

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ალექსი კირთაძე

მათემატიკური ანალიზის ზოგიერთი
დამატებითი საკითხი

ნაწილი I

თბილისი
2012

სარჩევი

§1. ლოგიკური ოპერაციების განსაზღვრა	2
§2. სიმრავლეები. მოქმედებანი სიმრავლეებზე. სიმრავლეთა კლასები	5
§3. სიმრავლეთა თეორიის აქსიომები	18
§4. ბინარული მიმართება. ფუნქცია	24
§5. სიმრავლის სიმძლავრე. სასრული და უსასრულო სიმრავლეები	39
§6. ორდინალური რიცხვები. ტრანსფინიტული ინდუქციის მეთოდი	53
§7. რიცხვითი სიმრავლეები	66
§8. ჯგუფი. რგოლი. ველი. გარდაქმნათა ჯგუფები	73
§9. სიმრავლეთა რგოლი. სიმრავლეთა σ -რგოლი	91
§10. ტოპოლოგიური სივრცეები	105
§11. მეტრიკული სივრცეები	117
§12. ვექტორული სივრცეები. ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცეები	130
§13. კომპაქტური სიმრავლეები	144
§14. სეპარაბელური და არასეპარაბელური სივრცეები	150
§15. ბორელის სიმრავლეები. ბერის თვისების მქონე სიმრავლეები	157
§16. სიმრავლის ფუნქცია. ზომა რგოლზე	166
§17. ზომის თვისებები	170
§18. ზომის გაგრძელების ამოცანა. საბაზისო სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ნახევარრგოლზე განსაზღვრული სიმრავლის არაუარყოფითი თვლად-ადიტიური ფუნქციის გაგრძელება ამ ნახევარრგოლით წარმოქმნილ რგოლზე განსაზღვრულ ზომამდე	178
§19. მოცემულ ზომასთან ინდუცირებული გარე და შიგა ზომები	182
§20. ლებეგის ზომა, როგორც ბორელის ზომის გასრულება. ლებეგის აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა კლასი	189
§21. ზომის გაგრძელება ამ ზომის განსაზღვრის არით წარმოქმნილ σ -რგოლზე	204
§22. უორდანის ზომა	210
§23. ლებეგის ზომის კლასიკური შემთხვევა	225
§24. ლებეგის აზრით არაზომადი სიმრავლეები	239
ლიტერატურა	248

§1. ლოგიკური ოპერაციების განსაზღვრა

ყოველ მათემატიკურ თეორიაში შეისწავლება სხვადასხვა დებულებები, რომლებიც უკავშირდებიან მოცემული თეორიის ობიექტებს (მთელ რიცხვებს–რიცხვთა თეორიაში, წერტილებსა და წრფეებს–გეომეტრიაში და ა. შ.). მოცემულ თეორიაში გარკვეული მსჯელობებისა და ლოგიკის საშუალებით დგინდება დებულებების ჭეშმარიტება ან მცდარობა თეორიის ობიექტების მიმართ. ნებისმიერი მათემატიკური თეორიის შინაგანი ბუნება მდგომარეობს ამ თეორიის განსაზღვრული დებულების დამტკიცებაში (ე. ი. ჭეშმარიტების დადგენაში) ან მის უარყოფაში (ე. ი. მცდარობის დადგენაში). ეს იმას ნიშნავს, რომ ყოველ თეორიაში გამოიყოფა დებულებათა კლასი, სადაც ყოველი დებულება აუცილებლად იქნება ან ჭეშმარიტი, ან მცდარი. ასეთ დებულებებს გამონათქვამები ეწოდებათ. გარდა გამონათქვამებისა მათემატიკაში განიხილება პრედიკატები, რომელთა ჭეშმარიტება დამოკიდებულია ერთ ან რამდენიმე ცვლადზე და განისაზღვრება მხოლოდ მაშინ, როცა მოცემულია ამ ცვლადების კონკრეტული მნიშვნელობები. პრედიკატების აღსანიშნავად გამოიყენება სიმბოლოები:

$$B(x), A(x, y), P(x_0, x_2, \dots, x_{n-1}), \dots,$$

სადაც პრედიკატებში ფრჩხილებში აღნიშნულია ცვლადები, რომლებზეც დამოკიდებულია მოცემული პრედიკატების მნიშვნელობები. ერთ ცვლადიან პრედიკატს ეწოდება ერთადგილიანი, ორ ცვლადიანს - ორადგილიანი და ა.შ.

