საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ელგუჯა ყუბანეიშვილი

სამედიცინო - კომპიუტერული დიაგნოსტიკის მეთოდები

თბილისი 2015

1 სამედიცინო დიაგნოსტიკა და სახეთა გარჩევა

1.1 ზოგადი ცნებები და განმარტებები

თანამედროვე მედიცინის წინაშე წამოჭრილი ამოცანების გადაწყვეტა თითქმის შეუძლებელია კომპიუტერული ტექნოლოგიების და მათემატიკური მეთოდების ფართო სპექტრის გამოყენების გარეშე. ეს აიხსნება იმით, რომ მედიცინა ფაქტიურად აღწერითი სფეროდან გადადის ზუსტი მეცნიერების სფეროში. აქედან გამომდინარე, სამედიცინო დიაგნოსტიკის განვითარება წარმოუდგენელია სამედიცინო-კომპიუტერული დიაგნოსტიკური სისტემების გარეშე.

სამედიცინო დიაგნოზი შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც ადამიანის ორგანიზმის ავადმყოფური მდგომარეობის დასახელება და როგორც ავადმყოფობის მიზეზის დასახელება, რომელმაც გამოიწვია ორგანიზმის ეს მდგომარეობა. პირველ შემთხვევაში საქმე გვაქვს ადამიანის ორგანიზმის მდგომარეობის დიაგნოსტიკასთან, რომელიც უნდა ჩატარდეს მათი სიმპტომების აღწერის საშუალებით, ხოლო მეორე შემთხვევაში საჭიროა ორგანიზმის მდგომარეობის ცვლილების გამომწვევი სიმპტომო-კომპლექსებით დიაგნოსტიკის დასმა.

დაავადდების დიაგნოსტიკის ამოცანა შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ. სიმარტივისათვის დაუშვათ, რომ გვაქვს ორი დაავადდება D_1 და D_2 . დაუშვათ ყოველ ავადმყოფს გააჩნია მონაცემები (ანამნეზი, ლაბორატორული გამოკვლევები და სხვა) $x_1, x_2, \ldots, x_n$, რომლებიც ახასიათებენ მის მდგომარეობას. დიაგნოზის დასმის ამოცანა შემდეგში მდგომარეობს: არსებული მონაცემებით გამისაკვლევ პირს უნდა დაუსვათ D_1 ან D_2 დიაგნოზი. მათემატიკურად დიაგნოსტიკის ამოცანა დაიყვანება ისეთი გამყოფი ზედაპირის აგებაში, რომელიც ამ ორ დიაგნოზს გამოყოფს ერთმანეთისაგან და გადაწყვეტილების მიღების წესის ფორმირებაში.

სამედიცინო-კომპიუტერული დიაგნოსტიკა ძირითადად ეფუძნება სახეთა გარჩევის მეთოდებს. კერძოდ, სამედიცინო დიაგნოზის დასმა წარმოადგენს სახეთა გარჩევის კლასიფიკაციის ამოცანას. აქედან გამომდინარე, განვიხილოთ სახეთა გარჩევის მეთოდები.

სახეთა გარჩევა წარმოადგენს მეცნიერებას სახეების ანუ ობიექტების კლასიფიკაციის მეთოდებისა და ალგორითმების დამუშავების შესახებ. სამედიცინო დიაგნოსტიკიდან გამომდინარე, ზოგადად ობიექტები შეიძლება იყოს სამედიცინო დიაგნოსტიკური ამოცანის გადასაწყვეტად გამოყენებული სიმპტომო-კომპლექსები, დაავადებები, ორგანიზმში მიმდინარე ფიზიოლოგიური პროცესები და ბევრი სხვა მაჩვენებელი.

სახეთა გარჩევის სისტემები მიეკუთვნება ინტელაქტიურ სისტემებს, რომლებიც ინფორმატიკის შემადგენელი ნაწილია. ადამიანი სახეთა გარჩევის ამოცანას ყოველწუთიერად აწყდება. მაგალითად, ჩვენ ვარჩევთ ადამიანებსა და ობიექტებს, ვარჩევთ ციფრებსა და ანბანს, გვესმის მეტყველება და ბევრ სხვა. შეიძლება ითქვას, რომ ცოცხალი ორგანიზმი იძულებულია თავის ცხოვრების მანძილზე მუდმივად გადაწყვიტოს გარჩევის ამოცანები. გარჩევის ამოცანის

წარმატებულ გადაწყვეტაზე ბევრადაა დამოკიდებული ბიოლოგიური ობიექტების წარმატებული ფუნქციონირება და თვით სიცოცხლისუნარიანობა.

ამრიგად, ადამიანის არსებობის აუცილებელი პირობაა გარემოს ობიექტების აღქმა და მიღებული ინფორმაციის გადამუშავება, რის საფუძველზედაც მიიღება გარკვეული გადაწყვეტილება და მისი შესაბამისი ქმედების განხორციელება. გადწყვეტილების მიღების ეს პროცედურა შეიძლება აღინიშნოს ერთი ტერმინით "გარჩევა".

გარჩევის პროცესის განხორციელების აუცლებელი პირობაა ადამიანის ცნობიერებაში გასარჩევი ობიექტის ინფორმაციული პროტოტიპების არესებობა. საკმარის პირობად შეგვიძლია მივიჩნიოთ გასარჩევ ობიექტში თუნდაც ერთი განმასხვავებელი თვისების არსებობა, რომლის აღქმაც შეუძლია ადამიანს.

ფსიქოლოგიური და ფიზიოლოგიური გამოკვლევების საფუძველზე გარკვეულწილად ცნობილი გახდა, რომ ადამიანი გადაწყვეტილების მიღებისას სარგებლობს უმარტივესი ფუნქციებით, ძირითადად ლოგიკური და მხოლოდ განსაკუთრებულ შემთხვევაში იყენებს წრფივ ან კიდევ უფრო რთულ შემთხვევაში მარტივ არაწრფივ ფუნქციებს. უაღრესად მცირე ინფორმაცია არის იმის შესახებ, თუ როგორ ხდება ადამიანის მიერ ობიექტთა დამახასიათებელი ნიშნების ფორმირება, შეფასება, არჩევა და რანჟირება.

უნდა აღინიშნოს, რომ ადამიანის გონებაში ნიშანთა ფორმირების პროცესი, განმასხვავებელი ნიშნების გამოყოფა და დადგენა ძირითადად მიმდინარეობს მისგან დამოუკიდებლად.

პერიფერიული ნერვული სისტემა ძირითადად მონაწილეობს ობიექტთა აღქმაში. კერძოდ, ხედვითი, სმენითი, ყნოსვითი და გემოს ანალიზატორებიდან მიღებული ინფორმაციის ცენტრალურ ნერვულ სისტემამდე გადაცემის პროცესში, რაც საბოლაოდ ამ ინფორმაციის საფუძველზე გარკვეული გადაწყვეტილების მიღებით მთავრდება, რასაც ჩვენ გარჩევა ვუწოდეთ.

მეცნიერებისთვის ჯერ კიდევ უცნობია ის ფაქტი თუ როგორ ახერხებს ადამიანი ასეთი სისწრაფით გაარჩიოს გარემომცველ ობიექტთა მრავალფეროვნებანი. ეს პარადოქსი წარმოადგენს მეცნიერების ერთ-ერთ ყველაზე აქტუალურ პრობლემას, რომლის ახსნა უდიდეს ბიძგს მისცემს არა მარტო გარჩევის, არამედ საერთოდ, მაღალეფექტური ინტელექტუალური სისტემების შექმნის პრობლემის გადაწყვეტასაც.

ამრიგად, გარჩევის პროცესი წარმოადგენს ადამიანის ინტელექტუალური მოქმედების ერთ-ერთ ძირითად ასპექტს, რომლის განხორციელებაში მონაწილეობენ როგორც პერიფერიული, ასევე ცენტრალური ნერვული სისტემები.

მიუხედავად ზემოთ აღნიშნულისა, ადამიანის შესაძლებლობები ობიექტთა გარჩევის თვალსაზრისით მნიშვნელოვნად შეზღუდულია იმ ამოცანებისათვის, რომლებიც ხასიათდებიან მრავალი ნიშან-თვისებებით. შეზღუდვები განსაკუთრებით ეხება ისეთ ობიექტებს, რომელთა აღქმა ადამიანის მიერ შეუძლებელია მისი მგრძნობიარე ელემენტების – რეცეპტორების არასრულყოფილებით ან არარსებობის გამო. მაგალითად, ადამიანის ყური ვერ აღიქვამს 20 ჰერცამდე და 20.000 ჰერცზე მაღალი სიხშირის რხევებს, ხოლო თვალი – ოპტიკური სიგნალის მთელი დიაპაზონის დაახლოებით 20%-ს. გარდა ამისა, ადამიანს არ გააჩნია რადიაციის ან ელექტრომაგნიტური რხევების აღქმის ორგანოები, რაც ბუნებრივია, შეუძლებელს ხდის მის მიერ ამ თვისების მქონე ობიექტთა აღქმას და გარჩევას. აქედან გამომდინარე, აუცილებელია ისეთი ტექნიკური სისტემების შექმნა, რომლებიც უზრუნველყოფენ ადამიანისათვის

დამახასიათებელ სწორ და მაღალსაიმედო ამოცნობას და ამასთან ერთად, ექნება კომპიუტერისათვის დამახასიათებელი სიჩქარე.

ზემოთ აღნიშნულიდან გამომდინარე, არჩევენ ხელოვნურ და ბუნებრივ ინტელექტუალურ სისტემებს. ინტელექტუალურ სისტემებს მიეკუთვნება სახეთა გარჩევის კომპიუტერული სისტემები, ხოლო ბუნებრივს – ცენტრალური პერიფერიული ნერვული სისტემები.

სახეთა გარჩევის თეორიაში პირველი ნაშრომები მე-20 საუკუნის მეორე ნახევარში აშშ გამოჩნდა. პირველი პრაქტიკული ამოცანა, რომლის გადაწყვეტას ცდილობდნენ სპეციალისტები გახდათ ე.წ. წამკითხავი ავტომატის შექმნა, რომელსაც ავტომატურად უნდა აღექვა და გაერჩია ნაბეჭდი, ხელნაწერი ტექსტები ან ცალკეული სიმბოლოები. პირველი მეცნიერი, რომელმაც სხვადასხვა ობიექტების გასარჩევად შექმნა გამოთვლითი სისტემა იყო ფ. როზენბლატი, რომელმაც შეიმუშავა ე.წ. პერსეპტრონი – თავის ტვინის ნეირონის ელექტრული ანალოგი.

სახეთა გარჩევის ზოგადი თეორია შექმნა გრენანდერმა, რომლის პირველი ნაშრომები 60-იან წლებში გამოჩნდა. 70-ანი წლების დასაწყისში კ. ფუმ ორგანზომილებიანი ობიექტების გასარჩევად შეიმუშავა სტრუქტურული ანალიზის (სინტაქსური, გეომეტრიული) თეორია. 80-იან წლებში მნიშვნელოვანი შედეგები იქნა მიღებული ცალკეული სამეტყველო სიგნალებისა და სამგანზომილებიანი ობიექტების გარჩევის პრობლემების გადასაწყვეტად. ამან უზრუნველყო რობოტი მანიპულატორებისათვის შეექმნათ ე.წ. ტექნიკური ხედვის სისტემა.

შეიძლება მოვიყვანოთ ინტელექტუალური სისტემების ყველაზე მნიშვნელოვანი მიმართულებები, სადაც გამოიყენება სახეთა გარჩევის მეთოდები:

–სიმბოლოების (ბეჭდვითი, ხელნაწერი, საბანკო ჩეკები, ფულადი კუპიურები და სხვ.) გარჩევა;

–გამოსახულებების გარჩევა, რომლებიც მიიღებიან სხვადასხვა სიხშირულ დიაპაზონებში;

–მეტყველების გარჩევა;

–სამედიცინო დიაგნოსტიკა;

–უსაფრთხოების სისტემები;

–კლასიფიკაცია, კლასტერიზაცია და მონაცემთა ბაზებში ძიება, მათ შორის ინტერნეტ-რესურსებში.

მომავალში გარჩევის სისტემები კიდევ უფრო ფართო გამოყენებას ჰპოვებს საყოფაცხოვრებო პროცესებში, მედიცინასა და ტექნიკაში, როგორც ხელოვნური ინტელექტუალური სიტემების შემადგენელი ნაწილი და როგორც დამოუკიდებელად ფუნქციონირებადი ინტელექტუალური სისტემები. განსაკუთრებით აღსანიშნავია ცენტალური ნერვული სისტემის ფუნქციონირების პრინციპზე დაფუძნებელი ე.წ. ხელოვნური ნეირონული ქსელის აგების პრობლემა, რომლის ერთ-ერთი ძირითადი მიზანია ნეიროკომპიუტერის შექმნა. აქ მთავარი მიზანია კომპიუტერის მოქმედების სისწრაფის შერწყმა ბუნებრივ ნეირონული ქსელის მონაცემების პოტენციალთან. ასეთი პროექტის განხორციელება შექმნიდა განუსაზღვრელ შესაძლებლობას როგორც სახეთა გარჩევის, ასევე ნებისმიერი პროცესის მართვის თვალსაზრისით.

1.2 სახეთა გარჩევის ძირითადი ცნებები

სანამ გადავიდოდეთ სახეთა გარჩევის მეთოდების განხილვაზე, მოვიყვანოთ ზოგიერთი ცნების განსაზღვრება.

სახე ეწოდება საერთო თვისების მქონე ყველა იმ ობიექტების (რეალიზაციების) სიმრავლეს, რომლებიც სივრცეში გარკვეული აზრით ქმნიან კომპაქტურ არეს. მაგალითად, „ფანქრების" სახეს მიეკუთვნება ყველა ზომის და ფერის ფანქარი, მაგრამ „წითელი ფანქრების" სახეში შედის მხოლოდ წითელი ფერის ფანქრები. სახეს მიეკუთვნებიან აგრეთვე ნაბეჭდი ან ხელნაწერი სიმბოლოები, სხვადასხვა საგნები, დეტალები და მოწყობილობები, დაავადებები, მოვლენები, სიტუაციები და ა.შ.

კლასი წარმოადგენს ცნება „სახის" სრულ ანალოგს და შესაბამისად ამავე ტერმინის სინონიმს.

ყოველი სახე წარმოდგენილია გარკვეული რაოდენობის ობიექტებისგან. ობიექტი შეიძლება იყოს ორ ან სამგანზომილებიანი. ორგანზომილებიან ობიექტს **გამოსახულება** ეწოდება. გამოსახულების მაგალითებია: ნაბეჭდი ან ხელნაწერი სიმბოლოები და ტექსტები, ნახატები, ნახაზები და სხვა. თავის მხრივ გამოსახულება შეიძლება იყოს შტრიხული და ლაქისებრი.

შტრიხული ეწოდება ისეთ გამოსახულებას, რომელიც შედგება მხოლოდ წრფეებისა და მრუდეებისგან. მაგალითად, ხელნაწერი და ნაბეჭდი სიმბოლოები, სურათები, ბიოსიგნალების ჩანაწერები და ა.შ.

ლაქისებრი ეწოდება ისეთ გამოსახულებას, რომელიც შედგება მთლიანი, ნებისმიერი ფორმის ლაქებისაგან. მაგალითად, ფოტოსურათები, რენტგენული გამოსახულებები, ვიდეოგამოსახულებები, ნახატები და სხვა.

სცენა ეწოდება სივრცის იმ ნაწილს, სადაც მოთავსებულია სამგანზომილებიანი გასარჩევი ობიექტები. სცენა და სცენის ობიექტები შეიძლება იყოს დეტალები, ლანდშაფტი და მასზე განლაგებული შენობა-ნაგებობები, სამხედრო ობიექტები, მაგიდაზე განლაგებული საგნები და ა.შ.

გარჩევა ეწოდება პროცესს, რომლის შედეგად უცნობი ობიექტი მიეკუთვნება ამა თუ იმ სახეს. გარჩევის გარდა ლიტერატურაში გვხვდება მისი სინონიმი ტერმინები: იდენტიფიკაცია, ამოცნობა. გარჩევის პროცესი აუცილებლად შეიცავს ე. წ. „შედარების" პროცედურას. რომლის განხორციელებისთვის საჭიროა მინიმუმ ორი ობიექტი, აქედან ერთი უცნობი ობიექტია, ხოლო მეორე უნდა იყოს ისეთი, რომელიც წარმოადეგენს მოცემულ სახეს.

უცნობი ობიექტის შესადარებელ ობიექტს **ეტალონი** ეწოდება. თვით ამ ტერმინს გააჩნია მრავალი სინონიმი: პროტოტიპი, ნიმუში, საყრდენი ობიექტი, სახის აღწერა. აუცილებელია თითოეულ სახეს ჰქონდეს მინიმუმ ერთი და რთულ შემთხვევებში რამდენიმე ეტალონი.

ობიექტის მიკუთვნება ან არმიკუთვნება ამა თუ იმ სახისადმი ეწოდება **გადაწყვეტილების მიღების** პროცესი.

სახეთა ნებისმიერ ანსამბლს გააჩნია თვისებათა გარკვეული სიმრავლე, რომელთა საშუალებითაც ხდება ანსამბლში შემავალი სახეთა წარმოდგენა და აღწერა, რასაც სახეთა გარჩევაში **ნიშნები** (პარამეტრები) ეწოდება. იმისთვის, რომ გარჩევის პროცესისათვის შესაძლებელი იყოს ნიშნების გამოყენება, აუცილებელია მათი ანალიზი. მაგალითად, თუ ნიშნები ზომვადია, მაშინ ისინი უნდა გაიზომოს, ხოლო თუ ნიშნები თვისებრივი ხასიათისაა, რომლებიც არ

იზომებიან, მაშინ ისინი უნდა დაფიქსირდნენ (აღირიცხონ). ნიშნების მაგალითებია სხვადასხვა ტექნოლოგიური პროცესების პარამეტრები, როგორიცაა: ტემპერატურის, მასის, წნევის და მექანიკური ძალების მნიშვნელობები. მედიცინაში ასეთია დაავადებათა სიმტომო-კომპლექსები, მაგალითად, არტერიულ წნევის, სხეულის ტემპერატურის, გულის შეკუმშვის სიხშირის და სხვა პარამეტრების მნიშვნელობები.

სახეთა ანსამბლის **ნიშანთა სიმრავლე** ეწოდება იმ ნიშანთა ერთობლიობას, რომელსაც ვიყენებთ მოცემულ სახეთა სიმრავლის აღწერისათვის

ნიშანთა სივრცე ეწოდება რაოდენობრივ ნიშანთა დალაგებულ სიმრავლეს, სადაც განსაზღვრულია რაიმე მეტრიკული ზომა.

რეცეპტორული ველი ეწოდება ტექნიკურად განხორციელებულ ან გრაფიკულად მოცემულ ნიშანთა სივრცის ანალოგს. რეცეპტორული ველის სინონიმია ტერმინი – რასტრი.

პიქსელი ეწოდება რეცეპტორულ ველში ანუ რასტრში შემავალი ერთი ნიშნის ანალოგს.

ნიშანთა სიმრავლის მაგალითებია: ყველა სიმპტომი, რომელიც შეიძლება ახასიათებდეს მოცემულ ავადმყოფს. ამ შემთხვევაში გვაქვს როგორც თვისებრივი ასევე რაოდენობრივი ნიშნები. ტექნოლოგიური პროცესების ამსახველი პარამეტრები, მარგი წიაღისეულის დაზვერვაში გამოყენებული ნიშნები და სხვა.

ნიშნების გაზომვით (ანალიზით) მიღებულ შედეგთა ერთობლიობას **რეალიზაცია** ეწოდება. იგი წარმოადგენს ვექტორს, რომელსაც ზოგჯერ **სახის ვექტორს** უწოდებენ. რეალიზაციის სინონიმია: დაკვირვებათა შედეგები, გაზომვათა შედეგები, სახის გამოსახულება. სახეში შემავალ ობიექტთა სიმრავლე წარმოადგენს ამ სახის რეალიზაციათა სიმრავლეს. ხშირად გამოიყენება ტერმინი რეალიზაციათა ამონარჩევი.

უცნობი რეალიზაციები ეწოდება იმ რეალიზაციებს, რომლებისთვისაც არაა გარკვეული რომელ სახეს მიეკუთვნებიან ისინი. რეალიზაციათა ის სიმრავლე, რომლებისთვისაც ცნობილია რომელ სახეს მიეკუთვნებიან, შეიძლება გამოყენებულ იქნას ე.წ. „სწავლების" პროცესში ანუ ეტალონური აღწერებისა და გადაწყვეტილებათა მიღების პროცესების ფორმირებისთვის. რეალიზაციის ასეთ ანსამბლს (სიმრავლეს) **სასწავლო ამონარჩევი** ეწოდება.

რეალიზაციათა სასწავლო ამონარჩევის იმ ნაწილს, რომლებიც გადაწყვეტილებათა მიღების პროცესში გამოიყენება უცნობი რეალიზაციის ნაცვლად, **საგამოცდო ამონარჩევი** ეწოდება. ამ ტერმინის სინონიმად ლიტერატურაში ხშირად გამოიყენება ტერმინი - **საკონტროლო ამონარჩევი.**

ამრიგად, ყოველი კლასი(სახე), მაგალითად X, რომელიც აღინიშნება $\{X\}$ სიმბოლოთი, შეიცავს ობიექტთა ანუ რეალიზაციათა X_i, $i=1,2,\ldots m$ ერთობლიობას, ხოლო თვით რეალიზაციები წარმოდგენილნი არიან $x_1, x_2,\ldots,x_n$ ნიშნების ანუ პარამეტრების ერთობლიობით. ე.ი. $X_i=(x_1, x_2,\ldots,x_n)$[1].

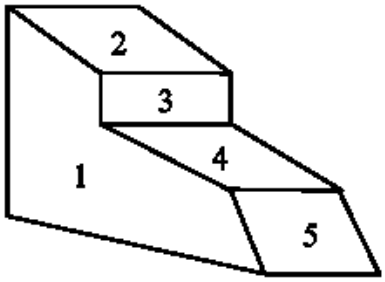
1.3 სახეების და გარჩევის სისტემების კლასიფიკაცია

სახეებს არჩევენ პარამეტრების ტიპის მიხედვით. გამოყოფენ შემდეგ მახასიათებელ – პარამეტრებს (ნიშნებს):

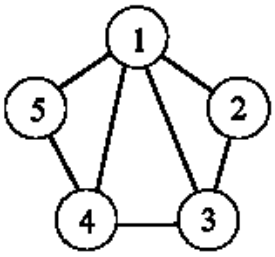
1. ფიზიკური მახასიათებლები. ასეთია მაგალითად მაჩვენებლები, რომლებიც მოხსნილია სხვადასხვა გადამწოდებით. ფიზიკური მახასიათებლები შეიძლება იყოს დეტერმინირებული და ალბათური. სასურველია ფიზიკური მახასიათებლები აღწერილი იყვნენ ვექტორების სახით, მათი შემდგომში მათემატიკური დამუშავებისთვის.

2. თვისებრივი მახასიათებლები. მაგალითის სახით შეგვიძლია მოვიყვანოთ ცნებები: „შავი", „თეთრი", „მაღალი", „დაბალი" და ა.შ. ასეთი მახასიათებლები შეიძლება აღიწერონ ე.წ. ლინგვისტკური ცვლადებით, არამკაფიო სიმვრავლეთა თეორიის გამოყენებით.

3. სტრუქტურული მახასიათებლები, რომლებიც ძირითადად გამოიყენებიან რთული გამოსახულებების აღწერისათვის. მაგალითად, ნახ.1 წარმოდგენილი ობიექტისათვის, სტრუქტურული მახასიათებლების აღწერისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ ზოგიერთი ფორმალური ენა, მაგალითად, გრაფების თეორია (ნახ. 2)



ნახ. 1



ნახ. 2

4. ლოგიკური მახასიათებლები. ესენია გამონათქვამები, რომელთა მიმართ შეგვიძლია ვთქვათ ჭეშმარიტია იგი თუ მცდარი.

დიაგნოსტიკური სისტემების კლასიფიკაციისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ რამოდენიმე კრიტერიუმი. ერთ-ერთი ასეთი კრიტერიუმია განსხვავება პარამეტრების ტიპის მიხედვით. პარამეტრები შეიძლება იყოს:

- დეტერმინისტული;
- ალბათური;
- ლოგიკური;
- სტრუქტურული;
- კომბინირებული.

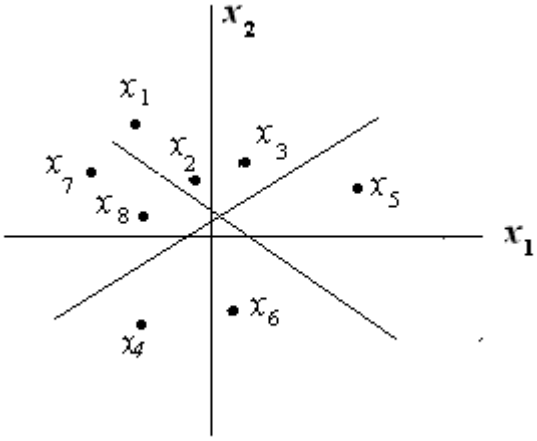
სხვა კრიტერიუმია გასარჩევ ობიექტებზე აპრიორული ინფორმაცია. კერძოდ, გასარჩევი სისტემა შეიძლება იყოს სამი ტიპის:

1. სისტემა მასწავლებლის გარეშე. ამ შემთხვევაში სისტემა თვითონ ირჩევს პარამეტრების იმ მინიმალურ რაოდენობას, რომელიც საკმარისი იქნება გარჩევის ამოცანის გადასაწყვეტად. გარდა ამისა, ის განსაზღვრავს კლასების

საზღვრებს. ამ შემთხვევაში გარჩევის სიტემაში სწავლების ბლოკი არ გამოიყენება.

2. სისტემა, რომელიც ეფუძნება სწავლებას მასწავლებლის საშუალებით. ამ შემთხვევაში სისტემის განკარგულებაშია ობიექტების გარკვეული რაოდენობა, რომლებიც წარმოადგენენ სასწავლო ობიექტებს და ცნობილია თუ რომელ კლასს მიეკუთვნებიან ისინი. სისტემა თვითონ არეგულირებს პარამეტრებს და აყალიბებს გარჩევის პროცედურას ისე, რომ გარჩევის პროცედურაში იყოს მინიმალური ცდომილება.

მაგალითისათვის განვიხილოთ ნახაზზე წარმოდგენილი სასწავლო ამონარჩევები, რომლებიც ერთმანეთისგან შეიძლება გამოვყოთ ორი წრფით ისე რომ x_1, x_2 და x_3 ობიექტები მოხვდნენ პირველ კლასში, x_4, x_5 და x_6 ობიექტები მოხვდნენ მე-2 კლასში, ხოლო x_7, x_8 - მე-3 კლასში.

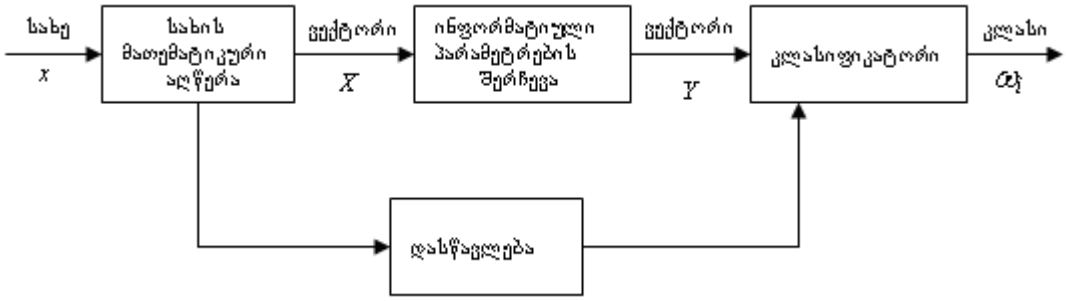


3. თვითსწავლების სისტემები. ამ შემთხვევაში გარჩევის სისტემაში შეტანილია წესების გარკვეული ერთობლიობა, რომლებიც აღწერენ გასარჩევ ამოცანას. ეს წესები, როგორც წესი, ამუშავებენ ექსპერტები ანუ დარგობრივი სფეროს სპეციალისტები. ასეთ სისტემებს უწოდებენ ექსპერტულს ანუ ინტელექტუალურ სისტემებს. გარჩევის სისტემამ არსებული წესების საფუძველზე უნდა შეარჩიოს პარამეტრები და განსაზღვროს კლასების საზღვრები. ამ შემთხვევაში, როგორც წესი, გამოიყენება მონაცემთა დამუშავების ლოგიკურ-დიაგნოსტიკური მეთოდები. გარჩევის ასეთ ტიპიურ მაგალითს წარმოადგენს სამედიცინო დიაგნოსტიკური სისტემები.

1.4 სახეთა გარჩევის თეორიის ძირითადი ამოცანები

განვიხილოთ სახეთა გარჩევის ამოცანები ტექნიკური სისტემის მუშაობის მაგალითზე, სადაც ხდება სიმბოლოების (ციფრები, ასოები და სხვ.) გარჩევა. ასეთი სისტემა 60-ან წლებში შეიქმნა აშშ და დიდი ხნის განმავლობაში გამოიყენებოდა საფოსტო კონვერტების გარჩევისთვის.

დავუშვათ სისტემას მიეწოდება რაიმე X სიმბოლო და საჭიროა მისი ამოცნობა. სახეთა გარჩევის სისტემის ზოგადი სქემა წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზზე:

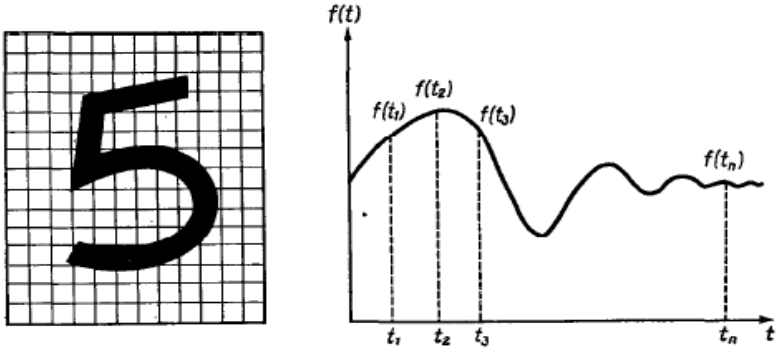


კლასიფიკატორის დანშნულებაა X სახის მიკუთვნება რომელიმე ω_i კლასს. გარჩევის ზოგად სქემაში შეიძლება იყოს დასწავლების ბლოკი, რომლის დანიშნულებაა ჩამოაყალიბოს იდენტიფიკაციის წესი.

შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ სახეთა გარჩევის შემდეგი ძირითადი ამოცანები:

1. სახეების მათემატიკური აღწერა. ამ მხრივ ყველაზე მოსახერხებელია სახის ვექტორული წარმოდგენა. ამ შემთხვევაში X სახეს შეესაბამება ვექტორი $X_i=(x_1, x_2,\ldots,x_n)^1$, სადაც $x_1, x_2,\ldots,x_n$ წარმოადგენენ სახის პარამეტრებს (ნიშნებს). ასეთ ვექტორულ სივრცეს პარამეტრების სივრცე ეწოდება, რომელიც წარმოადგენს მეტრიკულს და სასრულო ზომას.

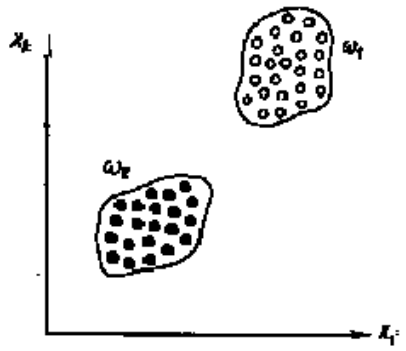
ამრიგად, პირველი ამოცანა მდგომარეობს საწყისი მონაცემების წარმოდგენაში. თითოეული გაზომილი სიდიდე წარმოადგენს კლასის რეალიზაციის მახასიათებელ მნიშვნელობას. მაგალითად, თუ საჭიროა სიმბოლოების გარჩევა, მაშინ გადამწოდად შეგვიძლია გამოვიყენოთ გაზომვის ბადე ანუ უჯრედთა დალაგებული ერთობლიობა, რომლებიც ქმნიან **რეცეპტორულ ველს** როგორც ეს შემდეგ ნახაზზეა წარმოდგენილი:



თუ ბადე შედგება n რაოდენობის უჯრედებისგან და ყოველი უჯრედი განიხილება როგორც ერთი ცალკე აღებული ნიშანი, მაშინ გაზომვის შედეგი შეგვიძლია წარმოვიდგნინოთ, როგორც სახის ანსამბლის ვექტორი $X_i=(x_1, x_2,\ldots,x_n)^1$, სადაც თითოეული კომპონენტი x_i ღებულობს, მაგალითად ერთის ტოლ სიდიდეს, როცა i-ურ უჯრედში გადის სიმბოლოს გამოსახულება და ნულს, წინააღმდეგ შემთხვევაში.

მეორე მაგალითი წარმოდგენილია ზემოთ მოყვანილ ნახაზზე. ამ შემთხვევაში საქმე გვაქვს უწყვეტ ფუნქციასთან (მაგ. ბიოსიგნალი). თუ ფუნქციის გაზომვა ხდება $t_1, t_2,\ldots,t_n$ დროით წერტილებში, მაშინ სახის ვექტორის კომპონენტები იქნებიან $x_1=f(t_1), x_2=f(t_2),\ldots. x_n=f(t_n)$

2. ინფორმაციული პარამეტრების შერჩევა. გაზომვის პროცესი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც კოდირების პროცესი. მაგალითისთვის განვიხილოთ ნახაზზე წარმოდგენილი ორი ω_1 და ω_2 სახე.



თითოეული სახე ხასიათდება ორი x_1 და x_2 კომპონენტით, რომელებიც მიიღება გაზომვის შედეგად. რეალიზაციის ვექტორს აქვს შემდეგი სახე: $X=(x_1, x_2)$[1]. როგორც ნახაზიდან ჩანს, ეს ორი სახე ქმნის გადაუკვეთავ ერთობლიობას, რაც მეტად ხელსყრელია დიაგნოსტიკური ამოცანის გადასაწყვეტად. სამწუხაროდ, პრაქტიკაში ყოველთვის ასე როდია, მაგალითად, ძალზე ძნელია ისეთი პარამეტრების შერჩევა, რომლებიც მოგვცემდნენ გადაუკვეთავ სიმრავლეებს. აქედან გამომდინარეობს სახეთა გარჩევის მეორე ამოცანა, რომელიც მდგომარეობს საწყისი მონაცემებიდან ინფორმატიული (მახასიათებელი) პარამეტრების (ნიშნების) შერჩევაში და აქედან გამომდინარე, ობიექტების განზომილების შემცირებაში.

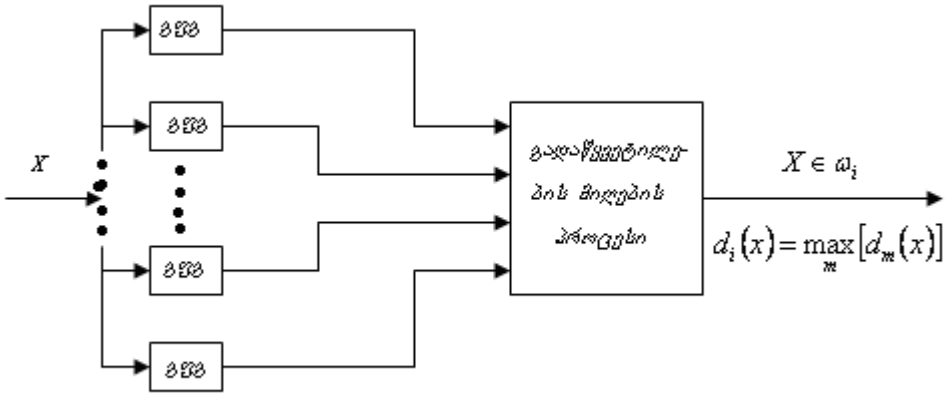
სახეთა გარჩევის თეორიაში პარამეტრების შერჩევა წარმოადგენს ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს ამოცანას, რომლის მიზანია შეარჩიოს რაც შეიძლება მინიმალური პარამეტრების რაოდენობა, რომლებიც ადეკვატურად აღწერენ სახეებს. ის პარამეტრები, რომლებიც განსხვავდებიან კლასებს შორის, წარმოადგენენ ინფორმატიულებს და მათ სახეთაშორისო (კლასთაშორისო) პარამეტრებს უწოდებენ. ის პარამეტრები, რომლებიც სახეებს შორის არ განსხვავდებიან, სახეთა გარჩევის ამოცანიდან გამომდინარე, მათ არ მოაქვთ რაიმე სასარგებლო ინფორმაცია და ამიტომ შეიძლება მათი უგულვებელყოფა.

