეთ ნივთიერ წერტილს, რომელიც დაკიდებულია უჭიმადი და უწონადი ძაფის საშუალებით უძრავ წერტილზე და მოძრაობს სიმძიმის ძალის მოქმედებით ვერტიკალურ სიბრტყეში.

განვიხილოთ მათემატიკური ქანქარა, რომელიც წარმოადგენს $OM = l$ სიგრძის ერთ ბოლოში დაკიდებულ P წონის M ნივთიერ წერტილს, რომლის მეორე ბოლო უძრავად არის



ჩამაგრებული O წერტილში. ამ ნივთიერ წერტილს შეუძლია შეასრულოს არათავისუფალი მოძრაობა l რადიუსის წრეწირის რკალზე. l სიდიდეს ეწოდება ქანქარას სიგრძე. ძაფის წონა უგულებელყოფილია.

გადავხაროთ M წერტილი ვერტიკალური მდებარეობიდან რაიმე φ კუთხით. ამ კუთხეს

გადახრის კუთხე ეწოდება და განსაზღვრავს ქანქარის ყოველ

მდებარეობას. შევადგინოთ M წერტილის მოძრაობის განტოლება. M წერტილზე მოქმედებს \vec{P} სიმძიმის და \vec{R} რეაქციის ძალები. M წერტილის მოძრაობის განტოლება იქნება

$$m\vec{w} = \vec{P} + \vec{R}. \quad (1)$$

გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები ბუნებრივ კოორდინატებში და დავაგეგმილოთ წინა ტოლობა M წერტილის ტრაექტორიის მხებზე და მთავარ ნორმალზე. მივიღებთ:

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \varphi, \\ m \frac{v^2}{l} = -mg \cos \varphi + R. \end{cases} \quad (2)$$

მესამე განტოლება აღარ გვექნება, რადგან ის გადაიქცევა იგივეობად $0=0$. M წერტილის მოძრაობა ხდება l რადიუსის წრეწირის რკალზე, ამიტომ $s = l\varphi$. შესაბამისად გვექნება

$$v = \frac{ds}{dt} = l \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{dv}{dt} = l \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

შევიტნოთ ეს მნიშვნელობები (2) სისტემის პირველ განტოლებაში. მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

ეს განტოლება გამოსახავს M წერტილის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას. ამ განტოლების ამოხსნა მოითხოვს ელიფსური ფუნქციების ცოდნას. ჩვენ დავკმაყოფილდებით მცირე რხევებით. ამიტომ მივიღოთ, რომ $\sin \varphi \approx \varphi$, ე.ი განვიხილოთ ისეთი გადახრები, როცა შესაძლებელია $\sin \varphi$ –ს

შეცვლა φ არგუმენტით. თუ ამასთანავე შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\frac{g}{l} = \omega_1^2, \text{ მაშინ მივიღებთ:}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_1^2\varphi = 0.$$

ეს განტოლება წარმოადგენს ჰარმონიული რხევის დიფერენციალურ განტოლებას. ამ განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_1 t + \alpha),$$

სადაც φ_0 და α ნებისმიერი მუდმივებია, რომლებიც განისაზღვრებიან საწყისი პირობებით. φ_0 აღნიშნავს რხევის ამპლიტუდას, ხოლო α – რხევის საწყის ფაზას. რხევის პერიოდი და სიხშირე განისაზღვრებიან შემდეგი ტოლობებით

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (3)$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (4)$$

აქ g - სიმძიმის ძალის აჩქარებაა.

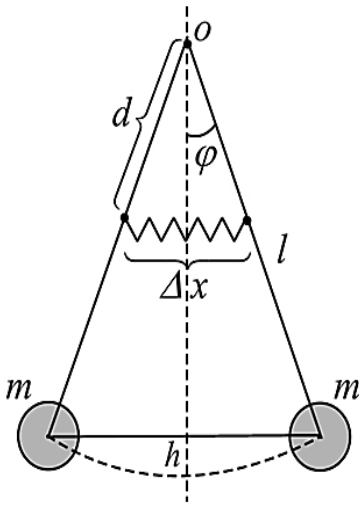
(2) სისტემის მეორე განტოლებიდან განისაზღვრება უცნობი რეაქციის ძალა. მართლაც

$$R = m \left(\frac{v^2}{l} + g \cos\varphi \right) = m \left[l \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + g \cos\varphi \right].$$

ბმული რხევითი სისტემა – ეს არის ორი ან რამდენიმე ქანქარის ერთობლიობა, რომლებიც ერთმანეთთან დაკავშირებულია მსუბუქი დრეკადი შემაერთებლით.

თანაფაზური და ფაზასაწინააღმდეგო რხევები. მე- 2 – ნახაზზე გამოსახული ქანქარებიდან თითოეული მათგანი

წარმოადგენს წვრილ მსუბუქ ღეროს, რომლის ერთი ბოლო უძრავადაა დამაგრებული, ხოლო მეორე ბოლოზე მიმაგრებულია m – მასის მასიური ტვირთი. ეს ქანქარები თავისი თვისებებით ახლოა მათემატიკურ ქანქარასთან. ქანქარები ერთმანეთთან დაკავშირებული არიან k სიხისტის მქონე მსუბუქი (უწონადი) ზამბარით.



ნახ. 2

გადავხაროთ ორივე ქანქარა ერთ მხარეს ერთი და იგივე კუთხით. რამდენადაც ქანქარები იგივეურია და დრეკადი კავშირი მათ შორის პრაქტიკულად არ მოქმედებს, ამიტომ ისინი შეასრულებენ რხევებს ერთნაირად. ასეთ რხევებზე ამბობენ, რომ ისინი თანაფაზურია. ცხადია, რომ თითოეული ქანქარის თანაფაზური რხევების პერიოდი და სიხშირე ისეთივეა, თითქოს იგი არ იყოს დაკავ-

შირებული მეორე ქანქარასთან. ამ პერიოდის და სიხშირის საპოვნელად შეიძლება ვისარგებლოთ იმ ცნობილი ფორმულებით, რომლებიც ზემოთ გვაქვს მიღებული

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \nu_1 = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (5)$$

ახლა გადავხაროთ ქანქარები ერთი და იგივე კუთხით, მაგრამ სხვადასხვა მხარეს. ამ შემთხვევაში ქანქარები შეასრულებენ რხევებს სარკისებური სიმეტრიით. ასეთ რხევებს უწოდებენ

ფაზასაწინააღმდეგო რხევებს. გამოვთვალოთ ფაზასაწინააღმდეგო რხევების T_2 პერიოდი და ν_2 სიხშირე.

თუ უგულვებელყოფთ ენერგიის დანაკარგს ხახუნის, ჰაერის წინააღმდეგობის და ა.შ. ხარჯზე, მაშინ ენერგიის მუდმივობის კანონს ექნება შემდეგი სახე:

$$E_3 + U_3 + U_{\text{გ}} = \text{const},$$

სადაც E_3 – მერხევი ტვირთების კინეტიკური ენერგიაა, U_3 – მერხევი ტვირთების პოტენციალური ენერგია, ხოლო $U_{\text{გ}}$ – ზამბარის ანუ დრეკადი კავშირის პოტენციალური ენერგია. გვაქვს:

$$E_3 = 2 \frac{J\dot{\phi}^2}{2} = J\dot{\phi}^2, \quad (6)$$

სადაც $J = ml^2$ – ერთერთი ქანქარის ინერციის მომენტი, $\dot{\phi}$ – ქანქარის კუთხური სიჩქარეა.

$$U_3 = 2mgh, \quad (7)$$

სადაც h – ქანქარის აწევის სიმაღლეა.

$$U_{\text{გ}} = k \frac{(\Delta x)^2}{2} \quad (8)$$

$$h = l(1 - \cos \varphi) = 2l \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad (9)$$

სადაც l – არის მანძილი ქანქარის დაკიდების წერტილიდან ბირთვის ცენტრამდე, φ – ქანქარის წონასწორობის მდებარეობიდან გადახრის კუთხეა.

$$\Delta x = 2d \sin \varphi \quad (10)$$

აქ d – არის მანძილი დაკიდების წერტილიდან ქანქარის ზამბარასთან მიერთების წერტილამდე.

თუ (9) და (10)–ს ჩავსვამთ (7) და (8)–ში და ჩავთვლით, რომ საქმე გვაქვს მცირე რხევებთან ($\sin \varphi \approx \varphi$), მაშინ ენერჯიის მუდმივობის კანონიდან მივიღებთ:

$$ml^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + mgl\varphi^2 + 2kd^2\varphi^2 = const. .$$

თუ ამ ტოლობას გავაწარმოებთ ერთხელ დროთი, მივიღებთ

$$\ddot{\varphi} + \omega_2^2 \varphi = 0, \quad (11)$$

სადაც

$$\omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2kd^2}{ml^2}. \quad (12)$$

(11) განტოლება წარმოადგენს ჰარმონიული რხევის განტოლებას ω_2 კუთხური სიხშირით. რხევის პერიოდი და რხევის სიხშირე გამოითვლება შესაბამისად შემდეგი ფორმულებით:

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2kd^2}{ml^2}}}, \quad \nu_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2kd^2}{ml^2}}. \quad (13)$$

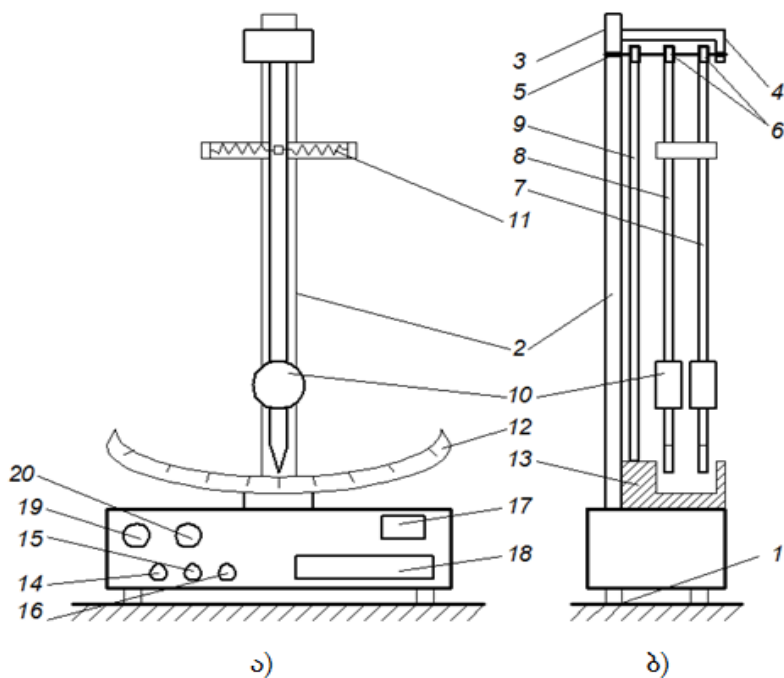
დანადგარის აღწერა და გაზომვის მეთოდი.

ხელსაწყოს FPM-13–ის საერთო სახე მოცემულია მე-3 ნახაზზე. ფუძე (1) აღჭურვილია რეგულირებადი ფეხებით, რომლებიც უზრუნველყოფენ ხელსაწყოს გასწორებას. ფუძეში ჩამაგრებულია სვეტი (2). მასზე დამაგრებულია (3) მილისი და კრონშტეინი (4). მილისის ღერძზე (5) მოთავსებულია სამი საკიდარი, რომლებზეც ბურთულსაკისარებით ჩამოკიდებულია ქანქარები (7,8) და ღერო (9). ამ ღეროს დანიშნულებაა რხევების გამოწვევა და მოცემულ სამუშაოში ის არ გამოიყენება. ქანქარების გასწვრივ შეიძლება გადაადგილდეს და დაფიქსირდეს ტვირთი (10) საჭირო მდგომარეობაში. ქანქარები ერთმანეთთან

შეუღლებულია ორი ზამბარის (11) საშუალებით, რომლებიც დამაგრებულია C ფორმის გარსაკარში, რომლის გადაადგილება შესაძლებელია ქანქარების ღერძის გასწვრივ. ქვედა კრონშტეინთან მიმაგრებულია კუთხური სკალა (12), რომლის საშუალებით განისაზღვრება ქანქარების რხევის ამპლიტუდა. მართვის და გაზომვის ბლოკის ნაპირის პანელზე მოთავსებულია: კლავიში (14) „ქსელი“, ხელსაწყოს ქსელში ჩასართავად; კლავიში (15) „ჩამოყრა“ გაზომვის ბლოკის სქემის ჩამოსაყრელად; კლავიში (16) „სდექ“ , რომელზეც თითის დაჭე-

რო ვაჩერებთ გაზომვის პროცესს; სახელურები (19, 20) გათვალისწინებულია იძულებითი რხევების გამოსაწვევად და ამ სამუშაოში არ გამოიყენება.

თანაფაზურ რხევებზე (ნორმალური რხევები ω_1 – სიხშირით) დაკვირვების მიზნით ბმულ ქანქარებს გადახრიან ცალ მხარეს $5^\circ - 7^\circ$ კუთხით და უშვებენ.



ნახ. 3. ხელსაწყო FPM-13

ა) ხელი წინიდან; ბ) ხელი გვერდიდან

ფაზასაწინააღმდეგო რხევებზე (ნორმალური რხევები ω_2 – სიხშირით) დაკვირვების მიზნით ბმულ ქანქარებს გადახრიან ურთიერთსაწინააღმდეგოდ ერთნაირი $5^\circ - 7^\circ$ კუთხით და უშვებენ. ორივე შემთხვევაში რხევების პერიოდი და სიხშირე გამოითვლება ფორმულებით:

$$T = \frac{t}{n}, \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{n}{t} \quad (14)$$

სადაც n – რხევის პერიოდთა რაოდენობაა, t – გაზომვის ხანგრძლივობა. n და t სიდიდეების მნიშვნელობები განისაზღვრება ფოტოელექტრული გადამწოდის (13) საშუალებით და ფიქსირდება უნივერსალური მილიწამზომის ინდიკატორით (17–18).