მათემატიკური თეორიის ყოველი დებულება წარმოადგენს მოცემული თეორიის გარკვეული დებულებების ლოგიკურ შედეგს. ე. ი. ყოველი დებულება წარმოიდგინება სხვა დებულებებზე ლოგიკური ოპერაციების საშუალებით. ლოგიკური ოპერაციებია: უარყოფის ოპერაცია, დიზიუნქცია, კონიუნქცია, იმპლიკაცია, ექვივალენტურობა, არსებობისა და ზოგადობის კვანტორებთან დაკავშირებული ოპერაციები.

ვთქვათ, A და B რაიმე თეორიის ორი დებულებებია და მათთვის განვსაზღვროთ ზემოთ ჩამოთვლილი ძირითადი ლოგიკური ოპერაციები.

უარყოფის ოპერაცია. A დებულების უარყოფა ეწოდება ისეთ დებულებას, რომელიც ჭეშმარიტია, როცა A მცდარია და მცდარია, როცა A ჭეშმარიტია.

A დებულების უარყოფა აღინიშნება $\neg A$ სიმბოლოთი და იკითხება, როგორც “არა A ”.

დიზიუნქციის ოპერაცია (ლოგიკური ჯამი). A და B დებულებების დიზიუნქცია ეწოდება ისეთ დებულებას, რომელიც ჭეშმარიტია, როცა ჭეშმარიტია ერთი მაინც მოცემული A და B დებულებებიდან და მცდარია, როცა A -ც მცდარია და B -ც.

A და B დებულებების დიზიუნქცია ჩაიწერება $A \vee B$ სახით. „ $\vee$ ” ლოგიკური კავშირის სახელწოდებაა „ან”.

კონიუნქციის ოპერაცია (ლოგიკური ნამრავლი). A და B დებულებების კონიუნქცია ეწოდება ისეთ დებულებას, რომელიც ჭეშმარიტია, როცა ჭეშმარიტია ორივე A და B დებულებება და მცდარია, როცა A და B დებულებებიდან ერთი მაინც მცდარია.

A და B დებულებების კონიუნქციის ჩაწერისათვის სარგებლობენ $A \wedge B$ ფორმას. „ $\wedge$ ” ლოგიკური კავშირის სახელწოდებაა „და”, ამიტომ მას ხშირად შეეცვლით „&” სიმბოლოთი.

იმპლიკაციის ოპერაცია (გამომდინარეობა). იმპლიკაცია A დებულებიდან B დებულებაში ეწოდება ისეთ დებულებას, რომელიც მცდარია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A ჭეშმარიტია და B მცდარი.

მიღებულია, რომ A -დან B -ში იმპლიკაცია ჩაიწეროს $A \Rightarrow B$ სახით.

ექვივალენტურობა. ორი A და B დებულების ექვივალენტურობა ეწოდება ისეთ დებულებას, რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A და B დებულებებიდან ორივე ჭეშმარიტია ან ორივე მცდარია.

A და B დებულებების ექვივალენტურობის აღსანიშნავად სარგებლობენ $A \Leftrightarrow B$ სიმბოლოთი.

არსებობის კვანტორთან დაკავშირებული ოპერაცია. ყოველ ერთადგილიან $P(x)$ პრედიკატს შეესაბამება გამონათქვამი, რომელიც აღინიშნება $\exists xP(x)$ სიმბოლოთი, რომელიც ჭეშმარიტია, როცა $P(x)$ -ის ჭეშმარიტების არე არაცარიელია და მცდარია წინააღმდეგ შემთხვევაში.

„ $\exists$ ” სიმბოლოს ეწოდება არსებობის კვანტორი.

ზოგადობის კვანტორთან დაკავშირებული ოპერაცია. ყოველ ერთადგილიან $P(x)$ პრედიკატს შეესაბამება გამონათქვამი, რომელიც აღინიშნება $\forall xP(x)$ სიმბოლოთი, რომელიც ჭეშმარიტია, როცა $P(x)$ ჭეშმარიტია ცვლადის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის და მცდარია წინააღმდეგ შემთხვევაში.

„ $\forall$ ” სიმბოლოს ეწოდება ზოგადობის კვანტორი.