თუ გაზომვა გვაძლევს საშუალებას მივიღოთ ყველა კლასისათვის მთლიანი განმასხვავებელი პარამეტრების რაოდენობა, მაშინ სახეთა გარჩევა არ წარმოადგენს პრობლემას. პრაქტიკაში ასეთი სრული განმასხვავებელი პარამეტრთა ერთობლიობის მიღება თითქმის შეუძლებელია. საბედნიეროდ, საწყის პარამეტრთა ერთობლიობიდან შეიძლება შეირჩეს გარკვეული რაოდენობის განმასხვავებელი პარამეტრები, რომლებიც შეიძლება გამოვიყენოთ სახეთა გარჩევის ამოცანის გადასაწყვეტად.

3. ერთგვაროვანი კლასების შექმნა. ეს ამოცანა, რომელსაც კლასტერიზაციის ამოცანა ეწოდება, წარმოადგენს უმნიშვნელოვანეს ეტაპს სახეთა გარჩევის სისტემების შექმნის დროს. სწორედ კლასტერიზაციის მეთოდები გამოიყენებიან საწყის პარამეტრთა ერთობლიობიდან ერთგვაროვან კომპაქტურ სივრცეში, არაგადამკვეთი სახეების შესაქმნელად, რაც წინაპირობაა იმისა, რომ სახეთა გარჩევის ამოცანა ხდება პრაქტიუკულად რეალიზებადი.

4. გადაწყვეტილების მიღების პროცედურის ოპტიმიზაცია. როგორც აღვნიშნეთ, გადაწყვეტილების მიღების პროცედურა ეფუძნება გარჩევის პროცესს, რომელსაც მივყავართ კლასიფიკაციის ანუ იდენტიფიკაციის ამოცანამდე.

დავუშვათ, მოცემულია $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m$ კლასები. ამ შემთხვევაში სახეთა გარჩევის ამოცანა შეიძლება განვიხილოთ როგორც m რაოდენობის კლასის გამყოფი საზღვრების აგების ამოცანა. ვთქვათ, ასეთი გამყოფი ფუნქციები $d_1(x)$, $d_2(x)$,… $d_m(x)$ მოცემულია. ეს ფუნქციები, რომლებსაც გადამწყვეტ ან განმამხოებელ ფუნქციებს უწოდებენ, წარმოადგენენ $\{X\}$ სახის სკალარულ და ერთმნიშვნელიან ფუნქციებს. თუ $d_i(x)>d_j(x)$,…ყველა $i,j=1,2,..m$, $i\neq j$, მაშინ X რეალიზაცია მიეკუთვნება ω_i კლასს. სხვა სიტყვებით, თუ i-ურ გადამწყვეტ ფუნქციას $d_i(x)$ გააჩნია ყველაზე დიდი მნიშვნელობა, მაშინ $X \in \omega_i$. ამ პრინციპზე აგებული ავტომატიზებული იდენტიფიკაციური სისტემის ბლოკ-სქემას აქვს შემდეგი სახე:



სადაც X – უცნობი რეალიზაციაა, **გფგ** – გადამწყვეტი ფუნქციების გენერატორი. საზოგადოდ, გადამწყვეტი ფუნქცია შეიძლება მივიღოთ სხვადასხვა მეთოდებით, რომლებიც პირობითად შეიძლება დავყოთ ორ ჯგუფად: დეტერმინირებულ და სტოქასტიკურ ალგორითმებად.

იმ შემთხვევაში, როცა ცნობილია გასარჩევ ობიექტთა შესახებ აპრიორული ინფორმაცია, მაშინ გადამწყვეტი ფუნქციის განსაზღვრა შესაძლებელია ზუსტად. წინააღმდეგ შემთხვევაში, როცა ობიექტთა მიმართ გაგვაჩნია მხოლოდ თვისებრივი ნიშნები, მაშინ გადაწყვეტილებათა მიღების არე შეიძლება მნიშვნელოვნად განსხვავდებოდეს რეალურისაგან და ამიტომ საჭიროა შეიქმნას ისეთი გარჩევის სისტემა, რომელიც თანდათანობით მიგვიყვანდა გადამწყვეტი ფუნქციის განსაზღვრის ოპტიმალურ ან მისაღებ ვარიანტამდე.

1.5 მანძილის და მსგავსების ზომის ცნებები

სახეთა გარჩევის თეორიაში მანძილის და მსგავსების ცნებებს ენიჭებათ ფუნდამენტალური მნიშვნელობა. აქედან გამომდინარე, განვიხილოთ ყველაზე უფრო გამოყენებადი მანძილის და მსგავსების ზომები.

ნებისმიერი ორი x_i და x_j რეალიზაციისათვის $d(x_i, x_j)$ ფუნქციას ეწოდება მანძილის ფუნქცია თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

ა) $d(x_i, x_j) = 0$ როცა $x_i = x_j$

ბ) $d(x_i, x_j) = d(x_j, x_i)$

გ) $d(x_i, x_j) \le d(x_i, x_k) + d(x_k, x_k)$

სადაც x_i, x_j და x_k n-განზომილებიანი სივრცის ნებისმიერი ვექტორებია.

სახის ვექტორებს შეიძლება ჰქონდეთ სხვადასხვა განზომილება, სხვადასხვა რიგის სიდიდე, სხვადასხვა პრიორიტეტები. აქედან გამომდინარე სანამ განვსაზღვრავთ ვექტორებს შორის მანძილებს, სასურველია ვექტორების ნორმირება და სტანდარტიზაცია.

როგორც ვიცით, თითოეული სახის ვექტორი $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in})'$ შედგება ცალკეული კოორდინატებისგან (პარამეტრებისგან). სტანდარტიზაციის პროცედურა საშუალებას გვაძლევს ვექტორის ყველა კოორდინატი წარმოვადგინოთ საერთო მასშტაბით. ეს განსაკუთრებით აქტუალურია იმ შემთვევაში, როცა სახის ვექტორი შედგება სხვადასხვა ფიზიკურ ერთეულებში გაზომილი მაჩვენებლებისაგან. არსებობს პარამეტრების სტანდარტიზაციის რამდენიმე მეთოდი. მაგალითად, იგი შეგვიძლია შევასრულოთ შემდეგი ფორმულით:

$$\overline{X}_{ik} = \frac{x_{ik} - m_i}{\sigma_i}, \qquad k = 1,2,...n$$

სადაც m_i i–ური კოორდინატის საშუალო მნიშვნელობაა, σ_i - საშუალო კვადრატული გადახრა. სტანდარტიზაცია შესაძლებელია შემდეგი გამოსახულებითაც:

$$\overline{X}_{ik} = \frac{x_{ik} - \min\limits_k x_{ik}}{\max\limits_k x_{ik} - \min\limits_k x_{ik}}, \qquad k = 1,2,...n$$

განვიხილოთ მანძილი n – განზომილებიან ნიშანთა სივრცეში ორ ვექტორს შორის, ვექტორსა და სიმრავლეს შორის და ბოლოს ორ სიმრავლეს შორის

1. მანძილი ორ ვექტორს შორის. n – განზომილებიან ევკლიდეს სივრცეში A და B ვექტორებს შორის განისაზღვრება ფორმულით:

$$d(A,B) = \|A - B\| = \sqrt{(A-B)^T (A-B)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)^2} \qquad (1)$$

ევკლიდეს მანძილი ყველაზე უფრო გავრცელებული მეტრიკაა სახეთა გარჩევის თეორიაში. განსაკუთრებით საინტერესოა „შეწონილი" ევკლიდეს მანძილი:

$$d(A,B)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n} w_k\left(a_k-b_k\right)^2}\ ,$$

სადაც სახის თითოეულ რეალიზაციას გააჩნია წონითი w_k კოეფიციენტი (ჩვეულებრივ $0<w_k<1$), რომელიც დიაგნოსტიკური ამოცანის გადაწყვეტის თვალსაზრისით პროპორციულია პარამეტრის მნიშვნელობის ხარისხისა. კერძოდ, რაც უფრო ინფორმატიულია პარამეტრი, მით უფრო დიდია მისი წონითი კოეფიციენტი და პირიქით,

2. მანძილი ვექტორსა და სიმრავლეს შორის. მანძილი X ვექტორსა და A ვექტორთა $\{A^i\}$ $i=1,2,..m$ სიმრავლეს შორის განისაზღვრება, როგორც საშუალო კვადრატული მანძილი X ვექტორსა და $\{A^i\}$ სიმრავლეს შორის შემდეგი გამოსახულებით:

$$d^2\left(X,A^i\right)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a_k^i)^2$$

სადაც n - ვექტორთა განზომილებაა.

3. შიგასიმრავლის მანძილი. მოცემული $\{A^i\}$ $i=1,2,..m$ ვექტორთა შიგა სიმრავლის მანძილი განისაზღვრება როგორც შიგასიმრავლის საშუალო კვადრატული მანძილი შემდეგი ფორმულით:

$$\overline{d^2\left(A^iA^j\right)}=\frac{1}{m(m-1)}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(a_k^i-a_k^j)^2$$

სადაც m-1 სიდიდე იმიტომაა აღებული, რომ როცა $i=j$, მაშინ მანძილი ნულის ტოლია. შიგასიმრავლის მანძილი შეიძლება განისაზღვროს A^i ვექტორების დისპერსიების საშუალებით შემდეგი ფორმულით:

$$d^2\left(A^i,A^j\right)=2\sum_{k=1}^{m}\sigma_k^2$$

4. სიმრავლეებს შორის მანძილი. მანძილი $\{A^i\}$და $\{B^i\}$ სიმრავლეს შორის განისაზღვრება ისევე, როგორც შიგასიმრავლის მანძილის განსაზღვრისას და მისი ზოგადი სახით წარმოდგენა არც ისე ადვილია. სიმრავლეებს შორის მანძილის გასაგებად უფრო ხშირად იყენებენ მახანალობისის მანძილის ფორმულას:

$$d\left(A^j,B^j\right)=(\overline{A}-\overline{B})^1S^{-1}(\overline{A}-\overline{B})$$

სადაც $\overline{A}$ და $\overline{B}$ სიმრავლეების საშუალო ვექტორებია, S – გაერთიანებული კოვარიაციული მატრიცაა. მახანალობისის მანძილის ფორმულას გაანია მთელი რიგი უპირატესობა, კერძოდ იგი ინვარიანტულია ნებისმიერი წრფივი გარდაქმნის მიმართ. მართლაც, განვიხილოთ $Z=AX$ წრფივი გარდაქმნა, მაშინ გვექნება

$$d^2(X_i - X_j) = (Z_i - Z_j)^1S^{-1}(Z_i - Z_j) = (AX_i - AXj)^1S^{-1}(AX_i - AX_j) = (X_i - Xj)^1S^{-1}(X_i - X_j)=$$
$$=(X_i - Xj)^1A^1(AS^{-1}A^1)A(X_i - X_j) = (X_i - Xj)^1S^{-1}(X_i - X_j) = d^2(X_i - X_j)$$

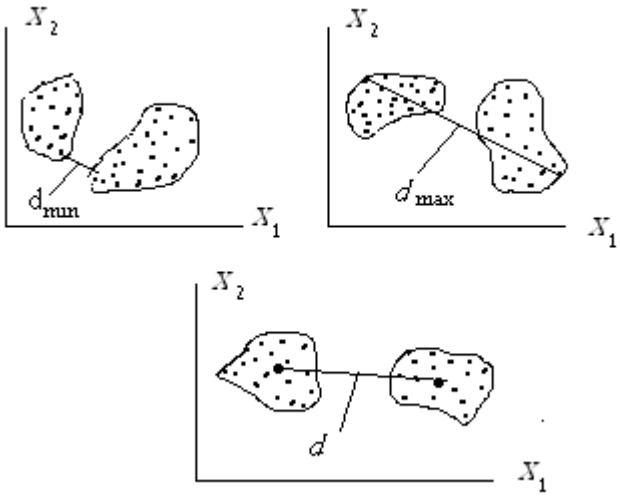
ამ თვისებიდან გამომდინარე, თუ პარამეტრები გაზომილი არიან სხვადასხვა ფიზიკურ ერთეულებში, მაშინ საჭირო არ არის მათი ნორმირება.

სახეთა გარჩევის თეორიაში ω_m და ω_e კლასებს შორის მანძილის განსაზღვრისთვის ხშირად გამოიყენება შემდეგი მანძილები:

1) მანძილი, განსაზღვრული „**უახლოესი მეზობლის**" პრინციპით:
$d_{min}(\omega_m,\omega_e) = \min d(X_i,X_j)$, როცა $X_i \in \omega_m$ და $X_j \in \omega_e$
2) მანძილი, განსაზღვრული „ **უკიდურესი მეზობლის**" პრინციპით:
$d_{max}(\omega_m,\omega_e) = \max d(X_i,X_j)$, როცა $X_i \in \omega_m$ და $X_j \in \omega_e$
3) მანძილი, განსაზღვრული კლასების „**სიმძიმის ცენტრებს**" შორის:
$d(\omega_m,\omega_e) = d(\overline{X}(m)\overline{X}(e))$,

სადაც $\overline{X}(m)$ და $\overline{X}(e)$ – კლასების სიმძიმის ცენტრები ანუ საშუალო არითმეტიკულებია.

ქვემოთ მოყვანილ ნახაზებზე ნაჩვენებია ორ კლასს შორის ზემოთ მოყვანილი მანძილის ფუნქციები



სახეთა გარჩევის თეორიაში მანძილის გარდა ფართოდ გამოიყენება **მსგავსების ზომა.** არაუარყოფით ნამდვილ ფუნქციას $\varphi(X_i,X_j)$ ეწოდება მსგავსების ზომა, თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

ა) $\varphi(X_i,X_j) = \max\varphi(X_i,X_j) = 1$, როცა $X_i = X_j$
ბ) $0 \le \varphi(X_i,X_j) < 1$, როცა $X_i \ne X_j$
გ) $\varphi(X_i,X_j) = \varphi(X_j,X_i)$

მსგავსების მატრიცას აქვს შემდეგი სახე:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 \ \varphi_{12} \ \varphi_{13} \ldots\ldots \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} \ 1 \ \varphi_{23} \ldots\ldots \varphi_{2n} \\ ---------- \\ ---------- \\ \varphi_{n1} \varphi_{n2} \varphi_{n3} \ldots\ldots 1 \end{bmatrix}$$

სადაც φ_{ij} – ელემენტებს ეწოდებათ მსგავსების კოეფიციენტები.

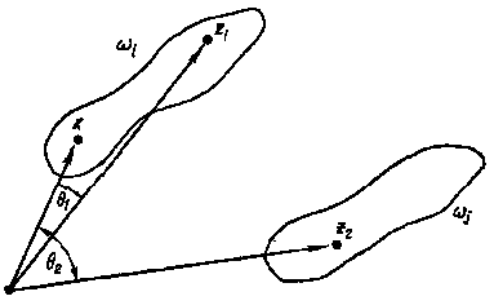
რაც უფრო ნაკლებია მანძილი ორ X_i, და X_j ვექტორებს შორის მით უფრო დიდია მსგავსება ამ ვექტორებს შორის. აქედან გამომდინარე, მსგავსებასა და მანძილს შორის არსებობს შემდეგი დამოკიდებულება:

$$\varphi_{ij} = \frac{1}{1+d_{ij}}.$$

მსგავება არ განისაზღვრება მხოლოდ მანძილით, იგი შეიძლება განისაზღვროს, მაგალითად, შემდეგი გამოსახულებით:

$$d(X_i\, X_j) = \frac{X_i^1 X_j}{\|X_i\|\|X_j\|}$$

რომელიც არითმეტიკული ფუნქციაა და გეომეტრიულად წარმოადგენს ორ ვექტორს შორის კუთხის კოსინუს, რომელიც მაქსიმუმს აღწევს იმ შემთხვევაში, როცა ვექტორების მიმართულებები ემთხვევიან ერთმანეთს. ამ მსგავსების ზომის გამოიყენება მოსახერხებელია იმ შემთხვევაში, როცა კლასებს გააჩნიათ მთავარი ღერძის მიმართ განლაგების ტენდეცია, ისე როგორც ეს ნაჩვენებია შემდეგ ნახაზზე:



$$d(X_1\, Z_1) = cosQ_1 \frac{X^1 Z_1}{\|X\|\|Z_1\|}, \qquad d(X_1\, Z_2) = cosQ_2 \frac{X^1 Z_2}{\|X\|\|Z_2\|}$$

ეს ნახაზი გვიჩვენებს, რომ Z_1 სახეს გააჩნია X სახესთან უფრო მეტი მსგავსება, ვიდრე Z_2 სახეს ($cosQ_1 > cosQ_2$). უნდა აღინიშნოს, რომ მსგავსების ამ ზომას გააჩნია გარკვეული ნაკლოვანებები, რომლებიც დაკავშირებულნი არიან ისეთ შეზღუდვებთან როგორიცაა მაგალითად, კლასების მნიშვნელოვანი დაშორება როგორც ერთმანეთთან, ასევე კოორდინატთა სათავიდან.

ზემოთ მოყვანილი მანძილისა და მსგავსების ზომის გამოყენება შესაძლებელია იმ შემთხვევაში როცა სახის რეალიზაციები ზომვადია. თვისებრივი მონაცემებისათვის სახეთა გარჩევის ამოცანის გადასაწყვეტად შეგვიძლია გამოვიყენოთ **ჰემინგის მანძილი**

$$d^2\left(A^j, B^j\right) = \sum_{k=1}^{m} \left|a_k - b_k\right|.$$

ჰემინგის მანძილი გვიჩვენებს ობიექტების არათანხვრედი ნიშნების რაოდენობას. ჰემინგის მანძილს ხშირად უწოდებენ მანჰეტენის (ქალაქის კვარტლებსშორისო) მანძილს.

თუ გამოიყენება ალბათური, ლოგიკური ან ტექსტობრივი (ლინგვისტიკური) მონაცემები, მაშინ უნდა გამოვიყენოთ არაფორმალური პროცედურები, სადაც „მანძილის” და „კავშრის ფუნქციის” ფორმალური ცნებების გამოყენება დაუშვებელია.

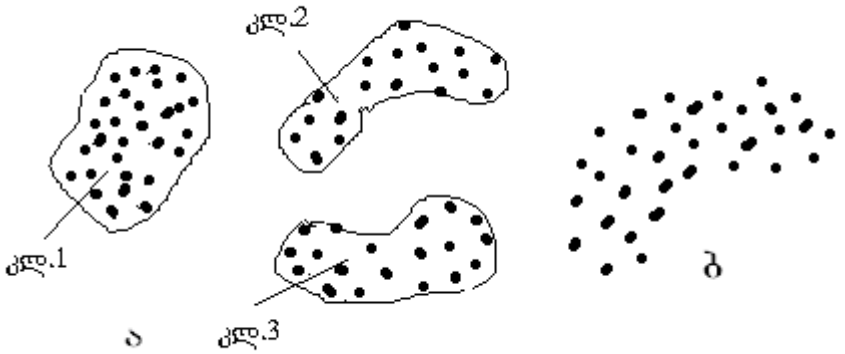
2. კლასტერიზაციის მეთოდები

2.1. კლასტერიზაციის ამოცანის ჩამოყალიბება

ობიექტთა (რეალიზაციათა) ერთობლიობის დაყოფას ერთგვაროვან (ჰომოგენურ) ჯგუფებად (კლასტერებად) ეწოდება კლასტერიზაციის ამოცანა. კლასტერიზაციის ტერმინთან ერთად ხშირად გამოიყენება მისი სინონიმები: „დაჯგუფება” და „ტაქსონომია”.

კლასტერი ეწოდება გარკვეული წესით შედგენილ რეალიზაციათა ერთობლიობას. კლასტერის სინონიმებია „ჯგუფი” ან „კლასი“. ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს კლასტერიზაციის განმარტება. კლასტერიზაცია ეწოდება კლასტერის შედგენის (აგების) პროცედურას, რომელიც ეფუძნება კომპაქტურობის ჰიპოთეზას და რომლის არსი იმაში მდგომარეობს, რომ ერთი და იგივე კლასტერის რეალიზაციები სივრცეში გარკვეული აზრით ქმნიან კომპაქტურ ერთობლიობას. კლასტერიზაციას ხშირად უწოდებენ კლასიფიკაციას მასწავლების გარეშე.

კლასტერები, მოცემული სიმრავლეებით შეიძლება თვალსაჩინოდ წარმოვადგინოთ სიბრტყეზე. ნახ.1 ა-ზე მოცემულია წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც ქმნიან სამ კლასტერს, ხოლო ნახ.1 ბ-ზე მოცემულია წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც არ ქმნიან კლასტერებს, რაც იმას ნიშნავს, რომ მათი დაყოფა გვაძლევს მხოლოდ ერთ კლასტერს – მთლიანად მოცემულ წერტილთა სიმრავლეს.



ნახ.1

უნდა შევნიშნოთ, რომ კლასტერის ცნება მნიშვნელოვნად ინტუიციურია, რაც აძნელებს ამ ცნების მკაცრი მეცნიერული განსაზღვრის ჩამოყალიბებას.

ამიტომ კლასტერების გამოვლენა წარმოადგენს „ხელოვნებას”, თანაც ემპირიულს, რადგან ალგორითმის მუშაობის ეფექტიანობა ბევრადაა დამოკიდებული როგორც ობიექტთა სიმრავლის მახასიათებლებზე, ასევე მსგავსების ზომაზე და კლასტერების იდენტიფიკაციის მეთოდზე.

ვთქვათ მოცემულია ობიექტთა (რეალიზაციათა) სიმრავლე $\{X\}$ და საჭიროა მისი დაყოფა ქვესიმრავლეებად ანუ კლასტერებად. როგორც კლასტერიზაციის განსაზღვრიდან ჩანს, ამისთვის საჭიროა არსებობდეს რაიმე მახასიათებელი ნიშნები (პარამეტრები), რომლთა მიხედვითაც შესაძლებელი იქნება მოცემული სიმრავლის ელემენტების ერთმანეთისგან გარჩევა და შემდგომ დაყოფა.

განვიხილოთ უმარტივესი შემთხვევა, როდესაც ნიშანი მხოლოდ ერთია. თუ ასეთი ნიშანი თვისებრივია, მაგალითად რაიმე საგნის ფერი, მაშინ დაყოფა გარდაიქმნება ე.წ. დიქოტომიაში, როდესაც საგანს შეიძლება ჰქონდეს ეს ფერი ან არ ჰქონდეს. ამ შემთხვევაში კლასტერთა მაქსიმალური რაოდენობა ორის ტოლია.

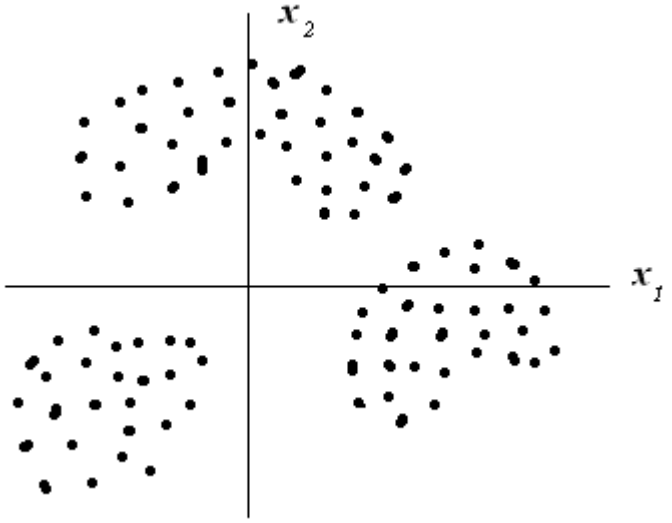
იმ შემთხვევაში, როცა ნიშანი ზომვადია, მაგალითად იღებს მნიშვნელობებს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავდან, მაშინ შესაძლოა გვქონდეს კლასტერების ნებისმიერი სასრული რაოდენობა, მაგალითად, ისე როგორც ეს წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზზე:

---***-----*****------****----

c_1 c_2 c_3

სადაც გვექნება C_1, C_2 ,და C_3 კლასტერი. თუ კლასტერი შეიცავს მხოლოდ ერთი სახის რეალიზაციებს, მაშინ ისინი კომპაქტურნი არიან, ხოლო თუ რომელიმე ჯგუფი შეიცავს ერთზე მეტი სახის რეალიზაციას, მაშინ გვაქვს არაკომპაქტური კლასტერი.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ნიშნები ზომვადია და ერთზე მეტია, მაშინ ორი ნიშნის შემთხვევაში მაგალითად, გვექნება სიბრტყეზე მოცემულ წერტილთა სიმრავლეები:



აქ სახეთა ნიშნები მოცემულია x_1 და x_2 სიმბოლოებით, რომელთა კონკრეტული მნიშვნელობები გვაძლევს სურათზე მოცემულ წერტილებს.

თუ ნიშანთა რაოდენობა სამია, მაშინ გვექნება სამგანზომილებიან სივრცეში მოცემული კლასტერები და ა.შ. საზოგადოდ, n-განზომილებიან ნიშანთა სივრცეში ნებისმიერი გეომეტრიული ფიგურა და მათ შორის კლასტერიც, შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც ჰიპერსფერო, რომელსაც გააჩნია შემდეგი მათემატიკური მახასიათებლები: ცენტრი, რადიუსი, საშუალო კვადრატული გადახრა, კლასტერის ზომა. კლასტერის ცენტრი ეს არის ნიშანთა სივრცეში რეალიზაციების საშუალო გეომეტრიული ადგილი. კლასტერის რადიუსის არჩევისას გამოითვლება მინიმალური $\min\rho\{X\}$ და მაქსიმალური $\max\rho\{X\}$ მანძილები კლასტერის რეალიზაციებს შორის. ბუნებრივია, რომ რადიუსი უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობას:

$$\min\rho\{X\} < r < \max\rho\{X\}$$

თუ არ სრულდება მარცხენა უტოლობით მოცემული პირობა, მაშინ ყველა რეალიზაცია $\{X\}$ სიმრავლეში იქნება ცალკე კლასტერი, ხოლო თუ მარჯვენა უტოლობა არ სრულდება, მაშინ $\{X\}$ სიმრავლის ყველა რეალიზაცია გაერთიანდება ერთ კლასტერში. გარდა ამისა, კლასტერის რადიუსი შეიძლება განისაზღვროს აგრეთვე, როგორც რეალიზაციების მაქსიმალური მანძილი კლასტერის ცენტრთან. კლასტერის ზომა შეიძლება განისაზღვროს ან კლასტერის რადიუსით ან საშუალო კვადრატული გადახრით.

კლასტერის, როგორც რთული ობიექტის აგება შეუძლებელია, თუ არ იქნება მისი შემადგენელ რეალიზაციებს შორის მოცემული რაიმე მიმართება ანუ კრიტერიუმი. მაშასადამე, კრიტერიუმის არჩევა კლასტერიზაციის პროცესის განხორციელებისთვის არის უპირველესი, უმთავრესი და უაღრესად რთული პრობლემა.

კლასტერიზაციისთვის შერჩეული კრიტერიუმი უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობებს:

1. კრიტერიუმი უნდა აღწერდეს განსხვავებას ერთ კლასტერში გაერთიანებულ ობიექტებსა და სხვა კლასტერში მყოფ ობიექტებს შორის.
2. უნდა იყოს კონსტრუქციული ანუ რეალიზებადი, როგორც თეორიულად ასევე პრაქტიკულად.
3. უნდა იყოს ცალსახად განსაზღვრული და შეძლებლისდაგვარად თვალსაჩინო.

კლასტერიზაციის შემდგომი ეტაპია არჩეული კრიტერიუმის შესაბამისი ალგორითმის ფორმირება, რომელიც უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ მოთხოვნებს:

ა) მაქსიმალური კონსტრუქციულობა ე.ი. პროგრამული მოდელის მაქსიმალურად მარტივად განხორციელების შესაძლებლობა.
ბ) კლასტერიზაციის შედეგები არ უნდა იყოს დამოკიდებული საწყის რეალიზაციის არჩევაზე.
გ) არ უნდა საჭიროებდეს ევრისტიკულად არჩეულ პარამეტრებს.
დ) შესაძლებელი უნდა იყოს მიღებული შედეგების მაქსიმალურად თვალსაჩინო ინტერპრეტაცია.

2.2 კლასტერიზაციის კრიტერიუმები

კლასტერიზაციის კრიტერიუმი შეიძლება ეფუძნებოდეს რაიმე ევრისტიკულ მოსაზრებას ან რაიმე მაჩვენებლის თვისების მინიმიზაციას ან მაქსიმიზაციას. ევრისტიკულ მიდგომისას გადამწყვეტ როლს თამაშობს ინტუიცია და გამოცდილება. იგი ითვალიწინებს წესების გარკვეულ რაოდენობას, რომლის საშუალებითაც ხდება სახეთა გარჩევის პროცესის რეალიზაცია.

შერჩეული პარამეტრების თვისებების მინიმიზაციის ან მაქსიმიზაციისათვის უნდა გამოვიყენოთ რაიმე კრიტერიუმი. ერთ-ერთი ყველაზე პოპულარული კრიტერიუმია ცდომილებათა კვადრატების ჯამი.

$$I_1 = \sum_{m=1}^{k} \sum_{X_i \in S_m} d^2\left(X_i, \overline{X}_m\right) \quad , \qquad (1)$$

სადაც $\overline{X}_m$ - ω_m ჯგუფის სიმძიმის ცენტრია (საშუალო ვექტორი), k - ჯგუფების ანუ კლასტერების რაოდენობა. ამ ფუნქციონალს გააჩნია უბრალო ინტერპრეტაცია, კერძოდ ω_m კლასტერისათვის $\overline{X}_m$ საშუალო ვექტორი ყველაზე კარგად წარმოადგენს რეალიზაციებს $X_i \in \omega_m$, რადგან ის ახდენს X_i ვექტორების სიგრძის კვადრატების ჯამის მინიმიზაციას. ამრიგად I_1 ზომავს კვადრატულ ცდომილებას და დამოკიდებულია იმაზე თუ როგორ არიან დაჯგუფებულები რეალიზაციები. ოპტიმალურად ითვლება კლასტერიზაციის ის შემთხვევა, როდესაც ხდება I_1 გამოსახულების მინიმიზაცია. ასეთი ტიპის კლასტერიზაციას ხშირად უწოდებენ დაყოფას მინიმალური დისპერსიით.

მოყვანილი კლასტერიზაციის კრიტერიუმი ძირითადად გამოიყენება $\{X\}$ რეალიზაციათა ერთობლიობის ორ-სამ კლასტერად დაყოფის შემთხვევაში. მისი გამოყენება შეზღუდულია, როცა კლასტერების რეალიზაციების რაოდენობები მნიშვნელოვნად განსხვავდებიან ერთმანეთისგან. ასეთ შემთხვევაში შეიძლება ისე მოხდეს, რომ დაჯგუფება, რომელიც ქმნის დიდი მოცულობის კლასტერს, გააჩნდეს უპირატესობა, ვიდრე დაჯგუფებას, რომლის მოცულობა მცირეა, მაგრამ ინარჩუნებს სახის ერთიანობას.

(1) გამოსახულებაში უბრალო ალგებრული გარდაქმნით შეიძლება გამოვრიცხოთ საშუალების ვექტორი და მივიღოთ ექვივალენტური ფუნქციონალი, რომელსაც მივყავართ თითქმის იგივე შედეგთან.

$$I_2 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{k} N_m \overline{d}_m ,$$

სადაც $\overline{d}_m$ - ω_m ჯგუფის რეალიზაციების შორის საშუალო კვადრატული მანძილია. N_m რეალიზაციათა რაოდენობა. $\overline{d}_m$ სიდიდე შეიძლება შეიცვალოს საშუალო მანძილით ან ω_m კლასტერში გაერთიანებულ რეალიზაციებს შორის მაქსიმალური მანძილით.

განსაკუთრებით საინტერესოა კლასტერიზაციის კრიტერიუმად გაფანტვის მატრიცის გამოყენება. დავუშვათ მოცემული $\{X\}$ ერთობლიობის ω_m კლასტერის გაფანტვის მატრიცაა P_m, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$P_m = \sum_{x_i \in s_m} \left[X_i - \overline{X}_m\right]\left[X_i - \overline{X}_m\right]^1 .$$

მაშინ k რაოდენობის კლასტერების შიგაგაფანტვის მატრიცა იქნება:

$$P_k = \sum_{m=1}^{k} P_m \quad ,$$

ხოლო ჯგუფთაშორისი გაფანტვის მატრიცა P_b შეგვიძლია ასე განვსაზღვროთ:

$$P_b = \sum_{m=1}^{k} N_m \left[\overline{X}_m - \overline{X}\right]\left[\overline{X}_m - \overline{X}\right]'$$

სადაც $\overline{X}$ - $\{X\}$ ერთობლიობის საშუალო ვექტორია. გაფანტვის საერთო მატრიცა ტოლია:

$$P_T = \sum_{x_i \in s_m} \left[X_i - \overline{X}\right]\left[X_i - \overline{X}\right]^1 .$$

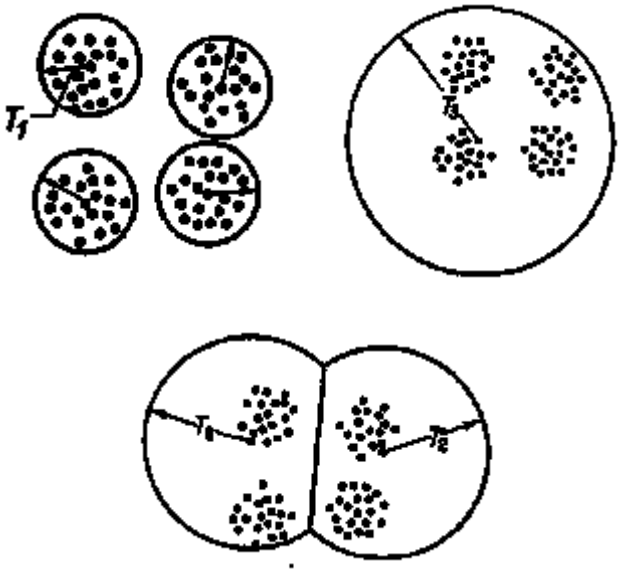
მიღებული გამოსახულების თნხმად, საერთო გაფანტვის მატრიცა შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც შიგაჯგუფური და ჯგუფთაშორისო გაფანტვის მატრიცების ჯამი ე. ი. $P_T = P_K + P_b$.

გაფანტვის მატრიცები (შიგაჯგუფური და ჯგუფთაშორისი) დამოკიდებულია კლასტერიზაციის მეთოდზე და მათ შორის არსებობს შემდეგი დამოკიდებულება: ჯგუფთაშორისო გაფანტვა იზრდება, თუ შიგაჯგუფური გაფანტვა მცირდება, ეს მეტად ხელსაყრელია დიაგნოსტიკური ამოცანის გადასაწყვეტად, რადგან შიგაჯგუფური გაფანტვის მატრიცის მინიმიზაციით, მიიღწევა ჯგუფთაშორისი (სახეთაშორისი) გაფანტვის მატრიცის მაქსიმიზაცია.

2.3. კლასტერიზაცია ზღურბლის გამოყენებით

ვთქვათ, მოცემულია N ობიექტთა ერთობლიობა $\{X\}$. დავუშვათ, რომ პირველი კლასტერის ცენტრი Z_1 ემთხვევა ნებისმიერ X_i, i=1,2,…N რეალიზაციას, მაგალითად, პირველს ე.ი. $Z_1=X_1$. ამის შემდეგ გამოითვლება ევკლიდეს მანძილი d_{21} X_2 რეალიზაციასა და Z_1 ცენტრს შორის. თუ მიღებული d_{21} მანძილის მნიშვნელობა მეტია მოცემული ზღურბლის T მნიშვნელობაზე, მაშინ ჩამოყალიბდება მეორე კლასტერი $Z_2 = X_2$ ცენტრით. წინააღმდეგ შემთხვევაში X_2 რეალიზაცია მიეკუთვნება პირველ კლასტერს. ვთქვათ, შესრულდა $d_{21}>T$ პირობა, ე.ი. Z_2 არის ახალი კლასტერის ცენტრი, მაშინ გამოითვლება მანძილები X_3 რეალიზაციასა Z_1 და Z_2 ცენტრებს შორის ე.ი. d_{31} და d_{32} სიდიდეები. თუ ეს ორი მანძილი აღმოჩნდება T სიდიდეზე მეტი, მაშინ შეიქმნება ახალი მესამე კლასტერი $Z_3=X_3$ ცენტრით. წინააღმდეგ შემთხვევაში X_3 რეალიზაცია მიეკუთვნება იმ კლასტერს, რომელთანაც მას გააჩნია მინიმალური მანძილი და ა. შ.