(14) ფორმულით მოცემული რიცხვითი გამოთვლების გასმარტივებლად, შევარჩიოთ დროის ის ხანგრძლივობა, რომლის დროსაც რხევათა რიცხვი $n = 10$.

ფოტოელექტრული გადამწოდის მუშაობის პრინციპი ემყარება ერთ–ერთი ქანქარის ღეროთი სინათლის ნაკადის პერიოდულ შეწყვეტას, ნაკადისა, რომელიც ეცემა ნათურიდან ფოტორეზისტორს. ამის შემდეგ წრედში წარმოიქმნება ელექტრული იმპულსები, რომლებიც გაძლიერების შემდეგ მიეწოდება უნივერსალურ მილიწამზომის შესასვლელს.

სამუშაოს შესრულების თანამიმდევრობა.

თავდაპირველად აუცილებელია დავრწმუნდეთ, რომ ქანქარების დამამაგრებელი გარსაკირები დაყენებულია ქანქარების ზედა ნაწილში საკიდარების მახლობლად, ტვირთები კი დამამაგრებელია ღეროების ქვედა ნაწილში ორივე ქანქარას საკიდარებიდან ერთნაირ მანძილზე. ეს ორი ფაქტორი „მაღალი ზამზარა და დაბალი ტვირთები“ უზრუნველყოფს ქანქარებს შორის სუსტ კავშირს.

1) დააჭირეთ კლავიშს „ქსელი“. შეამოწმეთ, რომ გაზომვის ყველა ინდიკატორი აჩვენებს ნულს და ანთია ფოტოელექტრული გადამწოდის ნათურა.

2) გადახარეთ ორივე ქანქარა ერთ მხარეს ერთი და იგივე კუთით ($5^\circ - 7^\circ$) და გაუშვით. დააჭირეთ კლავიშს „ჩამოყრა“.

3) ციფრი „ნულის“ გამოჩენის შემდეგ რხევების პერიოდის საინდიკატორო ველზე დააჭირეთ კლავიშს „გაჩერება“, მაშინ გაზომვების შეჩერების მომენტში დარეგისტრირდება რხევების რიცხვი $n=10$, ხოლო მეორე საინდიკატორო ველზე დაფიქსირდება ამ რხევების ხანგრძლივობა t .

4) გამოთვალეთ თანაფაზური რხევების T_1 პერიოდი და რხევის სიხშირე (14) ფორმულით და შემდეგ შეიტანეთ ცხრილში.

5) ჩაატარეთ იგივე ცდები ოთხჯერ და შედეგები შეიტანეთ ცხრილში.

6) ანალოგიურად ტარდება ფაზასაწინააღმდეგო რხევების T_2 პერიოდის და რხევის სიხშირის გაზომვა. განსხვავება მხოლოდ იმაშია, რომ ქანქარების საწყისი გადახრა ხდება ურთიერთ საწინააღმდეგო მხარეებზე ($5^\circ - 7^\circ$) – ით. შედეგი ასევე შეაქვთ ცხრილში.

7) კლავიშის „ქსელი“ დაჭერით გამორთეთ მკვებავი ძაბვა.

8) გამოთვალეთ T_1 , T_2 და ν_1 , ν_2 სიდიდეების გაზომვის აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილობები. შედეგები შეიტანეთ ცხრილში.

$$\Delta T_1 = \frac{T_1 - T_{1\text{ძბს}}}{T_1} \times 100\%, \quad \Delta T_2 = \frac{T_2 - T_{2\text{ძბს}}}{T_2} \times 100\%,$$

$$\Delta \nu_1 = \frac{\nu_1 - \nu_{1\text{ძბს}}}{\nu_1} \times 100\%, \quad \Delta \nu_2 = \frac{\nu_2 - \nu_{2\text{ძბს}}}{\nu_2} \times 100\%.$$

საკონტროლო კითხვები

1. რას ეწოდება მათემატიკური ქანქარა?
2. როგორია მისი რხევის დიფერენციალური განტოლება?

3. პირდაპირი ჩასმით დაამტკიცეთ, რომ მიღებული ამონახსნი არის შესაბამისი განტოლების ამონახსნი.

4. რას უდრის რხევის პერიოდი? რხევის სიხშირე?

5. როგორ რხევით სისტემას ეწოდება ბმული სისტემა? მოიყვანეთ მაგალითები.

6. რატომ არ ითვლება ჰარმონიული რხევად თითოეული ქანქარის მოძრაობა?

7. როგორ რხევებს ეწოდება თანაფაზური? ფაზასაწინააღმდეგო?

8. რას უდრის რხევის პერიოდი და რხევის სიხშირე თანაფაზური რხევის დროს?

9. რას უდრის რხევის პერიოდი და რხევის სიხშირე ფაზასაწინააღმდეგო რხევის დროს?

10. ქანქარებს შორის როგორ კავშირს ეწოდება სუსტი? როგორია სუსტი კავშირის მიახლოების გამოყენების პირობები?

11. შეეცადეთ ბრუნვითი მოძრაობის დინამიკის ზოგადი განტოლების საფუძველზე რხევითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლების მიღება, რომელიც აღწერს ქანქარის მცირე რხევას.

№ 3.3 ცხრილში მოყვანილია ექსპერიმენტების შედეგები გადახრის კუთხისა და რხევათა რიცხვის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის.

| № | m | l | d | k | α | n | t ₁ | t ₂ | T ₁₀ | T ₁₀ | ΔT ₁ | T ₂₀ | T ₂₀ | ΔT ₂ | V ₁₀ | V ₁₀ | ΔV ₁ | V ₂₀ | V ₂₀ | ΔV ₂ |
|-----|-----|----|----|---|----|----|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. | 100 | 45 | 10 | 5 | 10 | 10 | 12,814 | 11,130 | 1,3457 | 1,2814 | 4,778 | 1,2150 | 1,1130 | 8,395 | 0,7431 | 0,7804 | 5,020 | 0,8230 | 0,8985 | 9,174 |
| 2. | 100 | 45 | 10 | 5 | 8 | 15 | 19,194 | 16,622 | 1,3457 | 1,2796 | 4,912 | 1,2150 | 1,1081 | 8,798 | 0,7431 | 0,7815 | 5,168 | 0,8230 | 0,9025 | 9,660 |
| 3. | 100 | 45 | 10 | 5 | 9 | 20 | 25,582 | 22,221 | 1,3457 | 1,2791 | 4,949 | 1,2150 | 1,1110 | 8,560 | 0,7431 | 0,7818 | 5,208 | 0,8230 | 0,9001 | 9,368 |
| 4. | 100 | 45 | 10 | 5 | 7 | 10 | 12,778 | 11,051 | 1,3457 | 1,2778 | 5,046 | 1,2150 | 1,1051 | 9,045 | 0,7431 | 0,7826 | 5,316 | 0,8230 | 0,9049 | 9,951 |
| 5. | 100 | 45 | 10 | 5 | 7 | 15 | 19,170 | 16,600 | 1,3457 | 1,2780 | 5,031 | 1,2150 | 1,1067 | 8,914 | 0,7431 | 0,7825 | 5,302 | 0,8230 | 0,9036 | 9,793 |
| 6. | 100 | 45 | 10 | 5 | 10 | 20 | 25,600 | 22,210 | 1,3457 | 1,2800 | 4,882 | 1,2150 | 1,1105 | 8,601 | 0,7431 | 0,7812 | 5,127 | 0,8230 | 0,9005 | 9,417 |
| 7. | 100 | 45 | 10 | 5 | 7 | 10 | 12,771 | 11,087 | 1,3457 | 1,2771 | 5,098 | 1,2150 | 1,1087 | 8,749 | 0,7431 | 0,7830 | 5,369 | 0,8230 | 0,9020 | 9,599 |
| 8. | 100 | 45 | 10 | 5 | 8 | 10 | 12,777 | 11,064 | 1,3457 | 1,2777 | 5,053 | 1,2150 | 1,1064 | 8,938 | 0,7431 | 0,7826 | 5,316 | 0,8230 | 0,9038 | 9,818 |
| 9. | 100 | 45 | 10 | 5 | 8 | 15 | 19,185 | 16,636 | 1,3457 | 1,2790 | 4,956 | 1,2150 | 1,1091 | 8,716 | 0,7431 | 0,7819 | 5,221 | 0,8230 | 0,9016 | 9,550 |
| 10. | 100 | 45 | 10 | 5 | 7 | 20 | 25,565 | 22,153 | 1,3457 | 1,2783 | 5,008 | 1,2150 | 1,1076 | 8,840 | 0,7431 | 0,7823 | 5,275 | 0,8230 | 0,9028 | 9,696 |
| 11. | 100 | 45 | 10 | 5 | 8 | 20 | 25,586 | 22,183 | 1,3457 | 1,2793 | 4,934 | 1,2150 | 1,1092 | 8,708 | 0,7431 | 0,7817 | 5,194 | 0,8230 | 0,9016 | 9,550 |

ცხრილი №3.3

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
პროფესორ ალექსი გორგიძის სახელობის მექანიკის
სამეცნიერო-სასწავლო ლაბორატორია



ლაბორატორიული სამუშაო №4

ჯგუფი №

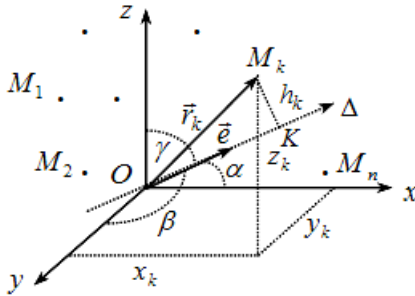
სტუდენტი:

ხელმძღვანელი:

თარიღი:

თბილისი– 2017

ინერციის მომენტები



ნახ.1

ვთქვათ, რომ $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემის სათავეზე გადის ნებისმიერი Δ ღერძი და საჭიროა ვიპოვოთ M_k ($k = \overline{1, n}$) წევრტილთა სისტემის ინერციის მომენტი ამ ღერძის მიმართ (ნახ.1). აღვნიშნ-

ოთ ღერძის მიმართულების კოსინუსები l, m, n -ით

$$l = \cos \alpha, \quad m = \cos \beta, \quad n = \cos \gamma$$

სადაც α, β, γ გამოსახავს Δ ღერძსა და Ox, Oy, Oz ღერძებს შორის კუთხეებს. ამასთან

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Δ ღერძის მგეზავი ვექტორი აღვნიშნოთ $\vec{e}(l, m, n)$ -ით. ცხადია, რომ $|\vec{e}| = 1$. M_k წევრტილის კოორდინატები აღვნიშნოთ x_k, y_k, z_k -თი. ინერციის მომენტის განმარტების თანახმად

$$I_{\Delta} = \sum_{k=1}^n m_k h_k^2$$

სადაც h_k აღნიშნავს მანძილს M_k წევრტილიდან Δ ღერძამდე.

ცხადია, რომ $h_k^2 = |\overrightarrow{OM_k}|^2 - |\overrightarrow{OK}|^2$. აქ $\overrightarrow{OM_k}$ არის M_k წევრტილის

რადიუს-ვექტორი, ხოლო $|OK|$ წარმოადგენს \overline{OM}_k ვექტორის გეგმილს Δ ღერძზე. ამიტომ $|\overline{OM}_k|^2 = |\vec{r}_k|^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2$.

$$|OK| = \text{ბმბ}_{\Delta} |\overline{OM}_k| = |\vec{r}_k| \cos(\vec{e}, \wedge \vec{r}_k) = |\vec{e}| |\vec{r}_k| \cos(\vec{e}, \wedge \vec{r}_k) = (\vec{e} \cdot \vec{r}_k) = \\ = l x_k + m y_k + n z_k$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ h_k^2 -ის გამოსახულებაში, გვექნება

$$h_k^2 = (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)(l^2 + m^2 + n^2) - (l x_k + m y_k + n z_k)^2.$$

თუ ფრჩხილებში მყოფ გამოსახულებებს გადავამრავლებთ და ავამაღლებთ კვადრატში, მიღებულ გამოსახულებს დავალაგებთ l, m, n სიდიდეების მიხედვით, მივიღებთ:

$$h_k^2 = (y_k^2 + z_k^2)l^2 + (x_k^2 + z_k^2)m^2 + (x_k^2 + y_k^2)n^2 - \\ - 2mn y_k z_k - 2l n x_k z_k - 2l m x_k y_k$$

ეს მნიშვნელობა შევიტანოთ I_{Δ} -ს გამოსახულებაში. მივიღებთ:

$$I_{\Delta} = l^2 \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2) + m^2 \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + z_k^2) + n^2 \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2) - \\ - 2mn \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k - 2l n \sum_{k=1}^n m_k x_k z_k - 2lm \sum_{k=1}^n m_k x_k y_k$$

ახლა, თუ გავიხსენებთ, რომ

$$I_x = \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2) \quad , \quad I_y = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + z_k^2) \quad ,$$

$$I_z = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2) ,$$

$$I_{yz} = \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k , \quad I_{xz} = \sum_{k=1}^n m_k x_k z_k , \quad I_{xy} = \sum_{k=1}^n m_k x_k y_k .$$

მაშინ

$$I_{\Delta} = l^2 I_x + m^2 I_y + n^2 I_z - 2mn I_{yz} - 2ln I_{xz} - 2lm I_{xy} \quad (1)$$

ამგვარად ინერციის მომენტი ნებისმიერი ღერძის მიმართ განისაზღვრება I_x, I_y, I_z ინერციის მომენტებით კორდინატთა ღერძების მიმართ, $I_{yz} = I_{zy}, I_{xz} = I_{zx}, I_{xy} = I_{yx}$ ცენტრიდანული ინერციის მომენტებით და ღერძების მიმართულების კოსინუსებით.