მოვიყვანოთ დე მორგანის კანონების სახელწოდებით ცნობილი ექვივალენტურობები.

თუ $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ რაიმე თეორიის ნებისმიერი დებულებებია, მაშინ:

$$\neg(A_0 \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_{n-1}) \Leftrightarrow \neg A_0 \vee \neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_{n-1}.$$

$$\neg(A_0 \vee A_1 \vee \dots \vee A_{n-1}) \Leftrightarrow \neg A_0 \wedge \neg A_1 \wedge \dots \wedge \neg A_{n-1}.$$

ზემოთ მოყვანილი ლოგიკური ოპერაციები გამოიყენება მათემატიკური წინადადებების ჩაწერისათვის. ლოგიკურ ჩანაწერებში მკაცრად უნდა იყოს დაცული ლოგიკური ოპერაციების თანმიმდევრობა. ლოგიკური ოპერაციების თანმიმდევრობის შეცვლა იწვევს ერთმანეთისაგან განსხვავებული წინადადებების მიღებას. ამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ რაიმე ინტერვალზე ერთი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობისა და თანაბრად უწყვეტობის ცნებები, რომლებიც თავიანთი არსით ერთმანეთისაგან სრულიად განსხვავებულნი არიან. მათ ლოგიკურ ჩანაწერებში კი მხოლოდ ლოგიკური ოპერაციების თანმიმდევრობაა განსხვავებული. რაიმე I ინტერვალში $y = f(x)$ ფუნქციის

უწყვეტობა და თანაბრად უწყვეტობა ლოგიკური ოპერაციებით შესაბამისად ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$(\forall t)(\forall \varepsilon)(\exists \delta)(\forall x)(|x-t| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \varepsilon), \quad (t \in I);$$

$$(\forall \varepsilon)(\exists \delta)(\forall t)(\forall x)(|x-t| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \varepsilon), \quad (t \in I).$$

მათემატიკური ლოგიკა განიხილება, როგორც უნივერსალური ენა მთელი მათემატიკისათვის. ჩვენ არ შევუდგებით უფრო დაწვრილებით გადმოვცეთ მათემატიკური ლოგიკის ღრმა და შინაარსობრივი მასალა. ამისათვის არსებობს ბევრი საინტერესო ლიტერატურა და დაინტერესებულ მკითხველს შეუძლია იხილოს და გაიაზროს მათემატიკური აზროვნების ეს უდიდესი მონაპოვარი.

§2. სიმრავლეები. მოქმედებანი სიმრავლეებზე. სიმრავლეთა კლასები

სიმრავლე წარმოადგენს თანამედროვე მათემატიკის ყველა მიმართულებისათვის ერთ-ერთ ყველაზე საერთო და ძირითად მათემატიკურ ობიექტს. მათემატიკაში სიმრავლის ცნება პირველად შემოტანილი იქნა სიმრავლეთა თეორიის ფუძემდებლის გერმანელი მათემატიკოსის გეორგ კანტორის (1845-1918) მიერ. კანტორისეული განსაზღვრებით ტერმინი “სიმრავლე” გამოიყენება სხვადასხვა, ჩვენი წარმოსახვისათვის მისაწვდომი საგნების ერთობლიობის გამომხატველად, რომლებიც გაერთიანებული არიან ერთ მთელში. საგნებს, რომლებითაც შედგენილია სიმრავლე, ეწოდებათ მოცემული სიმრავლის ელემენტები. შევნიშნოთ, რომ სიმრავლის კანტორისეული განსაზღვრა არ შეიცავს რაიმე შეზღუდვას როგორც სიმრავლის ელემენტების ბუნების, ასევე სიმრავლეში შემავალი ელემენტების რაოდენობის შესახებ. სიმრავლის მოცემა შესაძლებელია ნებისმიერი მეთოდით, მხოლოდ საკმარისია ყოველი სიმრავლისათვის და ყოველი ობიექტისათვის პრინციპში შესაძლებელი იყოს იმის დადგენა, რომ მოცემული ობიექტი ეკუთვნის თუ არა მოცემულ სიმრავლეს.