კლასტერიზაციის ეს ალგორითმი, პირველ რიგში, დამოკიდებულია პირველი კლასტერის ცენტრის შერჩევაზე და T ზღურბლის მნიშვნელობაზე. ეს ზეგავლენა ნაჩვენებია შემდეგ ნახაზზე, სადაც მოცემულია ერთი და იგივე ორგანზომილებიანი რეალიზაციებისათვის კლასტერების ცენტრის შერჩევის სამი ვარიანტი.



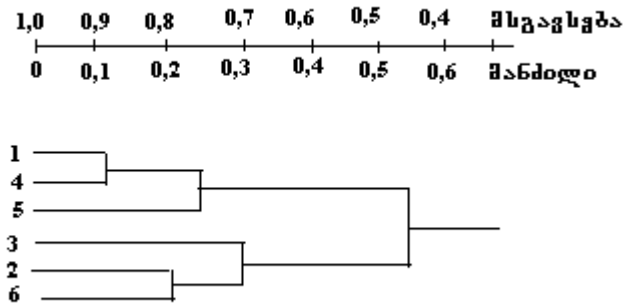
აღნიშნული ალგორითმი იძლევა საშუალებას საკმაოდ მარტივად და სწრაფად შევაფასოთ $\{X\}$ ერთობლიობის სტრუქტურა. ალგორითმი იმითაა მიმზიდველი, რომ მას სჭირდება საწყისი რეალიზაციების X_i, i=1,2,…N ერთჯერადი განხილვა. პრაქტიკულად ალგორითმის გამოყენება დაიყვანება ზღურბლის მნიშვნელობის და კლასტერის საწყისი ცენტრის მრავალჯერადად ექსპერიმენტალურად შერჩევაზე, რაც მიუთითებს მეთოდის ნაკლზე. მიუხედავად ამისა, კლასტერიზაციის ეს მარტივი მეთოდი, სადაც ხდება რეალიზაციების ერთჯერადი დამუშავების შედეგად მიღებული მიახლოვებითი შედეგების მიღება, მეტად ეფექტურია გამოთვლითი პროცედურის თვალსაზრისით.

2.4 კლასტერიზაცია იერარქიის პრინციპით

განვიხილოთ N განზომილებიანი $\{X\}$ ერთობლიობის დაყოფა k რაოდენობის ერთგვაროვან კლასტერად. დასაწყისში ჩავთვალოთ, რომ გვაქვს N კლასტერი, რომლებიც შეიცავენ მხოლოდ ერთ რეალიზაციას (ობიექტს). შემდეგ, ორი ყველაზე დაშორებული ან ყველაზე უახლესი მეზობელი ობიექტი ერთიანდებიან ერთ ჯგუფში და ამრიგად, კლასტერიზაციის რაოდენობა მცირდება ერთით, ე. ი. გვექნება (N-1). ეს პროცესი გრძელდება მანამ, სანამ ყველა N ობიექტი არ მოხვდება ერთ კლასტერში. ამრიგად, პირველ ბიჯზე გვაქვს k რაოდენობის კლასტერი, ხოლო N –ურ ბიჯზე – ერთი კლასტერი. განხილულ დაჯგუფების თანმიმდევრობას გააჩნია ის თვისება, რომ რეალიზაციები X_i და X_j ერთიანდებიან, ვთქვათ m-ურ ბიჯზე ერთ კლასტერში და რჩებიან მასში შემდგომ ბიჯებზეც. დაჯგუფების ასეთ თანმიმდევრობას ეწოდება იერარქიული.

ნებისმიერი იერარქიული კლასტერიზაციისთვის არსებობს შესაბამისი ხე, რომელსაც **დენდოგრამა** ეწოდება. განვიხილოთ ამოცანა, ვთქვათ მოცემულია ექვსი რეალიზაციის მანძილების მატრიცა

	1	2	3	4	5	6
1	0	0,55	0,55	0,10	0,25	0,55
2	0,55	0	0,50	0,55	0,55	0.20
3	0.55	0,50	0	0,55	0,55	0,30
4	0,10	0,55	0,55	0	0,25	0,55
5	0,25	0,55	0,55	0,25	0	0,55
6	0,55	0,20	0,30	0,55	0,55	0



1 და 4 ობიექტი ყველაზე უფრო მსგავსია, ამიტომ ისინი ერთიანდებიან ერთ ჯგუფში 0,9 მსგავსების ზომით. 2 და 6 ობიექტები ერთიანდებიან 0,8 მსგავსების ზომით მეორე ჯგუფში. ამ ბიჯზე ჩვენ გვაქვს ოთხი კლასტერი (1,4), 5, 3, (2,6). მე-4 და მე-5 ბიჯზე იქმნება ორი ჯგუფი (1,4,5) და (3.2,6), რომლებსაც შეესაბამება 0,75 და 0,7 მსგავსების ზომებს. საბოლოოდ ყველა ობიექტი ერთიანდება ერთ კლასტერში 0,45 მსგავსების ზომით.

განხილულ მაგალითში შეიძლება ითქვას, რომ მესამე და მეოთხე ბიჯზე გაერთიანება ბუნებრივია, ხოლო მე-5 და მე-6 ბიჯებზე ხელოვნურია მსგავსების ზომის შემცირების გამო. აქედან გამომდინარე, თუ გვაქვს N რაოდენობის ობიექტი, შესაძლებელია შეიქმნას შესაბამისი რაოდენობის დენდოგრამები.

იერარქიული კლასტერიზაცია თავისი სიმარტივის გამო ფართოდ გამოიყენება დაჯგუფების ამოცანის გადასაწყვეტად. სხვა პროცედურებთან შედარებით ისინი იძლევიან სახეთა გეომეტრიული სტრუქტურის სრულ ანალიზს, რაც გვაძლევს შედეგის თვალსაჩინო ინტერპრეტაციის საშუალებას. ასეთი პროცედურის გამოყენება შესაძლებელია მოცემულ $\{X\}$ რეალიზაციათა ერთობლიობიდან ერთგვაროვანი კლასტერების გამოსაყოფად. ამ დროს ალგორითმის შეჩერების კრიტერიუმად შეიძლება მივიღოთ წინასწარ მოცემული სახეთა რაოდენობა ან სხვა რაიმე კლასტერიზაციის კრიტერიუმი (მაგ. ცდომილებათა კვადრატების ჯამი, მსგავსების კრიტერიუმი, შიგაჯგუფური და ჯგუფთაშორისი გაფანტვის მატრიცები და სხვა).

იერარქიული კლასტერიზაციისას შეიძლება გამოვიყენოთ „უახლესი მეზობლის” და „უკიდურესი მეზობლის” ალგორითმები, რომლებიც წარმოადგენენ იერარქიული პროცედურის ორ უკიდურეს მიდგომას. ისევე როგორც სხვა მიდგომები, რომლებიც ორიენტირებულნი არიან მაქსიმუმზე და მინიმუმზე, ისინი მეტად მგრძნობიარენი არიან სხვადასხვა გადახრების მიმართ.

ამ ნაკლის გამოსწორება შეიძლება თუ გამოვიყენებთ კლასტერების „სიმძიმის ცენტრებს” შორის მანძილის ფუნქციებს.

2.4.1 უახლოესი მეზობლის მანძილის მეთოდი

ვთქვათ, საჭიროა მოცეული ობიექტებისათვის ჩავატაროთ კლასტერიზაცია. ჩავთვალოთ, რომ თითოეული ობიექტი არის დამოუკიდებელი კლასტერი. მანძილის მატრიცის მიღებისათვის უნდა განისაზღვროს კლასტერებს შორის მანძილები. ყოველ ბიჯზე მანძილის *D* მატრიცაში მოიძებნება ორ კლასტერს შორის უმცირესი მანძილი და ეს ორი კლასტერი ერთიანდებიან და ქმნიან ახალ კლასტერს. ამის შემდეგ ხდება *D* მატრიცის კორექტირება ახალი კლასტერის გათვალისწინებით, კერძოდ, ახალ კლასტერსა და დანარჩენ კლასტერებს შორის განისაზღვრება უმცირესი მანძილები და ამით ხდება *D* მატრიცის კორექტირება. ეს პროცედურა გრძელდება მანამ, სანამ ყველა კლასტერი არ აღმოჩნდება ერთ კლასტერში.

ალგორითის მუშაობა განვიხილოთ კერძო მაგალითზე. ვთქვათ, მოცეულია ოთხი ობიექტის მანძილების მატრიცა

	1	2	3	4
1	0	2.06	4.03	6.32
2	2.06	0	2.50	4.12
3	4.03	2.50	0	2.24
4	6.32	4.12	2.24	0

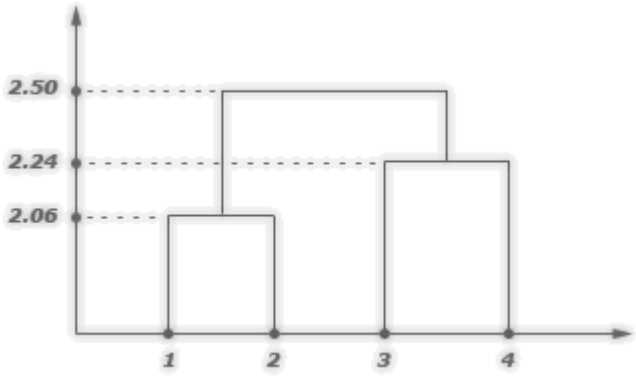
ბიჯი 1. პირველ ბიჯზე გვაქვს ოთხი (1), (2), (3), (4) კლასტერი და მათ შორის მანძილების *D* მატრიცა. *D* მატრიცაში ვეძებთ უმცირეს მანძილს. ასეთია (1) და (2) კლასტერებს შორის მანძილი, რომელიც ტოლია $d(1,2) = 2,06$. (1) და (2) კლასტერი გაერთიანდებიან ახალ (1,2) კლასტერში. ამის შემდეგ საჭიროა *D* მატრიცის კორექტირება ახალი (1,2) კლასტერის გათვალისწინებით. მაგალითვისათვის განვიხილოთ მანძილი (1,2) და (3) კლასტერებს შორის. რადგან, $d(1,3) = 4,03$, $d(2,3) = 2,50$, ამიტომ ვირჩევთ ამ ორი მანძილიდან უმცირეს და საბოლაოდ გვექნება $d((1,2),3) = 2,50$. ანალოგიურად განისაზღვრება სხვა მანძილები და მივიღებთ შემდეგ კორექტირებულ მატრიცას:

	1,2	3	4
1,2	0	2.50	4.12
3	2.50	0	2.24
4	4.12	2.24	0

ბიჯი 2. ახალ *D* მატრიციდან გამომდინარე უმცირესი მანძილი გააჩნიათ (3) და (4) კლასტერს, რომლებიც ერთიანდებიან ახალ (3,4) კლასტერში 2,24 მანძილით. მოვახდინოთ *D* მატრიცის კორექტირება, მაშინ მივიღებთ:

	1,2	3,4
1,2	0	2.50
3,4	2.50	0

ბიჯი 3. მიღებული *D* მატრიციდან (1,2) და (3,4) კლასტერები 2,50 ტოლი მანძილით გაერთიანდებიან ერთ კლასტერში. ამით ალგორითმი სრულდება, რადგან ოთხივე ობიექტი მოხვდა ერთ კლასტერში. დენდოგრამას აქვს შედეგი სახე:



2.4.2 უკიდურესი მეზობლის მანძილის მეთოდი

ამ შემთხვევაში მანძილების *D* მატრიცის ელემენტები განისაზღვრებიან როგორც მანძილები კლასტერების უკიდურეს მეზობლებს შორის. ამ გზით მიღებულ მანძილების მატრიცაში ყოველ ბიჯზე ვეძებთ იმ კლასტერებს რომელთა შორის მანძილი უმცირესია. ნაპოვნი კლასტერები ერთიანდებიან და ქმნიან ახალ კლასტერს. ეს პროცედურა გრძელდება მანამ, სანამ არ მოხდება ყველა კლასტერის გაერთიანება ერთ კლასტერში.

მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია მანძილების მატრიცა:

	1	2	3	4
1	0	2.06	4.03	6.32
2	2.06	0	4.12	2.25
3	4.03	4.12	0	3.50
4	6.32	2.25	3.50	0

ბიჯი 1. პირველ ბიჯზე ჩავთვალოთ, რომ ყველა ობიექტი წარმოადგენს დამოუკიდებელ კლასტერს. ამ ბიჯზე ერთიანდებიან (1) და (2) კლასტერები, რადგან მათ შორის მანძილი 2,06 უმცირესია სხვა მანძილებთან შედარებით. ამის შემდეგ ხდება *D* მატრიცის კორექტირება. უნდა გვახსოვდეს, რომ მანძილი კლასტერებს შორის განისაზღვრება, როგორც მანძილი უკიდურესად დაშორებულ რეალიზაციებს შორის. მაშინ მივიღებთ:

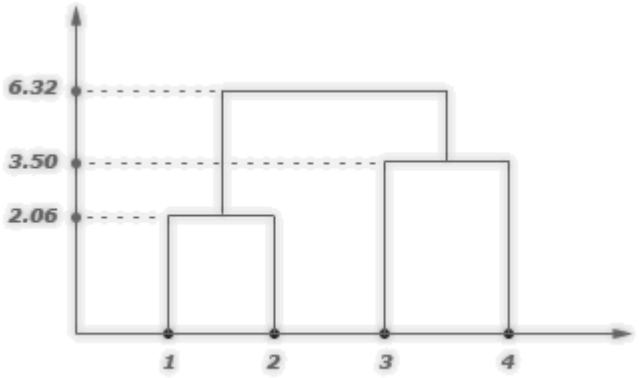
	1,2	3	4
1,2	0	4.12	6.32
3	4.12	0	3.50
4	6.32	3.50	0

მაგალითვისათვის განვიხილოთ მანძილი (1,2) და (3) კლასტერებს შორის. რადგან, $d(1,3) = 4,03$, $d(2,3) = 4,12$, ამიტომ ვირჩევთ ამ ორი მანძილიდან უდიდეს და საბოლაოდ გვექნება $d((1,2),3) = 4,12$.

ბიჯი 2. ამ ბიჯზე ვაქვს სამი კლასტერი (1,2), (3), (4). როგორც *D* მატრიციდან ჩანს, (3) და (4) კლასტერები ერთიანდებიან, რადან მათ შორის მანძილი 3,50 მინიმალურია. *D* მატრიცის კორექტირების შემდე ვღებულობთ:

	1,2	3,4
1,2	0	6.32
3,4	6.32	0

ბიჯი 3. ამ ეტაპზე ვაქვს ორი (1,2) და (3,4) კლასტერი, რომლებიც 6,32 მანძილით ერთიანდებიან ერთ კლასტერში. ალგორითმი ასრულებს თავის მუშაობას. დენდოგრამას აქვს შედეგი სახე:



2.4.3 არაშეწონილი წყვილ-წყვილი საშუალოების მეთოდი

იერარქიული კლასტერიზაციის ერთ – ერთ მეთოდს წარმოადენს არაშეწონილი წყვილ-წყვილი საშუალოების მეთოდი (*Unweited Pair-roup Metod Usin Aritmetic Averaes*). განვიხილოთ ეს მეთოდი.

ვთქვათ, საჭიროა მოცემული ობიექტების კლასტერიზაცია. ჩავთვალოთ, რომ თითოეული ობიექტი არის დამოუკიდებელი კლასტერი. ჯერ უნდა

განისაზღვროს კლასტერებშორისო მანძილები, რომლებიც ქმნიან მანძილების *D* მატრიცას. *D* მატრიცაში ვეძებთ უმცირეს მანძილს. ვთქვათ, ასეთ მანძილს ქმნიან *u* და *v* კლასტერები, რომლებიც ერთიანდებიან და ქმნიან ახალ *k* კლასტერს. ამრიად *D* მატრიცაში *u* და *v* კლასტერების სვეტები და სტრიქონები ამოვარდებიან და მათ მაგივრად დაემატება ახალი *k* კლასტერისათვის ერთი სტრიქონი და ერთი სვეტი, რაც იწვევს მანძილების *D* მატრიცის შემცირდებას ერთი სვეტით და ერთი სტრიქონით. ეს პროცედურა გრძელდება მანამ, სანამ ყველა კლასტერი არ გაერთიანდებიან ერთ საერთო კლასტერში.

დაუშვათ, *u, v* და *k* კლასტერები შეიცავენ შესაბამისად N_u, N_v და N_k რაოდენობის ობიექტებს. რადან *k* კლასტერი შეიქმნა *u* და *v* კლასტერების გაერთიანებით, ამიტომ $N_k = N_U + N_v$. მანძილი გაერთიანებულ *k* კლასტერსა და მაგალითად, *w* კლასტერს შორის განისაზღვრება ფორმულით:

$$d[(u,v),w] = \frac{N_u d(u,w) + N_v d(v,w)}{T_u + T_v} \qquad (1)$$

მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია მანძილების მატრიცა:

	1	2	3	4	5
1	0	2.06	4.03	6.32	2.08
2	2.06	0	3.50	4.12	5.43
3	4.03	3.50	0	2.25	3.65
4	6.32	4.12	2.25	0	4.81
5	2.08	5.43	3.65	4.81	0

ბიჯი 1. ყოველი ობიექტი ითვლება კლასტერად (1), (2), (3), (4), (5). ამ ბიჯზე ხდება იმ ორი კლასტერის გაერთიანება, რომელთაც გააჩნიათ სხვა მანძილებთან შედარებით უმცირესი მანძილი. როგორც *D* მატრიციდან ჩანს *u* = (1) და *v* = (2) კლასერები 2,06 მანძილით ერთიანდებიან ახალ (1,2) კლასტერში. ამის შემდეგ საჭიროა *D* მატრიცის ელემენტების კორექტირება (1,2) კლასტერის გათვალისწინებით.

მაგალითვისათვის მოვიყვანოთ *k* = (1,2) და *w* = (3) კლასტერებს შორის მანძილის გამოთვლა. მონაცემებს ვიღებთ საწყის *D* მატრიციდან. მაშინ გვექნება *k* = (1,3), *w* = (3), *u* = (1), *v* = (2) , *d*(1,3) = 4,03, *d*(2,3) = 3,50. თუ ამ მონაცემებს ჩავსვამთ (1) ფორმულაში მივიღებთ:

$$d[(1,2),(3)] = \frac{1 \cdot 4{,}03 + 1 \cdot 3{,}50}{1+1} = 3{,}765 .$$

ანალოგიურად განისაზღვრება სხვა მანძილები და მივიღებთ შემდეგ კორექტირებულ მატრიცას:

	1,2	3	4	5
1,2	0	3.765	5.22	3.755
3	3.765	0	2.25	3.65
4	5.22	2.25	0	4.81
5	3.755	3.65	4.81	0

ბიჯი 2. მიღებული მატრიცის თანახმად (3) და (4) კლასტერები ერთიანდებიან 2,25 მანძილით და ვღებულობთ ახალ (3,4) კლასტერს. ამის შემდე კვლავ უნდა მოვახდინოთ *D* მატრიცის კორექტირება (3,4) კლასტერის გათვალისწინებით.

მაგალითვისათვის განვსაზღვროთ მანძილი *k* = (3,4) და *w* = (1,2) კლასტერებს შორის. კლასტერი *k* შეიქმნა *u* = (3) და *v* = (4) კლასტერების გაერთიანებით. *d*(*u*,*w*) და *d*(*v*,*w*) მანძილებს ვიღებთ წინა ბიჯის მატრიციდან, კერძოდ $d[(3),(1,2)] = 3{,}765$, $d[(4),(1,2)] = 5{,}22$. მიღებულ მნიშვნელობებს თუ ჩავსვამთ (1) ფორმულაში მივიღებთ:

$$d[(3,4),(1,2)] = \frac{1\cdot 3{,}765 + 1\cdot 5{,}22}{1+1} = 4{,}4925.$$

ანალოგიურად განისაზღვრება სხვა მანძილები და მივიღებთ:

	1,2	3,4	5
1,2	0	4.4925	3.755
3,4	4.4925	0	4.23
5	3.755	4.23	0

ბიჯი 3. ამ ბიჯზე 3,755 მანძილით ერთიანდებიან (1,2) და (5) კლასტერები და ქმნიან *k* = (1,2,5) კლასტერს. საჭიროაა *D* მატრიცის კორექტირება.

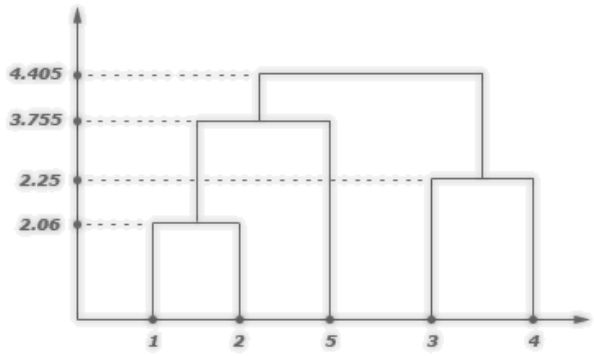
მაგალითისათვის განვიხილოთ *k* = (1,2,5) და *w* = (3,4) კლასტერებს შორის მანძილი. *k* კლასტერი შეიქმნა *u* = (1,2) და *v* = (5) კლასტერების გაერთიანებით. *d*(*u*,*w*) და *d*(*v*,*w*) მანძილებს ვიღებთ წინა ბიჯის მატრიციდან, კერძოდ $d(u,w) = d[(1,2),(3,4)] = 4{,}4925$, $d(v,w) = d[(5),(3,4)] = 4{,}23$. მიღებულ მნიშვნელობებს თუ ჩავსვამთ (1) ფორმულაში მივიღებთ:

$$d[(1,2,5),(3,4)] = \frac{2\cdot 4{,}4925 + 2\cdot 4{,}23}{2+2} = 4{,}405 \quad .$$

ე.ი. მივიღებთ:

	1,2,5	3,4
1,2,5	0	4.405
3,4	4.405	0

ბიჯი 4. ამ ბოლო ბიჯზე 4,405 მანძილით ერთიანდებიან (1,2,5) და (3,4) კლასტერები. ამით ალგორითმი დასრულებულია. დენდოგრამას აქვს შედეგი სახე:



2.5 *K* შიგაჯგუფური საშუალოს მეთოდი

განვიხილოთ კლასტერიზაციის ერთ-ერთი პოპულარული მეთოდი, რომელიც ეფუძვნება კლასტერში შემავალი ყველა რეალიზაციის თავისივე ცენტრთან მანძილების კვადრატების ჯამის მინიმიზაციას. ეს არის კლასტერების ცენტრების განსაზღვრის ბიჯური ალგორითმი, რომელსაც *K* შიგაჯგუფური საშუალოს მეთოდი ეწოდება და რომელიც შედგება შემდეგი ბიჯებისგან:

1. შეირჩევა *K* რაოდენობის რეალიზაციები, რომლებსაც ვღებულობთ კლასტერების საწყის ცენტრებად, ე.ი $C_1^{(1)} = X_1$, $C_2^{(1)} = X_2$...., $C_k^{(1)} = X_k$

2. იტერაციის შემდეგ, *m* – ურ ბიჯზე მოცემული {*X*} ერთობლიობაში შემავალი რეალიზაციები X_i, $i = 1,2,....N$ *K* კლასებს შორის გადანაწილდებიან უახლოესი მეზობლის მანძილის გამოყენებით შემდეგი წესით:

$$X_i \in \omega_j^m \text{ როცა } d\left(X_i, C_j^{(m)}\right) < d\left(X_i, C_j^{(m)}\right),$$

$i=1,2,...k$, ყველა $i=1,2,....N$, გარდა $i = j$. .$\omega_j^{(m)}$ – რეილიზაციათა ერთობლიობაა, რომელებიც შედიან $C_j^{(m)}$ ცენტრის მქონე კლასტერში. ტოლობის შემთხვევაში გადაწყვეტილება მიიღება ნებისმიერად.

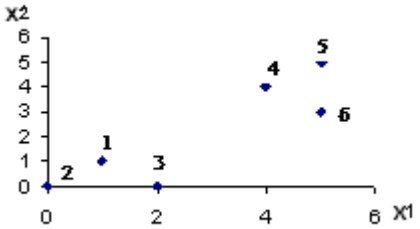
3. მე – 2 ბიჯის შედეგების შედეგად განისაზრვრება კლასტერების ახალი ცენტრები $C_1^{(m+1)}$, $C_2^{(m+2)}$, ...$C_k^{(m+1)}$

$$C_i^{(m+1)} = \frac{1}{N_j} \sum_{X_i \in S_j^{m+1}} X_i$$

სადაც N_j - $\omega_j^{(m+1)}$ კლასტერში შემავალი რეალიზაციების რაოდენობაა.

4. მოწმდება ახალი და წინა ბიჯზე მიღებული ცენტრების ტოლობის პირობა $C_i^{(m+1)} = C_i^{(m)}$, $i=1,2,....K$. თუ ეს პირობა სრულდება, მაშინ კლასტერიზაციის პროცედურა მთავრდება. წინააღმდეგ შემთხვევაში გადავდივართ მე - 2 ბიჯზე.

მაგალითისათვის განვიხილოთ ორგანზომილებიანი რეალიზაციები X_1 = (1,1), X_2 = (0,0), X_3 = (2,0) X_4 = (4,4), X_5=(5,5), X_6=(5,3), რომლებიც წარმოდგენილნი არიან შემდეგ ნახაზზე:



1. საწყის ცენტრებად ავიღოთ $C_1^{(1)} = X_1$ და $C_2^{(1)} = X_2$

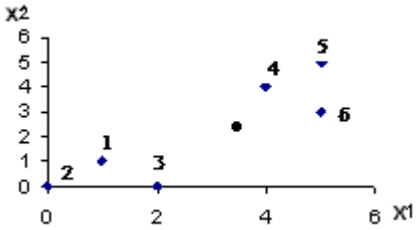
2. უახლოესი მეზობლის მანძილით $\{X_1, X_2, \ldots\ldots X_6\}$ ერთობლიობა გადავანაწილოთ $C_1^{(1)}$ და $C_2^{(1)}$ ცენტრების მიმართ, მაშინ მივიღებთ:

$$\omega_1^{(1)} = \{ X_1, X_3, X_4, X_5, X_6 \}, \qquad \omega_2^{(1)} = \{X_2\}$$

3. განვსაზღვროთ მიღებული $\omega_1^{(1)}$ და $\omega_2^{(1)}$ კლასტერების ცენტრები:

$$C_1^{(2)} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} X_{11} + X_{31} + X_{41} + X_{51} + X_{61} \\ X_{12} + X_{32} + X_{42} + X_{52} + X_{62} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1+2+4+5+5 \\ 1+0+4+5+3 \end{pmatrix} = \frac{3{,}4}{2{,}6}$$

$$C_2^2 = X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



4. შევამოწმოთ ცენტრების ტოლობის პირობა: $C_1^{(1)} \neq C_1^{(1)}$, $C_2^{(2)} = C_2^{(1)}$. რადგან პირველი კლასტერის ცენტრები არ ემთხვევიან ერთმანეთს, ამიტომ ვაგრძელებთ კლასტერიზაციის პროცედურას.

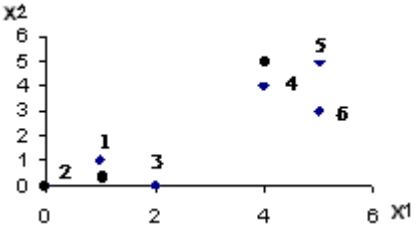
5. მოცემული $\{X_1, X_2, \ldots\ldots X_6\}$ ერთობლიობა გადავანაწილოთ ახალი $C_1^{(2)}$ და $C_2^{(2)}$ ცენტრების მიმართ, მივიღებთ:

$$\omega_1^{(2)} = \{X_4, X_5, X_6\}, \qquad \omega_2^{(2)} = \{X_1, X_2, X_3,\}$$

6. განვსაზღვროთ მიღებული $\omega_1^{(2)}$, $\omega_2^{(2)}$ კლასტების ცენტრები:

$$C_1^{(3)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} X_{41} + X_{51} + X_{61} \\ X_{42} + X_{52} + X_{62} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4+5+5 \\ 4+5+3 \end{pmatrix} = \frac{4{,}7}{4}$$

$$C_2^{(3)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} X_{11} + X_{21} + X_{31} \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+0+2 \\ 1+0+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{0{,}3}$$



7. შევამოწმოთ ცენტრების ტოლობის პირობა: $C_1^{(3)} \neq C_1^{(2)}$ და $C_2^{(3)} \neq C_2^{(1)}$ ვაგრძელებთ ალგორითმის შესრულებას.

8. უახლოესი მეზობლის პრინციპით $\{X_1, X_2, \ldots\ldots X_6\}$ ერთობლიობა დავაჯგუფოთ $C_1^{(3)}$ და $C_2^{(3)}$ ცენტრების მიმართ, ვღებულობთ:

$$\omega_1^{(3)} = \{ X_4, X_5, X_6 \}, \qquad \omega_2^{(3)} = \{ X_1, X_2, X_3 \}$$

9. კვლავ განვსაზრვროთ კლასტერების ცენტრები $C_1^{(4)}$ $C_2^{(4)}$, რომლებიც დაემთხვნენ წინა ბიჯზე განსაზღვრულ ცენტრებს: $C_1^{(4)} = C_1^{(3)}$ და $C_2^{(4)} = C_2^{(3)}$. ამით ალგორითმი დასრულდა და საბოლაოდ მივიღეთ ორი კლასტერი:

$$\omega_1 = \{X_4, X_5, X_6\}, \qquad \omega_2 = \{ X_1, X_2, X_3, \}$$

K შიგაჯგუფური მეთოდის მუშაობის ხარისხი ბევრად არის დამოკიდებული საწყისი ცენტრების შერჩევაზე, რეალიზაციების თანმიმდევრულ განლაგებაზე და რასაკვირველია თვით რეალიზაციების გეომეტრიულ თავისებურებებზე. კერძოდ, ეს მეთოდი კარგად მუშაობს, როცა კლასტერები გეომეტრიულად ერთმანეთისაგან დაშორებულნი არიან ანუ *N* განზომილებიან სივრცეში არ გადაკვეთავენ ერთმანეთს.

თუ აპრიორულად ცნობილი არ არის კლასტერების რაოდენობა, მაშინ ამ მეთოდის გამოყენება მოითხოვს ექსპერიმენტების ჩატარებას კლასტერების რაოდენობის დასადგენად. გარდა ამისა, მისი გამოყენება დიდი მოცულობის მონაცემების მიმართ ნაკლებად ეფექტურია, რადგან ალგორითმი მუშაობს ნელა.

ალგორითმი ძალზე მგძნობიარეა ამოვარდნების (არტეფაქტების) მიმართ, რომლებიც ამახინჯებენ საშუალო მნიშვნელობებს. ამ პრობლემის თავიდან ასაცილებლად შეიძლება გამოყენებული იყოს *K* – შიგაჯგუფური საშუალოს მოდიფიცირებული მეთოდი – *K* – შიგაჯგუფური მედიანის მეთოდი, რომელიც ნაკლებად მგძნობიარეა ამოვარდნების მიმართ, რადგან მედიანის სიდიდეზე არ მოქმედებენს ამოვარდნები.

2.6. ალგორითმი ISODATA

K – შიგაჯგუფური საშუალოს მეთოდი დაედო საფუძვლად კლასტერიზაციის ერთ-ერთ უძლიერეს მეთოდს *ISODATA* (*Interative Self – Organizing Data Analysis Techniques* – ანალიზის იტერაციული თვითორგანიზებადი მეთოდი). *K* – შიგაჯგუფური საშუალოს მეთოდისაგან განსხვავებით ალგორითმი *ISODATA* შეიცავს მრავალ ევრისტიკულ პროცედურას.

პირველ ბიჯზე ხდება რამდენიმე საწყისი პარამეტრის წინასწარი განსაზღვრა. ესენია:

ა) კლასტერების საჭირო რაოდენობა q_1;

ბ) კლასტერში გაერთიანებული რეალიზაციათა ზღურბლური რაოდენობა q_2;

გ) კლასტერის საშუალო კვადრატული გადახრის მნიშვნელობა q_3;

დ) ქვეკლასტერების ცენტრების ის მაქსიმალური რაოდენობა, რომელთა გაერთიანება დასაშვებია q_4;

ე) კლასტერის კომპაქტურობის დამახასიათებელი პარამეტრი q_5;

ვ) იტერაციულ ალგორითმში დასაშვები ციკლების რაოდენობა q_6 .

ISODATA ალგორითმში არსებობს სულ 14 ბიჯი, სადაც ზემოთ ჩამოთვლილი პარამეტრების მიხედვით ხდება კლასტერების დაყოფა ან გაერთიანება ისე, რომ მიღებული კლასტერების რაოდენობა q_1 სიდიდის ტოლი იყოს. ამასთან არ უნდა მოხდეს იმაზე მეტი კლასტერის გაერთიანება, სადაც დასაშვებ q_2 სიდიდეს აღემატებოდეს. იტერაციის რაოდენობა არ უნდა აღემატოს q_6 სიდიდეს. კლასტერიზაციის პროცესის შედეგების შეფასება ხდება q_5 პარამეტრის მიხედვით და ა. შ.

ISODATA ალგორითმი რთულია და არათვალსაჩინო. ამის გარდა, მისი პროგრამული რეალიზირება მოითხოვს მაღალი დონის პროგრამირების პროცედურებს. საწყისი პარამეტრების განსაზღვრა მოითხოვს დასაჯგუფებელ მონაცემებზე წინასწარი ექსპერიმენტების ჩატარებას და კლასტერიზაციის პროცესში კი ხდება მათი კორექტირება.

2.7 ალგორითმი FOREL

ალგორითმი *FOREL* (*Formal Efement*)– ში ისევე, როგორც *K* – შიგაჯგუფური საშუალოს ალგორითმში, გამოითვლება კლასტერების სიმძიმის ცენტრები. მაგრამ *K* – საშუალოს მეთოდთან შედარებით აქ კლასტერად განიხილება არა ცენტრთან არსებული უახლოესი მეზობლის პრინციპით შერჩეული რეალიზაციები, არამედ ყველა ის რეალიზაცია რომლებიც იმყოფებიან *R* რადიუსის მქონე სფეროში. ალგორითმი შედგება შემდეგი ბიჯებისაგან. წინასწარ შეირჩევა სფეროს რადიუსი *R*.

1. აიგება *R* რადიუსის სფერო, რომლის $C^{(1)}$ ცენტრად შეირჩევა ნებისმიერი რეალიზაცია მაგალითად X_1 ისე, რომ სფეროს შიგნით მოხვდეს თენდაც ერთი რეალიზაცია. განისაზღვრება სფეროს ცენტრი. ეს ცენტრია $C^{(1)} = X_1$.

2. განისაზღვრებიან ის რეალიზაციები $X_i^{(1)}$, i=1,2..., რომლებიც აკმაყოფილებენ $\left|X_i^{(1)} - C_i^{(1)}\right| < R$ პირობას, ანუ ეს რეალიზაციები მოხვდებიან სფეროში.

3. განისაზღვრება შერჩეული (სფეროში მოხვედრილი) $X_i^{(1)}$ რეალიზაციების სიმძიმის ცენტრი $C^{(2)}$

$$C^{(2)} = \frac{1}{k}\sum_{i-1}^{k} X_i \ ,$$

სადაც k - სფეროში მოხვედრილი რეალიზაციების რაოდენობა.

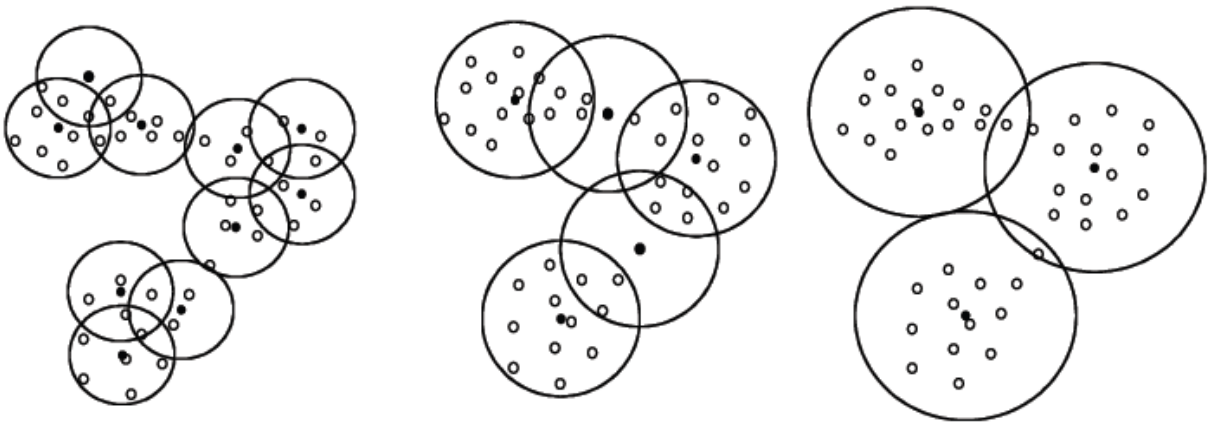
4. აიგება *R* რადიუსის სფერო $C^{(2)}$ ცენტრით და განისაზღვრებიან ის რეალიზაციები $X_i^{(2)}$, i = 1,2.... რომლებიც აკმაყოფილებენ $\left|X_i^{(2)} - C_i^{(2)}\right| < R$ უტოლობას.