ამ ცხრა სიდიდისაგან გარკვეული წესით შედგენილ ცხრილს, ან უფრო ზუსტად მატრიცას

$$\begin{vmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{vmatrix}$$

ეწოდება სხეულის ინერციის მომენტების ტენზორი ნებისმიერი წერტილის მიმართ. $I_x, I_y, I_z, I_{yz} = I_{zy}, I_{xz} = I_{zx}, I_{xy} = I_{yx}$ სიდიდეები კი ინერციის ტენზორის კომპონენტებია.

რადგან $I_{yz} = I_{zy}, I_{xz} = I_{zx}, I_{xy} = I_{yx}$, ამიტომ ინერციის ტენზორი სიმეტრიულია და მთლიანად განისაზღვრება ექვსი კომპონენტით.

თუ ცნობილია, ინერციის ექვსი კომპონენტი, მაშინ (1) ფორმულით შეიძლება გამოვთვალოთ მყარი სხეულის ინერციის მომენტი ნებისმიერი ღერძის მიმართ.

შემოვიღოთ O წერტილის მიმართ სხეულის ინერციის ელიფსოიდის ცნება. ამისათვის საკოორდინატო სათავიდან გავატაროთ ბრუნვის ღერძები ნებისმიერი მიმართულებებით

და თითოეულ მათგანზე გადავზომოთ $r = \frac{1}{\sqrt{I_\Delta}}$ სიგრძის მონაკვეთები, სადაც I_Δ მყარი სხეულის ინერციის მომენტია მოცემული ბრუნვის ღერძის მიმართ. აღნიშნული მონაკვეთების

ბოლოები განლაგდებიან რაიმე ზედაპირზე, რომლის განტოლების დასაწერად გავითვალისწინოთ, რომ ამ ზედაპირის წერტილების რადიუს-ვექტორი უდრის

$$\vec{r} = \frac{\vec{e}}{\sqrt{I_\Delta}}$$

რომლის გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე განისაზღვრება ტოლობებით

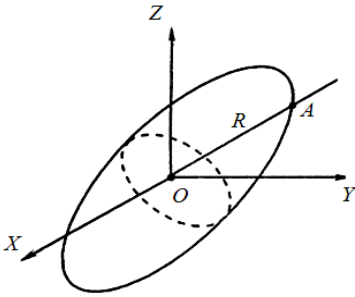
$$x = \frac{l}{\sqrt{I_\Delta}}, \quad y = \frac{m}{\sqrt{I_\Delta}}, \quad z = \frac{n}{\sqrt{I_\Delta}}. \quad (2)$$

თუ (2) გამოსახულებიდან განსაზღვრულ l, m, n სიდიდეების მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (1)-ში, მივიღებთ

$$I_\Delta = x^2 I_{\Delta x} + y^2 I_{\Delta y} + z^2 I_{\Delta z} - 2xy I_{\Delta xy} - 2xz I_{\Delta xz} - 2yz I_{\Delta yz} \quad (3)$$

თუ უკანასკნელი ტოლობის ორივე მხარეს შევკვეცავთ I_Δ -ზე, მივიღებთ

$$x^2 I_x + y^2 I_y + z^2 I_z - 2xy I_{xy} - 2xz I_{xz} - 2yz I_{yz} = 1. \quad (4)$$



ფაბ. 2

მიღებული გამოსახულება წარმოადგენს O წერტილის მიმართ სხეულის ინერციის ელიფსოიდის განტოლებას. ინერციის ელიფსოიდი არის ზედაპირი, რომელიც ახასიათებს სხეულის ინერციის მომენტებს ფიქსირებულ O წერტილზე გამავალი ღერძთა კონის მიმართ. ვიცით რა ინერციის

ელიფსოიდი O წერტილისათვის, შეიძლება ვიპოვოთ ინერციის მომენტი ამავე O წერტილზე გამავალი ნებისმიერი OA ღერძის მიმართ შემდეგი ტოლობის დახმარებით

$$I = \frac{1}{R^2} \quad (5)$$

თუ შესაბამისი მასშტაბით გავზომავთ $R = OA$ მანძილს.

მყარი სხეულის ნებისმიერი წერტილისათვის შეიძლება ავაგოთ ინერციის ელიფსოიდი. ინერციის ელიფსოიდს აგებულს მასათა ცენტრის მიმართ, ეწოდება ცენტრალური ინერციის ელიფსოიდი.

ინერციის ელიფსოიდი დამოკიდებულია კოორდინატთა სისტემის სათავის და საკოორდინატო ღერძების მიმართულებების არჩევაზე. თუ საკოორდინატო ღერძები მიმართულია ინერციის ელიფსოიდის მთავარი ღერძების გასწვრივ, მაშინ ამ საკოორდინატო სისტემისათვის შედგენილ (4) განტოლებაში არ გვექნება ის წევრები, რომლებიც შეიცავენ კოორდინატების ნამრავლებს, რაადგანაც $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ და განტოლებას ექნება ასეთი სახე

$$x^2 I_x + y^2 I_y + z^2 I_z = 1. \quad (5)$$

ამ შემთხვევაში ინერციის ტენზორი იქნება დიაგონალური, კერძოდ

$$\begin{vmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{vmatrix}.$$

მაშასადამე, მყარი სხეულისათვის, საკორდინატო სისტემის სათავის არჩევისაგან დამოუკიდებლად არსებობს სამი ურთიერთმართობული ღერძი, რომლებიც ემთხვევა O წერტილის მიმართ სხეულის ინერციის ელიფსოიდის მთავარ ღერძებს და ამ ღერძების მიმართ ინერციის ცენტრიდანული მომენტები ხდება ნულის ტოლი. ამ ღერძებს ეწოდება ინერციის ტენზორის მთავარი ღერძები, რომლებიც ხისტადაა დაკავშირებული სხეულთან, როგორც ინერციის ელიფსოიდი.

ინერციის ცენტრალური ელიფსოიდის მთავარ ღერძებს (ათვლის სათავე მოთავსებულია სხეულის მასათა ცენტრში) ეწოდება სხეულის მთავარი ღერძები.

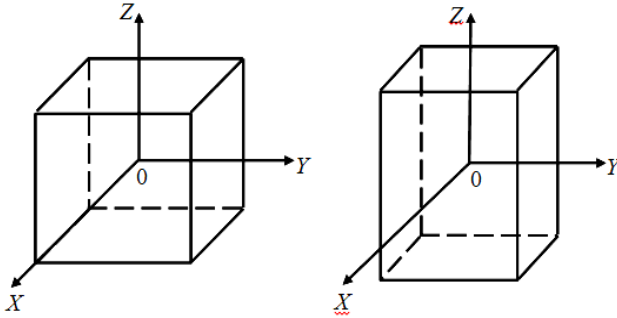
ამრიგად, თუ კოორდინატთა სისტემის Ox, Oy, Oz ღერძები თანხვდება სხეულის მთავარ ღერძებს, ხოლო კოორდინატთა სისტემის სათავე იმყოფება მის მასათა ცენტრში, მაშინ სხეულის ინერციის I_{Δ} მომენტი ნებისმიერი $OA = \Delta$ ღერძის მიმართ განისაზღვრება თანაფარდობით

$$I_{\Delta} = l^2 I_x + m^2 I_y + n^2 I_z \quad (6)$$

სადაც I_x, I_y, I_z სხეულის ინერციის მომენტებია მთავარი ღერძების მიმართ, ხოლო l, m, n – როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ მიმმართველი კოსინუსებია.

მაშასადამე, ნებისმიერი $OA = \Delta$ ღერძის მიმართ ინერციის I_{Δ} მომენტის გამოსათვლელად აუცილებელია განისაზღვროს

სხეულის მთავარი ღერძები და ვიპოვოთ ინერციის მომენტები I_x , I_y , I_z ამ ღერძების მიმართ.

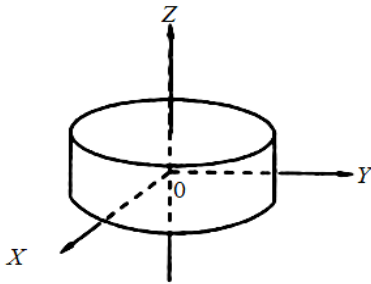


ნახ. 3. მთავარი ღერძები: ა) ერთგვაროვანი კუბი
ბ) ერთგვაროვანი პარალელეპიპედი

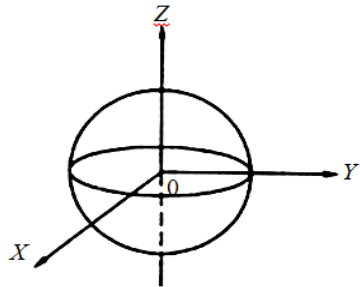
წესიერი გეომეტრიული ფორმის მქონე ერთგვაროვანი სხეულებისათვის მთავარი ღერძების მიმართულეებები შეიძლება ადვილად განვსაზღვროთ, თუ ვისარგებლებთ სიმეტრიის პრინციპით. ასე მაგალითად, ერთგვაროვანი კუბის და ერთგვაროვანი

მართკუთხა პარალელეპიპედის მთავარი ღერძები გადიანმათ გეომეტრიულ ცენტრზე და წიბოების პარალელურია. (ნახ.3.ა, ბ) თუ სხეულს, მაგალითად ცილინდრს, აქვს უძრავი ღერძის ირგვლივ ბრუნვის სიმეტრია, მაშინ მისი ინერციის ელიფსოიდსაც ასეთივე სიმეტრია ახასიათებს. ამ შემთხვევაში, სხეულის ერთ – ერთი მთავარი ღერძია სიმეტრიის ღერძი. ნებისმიერი მისი მართობული წრფე, ასევე იქნება სხეულის მთავარი ღერძი(ნახ.4).

სფეროსათვის ინერციის ელიფსოიდები ნებისმიერი ღერძის მიმართ, რომელიც გადის მის ცენტრზე ერთნაირია და ნებისმიერი ღერძი– სხეულის მთავარი ღერძია (ნახ.5).



ნახ.4. ცილინდრის სიმეტრიის Z ღერძი მისი ერთ-ერთი მთავარი ღერძია



ნახ.5. სფეროს სიმეტრიის ღერძები -X, Y, Z მთავარი ღერძებია

ასე, მაგალითად, ერთგვაროვანი კუბის ინერციის ელიფსოიდი, რომლის ცენტრშიც არის კოორდინატთა სისტემის სათავე, გადაგვარდება სფეროში. დინამიკურ მიმართებაში ერთგვაროვანი კუბი ზუსტად ისე იქცევა, როგორც ერთგვაროვანი სფერო.

გამოთვლები გვიჩვენებენ, რომ მყარი სხეულის ბრუნვისას უძრავ საკისარებზე გამავალი ღერძის ირგვლივ, საკისარები არ ზემოქმედებენ სხეულზე მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ბრუნვა

ხდება სხეულის ერთ–ერთი მთავარი ღერძის ირგვლივ. ამის გამო ცენტრალური ინერციის ელიფსოიდის მთავარი ღერძების თანხვედრილ მყარი სხეულის მთავარ ღერძებს თავისუფალ ღერძებს უწოდებენ.

ინერციის მომენტები იმ წრიული ცილინდრისათვის, რომლის ქვედა ფუძის ცენტრში მოთავსებულია კოორდინატთა სისტემის სათავე, ხოლო Oz ღერძი ემთხვევა ცილინდრის ღერძს, გამოითვლება ფორმულებით

$$I_z = \frac{mR^2}{2}, \quad I_x = I_y = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right).$$

აქ m ცილინდრის მასაა, H – მისი სიმაღლე, R – რადიუსი.

მართკუთხა პარალელეპიპედის ინერციის მომენტები იმ კოორდინატთა სისტემის ღერძების მიმართ, რომლებიც წიბოების პარალელურია, ხოლო სათავე დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია, გამოითვლება ფორმულებით

$$I_x = \frac{m(b^2 + c^2)}{12}, \quad I_y = \frac{m(a^2 + c^2)}{12}, \quad I_z = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}.$$

აქ m მართკუთხა პარალელეპიპედის მასაა, ხოლო a, b, c – მისი განზომილებებია.

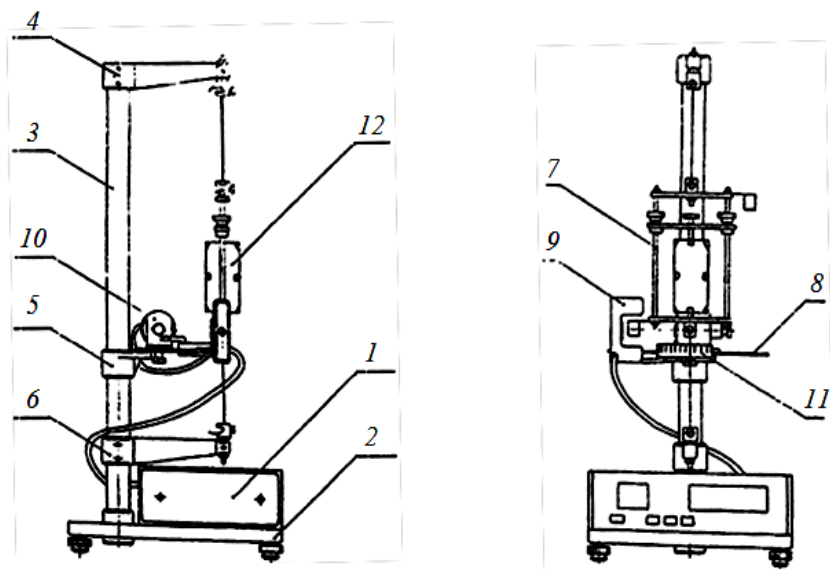
ლაბორატორიული სამუშაო: ნებისმიერი ღერძის მიმართმყარი სხეულის ინერციის მომენტის განსაზღვრა

მოწყობილობა: დანადგარი „გრეხვითი ქანქარა FPM=05“

დანადგარის აღწერა. ფუძე (1) აღჭურვილია რეგულირებადი სიმაღლის ოთხი ფეხით. მასზე დამაგრებულია (1) მილი-წამხომი. მასზე, აგრეთვე, დამაგრებულია სვეტი (3), რომელზეც მიმჭერი ხრახნებით მაგრდება 4, 5, 6 კრონშტეინები. 4 და 6 კრონშტეინებს ფოლადის მავთულის დასამაგრებლად აქვთ

ჩამჭერები, რომელზეც დაკიდებულია (7) ჩარჩო. (5) კრონ-შტეინზე დამაგრებულია ფილა (8), რომელიც ფოტოელექტრული გადამწოდის (9), ელექტრომაგნიტის (10) და კუთხური (11) სკალის ფუძეს წარმოადგენს. (10) ელექტრომაგნიტის მდებარეობა (8) ფილაზე შეიძლება შეიცვალოს. მის მდებარეობას ფოტოელექტრული გადამწოდის მიმართ გვიჩვენებს ელექტრომაგნიტზე დამაგრებული სკალის ისარი. ჩარჩოს (7) კონსტრუქცია ერთმანეთისაგან ზომებით საგრძნობლად განსხვავებული მყარი სხეულების (ცილინდრი, პარალელეპიპედი) დამაგრების საშუალებას იძლევა.