სიმრავლის ზემოთ მოცემული აღწერა არ შეიძლება ჩაითვალოს სიმრავლის მკაცრ მათემატიკურ განსაზღვრებად, რადგან ყოველი მათემატიკური ცნება განისაზღვრება სხვა უკვე ცნობილი ცნებების საშუალებით. სიმრავლე არის ზოგადი, რომელიც არ შეიძლება განისაზღვროს სხვა ცნებებზე დაყრდნობით, ანუ სიმრავლე მათემატიკის საწყისი ცნებაა და ის შეიძლება დახასიათდეს, როგორც რაიმე საერთო ნიშნით გაერთიანებული საგანთა ერთობლიობა. ამავე დროს შევნიშნოთ, რომ გარკვეული ერთობლიობა, ანუ სიმრავლე, შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ახალი სიმრავლის ობიექტი. სიმრავლის არსის გაგება შესაძლებელია მხოლოდ სიმრავლეებზე მაგალითების განხილვით. სიმრავლის მაგალითებია: საქართველოში მცხოვრები ადამიანთა სიმრავლე, მოცემული წიგნის წინადადებათა სიმრავლე, სიბრტყეზე სამკუთხედების სიმრავლე, ცაში ვარსკვლავების სიმრავლე და სხვა.

ჩვენი მიზანი არ არის დაწვრილებით გადმოცემით სიმრავლეთა თეორიის ბევრ საკითხში ბოლომდე წვდომა. წიგნში გადმოცემული იქნება სიმრავლეთა თეორიის მხოლოდ ის ნაწილი, რომელიც არსებით როლს თამაშობს მათემატიკური ანალიზის ზოგიერთი ძირეული საკითხის კვლევაში.

ტრადიციულად მიღებულია (მაგრამ არ არის სავალდებულო), რომ სიმრავლეები აღინიშნოს ლათინური ანბანის დიდი ასოებით: $A, B, C, D, \dots$, ხოლო მისი ელემენტები პატარა ლათინური ასოებით: $a, b, c, d, \dots$.

თუ რაიმე a ობიექტი არის რომელიმე A სიმრავლის ელემენტი, მაშინ ეს ფაქტი ჩაიწერება $a \in A$ სახით და იკითხება, როგორც „ a ეკუთვნის A -ს“, ხოლო თუ a არ წარმოადგენს A -ს ელემენტს, მაშინ წერენ $a \notin A$ და იკითხება, როგორც „ a არ ეკუთვნის A -ს“.

სიმრავლე, რომლის ელემენტებია $a, b, c, \dots$ აღინიშნება $\{a, b, c, \dots\}$ სახით, ხოლო ყველა იმ x ელემენტთა სიმრავლე, რომლებიც ფლობენ რაიმე P თვისებას, აღინიშნება შემდეგნაირად: $\{x: P\}$. მაგალითად, ყველა იმ ნატურალურ

n რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ $5n \leq 30$ უტოლობას, ჩაიწერება შემდეგი სახით: $\{n : n \in N, 5n \leq 30\}$, სადაც N -ით აღნიშნულია ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე. ე.ი. $N = \{0, 1, 2, \dots\}$. შევნიშნოთ, რომ მაგალითში მოყვანილი სიმრავლე შესაძლებელია ჩაიწეროს $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ფორმითაც. პირველ შემთხვევაში სიმრავლე მოცემულია დახასიათების ხერხით, ხოლო მეორე შემთხვევაში კი ელემენტების ჩამოთვლის ხერხით.

სიმრავლეს, რომელიც არ შეიცავს არც ერთ ელემენტს, ცარიელი სიმრავლე ეწოდება და აღინიშნება $\emptyset$ სიმბოლოთი. მაგალითად, ყველა იმ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც ნაკლებია -1-ზე ცარიელი სიმრავლეა. ე. ი.

$$\{n : n \in N, n < -1\} = \emptyset.$$

თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი არის B სიმრავლის ელემენტიც, მაშინ A სიმრავლეს ეწოდება B სიმრავლის ქვესიმრავლე და ჩაიწერება $A \subset B$ სახით. ცხადია, რომ მართებულია შემდეგი თანაფარდობა:

$$(\forall a \in A \Rightarrow a \in B) \Leftrightarrow A \subset B.$$

ჩანაწერი $A \subset B$ იკითხება, როგორც „ A ჩართულია B -ში“, ან „ A ეკუთვნის B -ს“.