5. განისაზღვრება $X_i^{(2)}$ რეალიზაციების სიმძიმის ცენტრი $C^{(3)}$ და ა.შ. ცენტრების შექმნის პროცესი სრულდება მაშინ, როცა შესრულდება შემდეგი უტოლობა: $\left|C^{(k+1)} - C^{(k)}\right| < \Delta$, სადაც Δ წინასწარ მოცემული სიდიდეა. სფერო $C^{(k+1)}$ ცენტრით წარმოადგენს ω_1 კლასტერს.

6. ის რეალიზაციები, რომლებიც მოხვდნენ ω_1 კლასტერში ამონარჩევიდან გამოირიცხებიან და დარჩენილ რეალიზაციებისათვის ტარდება ზემოთ მოყვანილი პროცედურა, დაწყებული პირველი ბიჯიდან.

7. ალგორითმის დამთავრების შემდეგ ვღებულობთ ω_1, ω_2…… თანმიმდევრობას, რომლებიც წარმოადგენენ R რადიუსის მქონე კლასტერებს.

ალგორითმის მუშაობა 3 სხვადასხვა R რადიუსის სფეროსთვის ნაჩვენებია შემდეგ ნახაზზე:



აქ თეთრი წრეებით აღნიშნულია რეალიზაციები, ხოლო შავი წრეებით – სფეროს ცენტრები

2.8 კლასტერიზაცია კორელაციური კავშირის საშუალებით

2.8.1 კორელაციის კოეფიციენტი და სიახლოვის ზომა

კლასტერიზაციის ამოცანის გადასაწყვეტად ხშირად გამოიყენება კორელაციური ანალიზი. როგორც ვიცით, პარამეტრები შეიძლება ერთმანეთის მიმართ იყვნენ ან არ იყვნენ კორელაციურ დამოკიდებულებაში, რომლის მაჩვენებელს წარმოადგენს კორელაციის კოეფიციენტი r. ორ X და Y ცვლადს შორის კორელაციური (სტატისტიკური) კავშირი შეიძლება იყოს ძლიერი ან სუსტი. რაც უფრო ძლიერია კავშირი, მით უფრო დიდია კორელაციის კოეფიციენტი და როცა $r_{xy} = \pm 1$, მაშინ კავშირი გადადის ფუნქციონალურში.

სახეთა გარჩევის თეორიაში მსგავსების ზომად, მანძილის ფუნქციის გარდა, ფართოდ გამოიყენება ორ ვექტორს შორის კუთხის კოსინუსი. თუ მოცემულია ორი X და Y ვექტორი კომპონენტებით $x_1, x_2, ..., x_n$ და $y_1, y_2, ..., y_n$, მაშინ ამ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსი ტოლია:

$$\cos(X,Y)=\cos\theta=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}}.$$

თუ გავიხსენებთ პირსონის კორელაციის კოეფიციენტის გამოსათვლელ ფორმულას და თუ ჩავთვლით, რომ მონაცემები ცენტრირებულია, მაშინ მივიღებთ:

$$r_{xy}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_i\hat{y}_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}}\text{, სადაც}\quad \hat{x}_i=x_i-\bar{x},\ \ \hat{y}_i=y_i-\bar{y}$$

ე.ი $\cos\theta=r_{xy}$ რაც იმას ნიშნავს, რომ კორელაციის კოეფიციენტი განსაზღვრავს ვექტორებს შორის კავშირის ზომას. როცა ვექტორები ერთმანეთს ემთხვევა, ე.ი კუთხე მათ შორის ნულის ტოლია და $\cos\theta=1$ (შესაბამისად r_{xy}=1), მაშინ ცვლადებს შორის ფუნქციონალური კავშირი შეიმჩნევა. კუთხის ზრდასთან ერთად ეს კავშირი მცირდება და როცა $\theta=\frac{\pi}{2}$, მაშინ $\cos\theta=0$ (შესაბამისად r_{xy}=0) და კავშირი ორ ცვლადს შორის არ არსებობს. კუთხის შემდგომი ზრდა იწვევს კავშირის ზრდასაც და როცა იგი მიაღწევს π სიდიდეს, მაშინ ვექტორებს შორის კავშირი ძლიერია, თუმცა იგი უარყოფითია ($r_{xy}=-1$) .

ამრიგად, კლასტერიზაციის ამოცანის გადასაწყვეტად გარდა მანძილის და მსგავსების ზომისა შესაძლებელია კორელაციის კოეფიციენტის გამოყენება, როგორც ორ რეალიზაციას შორის სიახლოვის ზომა. უნდა გვახსოვდეს, რომ კორელაციის კოეფიციენტების პირდაპირი გამოყენება მიზანშეუწონელია, რადგან დადებითი და უარყოფითი კორელაციის კოეფიციენტები ადგენენ სხვადასხვა კლასტერებს. ეს რომ თავიდან ავიცილოთ ამისათვის საჭიროა ავიღოთ კორელაციის კოეფიციენტის მოდული.

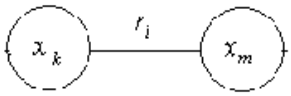
2.8.2 კორელაციური პლეადის მეთოდი

კორელაციული პლეადის მეთოდით მარტივად შეგვიძლია გადავწყვიტოთ კლასტერიზაციის ამოცანა. მეთოდის არსი შემდეგში მდგომარეობს. მოცემული R კორელაციური მატრიცის საშუალებით ადგენენ რეალიზაციათა ურთიერთობის გრაფს, რომელიც შემდგომში გარკვეული კრიტერიუმის გამოყენებით ყოფენ ერთგვაროვან ქვეგრაფებდ ანუ „პლეადებად”.

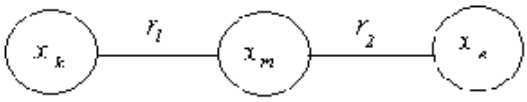
განვიხილოთ $\{X\}$ ერთობლიობის X_i, i=1,2,.....N რეალიზაციათა კორელაციური მატრიცა R, რომლის ელემენტებია პირსონის კორელაციის კოეფიციენტები. დავხაზოთ N რაოდენობის რგოლები, რომლებშიც ჩავწეროთ რეალიზაციის ნომერი. შევაერთოთ თითოეული რგოლი სხვებთან და შეერთების ხაზებზე დავწეროთ შესაბამისი კოლერაციის კოეფიციენტის მნიშვნელობები. ყველა შეერთების შემდეგ მივიღებთ საწყის გრაფს. გარკვეული მოსაზრებიდან გამომდინარე, შემოვიღოთ კორელაციის კოეფიციენტის ზღურბლური

მნიშვნელობა $r_0^{(1)}$ და ის შეერთების ხაზები გამოვრიცხოთ, რომლის მნიშვნელობები ნაკლებია $r_0^{(1)}$ მნიშვნელობაზე. შემდეგ გავზარდოთ ზღურბლის მნიშვნელობა $r_0^{(2)}$-მდე და საწყისი გრაფიდან გამოვრიცხოთ ის შეერთების ხაზები, რომელთა კორელაციის კოეფიციენტების მნიშვნელობები ნაკლებია $r_0^{(2)}$. ეს პროცედურა გავაგრძელოთ სასრული მნიშვნელობის ზღურბლამდე. შედეგად მივიღებთ ქვეგრაფებს, რომლებიც იზოლირებულნი არიან ერთმანეთის მიმართ ე.ი მოვახდინეთ კლასტერების გამოყოფა. აღწერილი პროცედურა მოუხერხებელია, რადგან საჭირო ხდება დიდი რაოდენობის $N(N-1)$ კავშირების დათვალიერება.

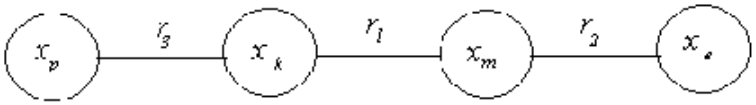
უფრო მარტივი და ეფექტური პროცედურაა შემდეგი. კორელაციურ მატრიცაში იძებნება აბსოლუტურად ყველაზე დიდი მნიშვნელობის კორელაციის კოეფიციენტი (დიაგონალური მნიშვნელობები არ ითვლებიან) დაუშვათ ეს არის $r(X_k,X_m)= r_1$, რომელიც მიღებულია X_k და X_m რეალიზაციებისაგან. იხაზება ორი წრე, რომლებშიც იწერება X_k და X_m სიმბოლოები და მათ შემაერთებელ სწორ ხაზზე იწერება r_1 კორელაციის კოეფიციენტის მნიშვნელობა.



შემდეგ ბიჯზე მოიძებნება X_k და X_m-ის დანარჩენ პარამეტრებთან (რეალიზაციებთან) უდიდესი კორელაციის კოეფიციენტები და ამ ორიდან ამოირჩევა უდიდესი, ვთქვათ ესაა $r(X_m,X_e)= r_2$, მაშინ ეს უკანასკნელი დაემატება გრაფს და ვღებულობთ:



მესამე ბიჯზე იძებნება X_k და X_e პარამეტრებთან დარჩენილი პარამეტრების უდიდესი კოლერაციის კოეფიციენტები და ამ ორიდან აიღება უდიდესი მნიშვნელობა. ვთქვათ ესაა $r(X_k,X_p)= r_3$, მაშინ მივიღებთ:



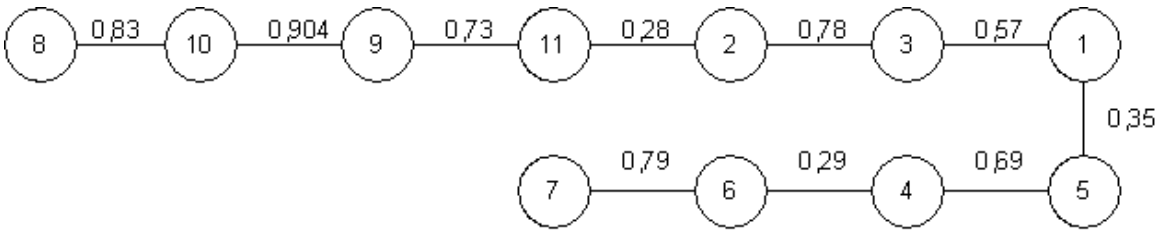
და ა. შ. სანამ ყველა ცვლადები არ მოხვდებიან თანმიმდევრულ გრაფში. თუ შემოვიღებთ ზღურბლის მნიშვნელობას r_0 და იმ შეერთების ხაზებს გამოვრიცხავთ რომლის მნიშვნელობები ნაკლებია ზღურბლის მნიშვნელობაზე, მაშინ მიღებული გრაფი დაიყოფა ქვეგრაფებად ანუ მივიღებთ ერთგვაროვან ჯგუფებს.

საზოგადოდ, ზღურბლის მნიშვნელობა ($0 < r_0 < 1$) შეგვიძლია შევარჩიოთ რაიმე კონკრეტული მოსაზრებიდან გამომდინარე ან უმჯობესია იგი დავადგინოთ H_o: $r(X_i,X_j)=0$ ნულოვანი ჰიპოთეზის შემოწმების საშუალებით. კერძოდ, უნდა მოვძებნოთ კორელაციის კოეფიციენტის ის მნიშვნელობა, რომლის დროსაც მიიღება ნულოვანი ჰიპოთეზა და ეს მნიშვნელობა ავიღოთ r_0 ტოლად.

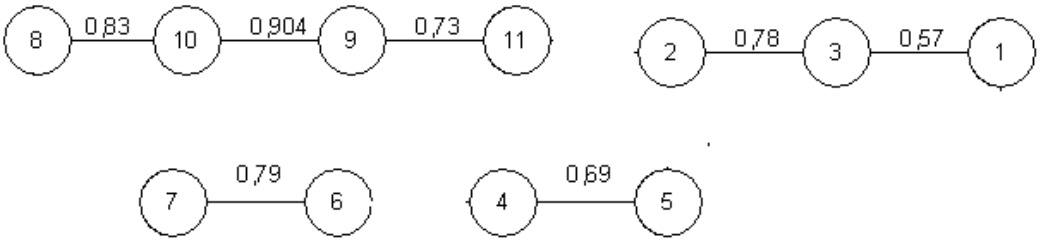
განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ მოცემულია შემდეგი კორელაციური მატრიცა:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,56 & 0,57 & 0.15 & 0,35 & 0,25 & 0,26 & 0,02 & -0,21 & -0.09 & -0,08 \\ & 1 & 0,78 & 0,06 & 0,20 & 0,22 & 0,01 & -0,02 & -0,002 & 0,61 & 0,28 \\ & & 1 & 0,29 & 0,48 & 0,28 & 0,07 & 0,14 & 0,11 & 0,23 & 0,15 \\ & & & 1 & 0,69 & 0,29 & 0,03 & 0,05 & 0,07 & 0.06 & 0,18 \\ & & & & 1 & 0,43 & 0,07 & 0,15 & 0.04 & 0,03 & 0,22 \\ & & & & & 1 & 0,79 & 0,20 & 0,15 & 0,11 & 0,04 \\ & & & & & & 1 & 0,11 & 0,05 & 0,02 & 0,02 \\ & & & & & & & 1 & 0,81 & 0,83 & 0,70 \\ & & & & & & & & 1 & 0.904 & 0,73 \\ & & & & & & & & & 1 & 0,77 \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

კორელაციური მატრიციდან ყველაზე დიდი კორელაციის კოეფიციენტი 0.904 გააჩნია მე-9 და მე-10 პარამეტრებს. ზემოთ მოყვანილი პროცედურის შემდეგ მივიღებთ:



თუ ზღურბლის მნიშვნლობას ავიღებთ r_0 = 0,4 ტოლად, მაშინ მივიღებთ ოთხ „პლეადას”:



ე.ი მივიღეთ ოთხი ერთგვაროვანი ჯგუფი.

კორელაციური პლეადის მეთოდის გამოყენება მიზანშეწონილია იმ შემთხვევაში, როცა გასაანალიზირებულ პარამეტრებს შორის არსებობს სარწმუნო კორელაციური კავშირები. იმ შემთხვევაში, როცა კორელაციის კოეფიციენტებს აქვს მცირე აბსოლუტური მნიშვნელობა ე.ი კავშირი არაა სარწმუნო, დაჯგუფების ამოცანის გადაწყვეტა ძნელდება, რადგან r_0 ზღურბლის მნიშვნელობის დადგენა რთულია.

2.9 კლასტერიზაციის პროცესის შეფასების ზოგიერთი საკითხები

კლასტერიზაციის ნებისმიერი მეთოდის სირთულე იმაში მდგომარეობს, რომ ჩვენ არ გვაქვს საშუალება ვიზუალურად წარმოვადგინოთ მიღებული შედეგების გეომეტრიული თავისებურებები. განხილული მაგალითები შეეხება მხოლოდ ორგანზომილებიან სისტემებს, სადაც გეომეტრიულად ადვილად შეიძლება წარმოვადგინოთ კლასტერიზაციის შედეგი. რეალურ ბიოსამედიცინო კვლევებში ჩვენ საქმე გვაქვს ზოგჯერ ასობით მაჩვენებელთან, რაც საკმაოდ ართულებს შედეგების ინტერპეტაციას. ამ პრობლემის გადასაწყვეტად საჭიროა გამოვიყენოთ დამატებითი ინფორმაცია, რომელიც საშუალებას მოგვცემს შევაფასოთ მიღებული კლასტერების გეომეტრიული სტრუქტურა.

შედეგების ინტერპრეტაციისათვის მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ კლასტერების ცენტრებს შორის მანძილი. ასეთი ინფორმაცია უმჯობესია წარმოვადგინოთ ცხრილის სახით. დაუშვათ კლასტერიზაციის შედეგად მიღებულია ხუთი ჯგუფი და ვთქვათ ამ ჯგუფების ცენტრებს შორის მანძილების მატრიცას აქვს შემდეგი სახე:

კლასტერების ცენტრები	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
z_1	0,0	4,8	14,7	2,1	50,6
z_2		0,0	21,1	6,1	48,3
z_3			0,0	15,0	36,7
z_4				0,0	49,3
z_5					0,0

როგორც ცხრილიდან ჩანს, Z_5 კლასტერის ცენტრი მნიშვნელოვნად არის დაშორებული დანარჩენი ოთხი კლასტერის ცენტრებიდან. გარდა ამისა, მანძილი Z_1 და Z_2 კლასტერების ცენტრებს შორის, ისევე როგორც Z_1 და Z_4 კლასტერების ცენტრებს შორის, შედარებით ერთნაირია. თუ ცნობილია, რომ Z_5 ცენტრის მქონე კლასტერი შედგება ერთი ან ორი ობიექტისაგან, მაშინ გარკვეული გამოკვლევების შედეგად შეიძლება მივიღოთ გადაწყვეტილება, რომ მასში მოხვედრილი ობიექტები წარმოადგენენ არტეფაქტებს და შეიძლება მათი გამორიცხვა ანალიზიდან. მეორეს მხრივ, თუ კლასტერში აღმოჩნდება საკმაო

რაოდენობის ობიექტები, მაშინ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ მიღებული ჯგუფი რეალურია და იგი ნამდვილად აერთიანებს ერთგვაროვან ობიექტებს.

ცხრილში მოყვანილი ინფორმაცია შეიძლება გამოვიყენოთ ჯგუფების გაერთიანებისთვისაც. მაგალითად, თუ კლასტერების ცენტრები საკმაოდ ახლოს არიან ერთმანეთთან, მაშინ მათი გაერთიანება ერთ ჯგუფში შესაძლებელია.

ცენტრებს შორის მანძილების შემდეგ, მეორე მნიშვნელოვან მაჩვენებელს წარმოადგენს კლასტერის ცენტრის მიმართ რეალიზაციების გაფანტვის მაჩვენებელი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს ობიექტების შიგაჯგუფურ განლაგებაზე წარმოდგენას. დაუშვათ გვაქვს ხუთი კლასტერი, რომლებიც წარმოდგენილნი არიან ოთხი ობიექტით და ვთქვათ დისპერსიების ცხრილს აქვს შემდეგი სახე:

კლასტერები	დისპერსიები			
	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
ω_1	1,2	0,9	0,7	1,0
ω_2	2,0	1,3	1,5	0,9
ω_3	3,7	4,8	7,3	10,4
ω_4	0,3	0,8	0,7	1,1
ω_5	4,2	5,4	18,3	3,3

როგორც ცხრილიდან ჩანს, ω_1 კლასტერს გააჩნია დაახლოებით ჰიპერსფეროს ფორმა, რადგან დისპერსიები ოთხივე ღერძის მიმართ თითქმის ერთნაირია (1,2; 0,9; 0,7; 1,0). რაც შეეხება ω_5 კლასტერს, მისი ფორმა მე-3 ღერძის მიმართ წაგრძელებულია, ამიტომ ის უფრო შეესაბამება ჰიპერელიფსოიდს. ანალოგიურად შეგვიძლია გავაანალიზოთ სხვა კლასტერებიც.

ამრიგად, ინფორმაცია, რომლიც ზემოდ არის მოყვანილი და აგრეთვე დამატებითი მონაცემები კლასტერებში მოხვედრილი ობიექტების რაოდენობა საშუალებას გვაძლევს გავაანალიზოთ თითოეული ჯგუფის სტრუქტურა და მისი გეომეტრიული განლაგება სივრცეში.

რასაკვირველია არსებობენ კლასტერების სხვა რაოდენობრივი მახასიათებლები, რომლებიც მეტ-ნაკლებობით გამოიყენებიან ჯგუფების დასახასიათებლად. მაგალთად სასარგებლოა ვიცოდეთ კლასტერში ცენტრიდან ყველაზე ახლო და ყველაზე დაშორებულ ობიექტების შესახებ. კლასტერის ცენტრის მიმართ საშუალო კვადრატული მანძილები და სხვა. ცხადია, რომ ყველა ეს დამატებითი ინფორმაცია შესაძლებელია გამოყენებულ იქნას ავტომატური კლასტერიზაციის შედეგად მიღებული შედეგების დასახასიათებლად.

III კლასიფიკაციის მეთოდები

3.1 კლასიფიკაციის ამოცანის ჩამოყალიბება

როგორც ვიცით, დიაგნოსტიკური სისტემის ძირითადი დანიშნულებაა ობიექტების მიკუთვნება რომელიმე მოცემულ კლასს, რომელსაც გარჩევის ანუ კლასიფიკაციის (იდენტიფიკაციის) ამოცანა ეწოდება. გარჩევის პროცესის მაღალსაიმედო განხორციელებისათვის აუცილებელია შემდეგი ორი პრობლემის ეფექტური გადაწყვეტა. ესენია: სახეთა აღწერის ანუ ეტალონის აგება და გადაწყვეტილებათა მიღების წესის ფორმირება. ეს ორი პრობლემა საკმაოდ მჭიდრო კავშირშია ერთმანეთთან. კერძოდ, აგებული კლასის ეტალონების სახე თუ მახასიათლები ძალიან ხშირად განსაზღვრავენ გადაწყვეტილებათა მიღების წესს და პირიქით.

სახის აღწერა ანუ ეტალონი, როგორც გარკვეული ტიპის ობიექტების ამსახველი მოდული, უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობებს:

– ადეკვატურად აღწეროს მოცემული სახე;
– განსხვავდებოდეს სხვა სახის აღწერისაგან;
– იყოს კონსტრუქციული (გამოყენებადი).

დიაგნოსტიკის ანუ გადაწყვეტილების მიღების პროცესი შედგება შედარებისა და შედარებით მიღებული ალტერნატივებიდან (შედეგებიდან) ერთ-ერთის არჩევის პროცედურისაგან. შედარების პროცედურის განსახორციელებლად აუცილებელია მსგავსების რაიმე ზომის არსებობა.

სახეთა გარჩევის სისტემებში სახეთა აღწერის და გადაწყვეტილებათა მიღების წესების ფორმირებისას ფართოდ გამოიყენება სწავლების პროცედურები. სახეთა აღწერა ცოცხალ ორგანიზმში ფორმირდება ბუნებრივად, ხოლო ტექნიკურ სისტემისათვის აუცილებელია აპრიორულად არსებული სწავლების ალგორითმები და მათი განხორციელების საშუალებები.

არსებობს სწავლების ორგვარი ფორმა: სწავლება მასწავლებლით და მასწავლებლის გარეშე. სწავლება მასწავლებლით გულისხმობს ისეთი სუბიექტის არსებობას, რომლისთვისაც ცნობილია სახეები და შეუძლია ნებისმიერი რეალიზაცია უშეცდომოდ მიაკუთვნოს მოცემული კლასების ერთობლიობიდან ერთ-ერთს. ასეთი მასწავლებლის ფუნქციებს უმაღლესი ინტელექტის მქონე არსებების სიცოცხლის საწყის პერიოდში ასრულებენ მშობლები, შემდეგ კი პროფესიონალი მასწავლებლები. ტექნიკური სისტებებისათვის იგივე ფუნქციას ასრულებენ მკლევარ-ექსპერიმენტატორები.

ბუნებრივი სისტემებისაგან განსხვავებით, ხელოვნური სისტემების სწავლებისათვის აუცილებელია რეალიზაციათა მახასიათებლების – ნიშნების (პარამეტრების) წინასწარ ზუსტად განსაზღვრა და ნიშანთა სიმრავლის (სივრცის) ფორმირება, რადგან ამის გარეშე შეუძლებელია სასწავლო ალგორითმის ფორმირება.

სწავლების გარკვეული ეტაპის გავლის შემდეგ ბუნებრივ სისტემებს გამოუმუშავდებათ თვითსწავლების ანუ მასწავლებლის გარეშე სწავლების პროცესის უნარი, რაც ხელოვნურ სისტემებისათვის უაღრესად პრობლემატურია. კერძოდ, თვით სწავლების (ადაპტაციის) პროცესი შესაძლებელია მხოლოდ უმარტივესი ობიექტებისა და პროცესებისათვის.

სწავლების პროცესები პირობითად შეიძლება დავყოთ ორ ეტაპად. პირველ ეტაპს მიეკუთვნება ინფორმაციის მოპოვება და დამახსოვრება, ხოლო მეორე ეტაპს – ინფორმაციის გადამუშავება. თუ სწავლება ხორციელდება მასწავლებლით, მაშინ ინფორმაციის მოპოვება და წარმოდგენა არის მასწავლებლის მოვალეობა. ინფორმაციის დამახსოვრება და შემდეგ გადამუშავება ტექნიკურ სისტემაში მოცემული უნდა იყოს ალგორითმების სახით.

ტექნიკურ სისტემებში სწავლების პროცესის განხორციელებისათვის ხშირად გამოიყენება იტერაციული პროცედურები შესაბამისი მიზნობრივი ფუნქციებით. ამ შემთხვევებისათვის არსებობს სხვადასხვა მათემატიკური მეთოდები, მაგალითად კარგად დამუშავებული ოპტიმიზაციის მეთოდები, რომლებიც გამოიყენებიან სწავლების როგორც დეტერმინირებული, ასევე სტოქასტიკური (შემთხვევითი) პროცესების კვლევისათვის. აქ იტერაციის ყოველ ბიჯზე ხდება მიზნობრივი ფუნქციის გამოთვლა და შედეგების შედარება წინა ბიჯზე გამოთვლილი მიზნობრივი ფუნქციის მაჩვენებელთან.

ზოგადად კლასიფიკაციის სიზუსტის შეფასება შეიძლება **კროსს–შემოწმებით**, სადაც გამოიყენება ტესტური ამონარჩევი (სიმრავლე). ტესტური ამონარჩევით მიღებული კლასიფიკაციის სიზუსტე დარდება სასწავლო ამონარჩევით ჩატარებულ კლასტერიზაციის სიზუსტეს. თუ ტესტური ამონარჩევი იძლევა დაახლოებით იგივე შედეგს, რასაც იძლევა სასწავლო ამონარჩევი, მაშინ ითვლება, რომ მეთოდმა გაიარა კროსს–შემოწმება.

3.2 ეტალონის აგება

როგორც უკვე ავღნიშნეთ, დიაგნოსტიკის ამოცანის გადასაწყვეტად აუცილებელია მოცემული კლასების ეტალონების აგება. არსებობს ეტალონების აგების სტატისტიკური და დეტერმინირებული მეთოდები. განვიხილოთ ისინი.

სტატისტიკური ეტალონის აგება. დაუშვათ მოცემულია $\{X\}$ სიმრავლე, რომელიც შედგება $X_i,\ i=1,2,.....N$ რეალიზაციებისაგან. რადგან თითოეული რეალიზაცია ფორმირდება N რაოდენობის ნიშნებისაგან, ამიტომ გვაქვს N განზომილებიანი ვექტორი $x_1, x_2,.....x_n$ კოორდინატებით. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

ა) როცა $x_1, x_2,.....x_n$ რაოდენობრივი მაჩვენებლებია. დაუშვათ, ცნობილია თითოეული რეალიზაციის, რომლებიც ნორმალურად არიან განაწილებულები, განაწილების სიმკვრივის ფუნქცია

$$f(x_n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_i}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_n-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2\right\}\ , \qquad (1)$$

სადაც σ_i საშუალო კვადრატული გადახრაა, μ_i – მათემატიკური ლოდინი. ამ სიდიდეების გამოთვლა შესაძლებელია სასწავლო რეალიზაციების გამოყენებით:

$$\bar{\mu}_{in}=\frac{1}{m_i}\sum_m x_{n_i m}; \qquad \bar{\sigma}_i^2=\frac{1}{m_i}\sum_m\left(x_{n_i m}-\bar{\mu}_{in}\right)^2,$$

სადაც $\overline{\mu}_{in}$ არის ω_i სახის x_n ნიშნის მათემატიკური ლოდინის ანუ საშუალო არითმეტიკულის შეფასება; m_i – ω_i სახის სასწავლო ამონარჩევში რეალიზაციათა რაოდენობაა, $x_{n_i m}$ არის ω_i სახის m-ური რეალიზაციის n-ური ნიშანი, σ_i^2 – დისპერსიის შეფასებაა. შეფასებები მით უფრო ზუსტია, რაც მეტია რეალიზაციათა რაოდენობა თითოეული სახის სასწავლო ამონარჩევში.

თუ სახეთა ნიშნები ურთიერთდამოკიდებულია, მაშინ (1) გამოსახულების გამოყენება მოცემული სახით არ შეიძლება. საჭიროა ერთობლივი განაწილების სიმკვრივის ფუნქციების გამოთვლა, რაც მოითხოვს რეალიზაციების დიდ რაოდენობას. ასეთი რაოდენობის რეალიზაციათა ამონარჩევების ფორმირება ყოველთვის არ არის შესაძლებელი. გარდა ამისა, ეტალონის მიღება დაკავშირებულია გამოთვლების მოცულობისა და დროის გაზრდასთან. ამ მიზეზების გამო, მრავალგანზომილებიანი დამოკიდებული ნიშანთა სიმრავლეები გარჩევის სისტემებში პრაქტიკულად არ გამოიყენენებიან.

ბ) როცა $x_1, x_2, ...x_n$ ბინარული (0,1) მნიშვნელობებია. ასეთ რეალიზაციებს ბინარული რეალიზაციიები ეწოდებათ და მათი გამოყენება გარჩევის სისტემებში გამოთვლების სისწრაფისა და მოცულობის თვალსაზრისით გაცილებით უფრო მოსახერხებელია, ვიდრე მთელი ან ნამდვილრიცხვებიანი ნიშანთა სიმრავლეებისაგან შემდგარი რეალიზაციებისა.

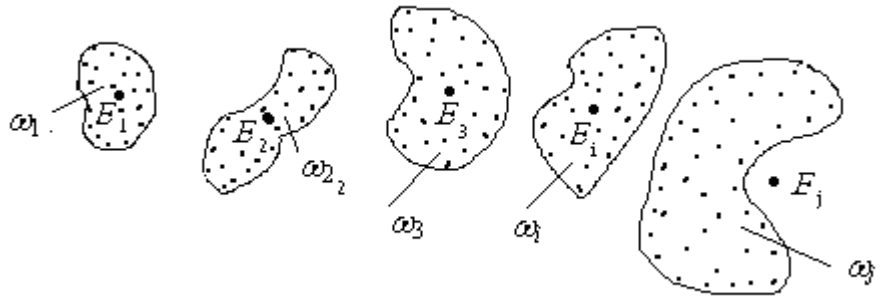
თანაბარგანზომილებიანი ბინარული რეალიზაციებისათვის დასაშვებია ე.წ. სუპერპოზიციის ანუ **ზედდების** პრინციპი, რაც გულისხმობს თითოეული სახის სასწავლო რეალიზაციისათვის ერთი და იმავე ნიშნის მქონე ობიექტების ზედდებას. ამ გზით მივიღებთ $\omega(x)$ მატრიცას, რომლის ყოველი ელემენტი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას: $0 \le \forall\omega(x)) \le 1$. ნიშნის ნულოვანი მნიშვნელობა გვაქვს მაშინ, როდესაც შესაბამის უჯრედში მოცემული სიმბოლოს არც ერთი ელემენტი მოცემული სახის რეალიზაციათა სასწავლო ამონარჩევისათვის არც ერთხელ არ განხორციელდა. ერთის ტოლი მნიშვნელობა გვაქვს მაშინ, როდესაც ერთი სახის გამოსახულების რომელიმე ელემენტი ყოველთვის არის მოთავსებული მოცემულ უჯრედში.

ზედდების პრინციპით მიღებული სტატისტიკური ეტალონი $\omega(x)$, რომელსაც შეიძლება ჰქონდეს როგორც მატრიცის, ასევე ვექტორის ფორმა, აკმაყოფილებს ეტალონებისადმი წაყენებულ ადეკვატურობის პირობას. ხვადასხვა სახის სტატისტიკური ეტალონები განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან, თუ შესრულდება შემდეგი პირობა: სახეების ნებისმიერი რეალიზაცია განსხვავებული უნდა იყოს სხვა სახეების რეალიზაციებისაგან. რეალიზაციათა სტაბილურობის უზრუნველყოფა დამოკიდებულია მრავალ ფაქტორზე: რეალიზაციათა განზომილებაზე, ნაბეჭდი შრიფტების ან ხელნაწერი სიმბოლოებისათვის შრიფტებისა და კალიგრაფიის თავისებურებებზე და სხვა.

ყოველი ახალი რეალიზაციის გამოჩენისას შესაძლებელია ზედდების პროცედურის გამოყენებით გადავიანგარიშოთ და შესაბამისად, უფრო დავაზუსტოთ სტატისტიკური ეტალონი.

დეტერმინირებული ეტალონების აგება. დაუშვათ, რომ $\{\omega\}$ სახეთა სიმრავლისათვის მოცემულია $\{X\}$ რეალიზაციათა სასწავლო ამონარჩევი. ამასთან ყოველი ω_i სახისათვის გვაქვს რეალიზაციათა სასწავლო ნაკრების სიმრავლე. თითოეული რეალიზაცია N განზომილებისაა, ამიტომ ნიშანთა შესაბამის სივრცეში ყოველი რეალიზაცია შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ერთი წერტილის სახით. თვალსაჩინეობისათვის დაუშვათ, რომ ნიშანთა რაოდენობა

ორის ტოლია, მაშინ რეალიზაციათა არსებული განლაგება შეიძლება წარმოვადგინოთ სიბრტყეზე, მაგალითად, ისე როგორც ეს შემდეგ ნახაზზეა წარმოდგენილი:



დეტერმინირებული ეტალონების მრავალი ტიპი არსებობს, რომელთაგან უმარტივესია ე.წ. **პროტოტიპი,** რომელიც სასწავლო ამონარჩევში მოცემული რეალიზაციების სიმძიმის ცენტრს წარმოადგენს. პროტოტიპის ეტალონური აღწერა ავღნიშნოთ *E*-თი. ცხადია, რომ მას გააჩნია იგივე განზომილება, რაც სახეთა რეალიზაციებს. E_i პროტოტიპის $\{e_{n_i}\}$ კოორდინატები ყოველი ω_i სახისათვის გამოითვლება შემდეგი გამოსახულებით:

$$e_{n_i} = \frac{1}{m}\sum_m x_{n_i} m \quad , \quad n_i = 1,2,.....N \ ,$$

სადაც e_{ni} არის E_i ეტალონის *n*-ური კოორდინატის მნიშვნელობა. როგორც ნახაზიდან ჩანს, კლასტერის რთული ფორმის შემთხვევაში (მაგ. ω_j სახის კლასტერი), სიმძიმის ცენტრი გამოდის კლასტერის გარეთ და ამის გამო, ვერ შეასრულებს ეტალონის ფუნქციას ანუ იგი რეალურად არ წარმოადგენს მოცემული კლასის პროტოტიპს. ასეთი სიტუაციების თავიდან ასაცილებლად მიმართავენ კლასტერების გადაფარვას ჰიპერსფეროებით. ამ დროს ერთ კლასს შეიძლება რამდენიმე პროტოტიპი ჰქონდეს.

თუ ჰიპერსფეროების გამოყენების შემთხვევაში საკმარისია მხოლოდ მისი ცენტრისა და რადიუსის დაფიქსირება, ჰიპერელიპსოიდების შემთხვევაში საჭირო ხდება გაცილებით მეტი ინფორმაციის ცოდნა, კერძოდ ყოველ კლასტერზე იმდენი ნასევარღერძის სიგრძის განსაზღვრაა საჭირო რა განზომილებისაცაა ნიშანთა სივრცე, რაც კიდევ უფრო ართულებს გადაფარვის პრობლემას.

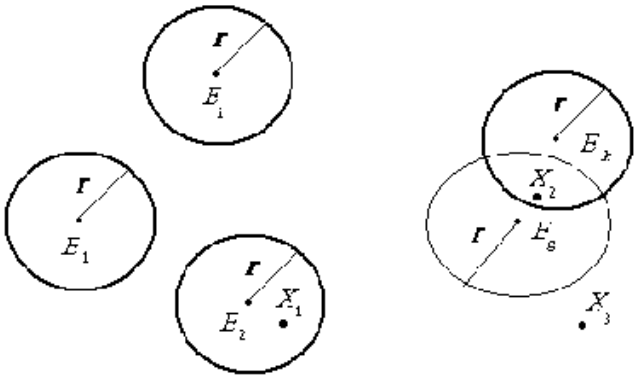
არსებობს ეტალონის აგების სხვა დეტერმინირებული მეთოდები, მაგალითად განაპირა წერტილების, რანგული კავშირების, მინი და მაქსი პორტრეტების და სხვა, რომლებიც მეტ-ნაკლებად გამოყენებადია პრაქტიკაში.