სხეულები მაგრდება მოძრავი კოჭის დახმარებით, რომლებიც გადაადგილდება მიმართველების გასწვრივ უძრავ კო-



ნახ.6. გრეხვითი ქანქარა FPM-05

ჭებს შორის. კოჭებს აყენებენ ქანჩების შემოჭერით მილისებზე, რომლებიც მოთავსებულია უძრავ კოჭზე. ფოტოელექტრული

გადამწოდი და ელექტრომაგნიტი შეერთებულია მილიწამმ-ზომთან გასართით.

სამუშაო ფორმულის გამოყვანა

საკვლევ მყარ სხეულს ამაგრებენ გრეხითი ქანქარას ჩარჩოში, რომელიც ჩამოკიდებულია ვერტიკალრად დაჭიმულ დრეკად მავთულზე(ნახ.6). გრეხითი ქანქარა გამოყავთ წონასწორობის მდგომარეობიდან და აკვირდრებინ მის რხევებს. ქანქარას წონასწორობის მდგომარეობიდან გარკვეული φ კუთხით გადახრისას მასზე მავთულის მხრიდან მოქმედებს დრეკადი მომენტი

$$M = -D\varphi, \quad (7)$$

სადაც φ წონასწორობის მდგომარეობიდან ქანქარას გადახრის კუთხეა. D – მუდმივა ახასიათებს მავთულის დრეკად თვისებებს.

ცდები გვიჩვენებენ, რომ თუ მავთული საკმარისად წვრილი და გრძელია, მაშინ (7) დამოკიდებულება სამართლიანია გადახრის დიდი φ კუთხისთვის. ჩვეულებრივ, გრეხითი ქანქარას მიღევა უმნიშვნელოა.

თუ გამოვიყენებთ უძრავი ღერძის ირგვლივ მბრუნავი მყარი სხეულის ბრუნვის დიფერენციალურ განტოლებას, მაშინ გრეხითი ქანქარისათვის ამ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$I_M \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M \quad (8)$$

სადაც I_M – ქანქარას ინერციის მომენტია ბრუნვის ღერძის მიმართ, $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ – მისი კუთხური აჩქარებაა, M – ქანქარაზე მოქმედი ძალის მომენტი იმავე ღერძის მიმართ.

თუ (8) ფორმულაში ჩავსვამთ (7) თანაფარდობას, მივიღებთ:

$$I_M \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -D\varphi.$$

მარჯვენა მხარეს მდგომი წევრი გადავიტანოთ მარცხნივ და მიღებული ტოლობა გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{D}{I_M} \varphi = 0. \quad (9)$$

(9) დიფერენციალურ განტოლებაში, რომელიც არის ჰარმონიული რხევის განტოლება, φ -ის კოეფიციენტი არის კუთხური სიხშირის კვადრატი:

$$\omega^2 = \frac{D}{I_M}$$

გრეხვითი რხევების T პერიოდისათვის გვაქვს შემდეგი ტოლობა:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_M}{D}} \quad (10)$$

ამრიგად, გრეხვითი ქანქარას რხევის პერიოდი მის ინერციის მომენტთან დაკავშირებულია (10) თანაფარდობით. გრეხვითი რხევების პერიოდის გაზომვით, ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ გრეხვითი ქანქარას ინერციის მომენტი I_M , თუ ცნობილია D .

გრეხვითი ქანქარას ინერციის I_M მომენტი ტოლია თავისუფალი ჩარჩოს I_0 მომენტისა და ამ ჩარჩოში დამაგრებული მყარი სხეულის I მომენტის ჯამის:

$$I_M = I_0 + I \quad (11)$$

(11) ჩავსვათ (10) ფორმულაში, მივიღებთ

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I}{D}} \quad (12)$$

თუ ირხევა თავისუფალი ჩარჩო (სხეულის გარეშე), მაშინ მისი რხევის პერიოდი ტოლია

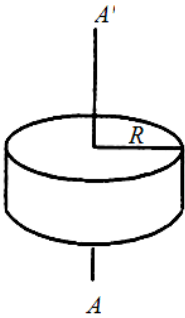
$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{D}} \quad (13)$$

გამოვრიცხოთ (12) და (13) განტოლებებიდან უცნობი სიდიდე D . მივიღებთ სხეულის ინერციის მომენტის ფორმულას ნებისმიერი ღერძის მიმართ:

$$I = I_0 \frac{T^2 - T_0^2}{T_0^2} \quad (14)$$

თავისუფალი ჩარჩოს I_0 ინერციის მომენტის განსასაზღვრავად მასში ამაგრებენ ეტალონურ სხეულს, რომლის ინერციის I_3 მომენტი ცნობილია. მაშინ (12) და (13) განტოლებებიდან მივიღებთ

$$I_0 = I_3 \frac{T_0^2}{T_3^2 - T_0^2} \quad (15)$$



ნახ.7

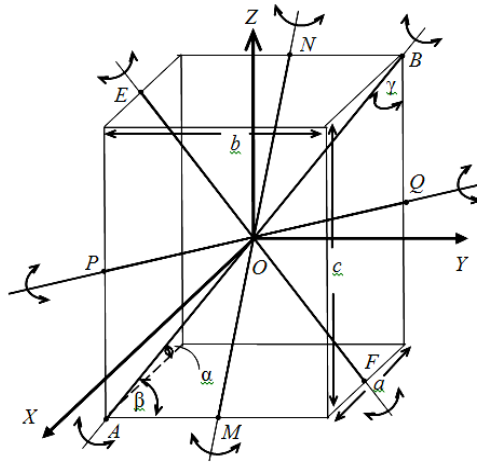
სადაც T_3 - ეტალონურ სხეულიანი ჩარჩოს რხევის პერიოდია.

სამუშაოში ეტალონურ სხეულად გამოიყენებენ m მასისა და R რადიუსის მქონე ცილინდრულ სხეულს (ნახ.7), რომლის ინერციის I_3 მომენტი ცილინდრის AA' ღერძის მიმართ ტოლია

$$I_3 = \frac{1}{2} mR^2 \quad (16)$$

გავზომავთ რა T_3 და T_0 პერიოდებს და (16) ფორმულით გამოთვლილ I_3 მნიშვნელობას ჩავსვამთ (15) გამოსახულებაში, გამოვთვლით თავისუფალი ჩარჩოს I_0 ინერციის მომენტს.

ლაბორატორიულ დანადგარში ქანქარას ღერძი, თანხვედრილი ღერძისა, რომლის მიმართაც ირხევა სხეული, ვერტიკალურია. ამიტომ ყოველი ცდის დროს აუცილებელია ჩავთვალოთ, რომ იმ ღერძის მიმართველი ვექტორი, რომლის მიმართაც განისაზღვრება სხეულის ინერციის მომენტი, მიმართულია ვერტიკალურად ზევით. ვერტიკალური ღერძის მიმართ სხეულის ინერციის მომენტს ცვლიან სხეულის მობრუნებით და ამ ღერძის მიმართ მის სხვადასხვა მდგომარეობაში დამაგრებით. კოორდინატა სისტემის ღერძებს მიმართავენ სხეულის მთავარი ღერძების გასწვრივ.



ნახ.8

კოორდინატა სისტემის სათავე მოთავსებულია სხეულის მასათა ცენტრში. სხეულის მობრუნებით შეიძლება შეიცვალოს \vec{s} ვექტორის მიმართულება (ბრუნვის ღერძის მიმართულება). სამუშაოში საკვლევ სხეულად გამოიყენება ერთგვაროვანი მასალისაგან დამზადებული მართკუთხა პარალელებიპედი. ნახ.8-

ზე ნაჩვენებია სხეულთან უძრავად დაკავშირებული $Oxyz$ საკოორდინატო სისტემა O სათავით, მოთავსებული მასათა ცენტრში (a, b, c პარალელეპიპედის წიბოების სიგრძეებია). აგრეთვე ნაჩვენებია ის ღერძები, რომელთა მიმართაც შეიძლება განისაზღვროს ინერციის მომენტები მოცემულ სამუშაოში.

სამუშაოს შესრულების თანამიმდევრობა

1. დარწმუნდით, რომ გრეხვითი ქანქარას რხევები სუსტად მილევადია. ამისათვის ქანქარა გამოიყვანეთ წონასწორობის მდგომარეობიდან და განსაზღვრეთ რხევების n რიცხვი, რომელთა შემდეგ ამპლიტუდა მცირდება 2–3–ჯერ. თუ $n=10$, მილევა უმნიშვნელოა. გაზომვები ჩაატარეთ თავისუფალი ჩარჩოსათვის და ჩარჩოში ჩასმული სხეულისათვისაც.

2. განსაზღვრეთ თავისუფალი ჩარჩოს T_0 პერიოდი ფორმულით

$$T_0 = \frac{t_0}{n},$$

სადაც t_0 – თავისუფალი ჩარჩოს რხევების დროა, n – რხევების რიცხვია;

3. დაამაგრეთ ცილინდრი ჩარჩოში ისე, რომ ბრუნვის ვერტიკალური ღერძი მართობულად იყოს მიმართული ფუძისკენ. განსაზღვრეთ სისტემის „თავისუფალი ჩარჩო–ცილინდრი“ რხევების $T_{\text{ც}}$ პერიოდი ფორმულით

$$T_{\text{ც}} = \frac{t_{\text{ც}}}{n}$$

სადაც $t_{\text{ც}}$ – სისტემის „თავისუფალი ჩარჩო–ცილინდრი“ რხევების დროა, n – რხევების რიცხვია.

4. გამოთვალეთ ეტალონური ცილინდრის $I_{\text{ც}}$ ინერციის მომენტი (16) ფორმულით;

5. განსაზღვრეთ თავისუფალი ჩარჩოს ინერციის მომენტი. ამისათვის (15) ფორმულაში ჩასვით T_0 , T_0 და I_0 სიდიდეები. გაზომვის შედეგები შეიტანეთ 1 ცხრილში.

ცხრილი 1

| № | t_0 წმ | n | T_0 წმ | m კგ | R მ | I_0 კგმ ² | t_0 წმ | T_0 წმ | I_0 კგმ ² | $I_{0საშ}$ კგმ ² |
|---|-------------|-----|-------------|-----------|----------|---------------------------|-------------|-------------|---------------------------|--------------------------------|
| 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | |

6. დაამაგრეთ პარალელეპიპედი ჩარჩოში ისე, რომ მისი მთავარი ღერძი, რომელიც ემთხვევა საკორდინატო სისტემის Ox ღერძს იყოს ვერტიკალურად მიმართული, ე.ი. ემთხვეოდეს ბრუნვის ღერძს. გამოთვალეთ სისტემის რხევების T_x პერიოდი ფორმულით

$$T_x = \frac{t_x}{n},$$

სადაც t_x – სისტემის რხევების დროა, n – რხევების პერიოდის რიცხვია. გამოთვალეთ მართკუთხა პარალელეპიპედის ინერციის I_x მომენტი მთავარი ღერძის მიმართ, რომელიც ემთხვევა Ox ღერძს. ამისათვის (14) ფორმულაში ჩასვით 2 პუნქტში განსაზღვრული თავისუფალი ჩარჩოს T_0 რხევის პერიოდის, სისტემის რხევის T_x პერიოდის და ბრუნვის ღერძის მიმართ თავისუფალი ჩარჩოს ინერციის I_0 მომენტის მნიშვნელობები. ანალოგიური გამოთვლები ჩაატარეთ დანარჩენი ორი მთავარი

Oy და Oz ღერძებისათვის და გამოთვალეთ I_y და I_z -ის მნიშვნელობები. შედეგები შეიტანეთ 2 ცხრილში.

ცხრილი 2

| № | t_x წმ | n | T_x წმ | I_x კგმ ² | t_y წმ | n | T_y წმ | I_y კგმ ² | t_z წმ | n | T_z წმ | I_z კგმ ² |
|---|-------------|-----|-------------|---------------------------|-------------|-----|-------------|---------------------------|-------------|-----|-------------|---------------------------|
| 1 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | |

7. დაამაგრეთ პარალელებიპედი ჩარჩოში ისე, რომ ბრუნვის ღერძი ემთხვეოდეს AB ღერძს (იხ. ნახ. 8). განსაზღვრეთ სისტემის T_{AB} ინერციის მომენტი ფორმულით

$$T_{AB} = \frac{t_{AB}}{n},$$

სადაც t_{AB} – სისტემის რხევების დროა, n – რხევების რიცხვია. გამოთვალეთ მართკუთხა პარალელებიპედის ინერციის I_{AB} მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ, რომელიც ემთხვევა პარალელებიპედის მთავარ დიაგონალს. ამისათვის (8) ფორმულაში ჩასვით I_0 , T_{AB} და T_0 –ის მნიშვნელობები და გამოთვალეთ ინერციის I_{AB} მომენტი. შედეგები შეიტანეთ 3 ცხრილში.