თუ A სიმრავლე არ არის B სიმრავლის ქვესიმრავლე, მაშინ წერენ: $A \not\subset B$. ეს იმას ნიშნავს, რომ A სიმრავლეში არსებობს ერთი მაინც ელემენტი a , რომელიც B სიმრავლეს არ ეკუთვნის. ე. ი.

$$A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists a \in A \text{ ჭეშმარიტია } a \notin B).$$

მაგალითად, თუ A -თი აღვნიშნავთ სიბრტყეზე ყველა ტოლფერდა სამკუთხედების სიმრავლეს, ხოლო B -თი იმავე სიბრტყეზე ყველა სამკუთხედების სიმრავლეს, მაშინ ცხადია რომ ადგილი აქვს ჩართვას: $A \subset B$. შევნიშნოთ, რომ ამ მაგალითისათვის $B \subset A$ დამოკიდებულება არ არის ჭეშმარიტი. ე. ი. $B \not\subset A$.

სიმრავლის ქვესიმრავლის განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი ორი დებულება:

ყოველი სიმრავლე თავისი თავის ქვესიმრავლეა. ე.ი.

$$\forall A \text{ ჭეშმარიტია } A \subset A;$$

ცარიელი სიმრავლე ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლეა.
ე. ი.

$$\forall A \text{ ჭეშმარიტია } \emptyset \subset A.$$

ზემოთ მოყვანილი ორი დებულებიდან პირველი ტრივიალურია სიმრავლის ქვესიმრავლის განსაზღვრების თანახმად.

მეორე დებულების დასამტკიცებლად დავუშვათ საწინააღმდეგო. ე. ი. ნებისმიერი A სიმრავლისათვის $\emptyset \not\subset A$. ეს იმას ნიშნავს, რომ ცარიელ სიმრავლეში უნდა არსებობდეს ისეთი ელემენტი, რომელიც არ ეკუთვნის A სიმრავლეს. მაგრამ ბოლო წინადადება მცდარია, ვინაიდან ცარიელი სიმრავლე არ შეიცავს არც ერთ ელემენტს.

თუ A სიმრავლე B სიმრავლის ქვესიმრავლეა, ხოლო B -ში არსებობს ერთი ელემენტი მაინც, რომელიც A -ს არ ეკუთვნის, მაშინ A -ს ეწოდება B -ს საკუთრივი ქვესიმრავლე.

თუ $A \subset B$ და $B \subset A$, მაშინ A და B სიმრავლეებს ტოლი სიმრავლეები ეწოდებათ და წერენ $A = B$.

მაგალითად, თუ $A = \{0, 1, 2, 3\}$ და $B = \{n : n \in N, n < 4\}$, სადაც, ისევე როგორც ზემოთ, N აღნიშნავს ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს, მაშინ $A = B$.

ახლა განვსაზღვროთ სიმრავლეებისათვის ძირითადი სიმრავლურ-თეორიული ოპერაციები.

ვთქვათ, მოცემულია სიმრავლეთა სასრული რაოდენობა $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ ($n \in N$).

მოცემულ $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ სიმრავლეთა გაერთიანება ეწოდება ყველა იმ ელემენტების სიმრავლეს, რომელიც ეკუთვნის ერთ-ერთს მაინც მოცემული სიმრავლეებიდან და აღინიშნება შემდეგი სახით:

$$A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1} \quad \text{ან} \quad \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k.$$

მოცემულ $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ სიმრავლეთა თანაკვეთა ეწოდება ყველა იმ ელემენტების სიმრავლეს, რომელიც ერთდროულად ეკუთვნის ყველა მოცემულ სიმრავლეს და აღინიშნება შემდეგი სახით:

$$A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \text{ ან } \bigcap_{k=0}^{n-1} A_k.$$

ადვილია ჩვენება, რომ ნებისმიერი A, B და C სიმრავლეებისათვის მართებულია დამოკიდებულებები:

- 1) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (კომუტატიურობა);
- 2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ (ასოციაციურობა);
- 3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (დისტრიბუციულობა).

ზუსტად ანალოგიურად განისაზღვრება სიმრავლეთა გაერთიანებისა და თანაკვეთის ოპერაციები იმ შემთხვევებისათვის, როცა მოცემულ სიმრავლეთა რაოდენობა უსასრულოა. ასეთ სიტუაციაში ვისარგებლებთ შემდეგი ჩანაწერებით: $\bigcup_k A_k$, $\bigcap_k A_k$.