3.3 გადაწყვეტილების მიღების პროცედურის აღწერა

გადაწყვეტილების მიღება ფაქტიურად წარმოადგენს უშუალოდ კლასიფიკაციის პროცესს. ამ პროცესის პირველი ეტაპია შედარების პროცედურა, რის შედეგაც ვიღებთ შესარჩევ ალტერნატივათა სიმრავლეს. მეორე ეტაპზე ალტერნატივების სიმრავლიდან ვირჩევთ ერთს, რომლის მიხედვითაც ხდება წინასწარ შემუშავებული წესით (კრიტერიუმის) მიხედვით გადაწყვეტილების მიღება (დასკვნა). შედარების პროცედურის განხორციელებისათვის აუცილებელია კლასის ეტალონური აღწერის, მსგავსების ზომის ფუნქციის და უცნობი რეალიზაციის არსებობა.

უცნობი რეალიზაცია X და ეტალონური აღწერა $\{E\}$ წარმოადგენენ მსგავსების ზომის ფუნქციის $\varphi(X,\{E\})$ არგუმენტებს. ეტალონთა $\{E\}$ სიმრავლის ყოველი ელენენტისათვის $\varphi(\bullet)$ ფუნქციის გამოთვლის შედეგად ვღებულობთ ერთ ალტერნატივას – სკალარს, რომელიც a სიმბოლოთი ავღნიშნოთ. ყველა ეტალონთან შედარების შედეგად ვღებულობთ ალტერნატივების სიმრავლეს $\{a\}$.

გადაწყვეტილების მიღებისათვის საჭიროა მსგავსების ზომის ზღურბლური მნიშვნელობის შერჩევა ევრისტიკულად ან ექსპერიმენტალურად. მსგავსების ზომის ზღურბლის გამოყენების თვალსაჩინო ინტერპრეტაცია გარჩევის პროცესში შეიძლება წარმოვადგინოთ სტატისტიკური ან სიმძიმის ცენტრებით (საშუალო არითმეტიკულებით) მოცემული ეტალონებისათვის ევკლიდეს მანძილების გამოყენებით, როგორც ეს ნაჩვენებია შემდეგ ნახაზზე:



ამ ნახაზზე ნაჩვენებია მსგავსების ზომის ზღურბლის (r) მნიშვნელობის ტოლი რადიუსით შემოსაზღვრული ჰიპერსფეროები, რომელთა ცენტრები არიან ეტალონური აღწერები. თუ უცნობი რეალიზაცია მოხვდა რომელიმე (მაგალითად E_2 ცენტრის მქონე) ჰიპერსფეროს შიგნით, მაშინ სრულდება შემდეგი პირობა:

$$d(X_1,E_2)<r \qquad (1)$$

თუ (1) პირობა სრულდება მხოლოდ ერთი (მაგ. ω_2) სახისათვის, მაშინ X უცნობი რეალიზაცია ცალსახად მიეკუთვნება ω_2 სახეს. თუ (1) გამოსახულებით მოცემული პირობა შესრულდა ერთზე მეტი კლასისათვის (მაგალითად X_2 რეალიზაციისათვის E_j და E_k ეტალონების მიმართ), მაშინ გადაწყვეტილებას

ვერ ვღებულობთ და უცნობი რეალიზაცია X გაიგზავნება გარჩევის მეორე საფეხურზე (თუ ასეთი არსებობს) მხოლოდ ω_j და ω_i სახეების მითითებით.

თუ (1) გამოსახულებით მოცემული პირობა სახეთა ანსაბლის არც ერთი წევრისათვის არ სრულდება (მაგალითად X_3 რეალიზაცია), მაშინ ცალსახად მიიღება გადაწყვეტილება იმის შესახებ, რომ უცნობი რეალიზაცია არ მიეკუთვნება მოცემულ სახეთა სიმრავლეს. იგივე დასკვნა შეიძლება გამოვიყენოთ მეორე შემთხვევის დროს (ნახაზე X_2 რეალიზაცია) თუკი არ არსებობს გარჩევის მეორე საფეხური.

გადაწყვეტილებათა მიღების მეთოდების რაოდენობა ძალიან დიდია და უაღრესად მრავალფეროვანი. მათი კლასიფიკაცია შესაძლებელია მრავალი ნიშან-თვისებების მიხედვით. მიზეზ-შედეგობრივი კავშირების მიხედვით შესაძლებელია გამოვიყენოთ გადაწყვეტილებათა მიღების ორი კლასი: ალბათური და დეტერმინირებული.

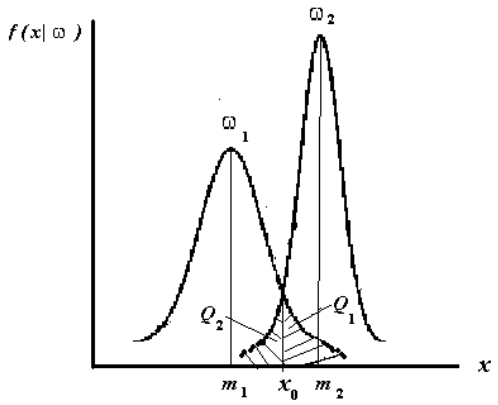
სახეთა გარჩევის თეორიის ფორმირების საწყის ეტაპზე გადაწყვეტილებათა მიღების ალბათური მეთოდები ყველაზე უფრო გავრცელებული იყო დიაგნოსტიკურ სისტემებში. ალბათური მეთოდების გამოყენება გადაწყვეტილების მიღებისას აუცილებლად გულისხმობს რეალიზაციათა ყოველი სახისადმი განაწილების კანონების აპრიორულ დადგენას. ამასთან, თუ ნიშნები (პარამეტრები) დამოკიდებულნი არიან, მაშინ საჭიროა განაწილებათა ერთობლივი კანონების დადგენა, რაც მოითხოვს სასწავლო ამონარჩევის რეალიზაციათა დიდ რაოდენობას, რომელთა მიღება ყოველთვის არ არის შესაძლებელი. ამ მიზეზების გამო, ალბათური მეთოდები ძირითადად გამოიყენება სახეებისა და ნიშნების შეზღუდული რაოდენობის შემთხვევაში.

დეტერმინირებული გადაწყვეტილებათა მიმღები ფუნქციები კიდევ უფრო მრავალფეროვანია. მათ მიეკუთვნება წრფივი და არაწრფივი გადამწყვეტი ფუნქციები, პოტენციალთა ფუნქციების მეთოდი, პერსეპტონის მეთოდი და სხვა. განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი.

3.4 კლასიფიკაციის ალბათური მეთოდები

4.4.1 ალბათური მეთოდის არსი

კლასიფიკაციის ალბათური მეთოდის არსი განვიხილოთ უბრალო მაგალითზე, როდესაც მოცემულია ორი ω_1 და ω_2 კლასი. სიმარტივისათვის მივიღოთ, რომ გვაქვს ერთი ნიშანი x, რომლითაც არის წარმოდგენილი რეალიზაციები. დაუშვათ ეს ორი კლასი აღიწერებიან ნორმალური განაწილების პირობითი სიმკვრივის ფუნქციებით: $f(x|\omega_1)$ და $f(x|\omega_2)$, რომელთა ურთიერთგანლაგება ნაჩვენებია შემდეგ ნახაზზე:



მოცემულია აგრეთვე X რეალიზაციის კლასებში მოხვედრის აპრიორული ალბათობები $P(\omega_1)$ და $P(\omega_2)$. როგორც ნახაზიდან ჩანს, კლასები სიმკვრივეთა განაწილების არეში იკვეთებიან. ამიტომ პრინციპულად შეუძლებელია შეცდომების თავიდან აცილება. გარჩევა მდგომარეობს იმაში, რომ შეცდომების რაოდენობა რაც შეიძლება ნაკლები იყოს.

შევარჩიოთ x ნიშნის ზღურბლური მნიშვნელობა და აღნიშნოთ იგი x_0-ით. ამ აღნიშვნიდან გამომდინარე უცნობი რეალიზაციის რომელიმე კლასისადმი (სახესადმი) მიკუთვნების პროცესში გადაწყვეტილების მიღების წესისათვის გვექნება:

$$X \in \omega_1 \text{ თუ } X < x_0 \;;\; X \in \omega_2 \text{ თუ } X > x_0$$

თუ $X \in \omega_1$ და მას მიაკუთვნებენ ω_2 კლასს, მაშინ დაშვებული იქნება პირველი რიგის შეცდომა, რომლის ალბათობა განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულებით:

$$Q_1 = \int_{x_0}^{\infty} f(x \mid \omega_1) dx$$

თუ $X \in \omega_2$ და მას მიაკუთვნებენ ω_1 კლასს, მაშინ დაშვებული იქნება მეორე რიგის შეცდომა, რომლის ალბათობა ტოლია:

$$Q_2 = \int_{-\infty}^{x_0} f(x \mid \omega_2) dx$$

უნდა განისაზღვროს არასწორი გადაწყვეტილების მიღების დანაკარგი (ღირებულება). ზოგადად, საქმე გვაქს შემდეგ დანაკარგებთან: c_{12}–პირველი გვარის ცდომილების ღირებულება, c_{21}–მეორე გვარის ცდომილების ღირებულება, c_{11} და c_{22} –სწორი გადაწყვეტილების ღირებულებები. საშუალო ღირებულება $\bar{c}$ ტოლია არასწორი და სწორი ღირებულებების ჯამისა, მათი ალბათობების და აპრიორული ალბათობების გათვალისწინებით, ე.ი.

$$\bar{c} = P(\omega_1)c_{11}(1-Q_1) + P(\omega_1)c_{12}Q_1 + P(\omega_2)c_{22}(1-Q_2) + P(\omega_2)c_{21}Q_2$$

თუ ამ გამოსახულებაში ჩავსვამთ Q_1 და Q_2 მნიშვნელობებს, მივიღებთ:

$$\bar{c} = P(\omega_1)\left[c_{11}\int_{-\infty}^{x_0} f(x \mid \omega_1)dx + c_{12}\int_{x_0}^{\infty} f(x \mid \omega_1)dx\right] + P(\omega_2)\left[c_{22}\int_{x_0}^{\infty} f(x \mid \omega_2)dx + c_{21}\int_{-\infty}^{x_0} f(x \mid \omega_2)dx\right] \quad (1)$$

x_0 სიდიდე ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ $\bar{c}$ მნიშვნელობა იყოს მინიმალური. ამისათვის (1) გამისახულება გავაწარმოვოდ x – ით, როცა $x = x_0$

$$\frac{d\bar{c}}{dx} = P(\omega_1)\left[c_{11} f\left(x_0 \mid \omega_1\right) - c_{12} f\left(x_0 \mid \omega_1\right)\right] + P(\omega_2)\left[c_{21} f\left(x_0 \mid \omega_2\right) - c_{22} f\left(x_0 \mid \omega_2\right)\right]$$

თუ ავიღებთ განაწილების სიმკვრივეების ფარდობას, რომელსაც დასაჯერობის λ კოეფიციენტი ეწოდება, მივიღებთ:

$$\lambda = \frac{f\left(x_0 \mid \omega_2\right)}{f\left(x_0 \mid \omega_1\right)} = \frac{P(\omega_1)\left(c_{11} - c_{12}\right)}{P(\omega_2)\left(c_{21} - c_{22}\right)} \quad .$$

როცა $x = x_0$ დასაჯერობის კოეფიციენტი, რომელსაც λ_0 სიმბოლოთი ავღნიშნავთ, ღებულობს კონკრეტულ მნიშვნელობას. როცა $c_{11} = c_{22} = 0$, $c_{12} = c_1$, $c_{21} = c_2$, მაშინ გვექნება:

$$\lambda_0 = \frac{f\left(x_0 \mid \omega_2\right)}{f\left(x_0 \mid \omega_1\right)} = \frac{P(\omega_1)\, c_1}{P(\omega_2)\, c_2} \quad .$$

თუ $f\left(x_0 \mid \omega_1\right)$ და $f\left(x_0 \mid \omega_2\right)$ ნორმალურადაა განაწილებული m_1, m_2 მათემატიკური ლოდინებით და $\sigma_1, \sigma_2 = \sigma$ საშუალო კვადრატული გადახრით, მაშინ გვექნება:

$$\lambda_0 = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(x_0 - m_1\right)^2 - \left(x_0 - m_2\right)^2\right]\right\} \quad .$$

თუ ამ გამოსახულებას ამოვხსნით x_0 მიმართ, როცა $c_1 = c_2$ და $P(A_1) = P(A_2)$, მაშინ მივიღებთ:

$$x_0 = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) \quad .$$

რომელიც ახდენს იდენტიფიკაციის ცდომილების მინიმიზაციას.

ამრიგად, უცნობი რეალიზაცია მიეკუთვნება ω_1 სახეს თუ დასაჯერობის კოეფიციენტი ნაკლებია მის კრიტიკულ λ_0 მნიშვნელობაზე და ω_2 სახეს, თუ იგი მეტია λ_0 სიდიდეზე.

3.4.2 დისკრიმინანტული ანალიზი

დისკრიმინანტული ანალიზი, რომელიც წარმოადგენს მრავალგანზომილებიან სტატისტიკურ მეთოდს, გამოიყენება იმ შემთხვევაში როცა გაგვაჩნია სასწავლო ამონარჩევი. ზოგადად დისკრიმინანტული ანალიზი შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ. დაუშვათ მოცემულია გასარჩევი ობიექტის მახასიათებლების გაზომვის შედეგად მიღებული n – განზომილებიანი ვექტორი $X = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)'$. საჭიროა ჩამოყალიბდეს წესი, რომლის თანახმად X ვექტორის კოორდინატების საშუალებით შესაბამისი ვექტორი მივაკუთვნოთ ერთ-ერთ რომელიმე სიმრავლეს.

დისკრიმინანტული ანალიზის მეთოდები პირობითად შეიძლება დავყოთ პარამეტრულ და არაპარამეტრულ მეთოდებად. განვიხილოთ პარამეტრული მეთოდი. ვთქვათ, მოცემულია ორი ω_1 და ω_2 კლასი, რომლებიც აღიწერებიან X_1 და X_2 n – განზომილებიანი რეალიზაციებით და $f(x_1, x_2,....x_n \mid \omega_1)$ და $f(x_1, x_2,....x_n \mid \omega_2)$ განაწილების პირობითი სიმკვრიბის ფუნქციებით. დაუშვათ, რომ კლასების რეალიზაციები ნორმალურად არიან განაწილებულები და კოვარიაციული მატრიცები ერთმანეთის ტოლია. ე.ი. გვაქვს:

$$f(x_1, x_2,....x_n \mid \omega_1) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X - M_1)S^{-1}(X - M_1)^{/}\right\} \quad ,$$

$$f(x_1, x_2,....x_n \mid \omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X - M_2)S^{-1}(X - M_2)^{/}\right\} \quad ,$$

სადაც M_1 და M_2 საშუალოების ვექტორია, S – გაერთიანებული კოვარიაცული მატრიცაა. თუ ავიღებთ განაწილების სიმკვრივეების ფარდობას მაშინ მივიღებთ შემდეგ დასაჯერობის კოეფიციენტს:

$$\lambda = \frac{f(x_1, x_2,...x_n \mid \omega_2)}{f(x_1, x_2,....x_n \mid \omega_1)} = \exp\left\{\frac{1}{2}(X - M_2)S^{-1}(X - M_2)^{/} - \frac{1}{2}(X - M_1)S^{-1}(X - M_2)^{/}\right\}$$

ამ გამოსახულების გალოგარითმებისა და მათემატიკური გარდაქმნების შედეგად ვღებულობთ:

$$\ln\lambda = \frac{1}{2}XS^{-1}(X - M_2)^{/} - \frac{1}{2}M_2S^{-1}(X - M_2)^{/} - \frac{1}{2}XS^{-1}(X - M_1)^{/} + \frac{1}{2}M_1S^{-1}(X - M_1)^{/}$$

თუ ფრჩხილებს გავხსნით, დავაჯგუფებთ და გამოვყოფთ დაკვირვებათა $X = (x_1, x_2,....x)^{/}$ ვექტორს მივიღებთ:

$$\ln\lambda = \frac{1}{2}XS^{-1}X^{/} - \frac{1}{2}XS^{-1}M_2^{/} - \frac{1}{2}M_2S^{-1}X^{/} + \frac{1}{2}M_2S^{-1}M_2^{/} - \frac{1}{2}XS^{-1}X^{/} + \frac{1}{2}XS^{-1}M_1^{/} +$$

$$+\frac{1}{2}M_1S^{-1}X^{/} - \frac{1}{2}M_1S^{-1}M_1^{/} = XS^{-1}M_1 - XS^{-1}M_2^{/} + \frac{1}{2}M_2S^{-1}M_2^{/} - \frac{1}{2}M_1S^{-1}M_1^{/} = XS^{-1}(M_1 - M_2)^{/} + E$$

სადაც

$$E = \frac{1}{2}M_2S^{-1}M_2^{/} - \frac{1}{2}M_1S^{-1}M_1^{/}$$

წარმოადგენს მუდმივ წევრს, ხოლო გამოსახულებას

$$Z = XS^{-1}(M_1 - M_2)^{/} = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

დისკრიმინანტული ფუნქცია ეწოდება, რომლის კოეფიციენტები c_i, $i = 1,2,....n$ მოიძებნება შემდეგი გამოსახულებით:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}, s_{12}, \ldots\ldots s_{1n} \\ s_{21}, s_{22}, \ldots\ldots s_{2n} \\ .-------- \\ -------- \\ s_{n1}, s_{n2}, \ldots\ldots s_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} m_1^1 - m_1^2 \\ m_2^1 - m_2^2 \\ ----- \\ m_n^1 - m_n^2 \end{pmatrix} \qquad C = S^{-1}(M_1 - M_2)'$$

თუ ზღრუბლის მნიშვნელობა λ_0 შერჩეულია, მაშინ $X \in \omega_1$ როცა $\lambda < \lambda_0$ და $X \in \omega_2$, როცა $\lambda > \lambda_0$. ხშირად ასეთი იდენტიფიკაციის პროცედურას დისკრიმინანტული ანალიზი ეწოდება.

დისკრიმინანტული ფუნქციის კოეფიციენტების მოძებნა არ მოითხოვს რეალიზაციების ნორმალურ განაწილებას. მაგრამ, ალგორითმის ეფექტიანობა ბევრად არის დამოკიდებული განაწილების კანონზე, რადგან c_i კოეფიციენტების განსაზღვრა S კოვარიაცული მატრიცის და საშუალოების ვექტორების M_1 და M_2 თვისებებზეა დამოკიდებული. თუ განაწილების კანონი მნიშვნელოვნად განსხვავდება ნორმალურისაგან, მაშინ S, M_1, M_2 პარამეტრები ცუდად ახასიათებენ რეალიზაციებს და დისკრიმინანტული ანალიზი გამოდის არასაიმედო.

აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ თუ რეალიზაციები ნორმალურად არიან განაწილებულნი, მაშინ მათ გააჩნიათ საშუალო სიდიდის მიმართ დაჯგუფების ტენდეცია, ხოლო მათი გაფანტვა საშუალო კვადრატული გადახრის პროპორციულია.

3.4.3 ბაიესის მეთოდი

ეს მეთოდი ეფუძნება ალბათობის თეორიაში ცნობილ ბაიესის ფორმულას. ვთქვათ, მოცემულია შეუთავსებადი ჰიპოთეზების $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ სრული ჯგუფი. (ჰიპოთეზების როლს დიაგნოსტიკურ სისტემაში კლასები ასრულებენ). ცნობილია ამ ჰიპოთეზების აპრიორული (ცდამდე) ალბათობები $P(\omega_1)$, $P(\omega_2), \ldots\ldots P(\omega_m)$. დაუშვათ, ცდის შედეგად მოხდა b_j ხდომილება ანუ რაიმე კონკრეტული რეალიზაცია. გვაინტერესებს როგორ შეიცვლება ჰიპოთეზების აპოსტერიორული (ცდის შემდგომი) პირობითი ალბათობები $P(\omega_i \mid b_j)$. ამისათვის გამოვიყენოთ ბაიესის ფორმულა

$$P(\omega_i \mid b_j) = \frac{P(\omega_i) P(b_j \mid \omega_i)}{\sum_{i=1}^{m} P(\omega_i) P(b_j \mid \omega_i)} \quad ,$$

სადაც $P(b_j \mid \omega_i)$. პირობითი ალბათობები მოცემულია.

სახეთა გარჩევის ბაიესის კრიტერიუმი ასე ჩამოყალიბდება: რეალიზაცია მიეკუთვნები იმ სახეს (კლასს), რომელთანაც მას გააჩნია უდიდესი პირობითი ალბათობა. ე.ი.

$$b_j \in \omega_i \quad \text{როცა} \quad P(\omega_j \mid b_j) = \max_k \{P(\omega_k \mid b_j)\} \ .$$

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია ცხრილი, სადაც წარმოდგენილია 17 სიმპტომი, რომლებიც მეტ-ნაკლებად ახასიათებენ ოთხ დაავადებას. 1 – ით აღნიშნულია სიმპტომის არსებობა, 0 – ით არარსებობა. d_1 – მიოკარდიუმის ინფარქტი, d_2 – მესამე ხარისხის შოკი, d_3 – პერიტონიტი, d_4 – სისხლის მიმოქცევის მწვავე უკმარისობა.

1	სიმპტომები	დიაგნოზები			
		d_1	d_2	d_3	d_4
1	ტკივილები გულის არეში	1	0	0	1
2	ტკივილები მუცლის არეში	0	0	1	0
3	ტემპერატურის მომატება	1	0	1	0
4	ტემპერატურის დაქვეითება	0	1	0	0
5	გულის რითმის მოშლა	1	0	0	0
6	ლეიკოციტოზი	1	0	1	0
7	არტერიული წნევის მომატება	1	0	0	0
8	არტერიული წნევის დაქვეითება	0	1	1	1
9	კანის გაუფერულობა	0	1	1	1
10	პულსის გახშირება	0	1	1	1
11	სუნთქვის გახშირება	0	1	0	1
12	რეფლექსების დათრგუნვა	0	1	0	0
13	მუცლის ზედაპირის დაძაბულობა	0	0	1	0
14	მუცლის შებერვა	0	0	1	0
15	საერთო სისუსტე, თავბრუსხვევა	0	0	0	1
16	გულის გაგანიერება	0	0	0	1
17	გულის ყრუ ტონები	1	0	0	1

დაუშვათ b_1 პაციენტს გააჩნია შემდეგი სიმპტომები: (1, 3, 5, 7, 10, 11, 17). გვაინტერესებს ამ ოთხი დაავადებიდან რომლითაა იგი დაავადებული. ამისათვის ჯერ გამოვთვალოთ ოთხივე დაავადების აპრიორული ალბათობები:

$$P(d_1) = \frac{6}{17} = 0{,}35; \quad P(d_2) = \frac{6}{17} = 0{,}35; \quad P(d_3) = \frac{8}{17} = 0{,}47; \quad P(d_4) = \frac{8}{17} = 0{,}47 \ ,$$

ხოლო შემდეგ აპოსტერიორული ალბათობები:

$$P(b_1 \mid d_1) = \frac{5}{17} = 0{,}29; \quad P(b_1 \mid d_2) = \frac{2}{17} = 0{,}12; \quad P(b_1 \mid d_3) = \frac{2}{17} = 0{,}12; \quad P(b_1 \mid d_4) = \frac{4}{17} = 0{,}24$$

.

თუ მიღებულ სიდიდეებს ჩავსვამთ ბაიესის ფორმულაში მივიღებთ:

$$P(d_1 \mid b_1) = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}29}{0{,}35 \cdot 0{,}29 + 0{,}35 \cdot 0{,}12 + 0{,}47 \cdot 0{,}12 + 0{,}47 \cdot 0{,}24} = \frac{0{,}1}{0{,}31} = 0{,}32; \qquad P(d_2 \mid b_1) = \frac{0{,}042}{0{,}31} = 0{,}14;$$

$$P(d_3 \mid b_1) = \frac{0{,}056}{0{,}31} = 0{,}18; \qquad P(d_4 \mid b_1) = \frac{0{,}11}{0{,}31} = 0{,}35 \ .$$

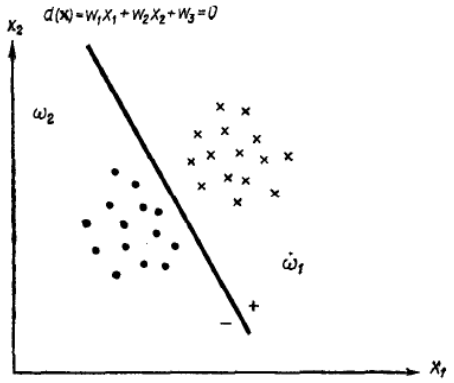
როგორც გამოთვლილი აპოსტერიორული პირობითი ალბათობებიდან ჩანს, b_1 პაციენტი, 0,35 სიდიდის ტოლი ალბათობით, დაავადებულია სისხლის მიმოქცევის მწვავე უკმარისობით.

3.5 კლასიფიკაციის დეტერმინირებული მეთოდები

3.5.1 გადამწყვეტი ფუნქციები

როგორც ვიცით, კლასიფიკაციის ამოცანის გადასაწყვეტად საჭიროა შემოვიტანოთ გარკვეული წესები ანუ კრიტერიუმები, რომელთა საშუალებითაც ხდება გადაწყვეტილების მიღება. ერთ-ერთ ასეთ კრიტერიუმად ითვლება გადამწყვეტი (დისკრიმინანტული) ფუნქციების გამოყენება.

განვიხილოთ მეთოდის არსი ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე წარმოდგენილი შემთხვევის დროს, სადაც ნაჩვენებია ორი ω_1 და ω_2 სახე ანუ კლასი, რომლებიც შედგებიან ორგანზომილებიანი (x_1,x_2) რეალიზაციებისაგან.



როგორც ნახაზიდან ჩანს, ეს ორი კლასი ერთმანეთისაგან იყოფა სწორი ხაზით. დაუშვათ, რომ მას აქვს შემდეგი სახე:

$$d(X) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 = 0 \qquad (1)$$

რომელსაც გამყოფი განტოლება ეწოდება. აქ w_i კოეფიციენტებია, x_1 და x_2 პარამეტრები. ნახაზიდან ჩანს, რომ (1) განტოლებაში ω_1 კლასიდან ნებისმიერი X რეალიზაციის ჩასმით მივიღებთ $d(X)$ ფუნქციის დადებით მნიშვნელობას, ხოლო ω_2 კლასიდან რეალიზაციის ჩასმით მივიღებთ უარყოფით მნიშვნელობას. აქედან გამომდინარე, $d(X)$ ფუნქცია შეიძლება გამოყენებული იყოს, როგორც

გადამწყვეტი ფუნქცია, რადგან უცნობი რეალიზაცია X მიეკუთვნება ω_1 კლასს, როცა $d(X) > 0$, ხოლო ω_2 კლასს, როცა $d(X) < 0$.

თუ რეალიზაცია იმყოფება საზღვარზე, ე.ი. ადგილი აქვს $d(X) = 0$ ტოლობას, მაშინ საქმე გვაქვს განუსაზღვრელობასთან და ამოცანა გადაუჭრელი ხდება. სახეთა გარჩევის ასეთი მიდგომა სამართლიანია ნებისმიერი n –განზომილებიანი ევკლიდეს სივრცისათვის. მაშინ გვექნება:

$$d(X) = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3, \cdots w_nx_n = W'(X) \quad , \qquad (2)$$

სადაც $X = (x_1, x_2, \cdots x_n; 1)'$ წარმოადგენს სახის ვექტორს, ხოლო $W = (w_1, w_2, \cdots w_n, w_{n+1})'$ წონის ვექტორს. თუ მოცემულია ორი კლასი, მაშინ გადამწყვეტ ფუნქციას აქვს შემდეგი თვისება:

$$d(X) = W'X \begin{cases} > 0 \text{ , როცა } & X \in \omega_1 \\ < 0 \text{ , როცა } & X \in \omega_2 \end{cases} .$$

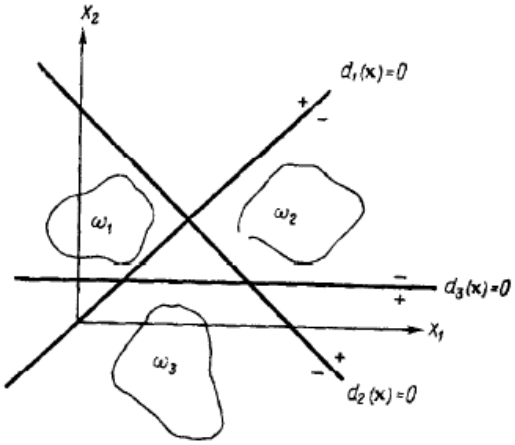
განვიხილოთ შემთხვევა, როცა საჭიროა რამდენიმე $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ კლასების გაყოფა. განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

1. თითოეული კლასი გამოყოფილია დანარჩენებისაგან ერთი გამყოფი ზედაპირით. ამ შემთხვევაში არსებულ m რაოდენობის გადამწყვეტ ფუნქციას აქვს შემდეგი თვისება:

$$d_i(X) = W_i^{/} X \begin{cases} > 0 \text{ , } & X \in \omega_1 \\ < 0 \text{ , } & X \notin \omega_1 \end{cases} , \quad i = 1, 2, \cdots m$$

აქ

$W_i = (w_1, w_2, \cdots, w_n, w_{n+1})'$ არის i-ური გადამწყვეტი ფუნქციის წონის ვექტორი. ამ შემთხვევის უბრალო მაგალითი მოყვანილია შემდეგ ნახაზზე:

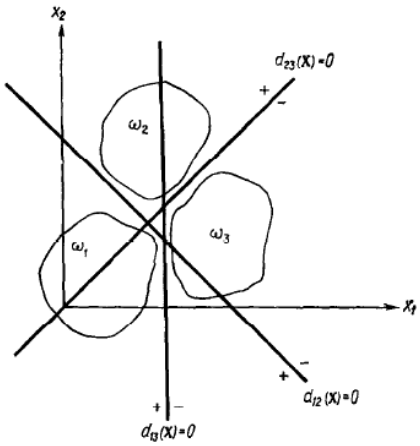


უცნობი რეალიზაცია X მიეკუთვნება ω_1 კლასს იმ შემთხვევაში, როდესაც სრულდება შემდეგი უტოლობები: $d_1(X) > 0$, $d_2(X) < 0$ და $d_3(X) < 0$. ამ შემთხვევაში ω_1 კლასის გამყოფი საზღვარი დანარჩენ ω_2 და ω_3 კლასებთან არის $d_1(X) = 0$.

2. თითოეული კლასი გამოყოფილია ნებისმიერი დანარჩენი კლასებიდან ინდივინდუალურად, ე. ი. კლასები წყვილ-წყვილად გაყოფადი არიან. ამ შემთხვევაში გვაქვს $\frac{m(m-1)}{2}$ რაოდენობის გამყოფი ზედაპირი. გადამწყვეტ ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$d_{ij}(X) = W_{ij}^{/} X$$

და გააჩნია შემდეგი თვისება: თუ უცნობი რეალიზაცია X მიეკუთვნება ω_1 კლასს, მაშინ $d_{ij} > 0$ ყველა $j \neq i$. გარდა ამისა $d_{ij}(X) = -d_{ji}(X)$.



ნახაზზე წარმოდგენილია სამი კლასი. ცხადია, რომ ერთი კლასის გამოყოფა დანარჩენებისაგან ერთი გამყოფი ზედაპირის საშუალებით შეუძლებელია. მაგალითად, უცნობი რეალიზაცია X მიეკუთვნება ω_1 კლასს თუ $d_{12}(X) > 0$ და $d_{13}(X) > 0$. $d_{23}(X)$ გადამწყვეტი ფუნქცია ამ შემთხვევაში არავითარ როლს არ თამაშობს. ω_2 კლასის გადაწყვეტილების არესათვის უნდა სრულდებოდეს შემდეგი პირობები: $d_{21}(X) > 0$ და $d_{23}(X) > 0$, ხოლო X მიეკუთვნება ω_3 კლასს თუ $d_{23}(X) < 0$ და $d_{13}(X) < 0$.

განზოგადოებულ წრფივ გადამწყვეტ ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$d(X) = w_1 f_1(X) + w_2 f_2(X) + \cdots\cdots + w_k f(X) + w_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} w_i f_i(X), \qquad (3)$$

სადაც $\{f_i(X)\}$, $i = 1,2,.....,k$ წარმოადგენენ X რეალიზაციის ნამდვილ ცალსახა ფუნქციებს. $f_{k+1}(X) = 1$.

მიუხედავად იმისა, რომ (3) გამოსახულებით შეიძლება განისაზღვროს რთული გადამწყვეტი ფუნქციები, სათანადო გარდაქმნების საშუალებით ისინი დაიყვანებიან წრფივ გადამწყვეტ ფუნქციებამდე.

ამრიგად, წრფივი გადამწყვეტი ფუნქციების განსაზღვრის ძირითად პრობლემას წარმოადგენს ამ ფუნქციების კოეფიციენტების მოძებნა, რომლებიც შეიძლება განისაზღვროს სხვადასხვა ადაპტური პროცედურებით.

3.5.2 მინიმალური მანძილის კრიტერიუმი

მანძილის ფუნქცია ფართოდ გამოიყენება სახეთა გარჩევის თეორიაში, რადგან იგი წარმოადგენს ევკლიდეს სივრცეში ყველაზე უფრო თვალსაჩინო მსგავსების ზომას. ეს უბრალო იდენტიფიკაციის მეთოდი აღმოჩნდა საკმაოდ ეფექტური იმ შემთხვევებში, როცა კლასები ხასიათდებიან გარკვეულ ფარგლებში შეზღუდული ცვალებადობის ხარისხით.

ზოგიერთ შემთხვევაში კლასის რეალიზაციებს გააჩნიათ დაჯგუფების ტენდეცია გარკვეული სახის (მაგალითად, საშუალო ანუ სიმძიმის ცენტრის) მიმართ. ასეთი სიტუაცია წარმოიქმნება იმ შემთხვევაში, როცა რეალიზაციათა ცვალებადობა კლასშიგნით არ არის დიდი და არტეფაქტები ადვილად აღირიცხებიან. ამ შემთხვევაში იდენტიფიკაციის ამოცანის გადაწყვეტა საკმაოდ ეფექტურია მინიმალური მანძილის კრიტერიუმის გამოყენებით.

განვიხილოთ m რაოდენობის $\omega_1, \omega_2, \ldots\ldots, \omega_m$ კლასი, რომლებსაც გააჩნიათ კლასისათვის დამახასიათებელი ეტალონები $E_1, E_2, \cdots, E_m$. როგორც აღვნიშეთ, ეტალონად შეიძლება მივიღოთ სახის რეალიზაციათა საშუალო ვექტორი. ევკლიდეს მანძილი X ვექტორსა და E_i ეტალონს შორის განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$d(X, E_i) = \| X - E_i \| = \sqrt{(X - E_i)'(X - E_i)} \quad . \tag{1}$$

უცნობი რეალიზაცია X მიეკუთვნება იმ კლასს, მაგალითად ω_i, თუ სრულდება შემდეგი პირობები: $d(X, E_i) < d(X, E_j)$ ყველა $j \neq i$. (1) ფორმულა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$d^2(X, E_i)'(X - E_i) = X'X - 2X'E_i + E_i' \cdot E_i = X'X - 2\left(X'E_i - \frac{1}{2}E_i'E_i\right) \quad .$$

$d^2(X, E_i)$ სიდიდის მინიმალური მნიშვნელობა ექვივალენტურია $\left(X'E_i - \frac{1}{2}E_i'E_i\right)$ სიდიდის მაქსიმალური მნიშვნელობისა, რადგან ნებისმიერი $d^2(X, E_i)$, $i = 1, 2, \cdots, m$ გამოთვლისას $X'X$ წევრი არ არის დამოკიდებული i ინდექსზე. აქედან გამომდინარე, გადამწყვეტი ფუნქცია შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ:

$$d_i(X) = X'E_i - \frac{1}{2}E_i'E_i, \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, m \tag{2}$$

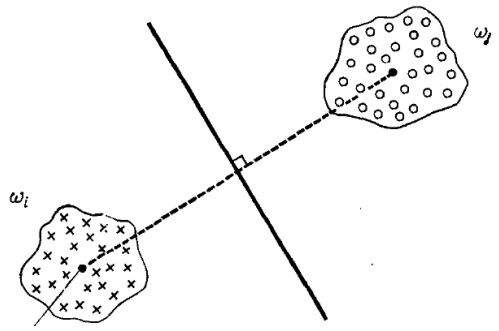
და გადაწყვეტილების მიღების ალგორითმი იქნება შემდეგი:

$$X \in \omega_i, \text{ თუ } d_i(X) > d_j(X) \quad \text{ ყველა } \quad j \neq i \quad .$$

უნდა ავღნიშოთ, რომ $d_i(X)$ არის წრფივი გადამწყვეტი ფუნქცია, ამიტომ (2) გამოსახულების მატრიცული სახე იქნება:

$$d_i(X) = W_i'X, \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, m \quad ,$$

სადაც $W_i = (w_{i1}, w_{i2}, \ldots\ldots, w_{in+1})'$. ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე წარმოდგენილია ორი კლასი თითო ეტალონით და მათი გამყოფი საზღვარი, რომელიც წარმოადგენს ჰიპერ- სიბრტყეს, რომლის წერტილები თანაბრად არიან დაშორებულები კლასის ეტალონებისაგან.