ცხრილი 3

| № | t_{AB} წმ | n | T_{AB} წმ | I_{AB} კგმ ² | $I_{ABსაშ}$ კგმ ² |
|---|----------------|-----|----------------|------------------------------|---------------------------------|
| 1 | | | | | |

| | | | | | |
|---|--|--|--|--|--|
| 2 | | | | | |
|---|--|--|--|--|--|

8. გამოთვალეთ AB ღერძის მიმართველი კოსინუსების მნიშვნელობები:

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

სადაც a, b, c – მართკუთხა პარალელეპიპედის წიბოების სიგრძეებია (იხ. ნახ. 8).

9. გამოთვალეთ მართკუთხა პარალელეპიპედის ინერციის I_{AB} მომენტი ზრუნვის ღერძის მიმართ, რომელიც ემთხვევა პარალელეპიპედის მთავარ დიაგონალს, შემდეგი ფორმულით:

$$\begin{aligned} I_{AB} &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma = \\ &= I_x \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} + I_y \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} + I_z \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \end{aligned}$$

სადაც I_x, I_y, I_z – 6 პუნქტში განსაზღვრული ინერციის მომენტებია პარალელეპიპედის მთავარი ღერძების მიმართ. შედეგები შეიტანეთ ცხრილში 4.

ცხრილი 4

| № | a მ | $a_{საშ}$ მ | b მ | $b_{საშ}$ მ | c მ | $c_{საშ}$ მ | $\cos \alpha_{AB}$ | $\cos \beta_{AB}$ | $\cos \gamma_{AB}$ | $I_{ABსაშ}$ კგმ ² |
|---|----------|----------------|----------|----------------|----------|----------------|--------------------|-------------------|--------------------|---------------------------------|
| 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | |

10. გამოთვალეთ ინერციის I_{AB} მომენტის ექსპერიმენტული გამოთვლის მეთოდის აბსოლუტური ცდომილება ფორმულით:

$$\left| \frac{\Delta I_{AB}}{I_{AB}} \right| = \left| \frac{\Delta I_0}{I_0} \right| + \left| \Delta T_{AB} \left(\frac{2T_{AB}}{T_{AB}^2 - T_0^2} \right) \right| + \left| \Delta T_0 \left(\frac{2T_0}{T_{AB}^2 - T_0^2} - \frac{2}{T_0} \right) \right|$$

სადაც ΔI_{AB} , ΔI_0 , ΔT_{AB} , ΔT_0 – შესაბამისი სიდიდეების აბსოლუტური ცდომილობებია;

11. განსაზღვრეთ ΔI_{AB} აბსოლუტური ცდომილობა:

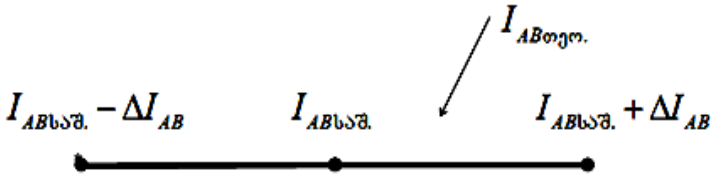
$$\Delta I_{AB} = \left| \frac{\Delta I_{AB}}{I_{AB}} \right| I_{AB\text{საშ}}$$

12. საბოლოო შედეგი წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$I_{AB} = I_{AB\text{საშ}} \pm \Delta I_{AB}$$

სადაც $I_{AB\text{საშ}} - AB$ ღეძის მიმართ ინერციის მომენტის საშუალო მნიშვნელობაა.

13. დარწმუნდით, რომ ინერციის $I_{AB(0)(0)}$ მომენტის თეო-



რიული მნიშვნელობა ხვდება I_{AB} -ს ცვლილების ინტერვალში (იხ. ნახაზი).

14. ჩავატაროთ ანალოგიური გაზომვები და გამოთვლები ბრუნვის იმ ღერძებისათვის, რომლებიც ემთხვევიან MN , EF , PQ წრფეებს (იხ. ნახ. 8).

საკონტროლო კითხვები

1. ჩამოაყალიბეთ ბრუნვის ღერძის მიმართ ნივთიერი წერტილის და მყარი სხეულის ინერციის მომენტების ცნება;
2. რაში მდგომარეობს ინერციის მომენტის ფიზიკური შინაარსი?
3. რატომ ახასიათებენ მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის ინერციულ თვისებებს ინერციის მომენტით და არა სხეულის მასით?
4. მიიღეთ მყარი სხეულის ინერციის მომენტის გამოსახულება ნებისმიერი ღერძის მიმართ.
5. როგორ ავაგოთ ინერციის ელიფსოიდი? რა არის ინერციის ცენტრალური ელიფსოიდი?
6. ჩამოაყალიბეთ მყარი სხეულის თავისუფალი ღერძების ცნება.
7. როგორ არის მიმართული მართკუთხა პარალელებიპედი, კუბის, ცილინდრის თავისუფალი ღერძები?
8. დაწერეთ მყარი სხეულის ნებისმიერი ღერძის მიმართ ინერციის მომენტის გამოსახულება, თუ კორდინატთა ღერძები მიმართულია თავისუფალი ღერძების გასწვრივ.
9. გამოთვალეთ ცილინდრის ინერციის მომენტი ცილინდრის ფუძის მართობულად მასათა ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ.
10. მიიღეთ გრეხვითი ქანქარას რხევის პერიოდის გამოსათვლელი ფორმულა.
11. მიიღეთ ინერციის მომენტის სამუშაო ფორმულა გრეხვითი რხევების მეთოდით.

12. გამოთვალეთ მართკუთხა ერთგვაროვანი პარალელეპიპედის AB დიაგონალის მიმართველი კოსინუსები.
13. გამოიყვანეთ ამ სამუშაოსათვის მეთოდის ცდომილობის ფორმულა.

№4.4 ცხრილში მოყვანილია ცდების შედეგად განსაზღვრული ინერციის მომენტების მნიშვნელობები მართკუთხა პარალელეპიპედისათვის მე-8 ნახაზზე ნაჩვენები საკორდინატო ღერძების მიმართ.

| № | m (მარჯვლედობები) | a | b | c | m პატარა ცოცხლები | d | m დიდი ცოცხლები | d | n | I _g | | I _x | I _y | I _z |
|----|----------------------|-----|-----|-----|-------------------------|-----|-----------------------|-----|----|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| | | | | | | | | | | პატარა ცოცხლები | დიდი ცოცხლები | | | |
| | პბ. | სმ. | სმ. | სმ. | პბ. | სმ. | პბ. | სმ. | - | $\frac{2}{\text{პბ}^2}$ | $\frac{2}{\text{პბ}^2}$ | $\frac{2}{\text{პბ}^2}$ | $\frac{2}{\text{პბ}^2}$ | $\frac{2}{\text{პბ}^2}$ |
| 1. | 1,85 | 6 | 4 | 10 | 0,6 | 4,5 | 1,75 | 6 | 20 | 0,0001519 | 0,0007875 | 0,0017883 | 0,0020966 | 0,0008017 |

| № | t_0 | t_g | t_x | t_y | t_z | T_0 | T_g | T_x | T_y | T_z | I_0 | I_x | I_y | I_z |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|--------|--------|--------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| | წმ. | წმ. | წმ. | წმ. | წმ. | წმ. | წმ. | წმ. | წმ. | წმ. | $\frac{2}{\text{წმ}^2}$ | $\frac{2}{\text{წმ}^2}$ | $\frac{2}{\text{წმ}^2}$ | $\frac{2}{\text{წმ}^2}$ |
| 1. | 36,654 | 40,580 | 68,995 | 73,126 | 53,745 | 1,8327 | 2,0290 | 3,4498 | 3,6563 | 2,6872 | 0,0006731 | 0,001712 | 0,002006 | 0,0007740 |
| 2. | 36,646 | 53,608 | 69,031 | - | - | 1,8323 | 2,6804 | 3,4516 | - | - | 0,0006908 | 0,001760 | - | - |
| 3. | 36,645 | 53,356 | - | 73,138 | - | 1,8322 | 2,6678 | - | 3,6569 | - | 0,0007030 | - | 0,002098 | - |
| 4. | 36,648 | 53,520 | - | - | 53,680 | 1,8324 | 2,6760 | - | - | 2,6840 | 0,0006952 | - | - | 0,0007960 |
| 5. | 36,649 | 53,387 | - | - | 53,822 | 1,8324 | 2,6694 | - | - | 2,6911 | 0,0007017 | - | - | 0,0008118 |
| 6. | 36,640 | 53,499 | 68,992 | - | - | 1,8320 | 2,6750 | 3,4496 | - | - | 0,0006956 | 0,001777 | - | - |
| 7. | 36,655 | 53,559 | 68,985 | - | - | 1,8328 | 2,67325 | 3,4497 | - | - | 0,0006984 | 0,001788 | - | - |
| 8. | 36,655 | 53,473 | - | 73,144 | - | 1,8328 | 2,6736 | - | 3,6572 | - | 0,0006982 | - | 0,002081 | - |
| 9. | 36,659 | 53,551 | - | - | 53,746 | 1,8330 | 2,6778 | - | - | 2,6873 | 0,0006943 | - | - | 0,0007980 |
| 10. | 36,648 | 53,510 | 73,108 | - | - | 1,8324 | 2,6755 | 3,6554 | - | - | 0,0006957 | 0,002073 | - | - |
| 11. | 36,648 | 53,399 | - | 73,171 | - | 1,8324 | 2,6700 | - | 3,6586 | - | 0,0007012 | - | 0,002094 | - |
| 12. | 36,648 | 53,567 | - | - | 53,670 | 1,8324 | 2,6784 | - | - | 2,6835 | 0,0006929 | - | - | 0,0007931 |

ცხრილი №4.4

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
პროფესორ ალექსი გორგობის სახელობის მექანიკის
სამეცნიერო-სასწავლო ლაბორატორია



ლაბორატორიული სამუშაო №6

ჯგუფი №

სტუდენტი:

ხელმძღვანელი:

თარიღი:

თბილისი– 2017

მექანიკის შენახვის კანონები

1. მოძრაობის რაოდენობის (იმპულსის) შენახვის კანონი;
2. კინეტიკური (იმპულსის) მომენტის შენახვის კანონი
3. ენერჯის შენახვის კანონი

ძირითადი ცნებები

შენახვის კანონები ბუნების ფუნდამენტალური კანონებია და წარმოადგენს თანამედროვე მექანიკის საფუძველს. ეს კანონებია: სისტემის მოძრაობის რაოდენობის (იმპულსის) შენახვის კანონი, სისტემის კინეტიკური მომენტის შენახვის კანონი, ენერჯის შენახვის კანონი.

ჩაკეტილი სისტემისათვის (ე.ი. ისეთი სისტემისათვის, რომელზეც არ მოქმედებს გარე ძალები ან გარე ძალების ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია) ადგილი აქვს იმპულსის შენახვის კანონს – ჩაკეტილი სისტემის მოძრაობის რაოდენობა (იმპულსი) დროის განმავლობაში არ იცვლება:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = 0 \quad \text{ან} \quad \vec{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k = \overrightarrow{const} \quad (1)$$

სადაც $m_k \vec{v}_k$ – k -ური სხეულის მოძრაობის რაოდენობა (იმპულსია), \vec{Q} – სისტემის მოძრაობის რაოდენობა (იმპულსია).

(1) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ ჩაკეტილ სისტემაში ურთიერთმოქმედი სხეულები ერთმანეთში მხოლოდ ცვლიან მოძრაობის რაოდენობებს (იმპულსებს), ხოლო სისტემის მოძრაობის რაოდენობის (იმპულსის) ცვლილებას არა აქვს ადგილი.

სისტემისათვის, რომლისთვისაც გარე ძალების ნაკრები მომენტი ნულის ტოლია, სამართლიანია სისტემის კინეტიკური მომენტის ანუ იმპულსის მომენტის შენახვის კანონი –

ჩაკეტილი სისტემის კინეტიკური მომენტი (იმპულსის მომენტი) დროის განმავლობაში არ იცვლება

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = 0 \quad \text{ან} \quad \vec{l} = \sum_{k=1}^n \vec{l}_k = \overrightarrow{const},$$

სადაც \vec{l}_k – k – ურის სხეულის კინეტიკური მომენტი, \vec{l} – სისტემის კინეტიკური მომენტი.

მატერიის სხვადასხვა ფორმის მოძრაობის საერთო ზომას წარმოადგენს ენერგია. მექანიკაში განასხვავებენ ენერგიის ორ სახეს – კინეტიკურს T და პოტენციალურს Π . მექანიკის ამოცანებისთვის ენერგიის შენახვის კანონი ასეა ჩამოყალიბებული: კონსერვატიულ სისტემაში მექანიკური ენერგია ერთი სახის ენერგიიდან შეიძლება გარდაიქმნას მეორე სახის ენერგიად და ერთი სხეულიდან გადაეცეს მეორე სხეულს, მაგრამ მისი რაოდენობა უცვლელია:

$$E = T + \Pi = const \quad (2)$$

სადაც E სისტემის მთლიანი მექანიკური ენერგიაა.

კინეტიკური ენერგიის პოტენციალურ ენერგიაში გარდაქმნას და პირუკუ შეგვიძლია დავაკვირდეთ ორი ბირთვის დაჯახების მაგალითზე.

მოვლენას, როდესაც დროის უსასრულოდ მცირე შუალედში მყარი სხეულების შეჯახებისას მათი სიჩქარეები სასრული სიდიდით იცვლება, **დარტყმა** ეწოდება.

სხეულების შეჯახებისას ფიზიკური მოვლენები საკმაოდ რთულია. შეჯახებისას სხეულები დეფორმირდებიან, წარმოიშობა დრეკადი ძალები და ხახუნის ძალები, სხეულებში აღიძვრება რხევები, ტალღები და ა.შ.