ვთქვათ, მოცემულია ორი A და B სიმრავლე.

თუ $A \cap B = \emptyset$, მაშინ A და B სიმრავლეებს თანაუკვეთი სიმრავლეები ეწოდებათ.

მოცემული A და B სიმრავლეების სხვაობა ეწოდება ისეთ სიმრავლეს, რომელიც შეიცავს A სიმრავლის ყველა იმ ელემენტებს, რომელიც B სიმრავლეში არ შედის და ჩაიწერება $A \setminus B$ სახით.

თუ ყველა ის სიმრავლე, რომლებიც ფიგურირებს რაიმე ამოცანაში, ჩართულია რომელიღაც U სიმრავლეში, მაშინ U -ს უნივერსალური სიმრავლე ეწოდება. თუ $A \subset U$, მაშინ $U \setminus A$ სხვაობას ეწოდება A სიმრავლის დამატება (U უნივერსალური სიმრავლის მიმართ) და აღვნიშნავთ A' სიმბოლოთი.

სიმრავლის დამატების განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი A სიმრავლისათვის $(A')' = A$.

A და B სიმრავლეების სიმეტრიული სხვაობა, რომელიც ჩაიწერება $A \Delta B$ სახით, განისაზღვრება შემდეგი დამოკიდებულებით:

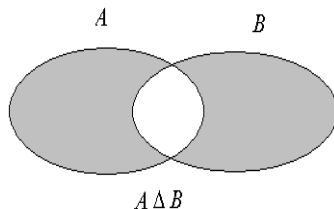
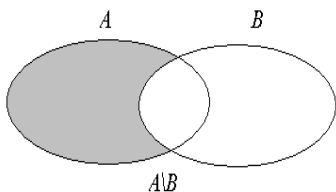
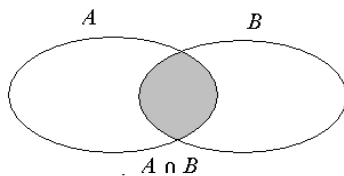
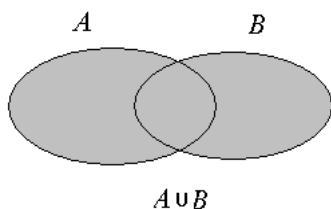
$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

სიმეტრიული სხვაობის განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ:

ა) $A \Delta A = \emptyset$;

ბ) $A \Delta \emptyset = A$.

სიმრავლეებზე სხვადასხვა მოქმედებების გრაფიკულ გამოსახვას სიბრტყეზე ეილერ-ვენის დიაგრამები ეწოდება. ქვემოთ მოყვანილია ორი A და B სიმრავლის შემთხვევაში ზემოთ განსაზღვრული მოქმედებების (გაერთიანების, თანაკვეთის, სხვაობის, სიმეტრიული სხვაობის) გამოსახვა ეილერ-ვენის დიაგრამების საშუალებით (შესაბამისი მოქმედების შედეგად მიღებული სიმრავლეები გამუქებულია).



A და B სიმრავლეების პირდაპირი ნამრავლი ანუ დეკარტული ნამრავლი ეწოდება ყველა (a, b) დალაგებულ

წყვილთა სიმრავლეს, სადაც $a \in A$ და $b \in B$ და ჩაიწერება $A \times B$ სახით. ე. ი. გვაქვს

$$A \times B = \{(a, b) : (a \in A) \wedge (b \in B)\}.$$

მაგალითად, თუ $A = \{1, 2\}$ და $B = \{2, 3\}$, მაშინ

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\},$$

ხოლო

$$B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}.$$

ამ მაგალითიდან ჩანს, რომ დეკარტული ნამრავლი საზოგადოდ არ არის კომუტატიური. $A \times B = B \times A$ ტოლობა ჭეშმარიტია მაშინ, როცა $A = B$.

ორი სიმრავლის დეკარტული ნამრავლის უმარტივეს მაგალითს წარმოადგენს საკოორდინატო სიბრტყე, რომელიც შეიძლება განვიხილოთ, როგორც კოორდინატთა ღერძების დეკარტული ნამრავლი. აქედან გამომდინარე $A \times B$ ნამრავლს ხშირად უწოდებენ მართკუთხედს, ხოლო A და B სიმრავლეებს კი ამ მართკუთხედის გვერდებს.