დაუშვათ, თითოეული კლასი ხასიათდება არა ერთი, არამედ რამდენიმე ეტალონით $E_i^1, E_i^2, ..., E_i^{n_i}$, სადაც n_i - i-ური კლასის ეტალონების რაოდენობაა, ე.ი. ნებისმიერი რეალიზაცია, რომელიც ეკუთვნის ω_i კლასს ამჟღავნებს დაჯგუფების ტენდეციას რომელიმე E_i^j, $j = 1,2,..., n_i$ ეტალონის მიმართ. ჩავწეროთ D ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრავს მანძილს ნებისმიერ X რეალიზაციასა და ω_i კლასს ეტალონს შორის

$$D_i = \min \left\| X - E_i^j \right\|, \quad j = 1,2,....., n_i$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ D_i არის მინიმალური მანძილი იმ მანძილებებიდან, რომლებიც გამოთვლილია X რეალიზაციასა და ω_i კლასის თითოეულ ეტალონთან. უცნობი რეალიზაცია X მიეკუთვნება ω_i კლასს, როცა $D_i < D_j$ ყველა $j \neq i$ დროს. ამ შემთხვევაში გადამწყვეტ ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$d_i(X) = \max_k \left\{ (X'E_i^k) - \frac{1}{2}\left(E_i^k\right)' E_i^k \right\}, \qquad k = 1,2,....., n_i$$

და როგორც წინა შემთხვევაში $X \in \omega_i$, თუ $d_i(X) > d_j(X)$ ყველა $j \neq i$ დროს.

3.5.3 პოტენციალური ფუნქციების მეთოდი

როგორც ფიზიკის კურსიდან ვიცით, წერტილოვანი ელექტრული მუხტი, როელიც მოთავსებულია ერთგვაროვან არეში ქმნის ელექტრულ ველს. სივრცის ნებისმიერ წერტილში პოტენციალი ტოლი:

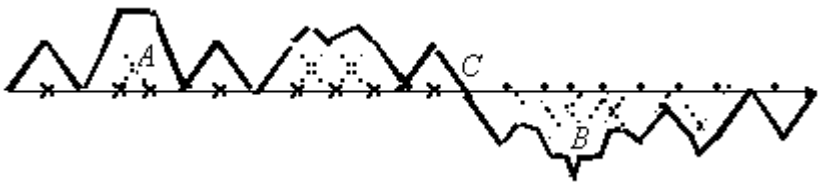
$$p = a\frac{q}{r^2} \quad ,$$

სადაც a – მუდმივი კოეფიციენტია, q – მუხტის სიდიდე, r – მანძილი წერტილიდან მუხტამდე. რაც უფრო იზრდება r მანძილი, მით უფრო კლებულობს p პოტენციალის სიდიდე.

ამრიგად, თუ ცნობილია მუხტის სიდიდე და მანძილი მუხტიდან წერტილამდე, მაშინ ადვილი გასაგებია წერტილის პოტენციალი. ე.ი. პოტენციალის სიდიდე შეიძლება გამოყენებული იყოს წერტილის მუხტიდან დაშორების ზომად. თუ არე შეიცავს რამდენიმე მუხტს, მაშინ არეს ყოველ წერტილში პოტენციალი ტოლია წერტილში ამ მუხტებით გამოწვეული პოტენციალების ჯამისა. თუ მუხტები, რომლებიც ქნიან ველს, კომპაქტურად

არიან განლაგებულნი, მაშინ მუხტებით შექმნილი ჯგუფშიგა პოტენციალი მაქსიმალურია და დაშორებისას იგი მცირდება.

დავუშვათ, რომ სივრცეში გვაქვს მუხტებისაგან შემდგარი ორი კომპაქტური ჯგუფი. ვთქვათ, ერთ ჯგუფში მუხტები დადებითია, ხოლო მეორეში –უარყოფითი, მაშინ გრაფიკულად გვექნება:



როგორც ნახაზიდან ჩანს, *A* წერტილში ჭარბობს დადებითი მუხტი, რადგან იგი იმყოფება დადებითი მუხტებისაგან შემდგარ ჯგუფთან, ხოლო *B* წერტილში გვექნება უარყოფითი პოტენციალი, რადგან იგი იმყოფება უარყოფით მუხტებისაგან შემდგარ ჯგუფთან. *C* წერტილში პოტენციალი ნულის ტოლია, რადგან დადებითი და უარყოფითი პოტენციალები ამ წერტილში ერთმანეთის ტოლია. ამ შემთხვევაში მიღებული ნიშნის მიხედვით წერტილები (რეალიზაციები) შეგვიძლია მივაკუთვნოთ ერთ ან მეორე ჯგუფს (კლასს). ნულის შემთხვევაში (*C* წერტილი) შეიძლია ჩავთვალოთ, რომ *X* რეალიზაცია არც ერთ კლასს არ მიეკუთვნება.

ზემოთ მოყვანილი იდეა გავავრცელოთ სივრცის ნებისმიერ წერტილზე. ამისათვის გამოვიყენოთ ისეთი ფუნქცია, რომელიც წააგავს ზემოთ განხილულ პოტენციალს, ე.ი. ფუნქციას კვების წერტილში უნდა გააჩნდეს მაქსიმალური მნიშვნელობა და წერტილიდან დაშორებისას უნდა კლებულობდეს. ასეთი პოტენციალური ფუნქცია შეიძლება იყოს, მაგალითად შემდეგი:

$$\varphi(r) = \frac{1}{1 + ar^2},$$

სადაც *a* –კოეფიციენტია, რომელზედაც დამოკიდებულია φ ფუნქციის კლების სიჩქარე. *r* წარმოადგენს მანძილს კვების წერტილსა და იმ წერტილს შორის, რომელშიც ითვლება პოტენციალი. *r* შეიძლება იყოს ნებისიერი მანძილი, მაგალითად, ევკლიდეს ან ჰემინგის.

φ სიდიდე ყოველ წერტილში შეიძლება ჩაითვალოს სიახლოვის ზომად წერტილსა და წყაროს წერტილს შორის. დაუშვათ, წყაროდ ჩავთვალეთ წერტილთა ერთობლიობა, რომლებიც მიეკუთვნებიან რაიმე *A* კლასს. მაშინ ამ წერტილთა წყაროების საშუალო პოტენციალი ახასიათებს თითოეული მათგანის სიახლოვეს მოცემულ წერტილსა და მთელ სიმრავლეს შორის. მაგალითად, თუ კომპიუტერის მეხსიერებაში დაფიქსირებულია *A* და *B* კალასების წერტილთა სიმრავლეები და ცნობილია ამ სიმრავლეების საშუალო პოტენციალები, მაშინ ახალი წერტილი მიეკუთვნება იმ კლასს, რომლის პოტენციალი ამ წერტილში უდიდესია.

პოტენციალთა მეთოდით სახეთა გარევის უმარტივესი ალგორითმი შემდეგში მდგომარეობს:

1. **სწავლება**. შესწავლის პროცესში კომპიუტერის მეხსიერებაში ფიქსირებულია ყველა წერტილის კოდები და რომელ კლასს მიეკუთვნებიან ისინი.

2. **გარჩევა.** გასარჩევ უცნობ X წერტილისათვის გამოითვლება თითოეული კლასის პოტენციალი შემდეგნაირად:

$$\phi(X,A)=\frac{1}{N_A}\sum_{i=1}^{N_A}\varphi_{ai}=\frac{1}{N_A}\sum_{i=1}^{N_A}\phi(X,a_i)$$

$$\phi(X,B)=\frac{1}{N_B}\sum_{i=1}^{N_B}\varphi_{bi}=\frac{1}{N_B}\sum_{i=1}^{N_B}\phi(X,b_i)$$

– –

– –

$$\phi(X,M)=\frac{1}{N_M}\sum_{i=1}^{N_M}\varphi_{mi}=\frac{1}{N_M}\sum_{i=1}^{N_M}\phi(X,m_i),$$

სადაც $A,B,....,M$ მოცემული კლასებია, N_A ,N_B ,……,N_M – თითოეულ კლასში წერტილების რაოდენობაა. $\phi(X,a_i)$ წარმოადგენს პოტენციალს, რომელსაც წარმოშობს გასარჩევ X წერტილში A კლასის i-ური წერტილი და იგი ტოლია:

$$\phi(X,a_i)=\frac{1}{1+ar_{ai}^2}$$

. შემდეგ ხდება $\phi(X,A),\phi(X,B),....,\phi(X,M)$ სიდიდეების შედარება და X წერტილი (სახე) მიეკუთვნება იმ კლასს, რომელიც ამ წერტილში ქმნის ყველაზე დიდ პოტენციალს. უმარტივეს შემთხვევაში, როცა საქმე გვაქვს ორ A და B კლასთან, მაშინ გვექნება: $\phi(X)=\phi(X,A)-\phi(X,B)$ და როცა ეს გამოსახულება მიიღებს დადებით მნიშვნელობას, მაშინ სახე მიეკუთვნება ერთ კლასს, ხოლო უარყოფითი სიდიდის დროს მეორე კლასს.

ზემოთ მოყვანილი ალგორითმი შეგვიძლია უფრო გავაუმჯობესოთ, თუ დამატებით ჩავატარებთ შემდეგ ოპერაციებს. როდესაც კომპიუტერს სწავლების პროცესში ყველა რეალიზაციას მივაწვდით, კომპიუტერს ვაიძულებთ იგივე რეალიზაციების გარჩევას და თუ იგი შეცდა, მაშინ მეხსიერებაში შედის ბრძანება, რათა შესაბამისი წერტილის წონა გაიზარდოს გარკვეული მნიშვნელობით, მაგალითად, ერთით. ეს იმას ნიშნავს, რომ შემდგომში ამ წერტილში შექმნილი პოტერციალი ორმაგდება. შემდეგ ტარდება ხელმეორედ გარჩევის პროცესი და ა.შ. მანამ, სანამ კომპიუტერი უშეცდომოდ არ გაარჩევს ყველა სახეს.

IV. ხელოვნური ნეირონული ქსელები

მრავალწლიანმა გამოკვლევებმა აჩვენა, რომ ის სამედიცინო ამოცანები, რომლებსაც გააჩნიათ არაცხადი ხასიათი და იხსნებიან ცხადი მეთოდებით გარკვეული სიზუსტით, სრულიად არადამაკმაყოფილებელია ფართო პრაქტიკული გამოყენებისათვის, კონკრეტულად დიაგნოსტიკის, პროგნოზირების და გადაწყვეტილების მიღების ამოცანების გადასაწყვეტად. სწორედ ასეთი არაცხადი ამოცნები წარმოადგენენ იდეალურ სფეროს ნეიოქსელური ტექნოლოგიების გამოყენებისათვის და ამან გამოიწვია ნეირონული ქსელების პრაქტიკულ კვლევებში წარმატებული გამოყენება. ამრიგად, ნეიროქსელების გამოყენების ერთ-ერთი წარმატებული სფერაა მედიცინა.

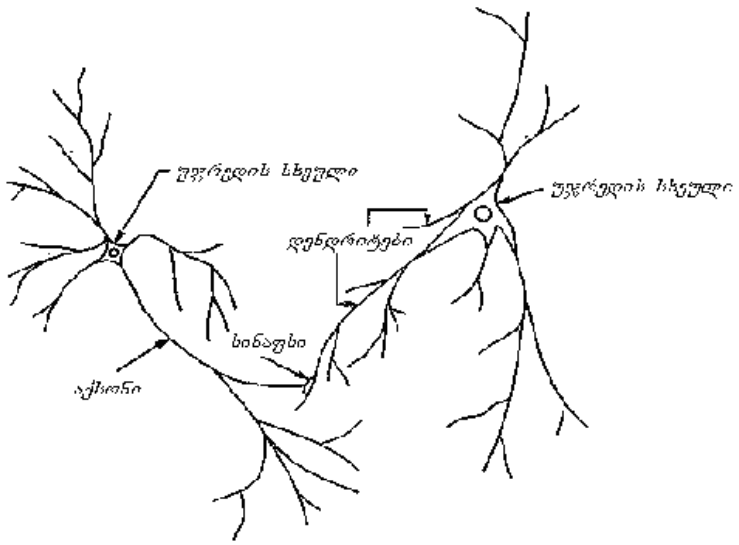
პირველი სამეცნიერო ნაშრომები ხელოვნურ ნეირონულ ქსელებში გამოჩნდა მე-20 საუკუნის ორმოციან წლებში და მათი ავტორები იყვნენ უ. მაკ-კალოკი, ე. პიტსი და უ. გამბა. მათ მიერ შექმნილ ბიოლოგიურ ნეირონის მოდელს ეწოდა პერსეპტრონი. შემდგომში შეიქმნა პერსეპტრონების სხვადასხვა მოდიფიკაციები, რომელთა შორის აღსანიშნავია ფრანკ როზებლანტის მიერ სამოციან წლებში შექმნილი პერსეპტრონი, რომლის საფუძველზეც აიგო ცნობილი გამოთვლითი კომპლექსი *ILIAK*-4, რომლის ძირითადი მიზანი იყო სახეთა გარჩევის პრობლემების გადაჭრა.

პირველი შედეგები ნეირონული ქსელების მოდელირებისა წარუმატებელი იყო, რის გამოც გამოკვლევები ამ სფეროში გარკვეულ წილად დამუხრუჭდა. ნეირობიოლოგიის განვითარებამ და ნერვულ სისტემებში მიმდინარე პროცესების კვლევაში მრავალი ახალი ინფორმაციის მიღებამ შემდგომში ბიძგი მისცა ხელოვნური ნეირონული ქსელების შექმნის პრობლემას.

ბოლო წლებში საგრძნობლად გაიზარდა ხელოვნური ნეირონული ქსელების გამოყენება სახეთა გარჩევის პროცესებში; დროითი მნკრივების პროგნოზირებაში; წრფივი და არაწრფივი ობიექტების მოდელების შექმნაში; ნეიროკომპიუტერის ანუ ე.წ. პარალელური მოქმედების კომპიუტერის აგებაში და ბევრ სხვა სფეროში.

4.1 ბუნებრივი ნეირონი და მასში მიმდინარე პროცესები

ნეირონი წარმოადგენს ნერვული სისტემის უჯრედს და სხვა უჯრედებისაგან იმით განსხვავდება, რომ მას გააჩნია მთელი რიგი გამოთვლითი ფუნქციები. მიუხედავად ნეირონის მრავალფეროვნებისა ისინი ძირითადად შედგებიან ერთი და იგივე დანიშნულების ელემენტებისაგან: უჯრედის სხეული (სომა), დენდრიტები და აქსონები. სქემატურად ნეირონი წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზზე:



ცნობილია, რომ მოზრდილი ადამიანის ტვინის ნეირონები არ აღდგებიან, ისინი კვდებიან. ეს იმას ნიშნავს, რომ ნეირონის ყველა კომპონენტი უწყვეტლივ უნდა იცვლებოდეს, ხოლო მასალა უნდა განახლდეს საჭიროების შემთხვევაში.

უჯრედის სხეული ანუ სომა, რომელიც მოქცეულია მემბრანულ გარსში, არეგულირებს უჯრედში მიმდინარე პროცესებს. იგი მართავს ნეირონის ენერგიის ხარჯვას და არეგულირებს უჯრედში მიმდინარე მრავალ სხვა პროცესებს. უჯრედის სხეულის გარე მემბრანას გააჩნია ნერვული იმპუსების (მოქმედების პოტენციალები) გენერირების უნიკალური უნარი, რომელიც წარმოადგენს ნერვული სისტემის სიცოცხლისათვის საჭირო ფუნქციას და მისი გამოთვლითი უნარის ცენტრს. სომას ფორმის მიხედვით არჩევენ ათასობით ნეირონის ტიპს, რომელთაც გააჩნიათ ჩვეულებრივ 5-დან 100 მიკრომეტრის სიგრძის დიამეტრი.

სომას დანიშნულებაა შემოსული იმპულსების აკუმულირება (აჯამვა). თუ სომას პოლარიზაციის პროცესი უფრო მზარდია ვიდრე დეპოლიზაციისა, მაშინ აჯამვის გარკვული ხარისხის მიღწევისას იგი განიმუხტება და აქსონში ჩნდება შესაბამისი სიგნალი. განმუხტვის შემდეგ ნეირონს გარკვეული დროის განმავლობაში აღარ შეუძლია შემოსულ სიგნალზე რეაგირება. დროის ამ მონაკვეთს, რომელიც შეიძლება გაგრძელდეს წამის მეასედებიდან რამდენიმე წამამდე, ლატენტური პერიოდი ეწოდება. ლატენტური პერიოდის გავლის შემდეგ ნეირონი მოდის საწყის „მუშა“ მდგომარეობაში.

დენდრიტების დანიშნულებაა გარემოდან მიღებული სიგნალების გატარება და გარდაქმნა. გარდაქმნაში იგულისხმება სიგნალის დამუხრუჭება ანუ შემცირება, ან გაზრდა. დენდრიტების საშუალებით გარემოდან ან სხვა ნეირონებიდან გამომავალი სიგნალები მოხვდებიან სომაში. ამრიგად, დენდრიტები წარმოადგენენ განშტოებად სტრუქტურას, რომლებიც გამოდიან სომიდან და მათზე განლაგებულია სინაფსური შენაერთები, რომლებიც ღებულობენ სხვა აქსონებიდან სიგნალებს. დენდრიტების მიერ სიგნალების გატარების პროცესი დამოკიდებულია სინაფსურ კავშირებზე და მისი დიამეტრის ცვლილებებზე. ასე მაგალითად, დიამეტრის შემცირება შეიძლება იწვევდეს სიგნალის გაზრდას, ხოლო დიამეტრის გადიდება–შემცირებას ანუ დამუხრუჭებას.

აქსონი წარმოადგენს განუტოტებელ ნერვულ ბოჭკოს, რომლის დანიშნულებაა ნეირონის მიერ გამომუშავებული სიგნალის გატარება. აქსონს გააჩნია განშტოებები, რომელთა საშუალებით იგი უკავშირდება სხვა აქსონებს, დენდრიტებს და მათი საშუალებით სხვა ნეირონებს. აქსონში სიგნალი გვაქვს იმ შემთხვევაში, როდესაც სომა განიმუხტება. იმპულსების ამპლიტუდა განმუხტვის ძალის მიუხედავად მუდმივია, მაგრამ იცვლება მათი სიხშირე. დენდრიტებში მისი დიამეტრის ცვლილებებით და სინაფსების საშუალებით ხდება აკრძალვის, არჩევის და თანაკვეთის ოპერაციები, ანუ ლოგიკური „და“, „ან“ და „არა“ მოქმედებები. აქსონი შეიძლება იყოს მოკლე (0,1 მმ) და გრძელი, რომლის სიგრძე აღემატება 1მ და რომელიც განთავსებულია ადამიანის სხეულის სხვა ნაწილებში.

აქსონის დაბოლოებას გააჩნია უამრავი განშტოება, რომელთა დაბოლოება წარმოადგენენ სინაფსებს, საიდანაც სიგნალი დენდრიტების საშუალებით გადაეცემა სხვა ნეირონებს, ხოლო ზოგიერთ შემთხვევაში სომას.

სინაფს გააჩნია სფეროსებრივი ფორმა, სადაც განთავსებულია ბუშტულები, რომლებიც შეიცავენ ნეიროტრანსმიტერულ მოლეკულების დიდ რაოდენობას. როდესაც იმპულსი გადის აქსონში ზოგიერთი მისი ბუშტულები გამოანთავისუფლებენ თავის შემადგენლობას სინაფსურ ხვრელში, რომლებსაც იჭერენ დენდრიტის სპეციალური რეცეპტორები და ხდება მათი დანერგვა უჯრედის სხეულში. არსებობს 30-ზე მეტი სახის ნეიროტრანსმიტერები, რომელთაგან ზოგი წარმოადგენს ამგზნებს და იწვევენ უჯრედის აგზნებას და ზოგიერთი გამოიმუშავებს გამოსავალ იმპულსებს. სხვები წარმოადგენენ დამუხრუჭების ნეიროტრანსმიტერებს, რომლებიც ცდილობენ იმპულსის შემცირებას ან ჩაქრობას.

სომა შემოსულ სიგნალებს აჯამავს და თუ აჯამული სიგნალი ზღურბლურ სიგნალზე მეტია, გამოიმუშავებს იმპულს, რომელიც აქსონის გავლით გადაეცემა სხვა ნეირონებს.

დასკვნის სახით ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი:

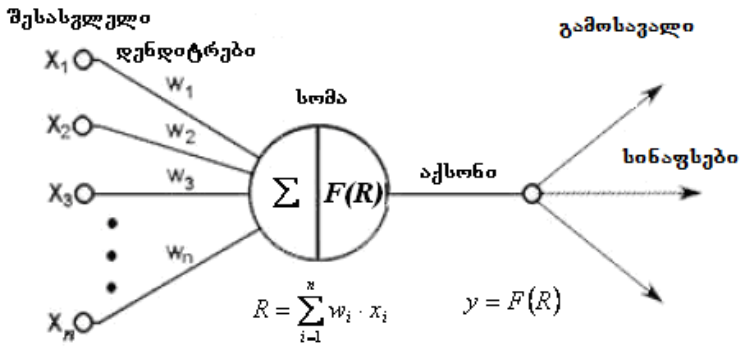
1. ფუნქციონალურად ნეირონი სიგნალებს ღებულობს შემავალი არხების ანუ დენდრიტების საშუალებით გარემოდან ან სხვა ნეირონებისაგან სინაფსების საშუალებით. აქედან სიგნალები მოხვდებიან სომაში.

2. სომაში მოხვედრილი სიგნალები აიჯამებიან სხვა ანალოგურ სიგნალებთან ერთად და როდესაც ჯამური სიგნალი გადააჭარბებს გარკვეულ ზღურბლურ მნიშვნელობას მოხდება სომას განმუხტვა და ნეირონის გამოსავალზე ანუ აქსონზე გაჩნდება იმპულსი.

3. ნეირონის მიერ გამომუშავებულ სიგნალს აქსონი გაატარებს და მის ბოლოებზე არსებული სინაფსების საშუალებით გადასცემს სხვა ნეირონებს, რომლებიც თავის მხრივ შეიძლება აღიგზნონ ან პირიქით დამუხრუჭდენ. სინაფს გააჩნია გარკვეული ინტესიობა ანუ წონა, რომელიც შეესაბამება ნეირონის სინაფსურ აქტიობას.

4.2 ხელოვნური ნეირონის მოდელი

პირველი მიახლოებით ხელოვნური ნეირონი, რომელსაც ზოჯერ მათემატიკურ ნეირონსაც უწოდებენ, წარმოადგენს ბუნებრივი ნეირონის თვისებების იმიტაციას. ხელოვნური ნეირონის შესავალზე შედის გარკვეული რაოდენობის სიგნალები, რომელთაგან თითოეული მათგანი წაროადგენს სხვა ნეირონის გამოსავალს. თითოეული შემოსავალი სიგნალი მრავლდება გარკვეული წონით კოეფიციენტზე, შემდეგ იჯამება და მიღებული ჯამი ახასიათებს ნეირონის აქტივაციის დონეს. ხელოვნური ნეირონის მოდელი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:



შემავალი სიგნალები $x_1, x_2, ..., x_n$, რომელთაგან თითოეული მათგანი წაროადგენს სხვა ნეირონის გამოსავალს, შეესაბამებიან ბიოლოგიური ნეირონის სინაფსებში გამავალ სიგნალებს. თითოეული შემავალი სიგნალი მრავლდება შესაბამის წონით $w_1, w_2, ..., w_m$ კოეფიციენტებზე და იჯამება აჯამვის $\sum$ ბლოკში. თითოეული წონითი კოეფიციენტი შეესამამება სინაფსური კავშირის ე.წ. „ძალას“. აჯამვის ბლოკი შეესაბამება სომას და თუ მისგან გამოსულ სიგნალს ავღნიშავთ R სიმბოლოთი, მაშინ გვექნება:

$$R = \sum_i w_i \cdot x_i = W'X \ . \qquad y = F(R)$$

R სიგნალი ახასიათებს ნეირონის რეაქციას და როგორც წესი იგი გარდაიქმნება აქტივაციურ ანუ მახასიათებელ F ფუნქციად და თუ ის რაიმე T ზღრულბზე მეტია, მაშინ ნეირონის გამოსავალზე ვღებულობთ სიგნალს. თუ ნეირონის გამოსავალ სიგნალს ავღნიშავთ Y სიმბოლოთი, მაშინ გვექნება:

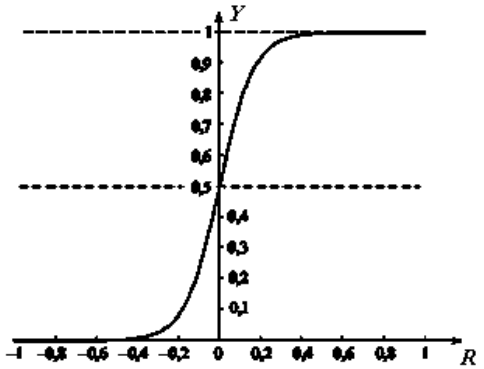
$$Y = f(W'X - T) = f(R - T) \ .$$

აქტივაციური ფუნქცია სხვადასხვა სახისაა და იგი შეიძლება ჩაითვალოს ხელოვნური ნეირონის არაწრფივ მაძლიერებელ მახასიათებლად. გაძლიერების კოეფიციენტი განისაზღვრება, როგორც ფარდობა Y სიგნალის ნაზრდისა R სიგნალის ნაზრდზე.

პრაქტიკაში უფრო ხშირად გამოიყენება სიგმაიდალური (სიგმა) ფუნქცია. (ფუნქციას სიგმაიდალური უწოდეს იმის გამო, რომ გრაფიკულად იგი წააგავს „S“ ასოს). სიგმაიდალური აქტივაციის ფუნქცია მათემატიკურად ასე გამოისახება:

$$Y = \frac{1}{1 + \exp\{-R\}} \quad .$$

ხშირად ამ ფუნქციას სტანდარტულს უწოდებენ და როცა $(R - T) \geq 0$, მაშინ $Y = 0$ გრაფიკულად სიგმა ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:



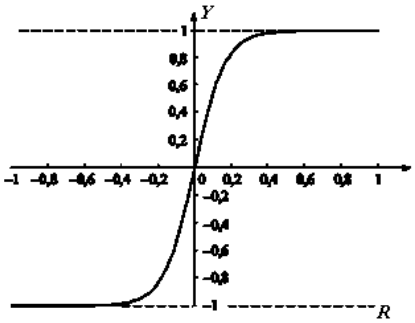
სიგმაიდალური ფუნქციის ერთ-ერთ ღირებულებას წარმოადგენს მისი პირველი რიგის წარმოებულის მარტივი სახე:

$$y' = F(R)[1 - F(R)]$$

უნდა აღინიშნოს, რომ სიგმაიდალური ფუნქცია დიფერენცირებადია მთელი აბსცისის ღერძის მიმართ. ამ თვისების გამო იგი ხშირად გამოიყენება ნეიროქსელების სწავლების პროცედურებში. გარდა ამისა, მას გააჩნია უნარი გააძლიეროს დაბალი სიგნალები უფრო ძლიერად, ვიდრე დიდი სიგნალები, რაც იწვევს დიდი სიგნალებით გაჯერების თავიდან აცილებას.

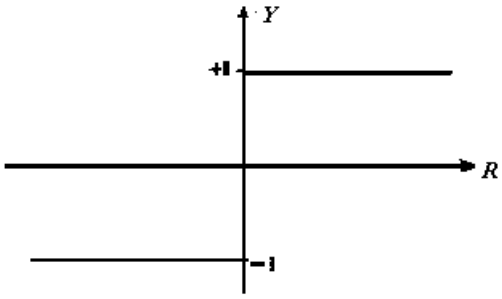
გარდა სიგმაიდალური ფუნქციისა პრაქტიკაში ხშირად გამოიყენება ჰიპერბოლური ტანგესის ფუნქცია, რომელიც სიგმა ფუნქციის მსგავ ფუნქციას წარმოადგენს იმ განსხვავებით, რომ იგი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ და $R = 0$ წერტილში ნულის ტოლია.

$$Y = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$



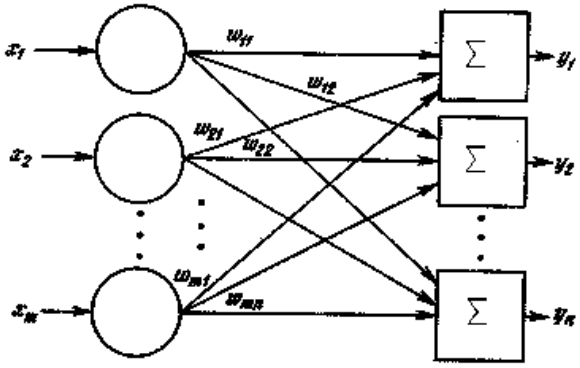
გამოიყენება აგრეთვე კიბისებური ფუნქცია, რომელსაც აქვს შემდეი სახე:

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{როცა} \quad R \geq 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad R < 0. \end{cases}$$



არსებობენ სხვა აქტივაციური ფუნქციები (ჰოპფილდ-ტანკის, პარამეტრზე დამოკიდებული, რადალურ-ბაზისური ფუნქციები და სხვა), რომლებიც მეტ-ნაკლებად გამოიყენებიან პრაქტიკულ კვლევებში.

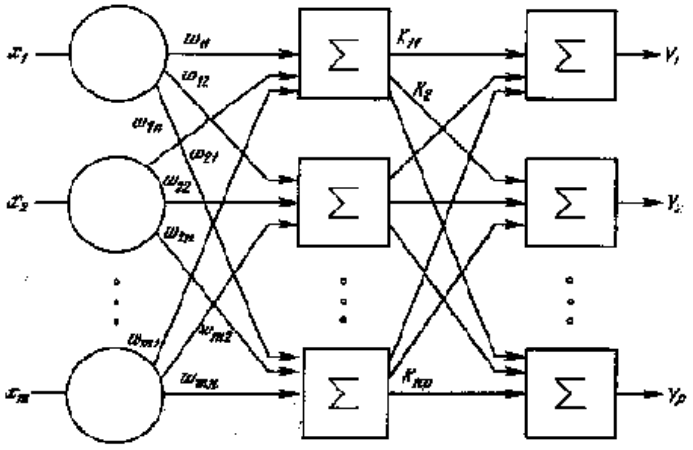
არჩევან **ერთშრიან** და **მრავალშრიან** ხელოვნურ ნეირონულ ქსელებს. ერთშრიანი ნეირონული ქსელის ბლოკ-სქემა წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზზე:



სქემაზე აღნიშნული რგოლები გამოიყენება მხოლოდ შემავალი სიგნალის განაწილებისათვის. მათ არ გააჩნიათ რაიმე გამოთვლითი ფუნქცია და ამიტომ ისინი შრედ არ შეიძლება ჩაითვალოს.

წონითი კოეფიციენტების W მატრიცას გააჩნია m სტრიქონი და n სვეტი. გამოსავალი ვექტორი Y, რომლის კომპონენტებია ნეირონების გამოსავალი R, მიიღება: $Y = XW$ გამოსახულებით, სადაც Y და X –ვექტორი-სტრიქონებია.

მრავალშრიანი ხელოვნური ნეირონული ქსელი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:



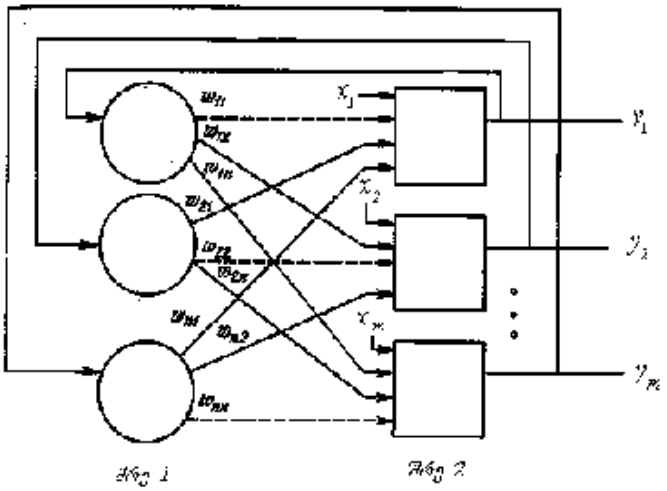
როგორც ვხედავთ, მრავალშრიანი ქსელი შეიძლება შევქმნათ შრეების კასკადებით, სადაც ერთი შრის გამოსასვლელი მეორე შრის შესასვლელია. შრის გამოსასვლელი სიგნალი განისაზღვრება შემავალი ვექტორის პირველი წონით მატრიცაზე გამრავლებით და შემდგომ მიღებული შედეგის გამრავლებით მეორე შრის წონით მატრიცაზე, ე.ი. $(XW_1)W_2$ ანუ $X(W_1W_2)$. მრავალშრიანი ნეირონული ქსელის შუალედურ შრეს, რომელსაც უშუალოდ არ გააჩნია კავშირი ნეიროქსელის გამოსავალთან, **ფარული შრე** ეწოდება.

ამრიგად, ორშრიანი წრფივი ქსელი ექვივალენტურია ერთშრიანი ქსელისა, რომლის წონის მატრიცა მიიღება ორივე შრის წონითი მატრიცების გადამრავლებით. აქედან გამომდინარე, ნებისმიერი მრავალშრიანი წრფივი ნეირონული ქსელი შეგვიძლია შევცვალოთ მისი ექვივალენტური ერთშრიანი ქსელით.

ერთშრიანი ქსელი საკმაოდ შეზღუდულია თავისი გამოთვლითი შესაძლებლობებით. იმისათვის, რომ ქსელის შესაძლებლობა ერთშრიან ქსელთან შედარებით გაიზარდოს, საჭიროა გამოვიყენოთ არაწრფივი აქტივაციის ფუნქცია.

ზემოთ განხილულ ნეირონულ ქსელებს უკუკავშირი არ გააჩნიათ და ამიტომ მათ **პირდაპირი გავრცელების ქსელებს** უწოდებენ. ასეთ ქსელებს მეხსიერება არ გააჩნიათ და მათი გამოსავალი მთლიანად განისაზღვრება მიმდინარე შემავალი სიგნალებით და წონებით. პირდაპირი გავრცელების ქსელებს მიეკუთვნებიან: პერსეპტრონები, რადიალურ ბაზისური ფუნქციების ქსელები, ალბათური ქსელები და სხვა.

უკუკავშირიანი ქსელის შემთხვევაში გამოსავალი სიგნალი უბრუნდება შემოსასვლელს და აქედან გამომდინარე, გამოსავალი სიგნალი განისაზღვრება როგორც მიმდინარე შემომავალი სიგნალით, ასევე წინა გამოსავალი სიგნალებით. ამ მიზეზის გამო უკუკავშირებიან ქსელს შეიძლება გააჩნდეს ადამიანის მოკლევადიანი მეხსიერების მსგავსი თვისებები. ერთშრიანი უკუკავშირებიანი ქსელი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:



ნახ. 1 ნახ. 2

უკუკავშირიანი ქსელებს მიეკუთვნებიან: ჰოპფილდის, ჰემინგის, კოჰონენის, ადაპტური რეზონანსული თეორიის ნეიროქსელები და სხვა.