დარტყმის პროცესი შეიძლება ორ ფაზად გაიყოს. პირველი ფაზა – მატერიის შეკუმშვაა. სხეულების მასათა ცენტრები

უახლოვდებიან ერთმანეთს. უდიდესი დეფორმაციისას, სხეულების სიჩქარე ნულის ტოლია, კინეტიკური ენერგია გადადის დრეკადი დეფორმაციის პოტენციალურ ენერგიაში და ნაწილობრივ ენერგიის სხვა სახეში.

მეორე ფაზა – აღდგენა: დრეკადი დეფორმაციის პოტენციალური ენერგია გარდაიქმნება სხეულების კინეტიკურ ენერგიაში, სხეულები იწყებენ დაშორიშორებას და მეორე ფაზის ბოლოს სხეულების ურთიერთშეხება წყდება.

აბსოლუტურად დრეკადი სხეულების შეჯახებისას პირველი ფაზის დრეკადი დეფორმაციის პოტენციალური ენერგია მთლიანად გადადის სხეულის მოძრაობის კინეტიკურ ენერგიაში. ასეთ დარტყმას დრეკადი დარტყმა ეწოდება.

არადრეკადი სხეულების დარტყმა პირველივე ფაზაზე მთავრდება. ასეთ დარტყმას აბსოლუტურად არადრეკადი დარტყმა ჰქვია.

განასხვავებენ პირდაპირ და ირიბ, ცენტრალურ და არაცენტრალურ დარტყმებს. თუ დარტყმისას მასათა ცენტრის სიჩქარეები მიმართულია დარტყმის ხაზის გასწვრივ ეწოდება პირდაპირი დარტყმა, წინააღმდეგ შემთხვევაში დარტყმას ირიბი დარტყმა ჰქვია. თუ დარტყმისას მასათა ცენტრები მდებარეობენ დარტყმის ხაზზე, დარტყმას ცენტრალური დარტყმა ჰქვია.

განვიხილოთ ორი ბირთვის აბსოლუტურად დრეკადი ცენტრალური დარტყმა. დავუშვათ, რომ m_1 და m_2 მასის ბირთვები დაჯახებამდე მოძრაობენ v_1 და v_2 სიჩქარეებით, ხოლო შეჯახების შემდეგ – u_1 და u_2 სიჩქარეებით. იმპულსის და ენერგიის შენახვის კანონის სფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}, \quad (3)$$

$$m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = m_1 \bar{u}_1 + m_2 \bar{u}_2 . \quad (4)$$

თუ ამ ტოლობებს ასეთი სახით გადავწერთ

$$m_1 (\bar{v}_1 - \bar{u}_1)(\bar{v}_1 + \bar{u}_1) = m_2 (\bar{u}_2 - \bar{v}_2)(\bar{v}_2 + \bar{u}_2) ,$$

$$m_1 (\bar{v}_1 - \bar{u}_1) = m_2 (\bar{u}_2 - \bar{v}_2) .$$

მაშინ ძნელი არ იქნება ვაჩვენოთ, რომ

$$\bar{v}_1 + \bar{u}_1 = \bar{v}_2 + \bar{u}_2 \quad \text{ან} \quad \bar{v}_1 - \bar{v}_2 = \bar{u}_2 - \bar{u}_1 = -(\bar{u}_1 - \bar{u}_2) .$$

ბოლო გამოსახულებიდან გამომდინარეობს, რომ აბსოლუტურად დრეკადი დარტყმისას, მათი ფარდობითი სიჩქარეები იცვლიან მიმართულებას პირდაპირ საწინააღმდეგოდ, რჩებიან რა სიდიდით უცვლელი.

როგორც ზემოთ აღინიშნა, დარტყმის პროცესის ხანგრძლივობა იყოფა ორ ფაზად. პირველი ფაზა არის დარტყმის დასაწყისიდან, ვიდრე სიჩქარეები არ გათანაბრდება, ხოლო მეორე ფაზა კი არის სიჩქარეების გათანაბრების მომენტიდან დარტყმის დასასრულამდე. პირველ ფაზას უწოდებენ დეფორმაციის ფაზას, ხოლო მეორეს აღდგენის ფაზას.

დარტყმისას, შესაჯახებელი სხეულების დრეკადობას შეაფასებენ აღდგენის ფაზის ჯამური კინეტიკური ენერჯიის და დეფორმაციის ფაზის ჯამური კინეტიკური ენერჯიის ფარდობით.

უგანზომილებო K_T კოეფიციენტს უწოდებენ კინეტიკური ენერჯიის აღდგენის კოეფიციენტს, ე.ი.

$$K_T = \frac{T_{2K}}{T_{1K}} \quad (5)$$

სადაც T_{1K} - სხეულის ჯამური კინეტიკური ენერჯიაა დარტყმამდე. T_{2K} - სხეულის ჯამური კინეტიკური ენერჯიაა დარტყმის შემდეგ.

K_T კოეფიციენტთან ერთად ხშირად გამოიყენება სიჩქარის აღდგენის K_v კოეფიციენტი

$$K_v = \left| \frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1} \right| \quad (6)$$

K_v კოეფიციენტი K_T კოეფიციენტისაგან განსხვავებით, იძლევა შესაძლებლობას რაოდენობრივად შევაფასოთ რამდენად ახლოა რეალური დარტყმა აბსოლუტურად დრეკად დარტყმასთან.

საკონტროლო კითხვები

1. შიგა და გარე ძალები.
2. იმპულსი. იმპულსის შენახვის კანონი.
3. მყარი სხეულის დარტყმის სახეები.
4. მყარი სხეულების დარტყმის რაოდენობრივი მახასიათებლები.
5. როგორ იცვლება ბირთვების კინეტიკური ენერგია და მათი ფარდობითი სიჩქარეები სხვადასხვა სახის დარტყმისას: აბსოლუტურად დრეკადი, არადრეკადი და აბსოლუტურად არადრეკადი?

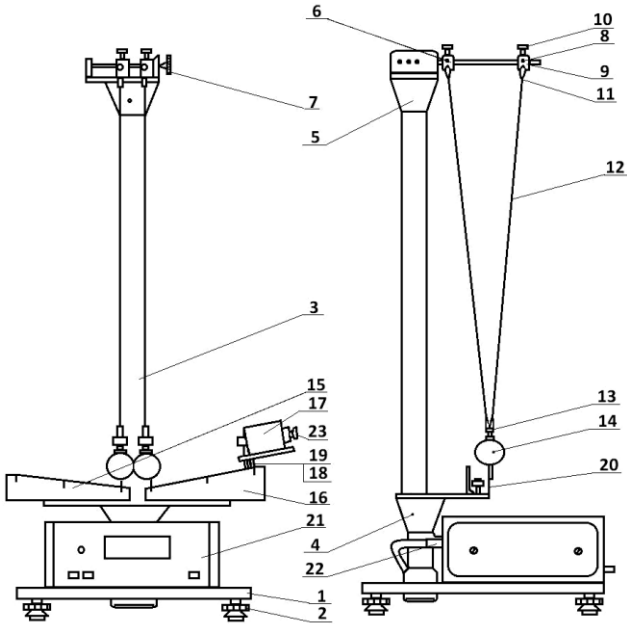
ლაბორატორიული სამუშაო № 5: ბირთვების შეჯახების კანონების შესწავლა

სამუშაოს მიზანი: არადრეკადი და დრეკადი დარტყმების მაგალითებზე შევამოწმოთ იმპულსის შენახვის კანონი და განვსაზღვროთ ბირთვების რაოდენობრივი მახასიათებლები.

ხელსაწყოები და საკუთრობები: დანადგარი FPM-08, ბირთვების ნაკრები, სახაზავი, სასწორი, პრესფორმა, პლასტელინი.

დანადგარის აღწერა

ბირთვების შეჯახების საკვლევი დანადგარის FPM-08 საერთო სახე წარმოდგენილია ნახ.1 –ზე. ფუძე 1 აღჭურვილია რეგულირებადი 2 ფეხებით, რომელიც გვამძლევს დანადგარის



გასწორების საშუალებას. ფუძეზე დამაგრებულია 3 სვეტი, რომელზედაც მიმაგრებულია 4 ქვედა კრონშტეინი და 5 ზედა კრონშტეინი.

ზედა კრონშტეინზე მიმაგრებულია კრონშტეინები 6 ღეროებით და 7 ორტარით, რომლის მეშვეობით ვარეგულირებთ მანძილს ბირთვებს შორის. 6 ღეროებზე მოთავსებულია მოძრავი 8 სამაგრები 9 მილისით, რომელთა მდგომარეობა ფიქსირდება 10 ჭანჭიკით. მათზე დაკიდულია 11 საკიდები, რომელშიც გაყრილია 12 მავთულები, რომელთა საშუალებით მიდის ძაბვა

13 საკიდებზე და მათ შემდგომ 14 ბირთვებზე. ქვედა კრონ-შტეინზე დამაგრებულია კუთხოვანები 15, 16 სკალებით, ხოლო სპეციალურ მიმმართველზე 17 ელექტრომაგნიტი.

ნახ.1. დანადგარი FPM-08

18, 19 ჭანჭიკების მოშვების შემდეგ შეგვიძლია ელექტრომაგნიტი ვამოძრავოთ მარჯვენა სკალის გასწვრივ და დავაფიქსიროთ მისი სიმაღლე.

სკალიან კუთხოვანებსაც შეუძლიათ იმოძრაონ ქვედა კრონ-შტეინის გასწვრივ. ამისათვის უნდა მოვუშვათ 20 ქანჩი.

დანადგარის ფუძეზე მიხრახნილია მილიწამმზომი FPM-16 – 21 და გასართი 22–ის საშუალებით მიაწოდებს ძაბვას ელექტრომაგნიტს და ბირთვებს.

სამუშაოს შესრულების თანამიმდევრობა

სავარჯიშო 1. იმპულსის შენახვის კანონის შემოწმება და დრეკადი დარტყმის აღდგენის კოეფიციენტის განსაზღვრა

შევისწავლით ძაფებზე დაკიდებული ბირთვების პირდაპირ ცენტრალურ დარტყმას, ამასთან ბირთვებიდან ერთ–ერთი (მარცხენა) უძრავია. მოძრაობის პროცესში ბირთვები განიცდიან გარემოს წინააღმდეგობას, მაგრამ კონსტრუქცია და სამუშაოს პირობები ისეთია, რომ მათი უგულვებელყოფა შეიძლება. ბირთვების სიჩქარეები დარტყმამდე და დარტყმის შემდეგ განვსაზღვროთ ენერგიის შენახვის კანონიდან

$$m_1 g h_0 = \frac{m_1 v_1^2}{2}, \quad m_1 g h_1 = \frac{m_1 u_1^2}{2}, \quad m_2 g h_2 = \frac{m_2 u_2^2}{2} \quad (7)$$

სადაც h_0 – დამრტყმელი (მარჯვენა) ბირთვის საწყისი მდგომარეობაა (ნახ.2). h_1 და h_2 –სიმაღლეებია, რომელზეც შეხლის

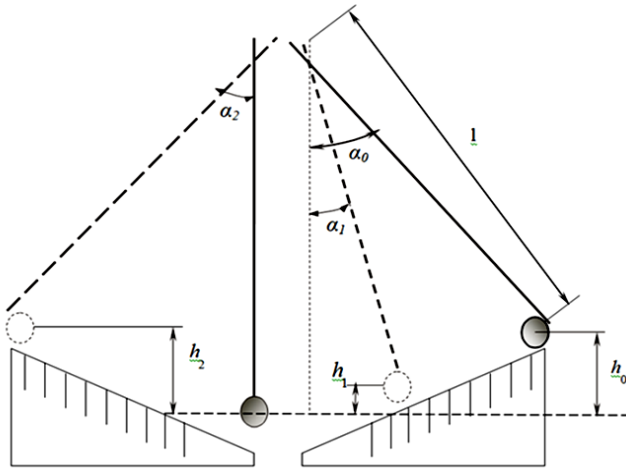
შემდეგ ადიან დამრტყმელი (მარჯვენა) და დასარტყამი (მარცხენა) ბირთვები.

\vec{v}_1 – მარჯვენა ბირთვის სიჩქარეა დარტყმის მომენტში. \vec{u}_1 და \vec{u}_2 – ბირთვების სიჩქარეებია დარტყმის შემდეგ. (7) – დან მივიღებთ:

$$v_1 = \sqrt{2gh_0}, \quad u_1 = \sqrt{2gh_1}, \quad u_2 = \sqrt{2gh_2} \quad (8)$$

ამ სამუშაოში უფრო მარტივია და უფრო ზუსტია არა სიმაღლეების განსაზღვრა, არამედ იმ რკალის ან კუთხის გაზომვა, რომელზეც გადახრილია ბირთვი.

მე-2 ნახაზიდან გვაქვს, რომ



ნახ. 2. – დანადგარის პრინციპიული სქემა

$$h_0 = 2l \sin^2 \frac{\alpha_0}{2}, \quad h_1 = 2l \sin^2 \frac{\alpha_1}{2}, \quad h_2 = 2l \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} \quad (9)$$

სადაც α_1 და α_2 შესაბამისად მარცხენა და მარჯვენა ბირთვების უდიდესი გადხრის კუთხეებია პირველი შეხლის შემდეგ. კუთხე α_0 – განსაზღვრავს მარჯვენა ბირთვის საწყის მდებარეობას.