თუ მოცემულია სიმრავლეთა სასრული $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ ოჯახი, მაშინ ამ სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი არის ყველა $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ სახის სიმრავლე, სადაც $a_k \in A_k$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$).

თუ $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ სიმრავლეები ემთხვევიან ერთმანეთს, ე. ი. ყოველი $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ ინდექსისათვის $A_k = A$, მაშინ მოცემული სიმრავლეების დეკარტული ნამრავლი აღინიშნება A^n სიმბოლოთი.

სიმრავლეთა დეკარტულ ნამრავლს ნებისმიერი A, A_0, A_1, B, B_0, B_1 სიმრავლეებისათვის გააჩნია შემდეგი თვისებები:

$$1'. (A_0 \cup A_1) \times (B_0 \cup B_1) = (A_0 \times B_0) \cup (A_0 \times B_1) \cup (A_1 \times B_0) \cup (A_1 \times B_1);$$

$$2'. (A_0 \cap A_1) \times (B_0 \cap B_1) = (A_0 \times B_0) \cap (A_1 \times B_1);$$

$$3'. (A_0 \setminus A_1) \times B = (A_0 \times B) \setminus (A_1 \times B);$$

$$4'. \{(A_0 \times B_0) = (A_1 \times B_1)\} \Rightarrow [A_0 = A_1 \wedge B_0 = B_1];$$

$$5'. (A \times B = \emptyset) \Leftrightarrow [A = \emptyset \vee B = \emptyset].$$

მაგალითი 1. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი A , B და C სიმრავლეებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

მართლაც, ვთქვათ, $x \in A \cap (B \Delta C)$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $x \in A \wedge x \in B \Delta C$. რადგან $B \Delta C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$, ამიტომ $x \in B \setminus C \vee x \in C \setminus B$. ვთქვათ, $x \in B \setminus C$. ორი სიმრავლის სხვაობის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ $x \in B \wedge x \notin C$. საბოლოოდ ამ შემთხვევისათვის გვაქვს:

$$x \in A, x \in B \wedge x \notin C.$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $x \in A \cap B \wedge x \notin A \cap C$. ე. ი. $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ და მაშასადამე, $x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C)$. რაც ნიშნავს, რომ

$$A \cap (B \Delta C) \subset (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

იმ შემთხვევაში, როცა $x \in C \setminus B$ მსჯელობა ჩატარდება ზუსტად ანალოგიურად.

ახლა ვთქვათ,

$$x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C) = ((A \cap B) \setminus (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \setminus (A \cap B)).$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$. ორი სიმრავლის სხვაობის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ $x \in A \cap B \wedge x \notin A \cap C$. აქედან კი მივიღებთ, რომ

$x \in A, x \in B \wedge x \notin C$. რადგან $x \in B \wedge x \notin C$ ამიტომ $x \in B \setminus C$.

ე. ი. საბოლოოდ, $x \in A \cap (B \Delta C)$. ეს კი ნიშნავს, რომ

$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) \subset A \cap (B \Delta C).$$

იმ შემთხვევაში, როცა $x \in (A \cap C) \setminus (A \cap B)$, მსჯელობა ჩატარდება ანალოგიურად.

შევნიშნოთ,

$$\text{რომ } ((A \cap B) \setminus (A \cap C)) \text{ და } ((A \cap C) \setminus (A \cap B))$$

სიმრავლეები თანაუკვეთი სიმრავლეებია, ამიტომ იმ შემთხვევის განხილვა, როცა x ელემენტი ეკუთვნის ორივე ამ სიმრავლეებს ერთდროულად არ არის საჭირო.

ორი სიმრავლის ტოლობის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ტოლობა.

სიმრავლეთა თეორიაში და მის გამოყენებებში მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ე. წ. ორადულობის პრინციპი, რომელიც დაფუძნებულია შემდეგ ორ თანაფარდობაზე:

$$\left(\bigcup_k A_k \right)' = \bigcap_k A_k', \quad (1)$$

$$\left(\bigcap_k A_k \right)' = \bigcup_k A_k', \quad (2)$$

სადაც $\{A_k : k \in N\}$ სიმრავლეთა ნებისმიერი მიმდევრობაა.