დასკვნის სახით ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი ცნებები:

1. ნეირონის მიმდინარე მდგომარეობა განისაზღვრება ფორმულით:

$$Y_i = \sum_{j=1}^{N} w_{ij} x_j + T_i \quad , \qquad (1)$$

სადაც x_j, $j = 1,2,.....,n$ შემავალი სიგნალებია,

w_{ij} – წონითი კოეფიციენტებია,

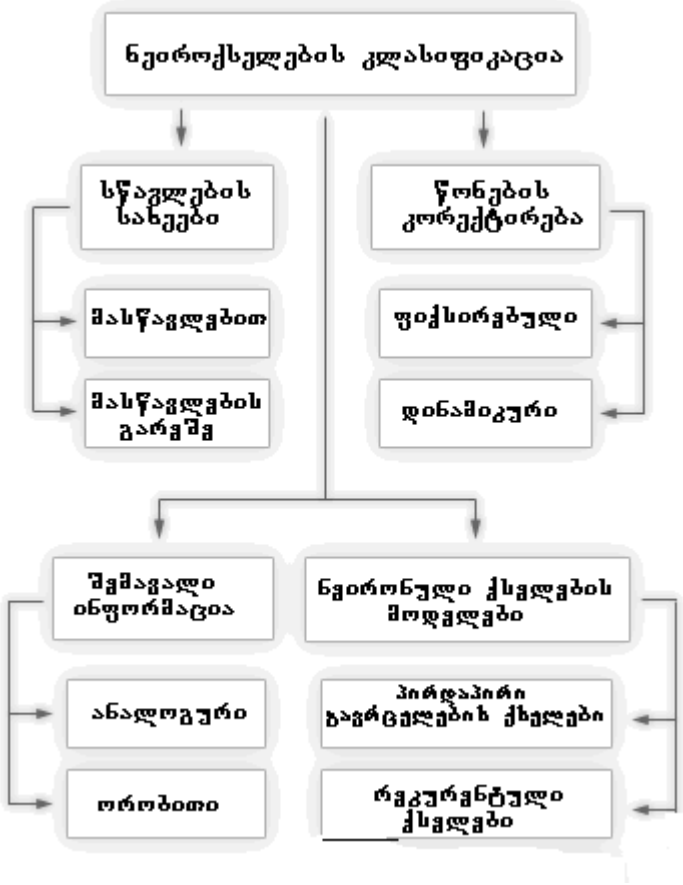
T_i – ზღურბლური მნიშვნელობაა.

2. დადებითი წონის კოეფიციენტები შეესაბამებიან სინაფსების აღზნებას, ხოლო უარყოფითები–დამუხრუჭებას. თუ $\omega_{ij} = 0$, მაშინ კავშირი i –ურ და j-ურ ნეირონებს შორის არ არსებობს.

3. მიღებულ სიგნალს ნეირონი აქტივაციური ფუნქციით გარდაქმნის გამოსავალ $Y_i = F(x_i)$ სიგნალად. ზოგადად, აქტივაციის ფუნქცია წარმოადგენს არაწრფივ ფუნქციას, რომლითაც ხდება აღზნების გატარების პროცესის მოდელირება.

4.3 ნეირონული ქსელების კლასიფიკაცია

ნეირონული ქსელების კლაციფიკაცია წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზე:



სწავლების სახეებით ნეირონული ქსელები იყოფა:

– ქსელები, რომლებიც იყენებენ სწვლებას მასწავლებით,
– ქსელები, რომლებიც იყენებენ სწვლებას მასწავლების გარეშე.

სწავლება მასწავლებით გულისხმობს შემდეგს. ყოველ შემავალ ვექტორისათვის არსებობს მიზნობრივი ვექტორი (სწორი პასუხი), რომელიც წარმოადგენს სასურველ გამოსავალ ვექტორს. მათ ერთად ეწოდებათ სწავლების წყვილი. ჩვეულებრივ ნეიროქსელის სწავლება ხორციელდება გარკვეული რაოდენობის ასეთი სწავლების წყვილების საშუალებით. შესასწავლი ვექტორების სიმრავლე თანმიმდევრულად მიეწოდება ნეიროქსელის შესასვლელს. ცდომილების განსაზღვრისათვის ქსელის გამოსავალი დარდება შესაბამის მიზნობრივ ვექტორს და ხდება ყოველი ვექტორისათვის სინაფსური წონითი კოეფიციენტების კორექტირება. წონითი კოეფიციენტები ისე უნდა დარეულიდეს, რომ გამოსავალი ვექტორი (პასუხი) რაც შეიძლება ახლოს იყოს მიზნობრივ ვექტორთან.

სწავლება მასწავლების გარეშე ანუ თვითსწავლების ქსელები წარმოადგენენ, ნეირონის ბიოლოგიური საფუძვლების თვალსაზრისით, სწავლების გაცილებით დამაჯერებელ მოდელს. ასეთ ქსელებს არ სჭირდებათ მიზნობრივი ვექტორები და შესაბამისად შედარების ოპერაციების ჩატარება. სწავლების სიმრავლე შდგება მხოლოდ შემავალი ვექტორებისაგან. სწავლების ალგორითმი წონითი კოეფიციენტების კორექტირებას ისე ახდენს, რომ

მიღებული იყოს შეთანხმებული გამოსავალი ვექტორი. ე.ი. ისე, რომ საკმაოდ ახლოს მდგგარი შემავალი ვექტორები იძლეოდნენ ერთნაირ გამოსავალ ვექტორს.

არსებიბს აგრეთვე შერეული სწავლების ალორითმი, რომლის დროსაც წონითი კოეფიციენტების ნაწილი განისაზღვრება მასწავლების, ხოლო მეორე ნაწილი – მასწავლების გარეშე.

წონების კორექტირება. აქ გვაქვს ფიქსირრებული კავშირებიანი ქსელები, რომლისთვისაც წონითი კოეფიციენტები, ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, შეირჩევა თავიდან და დინამიკური კავშირების ქსელები, რომლისთვისაც სწავლების პროცესში ხდება სინაფსური წონების კორექტირება.

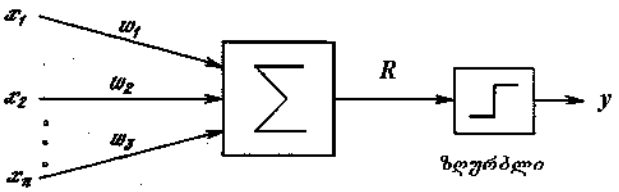
შემავალი ინფორმაცია ორი სახისაა: ანალოგური ანუ ნამდვილ რიცხვთა ფორმით წარმოდგენილი მონაცემები და ორობითი, სადაც შემავალი ინფორმაცია წარმოდგენილია ორობით (0,1) კოდის საშუალებით.

პირდაპირი გავრცელების ქსელების ყველა კავშირები მიმართულია მკაცრრად შემავალი შრის ნეირონებიდან გამოსავალი შრის ნეირონებისაკენ. ასეთ ქსელებს მიეკუთვნებიან პერსეპტრონები, რადიალურ – ბაზისური ფუნქციების ქსელები და ალბათური ნეიროქსელები.

რეკურენტულ ანუ უკუკავშირებიან ქსელებში სიგნალი გამოსავალი შრის ნეირონებიდან ან ფარული შრის ნეირონებიდან გადაეცემა უკან შესასვლელი შრის ნეირონების შესასვლელებს. ასეთ ქსელებს მიეკუთვნებიან ჰოპფილდის, ჰემინგის, კოჰონენის, ადაპტური რეზონანსული თეორიის და სხვა ნეიროქსელები.

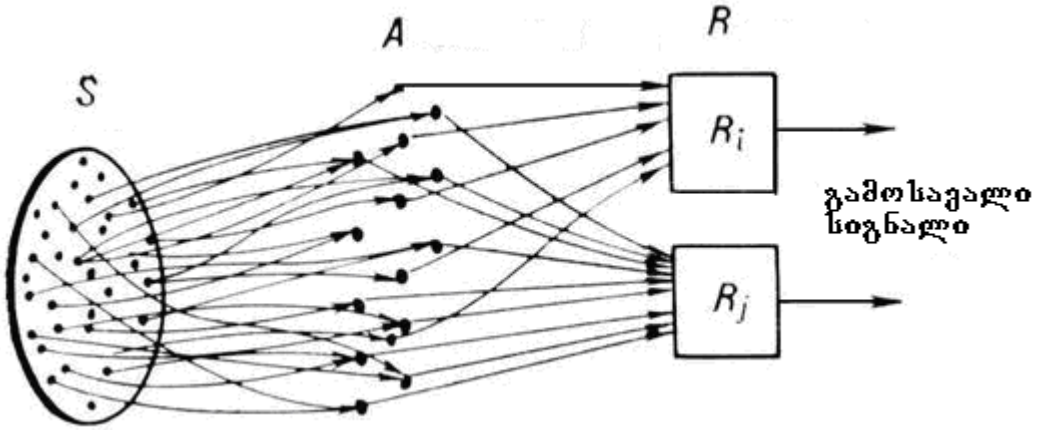
4.4 პერსეპტრონი

განვიხილოთ მარტივი ხელოვნური ნეირონის მოდელი



თუ აჯამული სიგნალი $R = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$ მეტია ზღურბლზე, მაშინ ნეირონის გამოსავალი სიგნალი $Y = 1$, წინააღმდეგ შემთხვევაში $Y = 0$. ასეთი ნეირონულ მოდელებისაგან შემდგარ სისტემას პერსეპტონი ეწოდება.

განვიხილოთ ფ. როზენბლანტის მიერ დამუშავებული პერსეპტრონი, რომლის ბლოკ-სქემა წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზზე:



პერსეპტრონის მიმღებ მოწყობილობად აღებულია ბადურას ფოტოელექტრული მოდელი, კერძოდ რეცეპტორების *S* არე, რომელიც შედგება რამდენიმე ასეული ფოტოწინაღობისგან და რომელიც თვალის ბადურის ანალოგიურია და აღიქვამს გარედან შემოსულ სიგნალებს. რეცეპტორების არეს თითოეული ელემენტი შეიძლება იყოს ორ მდგომარეობაში – აგზნებულ და არაგზნებულში, იმისდა მიხედვით ეცემა თუ არა შესაბამის ფოტოწინაღობის არეში წარმოდგენილი გასარჩევი ფიგურის კონტური. თითოეული ელემენტის გამოსასვლელზე მიიღება სიგნალი, რომელიც ერთის ტოლია თუ ელემენტი აგზნებულია და ნულის ტოლია, როცა ელემენტი არ არის აგზნებული.

რეცეპტორების გამოსასვლელები შემთხვევითობის პრინციპით მიერთებულია ასოციატური შრის ე.წ. *A* ელემენტებთან და იგი უცვლელია ექსპერიმენტის ბოლომდე. *A* ელემენტი წარმოადგენს სუმატორს რამდენიმე შესასვლელით და ერთი გამოსასვლელით. *A* ელემენტი აწარმოებს მის შესასვლელზე მიწოდებული სიგნალების ალგებრულ აჯამვას და მიღებული მნიშვნელობა თუ აღემატება რაიმე *T* ზღურბლურ მნიშვნელობას, მაშინ *A* ელემენტი აგიღზნება და გამოსასვლელზე გვაძლევს სიგნალს, რომელიც ერთის ტოლია. წინააღმდეგ შემთხვევაში გამოსასვლელზე გვექნება ნული. ე.ი.

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{როცა} \quad \left(\sum_i r_{ij} x_i - T\right) \geq 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad \left(\sum_i r_{ij} x_i - T\right) < 0, \end{cases}$$

სადაც $r_{ij} = 1$, როცა i –ური რეცეპტორი მიერთებულია A_j ელემენტთან და $r_{ij} = -1$, როცა i –ური რეცეპტორი მიერთებულია A_j ელემენტთან უარყოფითი ნიშნით. როცა i –ური რეცეპტორი A_j ელემენტთან არ არის მიერთებული, მაშინ $r_{ij} = 0$. *A* ელემენტის გამოსავალი სიგნალები მრავლდებიან შესაბამის w_i წონით კოეფიციენტებზე და შემდეგ აიჯამებიან

$$R = \sum_{j=1}^{m} w_j x_j$$

აჯამული სიგნალი მიეწოდება ე. წ. რეაგირების ელემენტს ანუ *R* - ელემენტს. თუ *R* დადებითია ან ნულის ტოლი, მაშინ *R* ელემენტი გამოსასვლელზე იძლევა ერთს, ხოლო როცა *R* უარყოფითია, მაშინ ნულს. ე. ი.

$$Y = \begin{cases} 1, \text{ როცა } & R \geq 0, \\ 0, \text{ როცა } & R < 0. \end{cases}$$

დავუშვათ, რომ რეცეპტორების არეში დაპროგრამებულია ფიგურები, რომლებიც მიეკუთვნებიან ორ სხვადასხვა კლასს. თუ შესაძლებელია პერსეპტრონი მივიყვანოთ ისეთ მდგომარეობაში, რომ საკმაოდ საიმედოდ გამოსასვლელზე მოგვცემს ერთს, როცა მის შესასვლელზე ერთი კლასის ფიგურაა და ნულს, როცა მეორე კლასის ფიგურაა, მაშინ პერსეპტრონს გააჩნია ორი სახის გარჩევის უნარი.

როცა კლასების რაოდენობა ორზე მეტია, მაშინ წონითი კოეფიციენტების სიმრავლე $\{w\}$ მოცემული უნდა იყოს ყველა კლასისათვის ცალ-ცალკე. ასევე, რეაგირების R ელემენტების რაოდენობა ტოლი უნდა იყოს კლასების რაოდენობისა. გასარჩევი ობიექტი მიეკუთვნება იმ კლასს, რომლის R ელემენტის გამოსავალი სიგნალი უდიდესია.

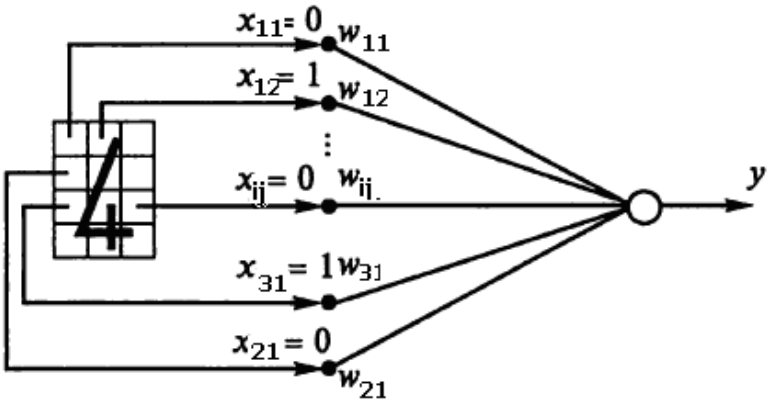
4.5 ხელოვნური ნეირონული ქსელის სწავლება

4.5.1 ერთშრიანი ნეირონული ქსელის სწავლება

იმისათვის, რომ ნეირონული ქსელები გამოყენებული იყოს პრაქტიკული ამოცანების ამოხნისათვის საჭიროა ნეირონული ქსელების სწავლება. მეტად მნიშვნელოვანია ის ფაქტი, რომ ნეირონული ქსელების სწავლება შესაძლებელია. გასული საუკუნის 60 წლებში როზენბლანტმა დაამტკიცა თეორემა ერთშრიანი პერსეპტრონის სწავლების შესახებ.

სწავლების ზოგადი იდეა შემდეგში მდგომარეობს: დასაწყისში ნეირონული ქსელის შესასვლელს მიეწოდება სასწავლო X ამონარჩევი ცნობილი შედეგებით და ვაკვირდებით ქსელის გამოსავალ სიგნალს $Y = F(X)w_{ij}$. წონით კოეფიციენტების და თითოეული ნეირონის აქტივაციის ზღურბლური მნიშვნელობის რეგულირებით ქსელს ვაიძულებთ მის გამოსავალზე მივიღოთ სასურველი შედეგი. ამის შემდეგ, საგამოცდო ამონარჩევით ვამოწმებთ ნეირონული ქსელის მუშაობის სიზუსტეს. მაგალითად, კლასიფიკაციის ამოცანაში ჩვენ შეგვიძლია მოვითხოვოთ, რომ ქსელმა 90%-ით სწორად ჩაატაროს სახეების კლასიფიკაცია. პროგნოზირების ამოცანებში ჩვენი მიზანი შეიძლება იყოს პროგნოზირების სიზუსტე, რომელიც არ უნდა აღემატებოდეს წინასწარ მოცემულ მნიშვნელობას. თუ ნეირონული ქსელი პასუხობს წაყენებულ მოთხოვნებს, მაშინ მისი გამოყენება პრაქტიკულ კვლევებში უკვე შესაძლებელია.

განვიხილოთ სწავლების პროცესის ალგორითმი მეტად მარტივ როზენბლატის ერთშრიან პერსეპტონის მაგალითზე. ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე ნაჩვენებია პერსეპტრონის უმარტივესი ვარიანტი, რომლის დანიშნულებაა გაარჩიოს რიცხვები ერთმანეთისაგან.



წარმოვიდგინოთ მატრიცა, რომელიც შეიცავს 12 ფოტოელემენტს, რომლებიც განლაგებული არიან 4 ჰორიზონტალურ მწკრივში. ყოველ მწკრივში მოთავსებულია 3 ფოტოელემენტი. ფოტოელემენტების მატრიცაზე ხდება ბარათის ზედდება, სადაც წარმოდენილია ციფრი (ჩვენი მაგალითისათვის რიცხვი 4). თუ ფოტოელემენტზე მოხვდება ციფრის რომელიმე ფრაგმენტი, მაშინ ეს ფოტოელემენტი გამოიმუშავებს სიგნალს, რომელიც ერთის ტოლია, წინააღმდეგ შემთხვევაში – ნულის. როგორც ნახაზიდან ჩანს, პირველი ფოტოელემენტი იძლევა $x_{11} = 0$ სინალს, მეორე ფოტოელემენტი – $x_{12} = 1$ სიგნალს და ა.შ.

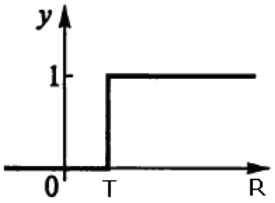
ამის შემდეგ სიგნალები მრავლდება თავის შესაბამის წონით კოეფიციენტებზე და ხდება მათი აჯამვა.

$$R = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j$$

მიღებული ჯამური R სიგნალი დარდება ზღურბლურ T მნიშვნელობას და თუ შედეგი დამაკმაყოფილებელია, მაშინ გამოსავალი სინალი $Y = 1$, წინააღმდეგ შემთხვევაში $Y = 0$. ე.ი.

$$Y = \begin{cases} 1, & R \geq T, \\ 0, & R < T. \end{cases}$$

როგორც Y ლოგიკურ გამოსახულებიდან ჩანს, ამ შემთხვევაში გამოიყენება შემდეგი სახის კიბისებური აქტივაციის ფუნქცია:



პერსეპტრონის მიზანია გამოსავალი სიგნალი იყოს $Y = 1$ ტოლი, როცა ბარათზე აღბეჭდილია ციფრი 4 და $Y = 0$ – სხვა რიცხვების დროს.

ეს მიზანი მიიღწეა პერსეპტონის სწავლებით, რომელიც მდგომარეობს წონითი w_j კოეფიციენტების კორექტირებაში. თუ გამოსავალი სიგნალი $Y = 1$, მაშინ კოეფიციენტების კორექტირება არაა საჭირო, რადგან პერსეპტრონის რეაქცია სწორია. მაგრამ, თუ გამოსავალი სიგნალი არასწორია, ე.ი. $Y = 0$, მაშინ

საჭიროა იმ წონითი კოეფიციენტების გაზრდა, როლებიც ახდენენ ნეირონის აგზნებას. ჩვენ შეთხვევაში საჭიროა w_{12}, w_{31}, w_{41} და ა.შ. კოეფიციენტების კორექტირება, ანუ ამ შეთხვევაში მათი მნიშვნელობების გაზრდა.

ამრიგად, შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ წონითი კოეფიციენტების კორექტირების შემდეგი იტერაციული პროცედურა:

ბიჯი 1. წარმოვადგინოთ შემავალი სახე და განვსაზღვროთ პერსეპტონის გამოსავალი Y სიგნალი.

ბიჯი 2. ა) თუ გამოსავალი სწორია, მაშინ გადავიდეთ 1 - ბიჯზე.

ბიჯი 2. ბ) თუ გამოსავალი სიგნალი არასწორია და ნულის ტოლია, მაშინ იზრდება გააქტივებული შემომავალი სინალების კოეფიციენტები, მაგალითად, წონით კოეფიციენტებს დაუმატოთ ყველა შემომავალი სინალი:

$$w_j(t+1) = w_j(t) + x_j$$

ბიჯი 2. გ) თუ გამოსავალი სიგნალი არასწორია და ერთის ტოლია, მაშინ საჭიროა შემომავალი სიგნალის წონითი კოეფიციენტების შემცირება, მაგლითად ასე:

$$w_j(t+1) = w_j(t) - x_j$$

ბიჯი 3. გადავიდეთ 1 – ბიჯზე ან დავამთავროთ შესწავლის პროცესი.

მოყვანილ ალორითმში ბიჯ 2. ბ)-ს უწოდებენ ჰების პირველ წესს, ხოლო ბიჯ 2. გ) – ჰების მეორე წესს. ეს ალორითმი პირველად შემოგვთავაზა ჰებმა 1949წ. უნდა შევნიშნოთ, რომ **ჰების წესი** მოგვაგონებს ცხოველების გაწვრთნის „მათრახი – ტკბილეული" – ის მეთოდს ან ბავშვის აღზრდის პროცესს წახალისებისა და დასჯის პრინციპის გამოყენებას.

ზემოდ განხილული სწავლების ალორითმი შეიძლება წარმოვადინოთ ზოგადი ფორმის სახით. თუ d – თი აღვნიშნავთ საჭირო გამოსავალ სინალს, მაშინ ყოველ იტერაციაზე შესაძლებელია განისაზღვროს სხვაობა საჭირო d სიგნალსა და რეალურ Y სიგნალს შორის ე.ი. $\varepsilon = (d - Y)$. როცა $\varepsilon = 0$, მაშინ ის შეესაბამება ბიჯ 2. ა)-ს იმ შემთხვევაში, როცა გამოსავალი სიდიდე ჭეშმარიტია. როცა $\varepsilon > 0$ შეესაბამება ბიჯ 2. ბ), ხოლო როცა $\varepsilon < 0$ შეესაბამება ბიჯ 2. გ) – ს.

პერსეპტრონის წავლების ალგორითმი ჰების წესის საშუალებით შენარჩუნდება, თუ იტერაციულ პროცესს წარვმართავთ შემდეგი ფორმულებით:

$$w_j(t+1) = w_j(t) + \Delta w_j$$

$$\Delta w_j = \varepsilon x_j$$

სადაც $w_j(t)$ და $w_j(t+1)$ შესაბამისად პერსეპტრონის კოეფიციენტების ძველი და ახალი მნიშვნელობებია, j- შემავალი სიგნალის რიგითი ნომერია.

შესაძლებელია მივიღოთ ანალოგიური იტერაციული ფორმულა ნეირონის T ზღვრული მნიშვნელობის რეულირებისათვის, თუკი მას განვიხილავთ, როგოც ნეირონის დამატებითი შემომავალი x_0 სინალის წონით კოეფიციენტად. x_0 სინალის მნიშვნელობა - 1 ტოლია.

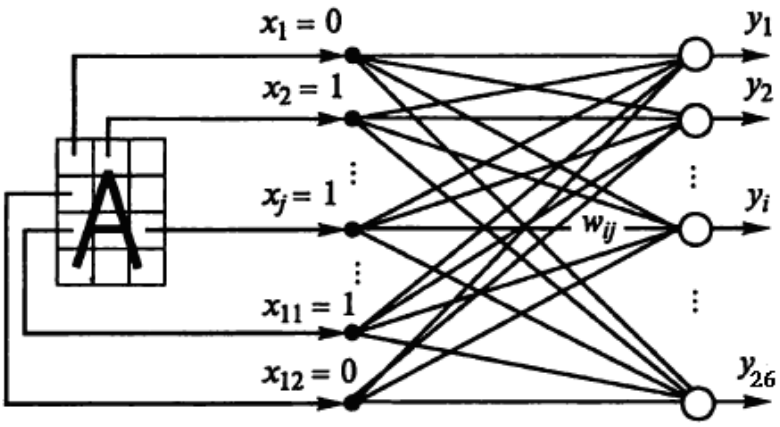
$$T(t+1) = T(t) + \Delta T, \qquad \Delta T = -\varepsilon .$$

იტერაციულ ფორმულებში შესაძლებელია სწავლების λ კოეფიციენტის შემოტანა, რომლის საშუალებითაც შესაძლებელია წონითი კოეფიციენტების კორექტირება

$$\Delta w_j = \lambda \varepsilon x_j, \qquad \Delta T = -\lambda \varepsilon .$$

პერსეპტრონის სწავლების ალგორითმს, რომელიც იყენებს ამ ფორმულებს, ეწოდება **დელტა-წესი**.

ქემოთ მოყანილ ნახაზზე წარმოდგენილია პერსეპტრონის სქემა, რომელიც განკუთვნილია ლათინური ალფავიტის ასოების გასარჩევად. ასეთ პერსეპტრონს გააჩნია 26 ნეირონი, ე.ი. ალფავიტის თითოეულ ასოს შეესაბამება ერთი ნეირონი. ითვლება, რომ პირველი ნეირონის გამოსავალი y_1 უნდა იყოს ერთის ტოლი როცა პერსეპტრონს გასარჩევად მიეწოდება ასო „*A*“ და ნულის ტოლი ყველა დანარჩენი ასოებისათვის. მეორე ნეირონის გამოსავალი y_2 უნდა იყოს ერთის ტოლი როცა ნეირონს „*B*“ ასო მიეწოდება და ნულის ტოლი ყველა დანარჩენი ასოებისათვის და ა.შ.



მოცემული პერსეპტრონის სწავლების ალგორითმი შედგება შემდეგი ბიჯებისაგან:

1. შემთხვევითი რიცხვების გადამწოდით ნეირონების ყველა წონით კოეფიციენტებს w_{ij} და ზღვრულ T_i სიდიდეებს მიენიჭებათ რაიმე მცირე მნიშვნელობები.

2. პერსეპტრონს მიეწოდება ალფავიტის რომელიე ასო და ფოტოელემენტების სისტემის საშუალებით გამოიმუშავებს გამოსავალ ვექტორს x_j, $j = 1,2,...12$.

3. თითოეული ნეირონი აწარმოებს შემომავალი სიგნალების აჯამვას:

$$R_i = \sum_{j=1}^{12} w_{ij} x_j$$

და გამოიმუშავებს გამომავალ სინალს $y_i = 1$, როცა $R_i \geq T_i$ და $y_i = 0$, როცა $R_i < T_i$.

4. ყოველი ნეირონისათვის განისაზღვრება ცდომილება:

$$\varepsilon_i = (d_i - y_i),$$

სადაც d_i- პერსეპტრონის სწორი პასუხის ვექტორია (მაგალითად, „*A*“ასოსათვის $d_1 = 1$, $d_2 = 0$, …..,$d_{26} = 0$).

5. ხდება ნეირონის წონითი კოეფიციენტების და ზღვრული მნიშვნელობების კორექტირება:

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) + \Delta w_{ij}, \quad \Delta w_{ij} = \lambda \varepsilon_i x_j,$$

$$T_i(t+1) = R_i(t) + \Delta R_i, \quad \Delta T_i = -\lambda \varepsilon_i,$$

სადაც t – იტერაციის რიგითი ნომერია.

6. გავიმეოროთ 2 – 5 ბიჯები საჭირო რაოდენობამდე.

ზემოდ მოყვანილი პერსეპტრონის სქემა, რომელიც განკუთვნილია ალფავიტის ასოების გასარჩევად, შეიძლება გამოვიყენოთ სხვა პრაქტიკული ამოცანების, მაგალითად, სამედიცინო დიაგნოსტიკური ამოცანების გადასაწყვეტად. ყველაფერი დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა აზრს მივანიჭებთ შემომავალ x_i და გამომავალ y_i სიგნალებს.

გადასაწყვეტი ამოცანების სფერო მნიშვნელოვნად გაფართოვდება თუკი პერსეპტრონს ვასწავლით არა მარტო ბინარული მნიშვნელობების (0 და 1), არამედ უწყვეტი სიგნალების გამოტანასაც. ასეთი განზოგადოებული პერსეპტრონის შექმნა შესაძლებელია, როცა აქტივაციის ფუნქციად გამოვიყენებთ არა კიბისებურ, არამედ სიგმაიდალურ ფუნქციას. პრაქტიკულად სიგმაიდალური ფუნქცია უზრუნველყოფს კლასიკური ზღვრული ფუნქციის აპროქსიმაციას.

შემოვიტანოთ რამოდენიმე განსაზღვრება. პერსეპტრონს ეწოდება **ადალაინი**, როცა მას გააჩნია ერთი გამოსავალი და სიგმაიდალური აქტივაციის ფუნქცია. თუ პერსეპტრონს გააჩნია მრავალი გამოსავალი, მაშინ მას ეწოდება **მადალაინი** (ინგლისური სიტყვებიდან *ADAptive LInear NEuron* და *Many ADALINE*). ასეთი უწყვეტი აქტივაციური ფუნქციის პერსეპტრონის გამოჩენამ გამოიწვია მისი სწავლების მიმართ ახლებური მიდგომა. უიდროუმ და ხოფმა შემოგვთავაზეს საჭირო რეალური d_i და გამოსავალი y_i სიგნალების სხვაობების საშუალო კვადრატული ცდომილების მინიმიზაცია:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(d_i - y_i\right)^2,$$

სადაც N – პერსეპტრონის გამოსავალი არხების რაოდენობაა.

ასეთი ოპტიმიზაციის ამოცანის გადაწყვეტა შესაძლებელია არაწრფივი დაპროგრამების მეთოდებით, მაგალითად, გრადიენტის მეთოდით, რომელსაც მივყევართ ნეირონის სწავლების შემდეგ იტერაციულ ფორმულებამდე:

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) + \Delta w_{ij},$$

სადაც $\Delta wij = \lambda\delta_i x_j, \;\; \delta_i = (d_i - y_i)y_i(1 - y_i).$

ამ ალგორითმს ეწოდება **დელტა – წესის განზოგადოებული ალგორითმი**, რომლის უპირატესობა მდგომარეობს იტერაციის უფრო სწრაფ კრებადობაში და შემავალი და გამომავალი უწყვეტი სიგნალების უფრო ზუსტ დამუშავებაში.

4.5.2 ერთშრიანი ნეირონული ქსელის შეზღუდვა

როგორც უკვე ავღნიშეთ, ფ. როზენბლანტმა შესძლო ერთშრიანი პერსეპტრონის საშუალებით ალფავიტის ასოების გარჩევა. ეს იმ დროისათვის იყო მნიშვნელობანი მიღწევა და ადამიანის აზროვნების შემეცნების სფეროში წინგადადგმული ნაბიჯი. მაგრამ, პერსეპტრონის მიერ გადასაწყვეტი ამოცანების სფერო თანდათან ფართოვდებოდა. სამეცნიერო სფეროს გაშლასთან ერთად წარმოიშვა სიძნელეები, კერძოდ აღმოჩნდა, რომ ზოგიერთი ახალი ამოცანის გადაწყვეტა პერსეპტრონს არ შეუძლია, თუმცა ეს ამოცანები მნიშვნელოვნად

არ განსხვავდებოდნენ იმ ამოცანებისაგან, რომლებსაც პერსეპტრონი წარმატებულად წყვეტდა. საჭირო გახდა წარმოშობილი პარადოქსის ახსნა, სიღრმისეული ანალიზი და ნეირონული ქსელის თეორიული ბაზის შექმნა.

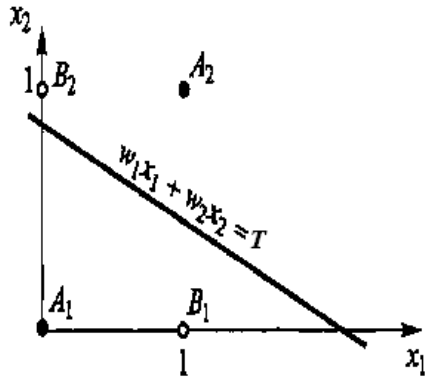
პერსეპტრონის განვითარების შემდეგი ეტაპი იყო მ.მინსკის და ს.პაიპერტის წიგნის „პერსეპტრონები“-ს გამოქვეყნება. ამ წიგნში მათემატიკური სიზუსტით დამტკიცებული იყო ის, რომ ერთშრიან პერსეპტრონს არ ძალუმს მრავალი პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტა. მათ შორის იყო ლოგიკური ოპერაციის „გამომრიცხავი ან“- ის რეალიზაცია.

„გამომრიცხავი ან“ წარმოადგენს ბულის ორარგუმენტიან ფუნქციას, რომელმაც შეიძლება მიიღოს „ჭეშმარიტი“ ან „მცდარი“ მნიშვნელობა. „ჭეშმარიტ“ მნიშვნელობას ფუნქცია ღებულობს მაშინ, როცა ფუნქციის ერთ-ერთი არგუმენტი (და არა ორივე) არის „ჭეშმარიტი“. სხვა შემთხვევებში ფუნქცია ღებულობს „მცდარ“ მნიშვნელობას. ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$y = (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_2 \wedge x_1) \qquad (1)$$

ამოცანა მდგომარეობს ერთშრიანი პერსეპტროით მოვახდინოთ (1) ფუნქციის რეალიზირება ორი x_1 , x_2 შემავალი და ერთი გამომავალი y მნიშვნელობით.

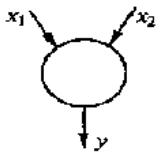
თუ ავღნიშნავთ „ჭეშმარიტ“ სიდიდეს ერთით, ხოლო „მცდარს“ ნულით, მაშინ შემავალი სინალების ყველა შესაძლო კომბინაციები (x_1, x_2) სიბრტყეზე შეიძლება წარმოვადგინოთ ოთხი A_1 ,A_2 ,B_1 ,B_2 წერტილის სახით, როგორც ეს ნაჩვენებია შემდეგ ნახაზზე:



მაგალითად, A_1 წერტილს შეესაბამება შემავალი სიგნალების $x_1 = 0$ და $x_2 = 0$ მნიშვნელობები, ხოლო A_2 წერტილს კი $x_1 = 1$ და $x_2 = 1$. (1) ფორმულის თანახმად, პერსეპტრონის შემავალი და გამომავალი სიგნალების შესაბამისობები მოყვანილია შემდეგ ცხრილში:

წერტილები	x_1	x_2	y
A_1	0	0	0
A_2	1	1	0
B_1	1	0	1
B_2	0	1	1

ერთშრიანი პერსეპტრონი, რომელიც გამოსახულია ქვემოთ მოყვანილ ნახაზე, აწარმოებს შემდეგ გარდაქმნებს: $R = w_1 x_1 + w_2 x_2$ (2). $y = 1$, როცა $R \geq T$ და $y = 0$, როცა $R < T$. თუ (2)



განტოლებაში R-ს შევცვლით T–თი, მაშინ მივიღებთ: $w_1x_1 + w_2x_2 = T$ (3).

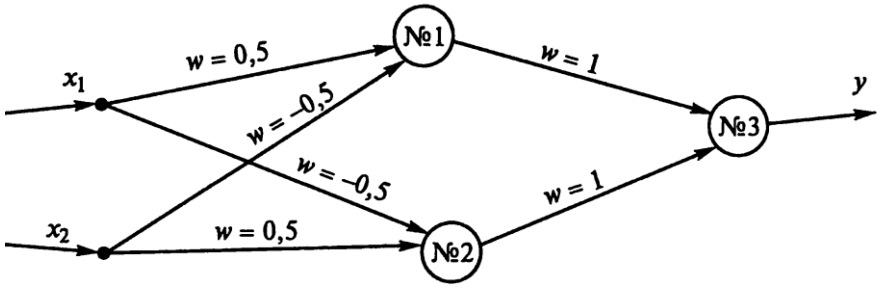
თუ მიღებულ (3) განტოლებაში x_1 და x_2 ცვლადებია, ხოლო T, w_1 და w_2 მუდმივები, მაშინ (x_1, x_2) სბრტყეზე (3) განტოლება გამოისახება სწორი ხაზით, რომლის დახრილობა განისაზღვრება w_1 და w_2 წონითი კოეფიციენტებით და T ზღვრული მნიშვნელობით. იმ წერტილებებისათვის, რომლებიც ამ სწორ საზზე მდებარეობენ, სრულდება $R = T$ ტოლობა და პერსეპტრონის გამოსავალი ერთის ტოლია. იმ წერტილებებისათვის, რომლებიც განლაგებულნი არიან სწორი ხაზის ქვემოთ პერსეპტრონის გამოსავალი სიდიდე ნულის ტოლია, ხოლო იმ წერტილებებისათვის, რომლებიც განლაგებულნი არიან სწორი ხაზის ზემოთ პერსეპტრონის გამოსავალი სიდიდე ერთის ტოლია. აქედან გამომდინარე, (3) განტოლებას უწოდებენ ზღვრულ სწორ ხაზს.