თუ (9)–ს ჩავსვამთ (8)–ში, ბირთვების სიჩქარეებისათვის მივიღებთ საბოლოო გამოსახულებებს:

$$v_1 = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha_0}{2}, \quad u_1 = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha_1}{2}, \quad u_2 = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha_2}{2} \quad (10)$$

(10) – ის გათვალისწინებით (4) გამოსახულება და (5), (6) აღდგენის კოეფიციენტები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$m_1 \sin \frac{\alpha_0}{2} = \pm m_1 \sin \frac{\alpha_1}{2} + m_2 \sin \frac{\alpha_2}{2}, \quad (11)$$

$$K_v = \frac{\sin \frac{\alpha_2}{2} \mp \sin \frac{\alpha_1}{2}}{\sin \frac{\alpha_0}{2}}, \quad (13)$$

$$K_T = \frac{m_1 \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} + m_2 \sin^2 \frac{\alpha_2}{2}}{m_1 \sin^2 \frac{\alpha_0}{2}}. \quad (14)$$

სავარჯიშო 1–ის შესრულების თანამიმდევრობა

1. ტექნიკურ სასწორზე განსაზღვრეთ ბირთვების მასები.
2. საკიდის ძაფებზე დაამაგრეთ ბირთვები. ამასთან დიდი მასის ბირთვი მოათავსეთ პედაგოგის მითითებით. წონასწორობის მდგომარეობაში ბირთვები ოდნავ უნდა ეხებოდნენ ერთმანეთს.
3. შეამოწმეთ სკალის ნულოვანი მაჩვენებელი დაემთხვეს ბირთვის მდებარეობის მაჩვენებელს.
4. მიიყვანეთ მარჯვენა ბირთვი ელექტრომაგნიტთან და ჩართეთ მისი კვება.

5. გააკეთეთ მარჯვენა ბირთვის საცდელი გაშვება (ელექტრო-მაგნიტის გამორთვით), აღმოფხვრით ბირთვის მოძრაობის უზუსტობები.

6. დააფიქსირებთ რა მარჯვენა ბირთვის გადახრის საწყის α_0 კუთხეს, მოახდინეთ ამ ბირთვით დარტყმა უძრავ ბირთვზე. აითვალეთ ორივე ბირთვის პირველი გადახრის კუთხეები α_1 და α_2 .

7. α_0 კუთხის იგივე მნიშვნელობისათვის ჩაატარეთ არა ნაკლები ათი ცდა. α_1 და α_2 მიღებული მნიშვნელობები შეიტანეთ ცხრილში და დაამუშავეთ.

8. მიღებული მონაცემებით შეამოწმეთ (11) ტოლობის შესრულების სიზუსტე, რომელიც გამოსახავს იმპულსის შენახვის კანონს.

9. (12), (13) ფორმულებით გამოთვალეთ სიჩქარის $-K_v$ და ენერგიის $-K_T$ აღდგენის კოეფიციენტები. გააკეთეთ დასკვნა.

10. გაიმეორთ ცდა α_0 სხვა მნიშვნელობისათვის ან სხვა მასის ბირთვებისთვის.

სავარჯიშო 2. დრეკადი დარტყმის დროის და ბირთვების შეხლის საშუალო ძალის განსაზღვრა

ნიუტონის მეორე კანონის ჩაწერის ერთ-ერთ ფორმას აქვს შემდეგი სახე

$$\vec{F} \cdot \tau = \Delta\vec{Q}, \quad (14)$$

სადაც τ – დროა, რომლის განმავლობაშიც სხეულზე მოქმედებდა \vec{F} ძალა და შეცვალა სხეულის იმპულსი $\Delta\vec{Q}$ სიდიდით.

დარტყმის შემთხვევაში (14) განტოლებაში \vec{F} – დარტყმის საშუალო ძალაა, τ – დარტყმის დროა, ე.ი. დროა რომლის განმავლობაშიც სხეულები ეხებიან ერთმანეთს,

$$\Delta\vec{Q} = m \cdot \Delta\vec{v},$$

სადაც m – ერთ–ერთი სხეულის მასაა (მეორე სხეული დარტყმამდე უძრავია), $\Delta\vec{v}$ – დარტყმის შედეგად ამ სხეულის სიჩქარის ცვლილებაა .

ტოლი მასების ბირთვების დრეკადი ცენტრალური დარტყმისას დამრტყმელი ბირთვი დარტყმის შემდეგ უძრავია. მის სიჩქარის $\Delta\vec{v}$ ცვლილება ტოლია დარტყმის მომენტში \vec{v} სიჩქარის, რომელიც (10)–ს თანახმად ტოლია

$$v = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha_0}{2}. \quad (15)$$

(15)–ის გათვალისწინებით, (14)–დან დრეკადი დარტყმის საშუალო ძალა ტოლია:

$$F = \frac{2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha_0}{2}}{\tau} m. \quad (16)$$

სავარჯიშო 2–ის შესრულების თანამიმდევრობა

1. საკიდის ძაფებზე ჩამოკიდეთ ტოლი მასების ბირთვები. დაარეგულირეთ მათი მდგომარეობა.

2. გაზომეთ ბირთვების შეხლის τ დრო არანაკლებ ათჯერ. შედეგები შეიტანეთ ცხრილში და დაამუშავეთ.

3. განსაზღვრეთ დაკიდვის სიგრძე, ერთი ბირთვის მასა და α_0 კუთხის მნიშვნელობები. (16) ფორმულით გამოთვალეთ დარტყმის საშუალო ძალის მნიშვნელობა და შეაფასეთ შედეგის ცდომილობა.

სავარჯიშო 3. იმპულსის შენახვის კანონისა და ნარჩენი დეფორმაციის ენერგიის განსაზღვრა არადრეკადი დარტყმისას არადრეკადი დარტყმისას იმპულსის და ენერგიის შენახვის კანონებს აქვთ შემდეგი სახე

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) u_1, \quad (17)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = (m_1 + m_2) gh + E_{6.8.}, \quad (18)$$

სადაც m_1 – დამრტყმელი ბირთვის მასაა, $v_1 = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha_0}{2}$ – დარტყმის მომენტში დამრტყმელი ბირთვის სიჩქარეა, m_2 – დარტყმის მომენტში უძრავი ბირთვის მასაა, h – დარტყმის შემდეგ ორივე ბირთვის მდებარეობის მაქსიმალური სიმაღლეა, u_1 – ბირთვების სიჩქარეა დარტყმის შემდეგ, $E_{6.8.}$ – ნარჩენი დეფორმაციის ენერგიაა. თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$h = l(1 - \cos \alpha) = 2l \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad u_1 = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha}{2}$$

სადაც α – დარტყმის შემდეგ ბირთვების გადახრის კუთხეა, მაშინ (17), (18) ფორმულები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$m_1 \sin \frac{\alpha_0}{2} = (m_1 + m_2) \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (19)$$

$$E_{6.8.} = 2gl \left[m_1 \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} - (m_1 + m_2) \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right]. \quad (20)$$

სავარჯიშო შესრულდება პლასტილინის ბირთვებისათვის ერთი დარტყმისათვის. შესრულების თანამიმდევრობა იგივეა, როგორც სავარჯიშო 1-ში. ცდა ჩაატარეთ არანაკლებ ხუთჯერ. გააკეთეთ დასკვნა.

№ 5.5 ცხრილში მოყვანილია ცდების შედეგად მიღებული სიჩქარისა და კინეტიკური ენერგიის აღდგენის კოეფიციენტების მნიშვნელობები სხვადასხვა მასის ბურთულების შეჯახებისას.

| № | m_1 | m_2 | t | α_0 | α_1 | α_2 | K_b | K_T |
|-----|--------|--------|----------|------------|------------|------------|--------|--------|
| | გრამი | გრამი | წამი | გრადუსი | გრადუსი | გრადუსი | - | - |
| 1. | 176,44 | 113,25 | 0,000119 | 11 | 4 | 11 | 0,6357 | 0,7746 |
| 2. | 176,44 | 113,25 | 0,000169 | 11 | 4 | 8 | 0,3643 | 0,4734 |
| 3. | 176,44 | 113,14 | 0,000407 | 13,5 | 7 | 8,5 | 0,1102 | 0,5194 |
| 4. | 176,44 | 113,25 | 0,000095 | 12,75 | 5 | 11,3 | 0,4946 | 0,6596 |
| 5. | 176,44 | 113,14 | 0,000150 | 13,5 | 6 | 10 | 0,2968 | 0,5513 |
| 6. | 176,44 | 113,14 | 0,000179 | 13,5 | 6,5 | 9,5 | 0,2221 | 0,5504 |
| 7. | 176,44 | 113,14 | 0,000118 | 13,75 | 6 | 11 | 0,3632 | 0,7638 |
| 8. | 176,44 | 113,14 | 0,000124 | 13,5 | 6 | 10,5 | 0,3332 | 0,7528 |
| 9. | 176,44 | 113,14 | 0,000166 | 10,5 | 5 | 9 | 0,3808 | 0,6973 |
| 10. | 176,44 | 113,25 | 0,000370 | 10,5 | 5,5 | 9 | 0,3333 | 0,7439 |
| 11. | 176,44 | 113,25 | 0,000079 | 11,5 | 5,5 | 9,5 | 0,4087 | 0,6007 |
| 12. | 176,44 | 113,25 | 0,000129 | 11 | 4,5 | 9,5 | 0,4541 | 0,6473 |

ცხრილი №5.5

ცდომილებათა თეორიის ზოგადი დებულებები

სხვადასხვა ფიზიკური სიდიდეების გაზომვა მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ადამიანის ყველა საზოგადოებრივ სასარგებლო საქმიანობაში. ფიზიკური სიდიდის მნიშვნელობის განსაზღვრისათვის გამოყენებულ ტექნიკურ საშუალებას საზომი საშუალება ეწოდება.

მოწყობილობას, რომლის საშუალებითაც ხდება გასაზომი ფიზიკური სიდიდის შედარება საზომ ერთეულთან, საზომი ხელსაწყო ეწოდება.

სპეციალური საზომი საშუალებით ცდისეულად ფიზიკური სიდიდის მნიშვნელობების პოვნას გაზომვა ჰქვია.

შედეგების მიღების მეთოდების მიხედვით განასხვავებენ პირდაპირ და ირიბ (არაპირდაპირი) გაზომვებს.

პირდაპირი ეწოდება გაზომვას, რომლის დროსაც გასაზომი ფიზიკური სიდიდის საძიებელი მნიშვნელობები უშუალოდ ცდით განისაზღვრება. ასეთი გაზომვის მაგალითებია თერმომეტრით ტემპერატურის გაზომვა, ვოლტმეტრით ძაბვის გაზომვა და სხვა. პირდაპირი გაზომვისას სიდიდის მნიშვნელობა განისაზღვრება როგორც ხელსაწყოს ჩვენება.

ირიბი გაზომვისას, როდესაც ფიზიკური სიდიდის დამოკიდებულება სხვა სიდიდეებზე მოცემულია ფორმულის საშუალებით, საძიებელ მნიშვნელობას პოულობენ ამ სიდიდეების პირდაპირი გაზომვით. მაგალითად, ერთგვაროვანი სხეულის სიმკვრივის პოვნა მისი მასისა და გეომეტრიული ზომების მეშვეობით.

აბსოლუტურად ზუსტი ხელსაწყო არ არსებობს, ამიტომ გაზომვის ყველა საშუალებას ახასიათებს ცდომილება. გაზომვის ცდომილება შეიძლება იყოს სისტემური, შემთხვევითი და

უხეში. გაზომვის სისტემური ცდომილება განპირობებულია უცვლელი ფაქტორების ზემოქმედებით, როგორცაა გამზომი საშუალების და გაზომვის არჩეული მეთოდის შეცდომები.

გაზომვის შემთხვევითი ცდომილება განპირობებულია არაერთგზის გაზომვისას მიღებული შედეგების განსხვავებით. ის ექვემდებარება სტატისტიკურ კანონზომიერებებს და მისი განსაზღვრა შესაძლებელია ალბათობის თეორიის მეთოდებით.

გაზომვის უხეში ცდომილებებია: ხელსაწყოს ანათვალის არასწორი ჩაწერა, გამოთვლების დროს დაშვებული შეცდომები და ა.შ. დაკვირვების შედეგებიდან უხეშ შეცდომებს გამო-რიცხავენ.

პირდაპირი გაზომვისას შემთხვევითი ცდომილებების ანგარიში.

რაიმე x სიდიდის ჭეშმარიტ მნიშვნელობად მიღებულია ამ სიდიდის მნიშვნელობების საშუალო არითმეტიკული

$$x_{\text{სივ}} = \langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

ცალკეული გაზომვების აბსოლუტური ცდომილებებია

$$\begin{aligned} |\langle x \rangle - x_1| &= \Delta x_1, \\ |\langle x \rangle - x_2| &= \Delta x_2, \\ &\dots\dots\dots \\ |\langle x \rangle - x_n| &= \Delta x_n. \end{aligned}$$

x სიდიდის გაზომვის აბსოლუტური ცდომილებაა

$$\Delta x = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta x_k$$

გაზომვის აბსოლუტური ცდომილებისა და გასაზომი სიდიდის ჭეშმარიტი მნიშვნელობის ფარდობას ეწოდება გაზომვის

ფარდობითი ცდომილება – δx . გამოისახება მთელის წილადი ნაწილებით ან პროცენტებით.

$$\delta x = \frac{|\Delta x|}{x_{\text{სეშ}}}$$

x სიდიდის მნიშვნელობათა ინტერვალს, რომელშიც რაღაც ალბათობით მოხვედრილია $x_{\text{სეშ}}$ მნიშვნელობა, ეწოდება ნდობის ინტერვალი:

$$(\langle x \rangle - \Delta x) < x_{\text{სეშ}} < (\langle x \rangle + \Delta x)$$

ნდობის ინტერვალის და ალბათობის მოსამეზნად აუცილებელია კანონის დადგენა, რომელსაც ემორჩილება გასაზომი სიდიდის შემთხვევითი გადახრა მისი საშუალო არითმეტიკული მნიშვნელობიდან. ამ კანონს განაწილების ფუნქცია, ან x სიდიდის ალბათობის სიმკვრივე ეწოდება

$$f(x) = \frac{dP}{dx}$$

თუ ვიცით $f(x)$, მაშინ შეგვიძლია განვსაზღვროთ იმის ალბათობა, რომ უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობებს $(x - dx, x + dx)$ ინტერვალიდან

$$dP = f(x)dx.$$

შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების ფუნქციას სხვადასხვა სახე აქვს. საინჟინრო პრაქტიკაში ჩვეულებრივ იყენებენ სტუდენტის განაწილებას, რომელიც მიღებულია გაზომვის სასრული მნიშვნელობებისათვის.

x სიდიდის პირდაპირი გაზომვის ცდომილება $\Delta x = \tau_{n,P} \sigma_{\langle x \rangle}$, სადაც $\tau_{n,P}$ – სტუდენტის კოეფიციენტი, რომლის მნიშვნელობები $P = 0,95$ ნდობის ალბათობისათვის მოყვანილია ცხრილში:

| | | | | | | |
|--------------|------|-----|-----|-----|-----|-----|
| P | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 100 |
| $\tau_{n,P}$ | 12,7 | 4,3 | 3,2 | 2,8 | 2,0 | 2,0 |

$\sigma_{\langle x \rangle}$ არის გაზომვების შედეგების საშუალო კვადრატული გადახრა

$$\sigma_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{|\langle x \rangle - x_1|^2 + \dots + |\langle x \rangle - x_n|^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n |\langle x \rangle - x_k|^2}{n(n-1)}}$$

პირდაპირი გაზომვის შედეგები ნდობის ალბათობის მითითებით შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x = \langle x \rangle \pm \sigma_{\langle x \rangle} \cdot \tau_{n,P}$$

მაგალითად, სიგრძის გაზომვისას მივიღეთ, რომ $l = 2,752 \cdot 10^{-2}$ მ, საშუალო კვადრატული გადახრა $\sigma = 0,01 \cdot 10^{-2}$ მ, $n = 5$, $\tau_{n,P} = 2,8$ და $\Delta l = \tau \cdot \sigma = 2,8 \cdot 10^{-4}$ მ.