ზემოდ მოყვანილი ცხრილის თანახმად, A_1 და A_2 წერტილებში პერსეპტრონის გამოსავალი უნდა იყოს ნულის ტოლი, ხოლო B_1 და B_2 წერტილებში – ერთის ტოლი. მაგრამ, ამისათვის ზღვრული სწორი ხაზი ისე უნდა იყოს წარმოდგენილი, რომ A_1 და A_2 წერტილები უნდა იმყოფებოდნენ ამ ხაზის ქვემოთ, ხოლო B_1 და B_2 წერტილები – ზემოთ, რაც ყოვლად შეუძლებელია. ეს იმას ნიშნავს, რომ რა მნიშვნელობებიც არ უნდა მივანიჭოთ წონით კოეფიციენტებს და ზღურბლს, ერთშრიან ნეირონულ ქსელებს არ შეუძლია „გამომრიცხავი ან“ ფუნქციის წარმოდგენა.

გარდა „გამომრიცხავი ან“ ფუნქციის რეალიზების პრობლემისა, მ.მინსკის წიგნში მოყვანილია სხვა ამოცანებიც, რომელთა გარჩევა ერთშრიან ნეირონულ სელებს არ შეუძლიათ.

4.5.3 მრავალშრიანი პერსეპტრონის სწავლება

„პერსეპტრონები“ წიგნის გამოსვლამ მეცნიერებს შორის გამოიწვია შოკი. საყოველთაო ოპტიმიზმი შეცვალა პესიმიზმა, რამაც გამოიწვია ნეირონული ქსელების განვითარების გარკვეული შეფერხება. მიუხედავად ამისა, ცალკეული მეცნიერები მაინც განაგრძნობდნენ მეცნიერულ კვლევებს. ბევრ მკვლევარს ესმოდა, რომ საჭირო იყო პერსეპტრონის სტრუქტურის გართულება. აღმოჩნდა, რომ „გამომრიცხავი ან“ ფუნქციის პრობლემა შეიძლება გადაწყდეს ორშრიანი ნეირონული ქსელის საშუალებით, მაგალითად ისე, როგორც ეს წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზზე:



წარმოდგენილი პერსეპტრონის მუშაობა სრულდება შემდეგი ალგორითმით:

პერსეპტრონი 1 : $R_1 = 0{,}5x_1 + (-0{,}5)x_2$,
$y_1 = 1$, როცა $R_1 \geq T$,
$y_1 = 0$, როცა $R_1 < T$.

პერსეპტრონი 2 : $R_2 = (-0{,}5)x_1 + 0{,}5x_2$,
$y_2 = 1$, როცა $R_2 \geq T$,
$y_2 = 0$, როცა $R_2 < T$.

პერსეპტრონი 3 : $R_3 = 1y_1 + 1y_2$,
$y_3 = 1$, როცა $R_3 \geq T$,
$y_3 = 0$, როცა $R_3 < T$.

ამ ფორმულების საშუალებით, ადვილად შეიძლება წარმოვადგინოთ პერსეპტრონის შემავალი და გამომავალი სიგნალების შესაბამისობები მოცემული $T = 0{,}5$ ზღვრული მნიშვნელობისათვის შემდეგ ცხრილში:

x_1	x_2	R_1	R_2	y_1	y_2	R_3	y_3	y
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	–0,5	0,5	0	1	1	1	1
1	0	0,5	–0,5	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0

მკვლევარებს ესმოდათ, რომ მრავალშრიანი ნეირონული ქსელები აფართოებენ ამოსახსნელ ამოცანათა კლასს, მაგრამ პრობლემა იქნებოდა ასეთი ნეირნული ქსელების სწავლება. მარტივი ჰობის წესი და მისი მოდიფიცირებული დელტა – წესი ვარგოდა მხოლოდ გამოსავალი შრის ნეირონების წონითი კოეფიციენტების კორექტირებისათვის, მაშინ როცა ნეირონული ქსელის შიგა (ფარული) შრეებისათვის იგი გამოუსადეგარი იყო.

მრავალშრიანი ნეირონული ქსელის სწავლების ეფექტული ალგორითმი შეიქმნა 1986წ., რომელსაც ეწოდება **ცდომილების უკუგავრცელების ალგორითმი**. მეთოდმა თავისი დასახელება მიიღო იმიტომ, რომ მისი ფუნქციერების დროს ქსელის გამოსავალი ცდომილება, რომელიც განისაზღვრება იტერაციის ყოველ ბიჯზე, ვრცელდება ნეირონულ ქსელში გამოსავალი შრიდან შემოსასვლელამდე (ე.ი. სიგნალის გავრცელების საწინაღმდეგოდ). სწორედ ამ დროს ხდება ფარული შრეების ნეირონების წონითი კოეფიციენტების განსაზღვრა.

ცდომილების უკუგავრცელების ალგორითმი წარმოადგენს მეტად პოპულარულ მეთოდადს (განსაკუთრებით კლასიფიკაციის ამოცანების გადასაწყვეტად) ორი პრაქტიკული მიზეზის გამო: ეს ალგორითმი რეალიზებისათვის მარტივია და ის უზრუნველყოფს რთული ამოცანების ამოხსნის ეფექტიანობას.

V. ობიექტების წინასწარი დამუშავება

5.1 ობიექტების გარდაქმნა და პარამეტრების მოწესრიგება

დიაგნოსტიკური პროცესის პირველი ეტაპი ძირითადად საწყისი პარამეტრების (ნიშნების) სიმრავლის არჩევის ამოცანაა. ობიექტის აღსაწერად რაც შეიძლება მეტი ინფორმაციის მოპოვება იწვევს ინფორმაციის სიჭარბეს, რაც თავის მხრივ იწვევს გარკვეულ უარყოფით შედეგებს, როგორიცაა გამოთვლების მოცულობისა და დროის გაზრდა.

საწყის ნიშანთა სიმრავლის ფორმირება მნიშვნელოვნად არის დამოკიდებული ანალიზის მეთოდზე. ასე მაგალითად, მედიცინაში რომელიმე დავადების დიაგნოსტიკისათვის შესაძლოა გამოვიყენით ანალიზის სხვადასხვა მეთოდი: რენდგენის სხივები, ულტრაბგერითი, ოპტიკური, სიმპტომატიკური, ქიმიურ-ბიოლოგიური და ა.შ., რომლებიც განსხვავებულ პარამეტრთა სიმრავლეს გვაძლევენ. გარდა ამისა, დიაგნოსტიკურ სისტემაში, რომლის ძირითადი სტრუქტურული ელემენტია კომპიუტერი, აუცილებელი გახდა გაზომვით მიღებული შედეგების ისეთი გარდაქმნა, რომ შესაძლებელი ყოფილიყო ამ მონაცემების კომპიუტერში შეტანა. ამის გამო. ზოგიერთ შემთხვევაში საჭირო გახდა ანალიზის მეთოდის ან გადამწოდების შეცვლაც.

ამრიგად, გაზომვის პროცესის შემდეგ გვაქვს ინფორმაციის წინასწარი დამუშავების პროცედურები. აქ იგულისხმება არტეფაქტების ფილტრაცია, არადამახასიათებელი ელემენტების მოცილება, მასშტაბირება, ჭარბი ინფორმაციის უგულვებელყოფა და საერთოდ, პირველადი ანალიზით მიღებული შედეგების გაუმჯობესება ინფორმატიული პარამეტრების გამოვლენის გზით. ანალიზის საბოლოო პროცედურა შეიძლება იყოს სახეთა რეალიზაციების სასწავლო და საგამოცდო ამონარჩევების ფორმირება. რეალიზაციათა რაოდენობა ამ ამონარჩევებში უნდა აკმაყოფილებდეს წარმომადგენლობითობის (რეპრეზენტატიულობის) პირობას, რაც თავის მხრივ, მნიშვნელობნად არის დამოკიდებული შერჩეულ ნიშანთა სიმრავლის სიმძლავრეზე.

ამრიგად, ნებისმიერი ტიპის დიაგნოსტიკური სისტემის სინთეზის დროს სასურველია გადაიჭრას პარამეტრთა შერჩევის და ობიექტთა განზომილების შემცირების საკითხები.

რეალიზაციის ყველა პარამეტრი არ წარმოადგენს მნიშვნელოვანს დიაგნოსტიკის ამოცანის გადაწყვეტისათვის. კლასების რეალიზაციების შედარებისას, ის პარამეტრები, რომლებიც მნიშვნელოვნად იცვლებიან უნდა გააჩნდეთ დიდი წონითი კოეფიციენტები, ხოლო იმ პარამეტრებს, რომლებიც ნაკლებად იცვლებიან – მცირე წონითი კოეფიციენტები. აქედან გამომდინარე, ევკლიდეს მანძილი ორ X_i და X_j რეალიზაციას შორის შეიძლება განისაზღვროს შემდეგი ფორმულით:

$$d^2\left(X_i, X_j\right) = \sum_{k=1}^{n} w_{kk}^2 \left(x_{ki} - x_{kj}\right)^2 , \qquad (1)$$

სადაც w_{kk} წარმოადგენს წონით კოეფიციენტებს. საჭიროა მოიძებნოს წონითი კოეფიციენტების ისეთი მნიშვნელობები, რომლებიც მოახდენენ (1) გამოსახულების მინიმიზაციას (ან მაქსიმიზაციას) იმის მიხედვით თუ რა ტიპის ამოცანასთან გვაქვს საქმე. ასეთი ამოცანების გადასაწყვეტად საჭიროა მოვახდინოთ წრფივი გარდაქმნა. დაუშვათ გვაქვს ორი $a = \left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$ და

$b=(b_1,b_2,.....,b_n)$ ვექტორი, რომელთა მიმართ ჩატარდა გარდაქმნა და მივიღეთ a^* და b^* ვექტორები:

$$a^* = Wa \quad , \quad b^* = Wb \ ,$$

სადაც

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & ..... & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & ..... & w_{2n} \\ ---------- \\ ---------- \\ w_{n1} & w_{n2} & ..... & w_{nn} \end{bmatrix}$$

წარმოადგენს გარდაქმნის მატრიცას, რომლის ელემენტებია წონითი კოეფიციენტები. ამოცანა მდგომარეობს W მატრიცის ელემენტების განსაზღვრაში.

იმისათვის, რომ განისაზღვროს W მატრიცის ელემენტები, საჭიროა წონით კოეფიციენტებს დაედოთ დამატებითი შეზღუდვები. განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

1. შეზღუდვა $\sum_{k=1}^{n} w_{kk} = 1$, რომელსაც მივყევართ W გარდაქმნის მატრიცის ელემენტების განსაზღვრის შემდეგ გამოსახულებამდე:

$$w_{kk} = \frac{1}{\sigma_k^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma_k^2}} \quad , \qquad (2)$$

სადაც σ_k^2 – დისპერსიაა. როგორც (2) გამოსახულებიდან ჩანს, იმ პარამეტრებს, რომელთა დისპერსიები მნიშვნელოვნად იცვლებიან გააჩნიათ ნაკლები სიდიდის წონითი კოეფიციენტები, ხოლო იმ პარამეტრებს, რომლებიც ნაკლებად იცვლებიან დიდი წონითი კოეფიციენტები.

ეს შემთხვევა ახდენს რეალიზაციის პარამეტრების წონითი კოეფიციენტების ნორმირებას $[0,1]$ ინტერვალში და მათი ჯამი ერთის ტოლია, რაც მეტად პოპულარურს ხდის პრაქტიკაში მის გამოყენებას. უნდა გვახსოდეს, რომ ყოველთვის ეს შეზღუდვა არ არის საკმარისი, ამიტომ იყენებენ შემდეგ შეზღუდვასაც:

2. შეზღუდვა $\prod_{k=1}^{n} w_{kk} = 1$, რომელსაც მივყავართ შემდეგ გამოსახულებამდე:

$$w_{kk} = \frac{1}{\sigma_k} \left(\prod_{j=1}^{n} \sigma_j \right)^{\frac{1}{n}} . \qquad (3)$$

როგორც ამ ფორმულიდან ჩანს, რეალიზაციის პარამეტრების წონითი კოეფიციენტები საშუალო კვადრატული გადახრის σ უკუპროპორციულია.

ამრიგად, (2) და (3) ფორმულები განსაზღვრავენ W გარდაქმნის მატრიცას ზემოდ მოყვანილი შეზღუდების გათვალისწინებით. თუ სახეთა ვექტორები X სივრციდან გადაგვყავს X^* სივრცეში $X^* = WX$, მაშინ X^* სივრცეში ხდება შიგასიმრავლის მანძილის მინიმიზაცია. თუ მოვახდენთ მეორე გარდაქმნას $X^{**} = ZX^*$, მაშინ შეგვიძლია მოვახდინოთ პარამეტრების შერჩევა.

როგორც (2) და (3) ფორმულებიდან ჩანს, W გარდაქმნის მატრიცის კოეფიციენტების გამოსათვლელად გამოიყენება დისპერსიების შეფასებები, ე.ი. საჭიროა წინასწარ განისაზღვროს კოვარიაციული მატრიცა, რადგან გარდაქმნას X^* სივრცეში კოვარიაცული მატრიცა გადაყავს დიაგონალურში, რომლის ელემენტებია გადაუადგილებადი დისპერსიის შეფასებები.

საზოგადოდ, კოვარიაციული მატრიცის გამოყენებაზე უნდა ითქვას შემდეგი: ალბათობის თეორიიდან ცნობილია, რომ მრავალგანზომილებიანი ნორმალური განაწილება მთლიანად განისაზღვრება მათემატიკური ლოდინის ვექტორით და კოვარიაციული მატრიცით. თავის მხრივ, კოვარიაციული მატრიცა განისაზღვრება საკუთრივი მნიშვნელობებით და საკუთრივი ვექტორებით. ამასთან, საკუთრივი ვექტორი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ვექტორი, რომელიც წარმოგვიდგენს განსახილველი სახის თვისებას. კერძოდ, საკუთრივი ვექტორების ნაწილი შეიცავენ გარჩევის ამოცანის გადასაწყვეტად მცირე ინფორმაციას, ვიდრე სხვა საკუთრივი ვექტორები და ამიტომ მათი უგულვებელყოფა შესაძლებელია. სწორედ ეს იდეა უდევს საფუძვლად დიაგნოსტიკური ამოცანისათვის ინფორმატიული პარამეტრების და განზომილების შემცირების საკითხების გადაწყვეტას.

პარამეტრთა შერჩევის ამოცანის გადასაწყვეტად იყენებენ კლასშიგა და კლასთაშორისო მანძილების ცნებას. პარამეტრების შერჩევა, როცა გამოიყენება კლასშიგა მანძილი, შეიძლება განვიხილოთ როგორც კლასტერიზაციის ამოცანა. როგორც ვიცით, კლასშიგა ანუ შიგასიმრავლის მანძილი არის საშუალო კვადრატული მანძილი ერთი კლასის რეალიზაციებს შორის. აქედან გამომდინარე, ჩვენი მიზანია მოვახდინოთ ისეთი გარდაქმნა, რომელიც მოახდენს კლასშიგა მანძილის მინიმიზაციას, ხოლო კლასთაშორისო მანძილის მაქსიმიზაციას. ამისათვის უნდა გამოვიყენოთ კოვარიაციული მატრიცა და რომელიმე შეზღუდვა, მაგალითად პირველი. აღმოჩნდა, რომ კლასშიგა მანძილი წარმოადგენს გლობალურ მინიმუმს თუ გამოვიყენებთ კოვარიაციული მატრიცის m უმცირეს მახასიათებელ რიცხვებს. ქედან გამომდინარე, თუ ჩვენ გვინდა შიგასიმრავლის მანძილის მინიმიზაცია ამისათვის სახის ვექტორებად უნდა ავიღოთ საკუთრივი ვექტორები, რომლებიც შეესაბამებიან კოვარიაციული მატრიცის უმცირეს საკუთრივ მნიშვნელობებს. ამ შემთხვევაში წონითი კოეფიციენტები განისაზღვრებან შემდეგი გამოსახულებთ:

$$w_{kk} = \frac{1}{\lambda_k \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\lambda_j} \right)} \quad ,$$

ხოლო მინიმალური შიგასიმრავლის მანძილი ტოლია:

$$d^2 = 2\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\lambda_j} \right) \quad .$$

ამრიგად, კლასშიგა მანძილის გლობალური მინიმუმი მიიღება, თუ λ_j მახასიათებელი რიცხვებიდან აღებულია m რაოდენობის უმცირესი მახასიათებელი რიცხვების შესაბამისი საკუთრივი ვექტორები და მათი საშუალებით ხდება გარდაქმნის W მატრიცის ფორმირება.

განვიხილოთ პარამეტრთა შერჩევის და სახეთა განზომილების შემცირების ზოგიერთი მეთოდები.

5.2 ენტროპიის მინიმიზაციის მეთოდი

განუსაზღვრელობის სტატისტიკურ ზომას ენტროპია ეწოდება. აქედან გამომდინარე, კლასის რეალიზაციების უწესრიგობის ზომად შეიძლება გამოვიყენოთ ენტროპია, რომელიც ასე განისაზღვრება:

$$H = -M[\ln P] \ ,$$

სადაც P – კლასის რეალიზაციათა ერთობლიობის სიმკვრივეა, M – მათემატიკური ლოდინის ოპერატორი. ენტროპია შეიძლება გამოვიყენოთ, როგორც პარამეტრთა შერჩევის კრიტერიუმი. კერძოდ, ის პარამეტრები, რომლებიც ამცირებენ განუსაზღვრელობას ითვლებიან უფრო ინფორმატიულად, ვიდრე ის პარამეტრები, რომლებიც იძლევიან საწინაღმდეგო შედეგს. აქედან გამომდინარე, უნდა შევარჩიოთ ისეთი პარამეტრების ერთობლიობა. რომლებიც იწვევენ მოცემული კლასების ენტროპიათა მინიმიზაციას. რადგან ეს წესი ექვივალენტურია დისპერსიის მინიმიზაციისა, ამიტომ უნდა ველოდოთ, რომ ენტროპიის მინიმიზაციას გააჩნია კლასტერიზაციის თვისება.

განვიხილოთ m კლასი $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m$, რომელთა პირობითი განაწილების სიმკვრივის ფუნქციები ცნობილია $P(X \mid \omega_1), P(X \mid \omega_2), ..., P(X \mid \omega_m)$, მაშინ i-ური კლასის ენტროპია განისაზღვრება ფორმულით:

$$H_i = -\int_X P(X \mid \omega_i) \ln P(X \mid \omega_i) dx \ ,$$

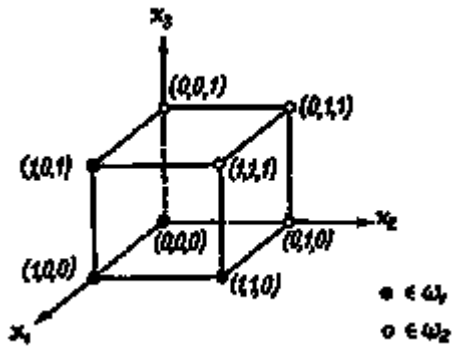
სადაც ინტეგრირება ხდება i-ური კლასის რეალიზაციათა სივრცეში. ცხადია, რომ როცა $P(X \mid \omega_i) = 1$, ანუ როცა განუსაზღვრელობა არ არსებობს, ენტროპია გვექნება ნულის ტოლი. ჩავთვალოთ, რომ ყოველი m ერთობლიობა ნორმალურად არის განაწილებული და მათი კოვარიაციული მატრიცები ერთმანეთის ტოლია.

ასეთი დაშვების შემდეგ ამოცანა ჩამოყალიბდება შემდეგნაირად: უნდა განისაზღვროს წრფივი გარდაქმნის Z მატრიცა, რომელსაც მოცემული სახის ვექტორები X გადაყავს უფრო მცირე განზომილების ვექტორებად. ეს გარდაქმნა შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ: $Y = ZX$, თანაც გარდაქმნის მატრიცა განისაზღვრება სახეთა ერთობლიობის ენტროპიის მინიმიზაციით. აქ X არის n – განზომილებიანი, ხოლო Y m - განზომილებიანი $(m < n)$ ვექტორები. საჭიროა ისეთი m რაოდენობის ვექტორის მოძებნა, რომელიც X ვექტორს გადაიყვანს Y ვექტორში ისე, რომ მოახდინოს ენტროპიის მინიმიზაცია.

დადგინდა, რომ ენტროპიის მინიმიზაცია მიიღწევა იმ შემთხვევაში, თუ გარდაქმნის Z მატრიცა შედგება m რაოდენობის ნორმირებული საკუთრივი ვექტორებისაგან, რომლებიც შეესაბამებიან კოვარიაციული მატრიცის საკუთრივი მახასიათებელ რიცხვების მინიმალურ მნიშვნელობას.

ამრიგად, პარამეტრების გამოყოფის პროცედურა დაიყვანება კოვარიაციული მატრიცის საკუთრივ მნიშვნელობებისა და საკუთრივი ვექტორების განსაზღვრაში.

მიღებული პროცედურა განვიხილოთ მარტივ მაგალითზე. ვთქვათ, საჭიროა მოცემული სახეთა ერთობლიობის განზომილების შემცირება ენტროპიის მინიმიზაციის მეთოდით. დაუშვათ, მოცემულია ორი ω_1 და ω_2 კლასი და მათში შემავალი ოთხი სამგანზომილებიანი რეალიზაციები ისე, როგორც ეს მოცემულია შემდეგ ნახაზზე:



განვსაზღროთ მათემატიკური ლოდინის ვექტორის და კოვარიაცული მატრიცის შეფასებები შემდეგი ფორმულებით:

$$m_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \ , \qquad C_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} X_{ij}^{/} - m_i m_i^{/} \ ,$$

სადაც n_i – ω_i კლასის რეალიზაციათა რაოდენობაა. ამ ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ:

$$m_1 = \frac{1}{4}(3,\ 1,\ 1)^{/} , \qquad m_2 = \frac{1}{4}(1,\ 3,\ 3)^{/} . \qquad C = C_1 = C_2 = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad .$$

კოვარიაციის C მატრიცის მახასიათებელი რიცხვებია: $\lambda_1 = \frac{1}{16}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{4}$, ხოლო მათი შესაბამისი საკუთრივი ვექტორებია:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)^{/} , \qquad e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,\ 1,\ 1)^{/} , \qquad e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ 1, -1)^{/} \ .$$

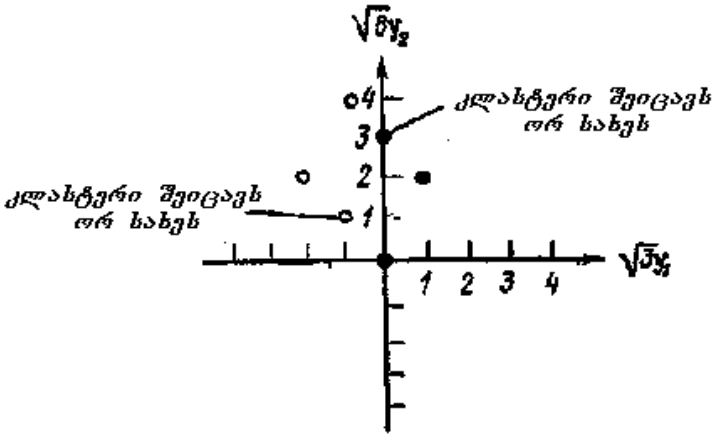
გარდაქმნის Z მარტიცისათვის ავიღოთ e_1 და e_2 საკუთრივი ვექტორები, მაშინ მივიღებთ:

$$Z = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \ .$$

თუ გამოვიყენებთ $Y = ZX$ წრფივ გარდაქმნას, მივიღებთ;

ω_1	ω_2
$y_{11} = (0,0)'$	$y_{21} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)'$
$y_{12} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)'$	$y_{22} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)'$
$y_{13} = \left(0, \frac{3}{\sqrt{6}}\right)'$	$y_{23} = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)'$
$y_{14} = \left(0, \frac{3}{\sqrt{6}}\right)'$	$y_{24} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{6}}\right)'$

შემცირებული განზომილების სახეები წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზზე, სადაც თვალნათლივ ჩანს კლასტერიზაციის ეფექტი.

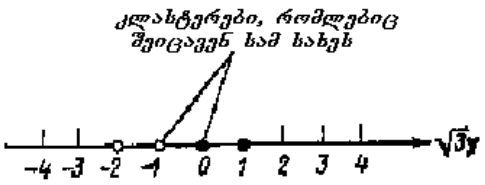


განზომილების შემდეგი შემცირებისათვის ავიღოთ მხოლოდ e_1 ვექტორი, მაშინ მივიღებთ:

$$Z = e_1' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)'$$

გარდაქმნის გამოყენების შემდეგ მივიღებთ:

ω_1	ω_2
$y_{11} = 0$	$y_{21} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
$y_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$y_{22} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
$y_{13} = 0$	$y_{23} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$
$y_{14} = 0$	$y_{24} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$



როგორც ნახაზიდან ჩანს, კლასტერიზაციის ეფექტი შენარჩუნებულია.

5.3 კარუნენა–ლოევას გაშლის მეთოდი

ენტროპიის მინიმიზაციის მეთოდი ეფუძნება ობიექტების ნორმალურ განაწილების კანონს. თუ ეს პირობა დარღვევულია, მაშინ უნდა გამოვიყენოთ სხვა მეთოდები, კერძოდ ორთოგონალური ფუნქციებით გაშლის მეთოდი. ჩვენ განვიხილავთ კარუნენა–ლოევას გაშლის მეთოდს, რომელიც არ მოითხოვს განაწილების სიმკვრივის ფუნქციის ცოდნას.

ცნობილია, რომ არაპერიოდული შემთხვევი პროცესის რეალიზაციის უშუალოდ წარმოდგენა ფურიეს მწკრივის ურთიერთდამოუკიდებელი კოეფიციენტების საშუალებით არ შეიძლება, მაგრამ ასეთი პროცესის წარმოდგენა შესაძლებელია ორთოგონალური ფუნქციების მწკრივად გაშლის შედეგად, რომლებსაც გააჩნიათ ურთიერთდამოუკიდებელი კოეფიციენტები. ასეთ პროცედურას ხშირად კარუნენა-ლოევას გაშლის მეთოდს უწოდებენ.

განვიხილოთ m რაოდენობის კლასი $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$, რომლებიც შედგებიან უწყვეტი შემთხვევითი პროცესის რეალიზაციებისაგან

$$x_i(t), \quad T_1 \le t \le T_2, \quad i = 1,2,\ldots,m \quad ,$$

მაშინ $x_i(t)$ გაშლა შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij} \phi_i(t) \quad , \qquad (1)$$

სადაც c_{ij} შემთხვევითი კოეფიციენტებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობას: $M[c_{ij}] = 0$, $\phi_j(t)$–ბაზისური ორთოგონალური ფუნქციებია.

თუ განვიხილავთ დისკრეტულ შემთხვევას, მაშინ (1) გამოსახულება ასე ჩაიწერება:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \phi_j \ , \qquad (2)$$

სადაც $X_i = (x_i(t_i), x_2(t_2), ..., x_i(t_n))^{/}$, ხოლო ბაზისური ვექტორი $\Phi_j = (\phi_j(t_1), \phi_j(t_2), ..., \phi_j(t_n))^{/}$.

თუ კოეფიციენტები ასრულებენ $M[c_{ij}] = 0$ პირობას, მაშინ (2) გამოსახულების მატრიცული სახე იქნება $X_i = \Phi C_i$, სადაც $\Phi = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n)^{/}$. გაშლის კოეფიციენტები განისაზღვრებიან შემდეგნაირად: $c_i = \Phi' X_i$. (3)

აღმოჩნდა, რომ ბაზისური ვექტორი ϕ_j წარმოადგენს კორელაციური მატრიცის საკუთრივ ვექტორს, რომელიც შეესაბამება *j*-ურ მახასიათებელ რიცხვს. რადგან ბაზისური ვექტორები წარმოადგენენ ნამდვილ სიმეტრიულ კორელაციური მატრიცის საკუთრივ ვექტორებს, ამიტომ ისინი ორთოგონალურნი არიან. გარდა ამისა, ისინი ორთონორმირებულნიც არიან. ე.ი.

$$\phi_j^{/}\phi_k = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

აქედან გამომდინარე, კარუნენა-ლოევას გაშლის მეთოდი პარამეტრთა შერჩევის და განზომილების შემცირების ამოცანის გადასაწყვეტად, შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც წრფივი გარდაქმნა. თუ (3) გამოსახულებაში Φ მატრიცის განზომილებაა $m \times n$ და *X* წარმოადგენს *n* - განზომილებიან ვექტორს, მაშინ ცხადია, რომ c_i კოეფიციენტების განზომილება იქნება $p < n$.

დამტკიცებულია, რომ კარუნენა-ლოევას გაშლა ოპტიმალურია როცა Φ გარდაქმნის მატრიცის სვეტებად აღებულია *m* რაოდენობის ($p < n$) ნორმირებული საკუთრივი ვექტორები, რომლებიც შეესაბამებიან კორელაციური მატრიცის უდიდეს მახასიათებელ რიცხვებს. ამრიგად, თუ დაუშვებთ, რომ $Y = C$, მაშინ ნებისმიერი *X* ვექტორის განზომილების შემცირება განისაზღვრება როგორც $Y = ZX$ წრფივი გარდაქმნა, სადაც $Z = \Phi^{/}$.

ამრიგად, დისკრეტული კარუნენა-ლოევას გაშლის მეთოდი გამოიყენება მოცემული კლასების რეალიზაციათა ერთობლიობის განზომილების შესამცირებლად და შედგება შემდეგი ეტაპებისაგან:

1. განისაზღვრება გაერთიანებული კორელაციური მატრიცა

$$R = \sum_{i=1}^{m} P(A_i) M\left[X_i X_i^{/}\right] ,$$

სადაც $P(A_i) - \omega_i$ კლასის აპრიორული ალბათობაა.

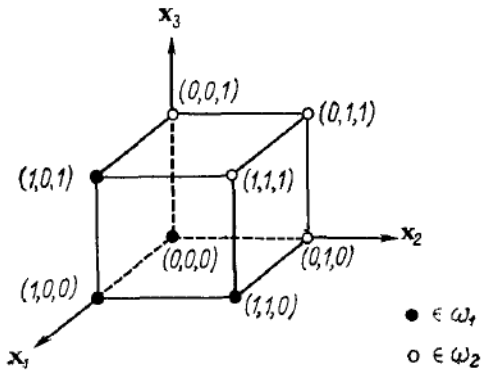
2. გამოითვლება კორელაციური მატრიცის საკუთრივი რიცხვები და საკუთრივი ვექტორები.

3. შეირჩევა უდიდესი საკუთრივი რიცხვების შესაბამისი საკუთრივი ვექტორები და ფორმირდება გარდაქნის Φ მატრიცა.

4. $c_i = \Phi' X_i$ ფორმულით განისაზღვრება კარუნენა-ლოევას გაშლის კოეფიციენტები, რომლებიც გვაძლევენ სახეთა რეალიზაციებს შემცირებული განზომილებით.

კარუნენა-ლოევას გაშლის მეთოდს გააჩნია შემდეგი ოპტიმალური თვისებები: სასრულო რაოდენობის ბაზისური ფუნქციებით მიიღწევა საშუალო კვადრატული ცდომილების მინიმიზაცია და იგი ახდენს ენტროპიის მინიმიზაციასაც.

განვიხილოთ მაგალითი. ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე წარმოდენილია ორი ω_1 და ω_2 კლასის რეალიზაციები. კარუნენა-ლოევას გაშლის მეთოდით მოვახდინოთ განზომილების შემმცირება.



ω_1	ω_2
$X_{11} = (0,0,0)'$	$X_{21} = (0,0,1)'$
$X_{12} = (1,0,0)'$	$X_{22} = (0,1,0)'$
$X_{13} = (1,0,1)'$	$X_{23} = (0,1,1)'$
$X_{14} = (1,1,0)'$	$X_{24} = (1,1,1)'$

დაუშვათ, რომ კლასების აპრიორული ალბათობები ერთმანეთის ტოლია, მაშინ $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \frac{1}{2}$. კორელაციური მატრიცა განისაზღვრება შემდენაირად:

$$R = \sum_{i=1}^{2} P(\omega_i) M\left[X_i X_i'\right] = \frac{1}{2} M\left[X_1 X_1'\right] + \frac{1}{2} M\left[X_2 X_2'\right] .$$

თუ მათემატიკურ ლოდინს შევცვლით საშუალო არითმეტიკულის შეფასებით

$$m = M[X] \approx \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} X_j ,$$

მაშინ გვექნება:

$$R = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^{4} X_{1j} X_{1j}' + \frac{1}{8} \sum_{j=1}^{4} X_{2j} X_{2j}' = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} ,$$

რომლის მახასიათებელი რიცხვებია: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{4}$, ხოლო მათი შესაბამისი საკუთრივი ვექტორებია:

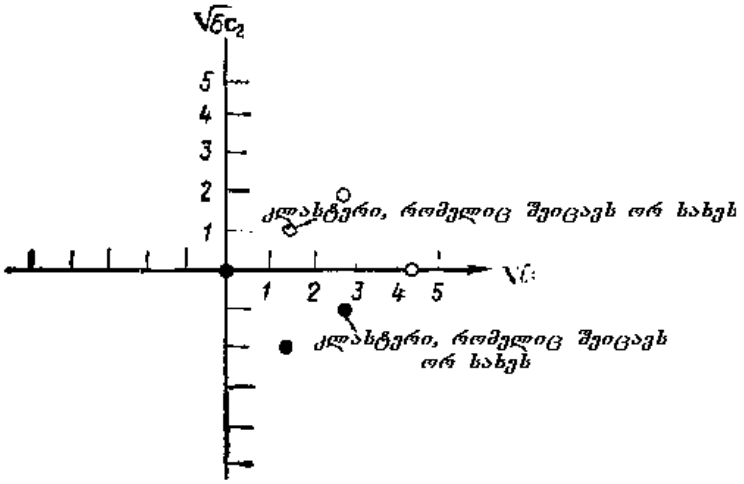
$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)', \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1)', \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)' .$$

თუ შევარჩევთ e_1 და e_2 საკუთრივ ვექტორებს, მაშინ გარდაქმნის მატრიცას ექნება შემდეგი სახე:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

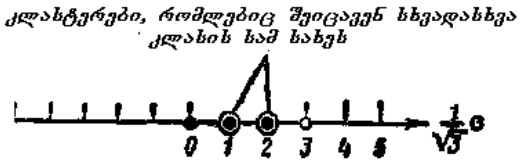
თუ გამოვიყენებთ $C = \Phi' X$ გარდაქმნას, მაშინ მივიღებთ:

ω_1	ω_2
$c_{11} = (0,\ 0)'$	$c_{21} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{2},\ 1\right)'$
$c_{12} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{2},\ -2\right)$	$c_{22} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{2},\ 1\right)'$
$c_{13} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\sqrt{2},\ -1\right)'$	$c_{23} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\sqrt{2},\ 2\right)'$
$c_{14} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\sqrt{2},\ -1\right)'$	$c_{24} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{6}}}\left(3\sqrt{2},\ 0\right)'$



როგორც ნახაზიდან ჩანს, კლასტერიზაციის ეფექტი შეიმჩნევა. მოვახდინოთ განზომილების შემდგომი შემცირება. ამისათვის ავიღოთ მხოლოდ e_1 ვექტორი. მაშინ გარდაქმნის მატრიცას ექნება შემდეგი სახე: $\Phi = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)'$, ხოლო გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ:

ω_1	ω_2
$c_{11} = 0$	$c_{21} = \sqrt{3}$
$c_{12} = \sqrt{3}$	$c_{22} = \sqrt{3}$
$c_{13} = 2\sqrt{3}$	$c_{23} = 2\sqrt{3}$
$c_{14} = 2\sqrt{3}$	$c_{24} = 3\sqrt{3}$



როგორც ნახაზიდან ჩანს, კლასტერიზაციის ეფექტი არ შეიმჩნევა, რადგან 1 და 2 წერტილებში ორივე კლასის რეალიზაციები ერთმანეთს ემთხვევა, ამიტომ ეს ბოლო გარდაქმნა არასასურველია.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Ту Дж. Гонсалес Р. Принципы распознавания образов. М. «Мир», 1978.
2. Лепский А.Е., Математические методы рспознавения образов. Таганрог, ТТИ ЮФУ, 2009 .
3. ვერულავა ო. ხუროძე რ. ამომცნობი სისტემების თეორიის საფუძვლები. თბილისი, სტუ, 2001.
4. Барский А. Б. Нейронные сети: распознавание, управление, принятие решений. — М.: Финансы и статистика, 2004.
5. Ясницкий Л.Н. Введение в искусственный интелект.Учеб.пособие, М.,Академия, 2008.
6. ე. ყუბანეიშვილი. ხელოვნური ნეირონული ქსელები მედიცინაში. ლექციების კურსი. თბილისი, სტუ, 2013, http://gtu.ge/books/ ms/xel_medicina.pdf.