- აბსოლუტურ ცდომილებას ამრგვალებენ პირველ ნიშნად ციფრამდე!

$$\Delta l = 0,03 \cdot 10^{-2} \text{ მ.}$$

- გაზომილი სიდიდეებისა და ცდომილებების ნიშნების რაოდენობა მძიმის შემდეგ უნდა ემთხვეოდეს!

$$l = (2,75 \pm 0,03) \cdot 10^{-2} \text{ მ.}$$

ირიბი გაზომვისას შემთხვევითი ცდომილებების გამოთვლა
სიდიდის ირიბი გაზომვისას ფიზიკური F სიდიდის მნიშვნელობა გამოითვლება ფორმულით

$$F = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

სადაც x_1, x_2, \dots, x_n პირდაპირ გაზომილი ფიზიკური სიდიდეებია. ირიბი გაზომვების აბსოლუტური ΔF ცდომილება გამოითვლება ფორმულით

$$\Delta F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} |\Delta x_1|\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n} |\Delta x_n|\right)^2} \quad (1)$$

სადაც $\frac{\partial F}{\partial x_k} - F$ ფუნქციის კერძო წარმომებულება x_k ცვლადით (მათი მნიშვნელობების გამოთვლისას სხვა ცვლადები მუდმივი სიდიდეებია). $\Delta x_k - x_k$ - სიდიდის გაზომვის აბსოლუტური ცდომილებაა. ირიბი გაზომვის შედეგი ჩაიწერება შემდეგი სახით: $F = \langle F \rangle \pm \Delta F$, სადაც $\langle F \rangle = F(\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle, \dots, \langle x_n \rangle)$ არის F ფუნქციის მნიშვნელობა $\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle, \dots, \langle x_n \rangle$ საშუალო მნიშვნელობებიდან.

$\delta F = \frac{\Delta F}{\langle F \rangle}$ ფარდობითი ცდომილებისათვის გვაქვს

$$\delta F = \frac{\Delta F}{\langle F \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{\langle F \rangle} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \ln F \right) \Delta x_k \right]^2}, \quad (2)$$

სადაც $\frac{\partial}{\partial x} \ln F = \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x}$

- ცილინდრული მყარი სხეულის სიმკვრივის ცდომილების გამოთვლა:

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 h}, \quad \rho = f(m, d, h)$$

სადაც ρ არის სხეულის სიმკვრივე, m -სხეულის მასა, d -ცილინდრის დიამეტრი, h -ცილინდრის სიმაღლე.

აბსოლუტური ცდომილობა გამოითვლება (1) ფორმულით

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{4}{\pi d^2 h}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial d} = -\frac{8m}{\pi d^3 h}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial h} = \frac{4m}{\pi d^2 h^2},$$

$$\Delta \rho = \sqrt{\left(\frac{4\Delta m}{\pi d^2 h} \right)^2 + \left(\frac{8m\Delta d}{\pi d^3 h} \right)^2 + \left(\frac{4m\Delta h}{\pi d^2 h^2} \right)^2},$$

სადაც Δm , Δd , Δh არის მასის, დიამეტრისა და სიმაღლის პირდაპირი გაზომვების აბსოლუტური ცდომილებები.

გაზომვების შედეგებს ასეთი სახე აქვს: $\rho = (\langle \rho \rangle \pm \Delta \rho)$.

(2) ფორმულით ცდომილების გამოთვლა: გავალოგარიტმით ρ -ს გამოსახულება:

$$\ln \rho = \ln m + \ln 4 - \ln \pi - 2 \ln d - \ln h$$

ვპოულობთ $\frac{\partial \ln \rho}{\partial x_k}$ კერძო წარმოებულებს:

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial m} = \frac{1}{m}, \quad 2 \frac{\partial \ln \rho}{\partial d} = 2 \frac{1}{d}, \quad \frac{\partial \ln \rho}{\partial h} = \frac{1}{h}.$$

ფარდობითი ცდომილება იქნება

$$\delta \rho = \frac{\Delta \rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2},$$

სადაც $\Delta m, \Delta d, \Delta h$ - მონაცემული m, d, h სიდიდეების პირდი-პირი გაზომვების ცდომილებებია.

აბსოლუტური ცდომილება $\Delta \rho = \delta \rho \langle \rho \rangle$.

საბოლოო შედეგის ჩანაწერია $\rho = (\langle \rho \rangle \pm \Delta \rho)$.

აბსოლუტურ ცდომილებას და საშუალო შედეგებს ამრგვალებენ დამრგვალების წესის თანახმად:

- თუ პირველი ციფრი, რომელსაც უკუვაგდებთ, მეტია 4-ზე, მაშინ მის წინ მდგომ ბოლო ციფრს ვზრდით 1-ით. მაგალითად, 38,7782 მეასედებამდე დამრგვალებისას უნდა ჩავწეროთ 38,78.
- თუ პირველი ციფრი, რომელსაც უკუვაგდებთ ნაკლებია ან ტოლია 4-ის, მაშინ მის წინ მდგომ ბოლო ციფრს უცვლელად ვტოვებთ. მაგალითად, 19,2531 მეასედებამდე დამრგვალებისას უნდა ჩავწეროთ 19,25.
- თუ პირველი ციფრი, რომელსაც უკუვაგდებთ ტოლია 5-ის, მაშინ რიცხვს ისე ვამრგვალებთ, რომ 5-ის წინ მდგომი ბოლო ციფრი იყოს ლუწი. მაგალითად, 23,65 მეათედებამდე დამრგვალებისას უნდა ჩავწეროთ 23,6, ხოლო 17,75 ვწეროთ 17,8.

სარჩევი

| | |
|--|----|
| შესავალი..... | 5 |
| სტატიკა..... | 8 |
| §1. სტატიკის პრინციპები..... | 8 |
| §2.თავმოყრილი ძალები და მათი წონასწორობა..... | 11 |
| §3. სრიალის ხახუნი. სხეულის წონასწორობა ხახუნის გათვალისწინებით..... | 13 |
| §4. ძალის ვექტორული მომენტი წერტილის მიმართ..... | 15 |
| §5. ძალის სკალარული მომენტი წერტილის მიმართ..... | 16 |
| §6. ძალის მომენტი ღერძის მიმართ..... | 17 |
| §7. დამოკიდებულება ძალის ვექტორულ მომენტსა და ღერძის მიმართ მომენტს შორის. ძალის მომენტი კორდინატთა ღერძების მიმართ..... | 18 |
| §8. ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი ... | 19 |
| §9. წყვილძალის ცნება. წყვილძალის სკალარული და ვექტორული მომენტი | 22 |
| §10. ძალთა სისტემის დაყვანა უმარტივეს სახეზე სიბრტყეზე და სივრცეში..... | 23 |
| §11.ნებისმიერი ბრტყელ ძალთა სისტემის წონასწორობა. სტატიკის ძირითადი თეორემა..... | 25 |
| §12. ნებისმიერი სივრცითი ძალთა სისტემის წონასწორობა..... | 26 |
| §13. გორვის ხახუნი..... | 28 |
| §14. ძალთა სისტემის ინვარიანტები. ძალთა სისტემის უმარტივეს სახეზე დაყვანის კერძო შემთხვევები. | 30 |
| §15. ორი პარალელური ძალის შეკრება..... | 32 |
| §16. პარალელური ძალების ცენტრი..... | 34 |
| §17. პარალელური ძალების წონასწორობა..... | 37 |

| | |
|--|----|
| §18. სიმძიმის ცენტრი..... | 38 |
| კინემატიკის საგანი..... | 40 |
| §19. წერტილის მოძრაობის განტოლებები..... | 42 |
| §20. წერტილის სიჩქარე..... | 44 |
| §21. წერტილის აჩქარება. აჩქარების დაშლა მხებ და ნორმალურ მდგენელებად..... | 46 |
| მყარი სხეულის უმარტივესი მოძრაობები | |
| §22. ზოგადი დებულებები | 50 |
| §23. მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა..... | 53 |
| §24. მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო. ბრუნვის კუთხური სიჩქარე და აჩქარება..... | 55 |
| წერტილის რთული მოძრაობა | |
| §25. წერტილის რთული მოძრაობის განტოლებები..... | 60 |
| §26. სიჩქარეთა შეკრების კანონი..... | 61 |
| §27. აჩქარებათა შეკრების კანონი (კორიოლისის თეორემა).... | 62 |
| მყარი სხეულის ბრტყელი მოძრაობა | |
| §28. სხეულის ბრტყელი მოძრაობის განტოლებები..... | 63 |
| §29. სიჩქარეთა განაწილება მყარი სხეულის ბრტყელი მოძრაობის დროს..... | 65 |
| დინამიკის საგანი..... | 69 |
| §30. დინამიკის კანონები..... | 70 |
| §31. ნივთიერი წერტილისა და წერტილთა სისტემის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები..... | 73 |
| §32. დინამიკის ორი ძირითადი ამოცანა..... | 76 |
| §33. ნივთიერი წერტილის წრფივი მოძრაობა..... | 77 |
| მექანიკური რხევები..... | 78 |
| §34. თავისუფალი ანუ ჰარმონიული რხევა..... | 80 |
| §35. მათემატიკური ქანქარა. ფიზიკური ქანქარა..... | 83 |

| | |
|--|-----|
| §36. ნივთიერ წერტილთა სისტემის მასათა ცენტრი. თეორემა მასათა ცენტრის მოძრაობის შესახებ..... | 86 |
| §37. ნივთიერი წერტილისა და წერტილთა სისტემის მოძრაობის რაოდენობა. ძალის იმპულსი. თეორემები მოძრაობის რაოდენობის შესახებ..... | 88 |
| §38. ძალის მუშაობა. სიმძლავრე. ძალის ველი. პოტენციალური ველი..... | 91 |
| §39. ინერციის მომენტები..... | 94 |
| §40. ნივთიერი წერტილისა და წერტილთა სისტემის კინეტიკური ენერგია..... | 99 |
| §41. მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა..... | 102 |
| §42. მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი ღერძის გარშემო..... | 103 |
| §43. მყარი სხეულის ბრტყელ-პარალელური მოძრაობა..... | 104 |
| დარტყმის ელემენტარული თეორია | |
| §44. დარტყმის ცნება. დარტყმის თეორიის ძირითადი განტოლება..... | 105 |
| §45. ალდგენის კოეფიციენტი..... | 107 |
| §46. ორი ბირთვის პირდაპირი ცენტრალური დარტყმა..... | 105 |
| ლაბორატორიული სამუშაოების ნიმუშები..... | 111 |
| ცდომილებათა თეორიის ზოგადი დებულებები..... | 192 |
| ლიტერატურა..... | 201 |

ლიტერატურა

1. ა.ი.გორგიძე. თეორიული მექანიკის კურსი. I ნაწილი (სტატიკა, კინემატიკა). გამომცემლობა „განათლება“, თბილისი-1990. 365 გვ.
2. ა.ი.გორგიძე. თეორიული მექანიკის კურსი. II ნაწილი (დინამიკა). გამომცემლობა „ტექნიკური უნივერსიტეტი“. თბილისი-1991. 517 გვ.
3. დ.დოლიძე. თეორიული მექანიკის მოკლე კურსი. თბილისი, 1956.
4. ნ.მუსხელიშვილი. თეორიული მექანიკის კურსი. პირველი ნაწილი-1930, მეორე ნაწილი-1932.
5. ნ.ვეკუა. თეორიული მექანიკა. თბილისი, 1956.
6. ა.ციციშვილი, ნ.ჯორბენაძე. მექანიკურ რხევათა თეორიის ზოგიერთი საკითხი (მეთოდური მითითება). თსუ-ს გამომცემლობა. თბილისი, 1986.
7. ა.ბეგიაშვილი. თეორიული მექანიკა. თბილისი, 1958.
8. Н.Н.Бухгольц. Основнойкурс теоретической механики. Часть первая, часть вторая. Москва-Ленинград, 1945.
9. Л.Г.Лоицянский, А.И.Лурье. Курс теоретической механики, т. I и т. II. Москва, 1956.
10. А.А.Яблонский, В.М.Никифорова. Курс теоретической механики, часть I. 1977.
11. А.А.Яблонский. Курс теоретической механики, часть II. Москва, 1962.