ორადულობის პრინციპის არსი მდგომარეობს შემდეგში:

თუ სიმრავლეებს შორის რაიმე ჭეშმარიტი დამოკიდებულება წარმოდგენილია ტოლობის ან ჩართვის სახით და გამოსახულია გაერთიანებების, თანაკვეთების ან დამატებების ტერმინებში, მაშინ ჭეშმარიტი იქნება იმავე ტიპის დამოკიდებულება, რომელიც მიიღება გამოსავალი დამოკიდებულებიდან, თუ მასში

$$\cup, \cap, \subset, \supset$$

სიმბოლოებს შესაბამისად შევცვლით

$$\cap, \cup, \supset, \subset$$

სიმბოლოებით, ხოლო ყოველ სიმრავლეს კი შევცვლით მათი დამატებებით.

მოვიყვანოთ (1) ტოლობის დამტკიცება.

ვთქვათ, $x \in \left(\bigcup_k A_k\right)'$. ეს ნიშნავს, რომ $x \notin \bigcup_k A_k$, ამიტომ x არ ეკუთვნის არც ერთ A_k და შესაბამისად, x ეკუთვნის ყოველ A_k' სიმრავლეს. ე. ი. $x \in \bigcap_k A_k'$. მივიღეთ,

$$\left(\bigcup_k A_k\right)' \subset \bigcap_k A_k'.$$

ახლა ვთქვათ, $x \in \bigcap_k A_k'$. ეს ნიშნავს, რომ x ეკუთვნის ყოველ A_k' და რაც იგივეა, x არ უკუთვნის არც ერთ A_k სიმრავლეს და შესაბამისად, $x \notin \bigcup_k A_k$. ე. ი. $x \in \left(\bigcup_k A_k\right)'$. ე. ი.

$$\bigcap_k A_k' \subset \left(\bigcup_k A_k\right)'.$$

ამით (1) ტოლობა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად დამტკიცდება (2) ტოლობაც.

მაგალითი 2. ვთქვათ, $A \subset U$, $B \subset U$, სადაც U ფიქსირებული უნივერსალური სიმრავლეა. ვიპოვოთ ისეთი $X \subset U$ სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს

$$(X \cup A)' \cup (X \cup A')' = B$$

განტოლებას.

ცხადია, რომ ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\begin{aligned} (X \cup A)' \cup (X \cup A')' &= \left(\left((X \cup A)' \cup (X \cup A')' \right)' \right)' = \\ &= ((X \cup A) \cap (X \cup A'))' = B. \end{aligned}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$((X \cup A) \cap (X \cup A')) = B'.$$

რადგან

$$\begin{aligned} ((X \cup A) \cap (X \cup A')) &= (X \cap (X \cup A')) \cup (A \cap (X \cup A')) = \\ &= X \cup (X \cap A') \cup (A \cap X) = X \cup (X \cap (A \cup A')) = X \cup X = X = B'. \end{aligned}$$

ქ. ი. $X = B'$.

ახლა ვთქვათ, მოცემულია სიმრავლეთა ნებისმიერი $A_0, A_1, A_2, \dots$ მიმდევრობა.

მოცემულ $A_0, A_1, A_2, \dots$ სიმრავლეთა მიმდევრობას ეწოდება ზრდადი (ჩართვის თვალსაზრისით), თუ

$$(\forall n \in N \Rightarrow A_n \subset A_{n+1}),$$

ხოლო ეწოდება კლებადი (ჩართვის თვალსაზრისით), თუ

$$(\forall n \in N \Rightarrow A_n \supset A_{n+1}).$$

თუ სიმრავლეთა მიმდევრობა ზრდადია ან კლებადი, მაშინ მას მონოტონური მიმდევრობა ეწოდება.

მოცემულ $A_0, A_1, A_2, \dots$ სიმრავლეთა მიმდევრობის ზედა ზღვარი (აღინიშნება $\overline{\lim} A_n$ სიმბოლოთი) ეწოდება სიმრავლეს, განსაზღვრულს შემდეგი ტოლობით:

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n \in N} \bigcup_{m \geq n} A_m,$$

ქ. ი.

$$\overline{\lim} A_n = (A_0 \cup A_1 \cup \dots) \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots) \cap (A_2 \cup A_3 \cup \dots) \cap \dots.$$

მოცემულ $A_0, A_1, A_2, \dots$ სიმრავლეთა მიმდევრობის ქვედა ზღვარი (აღინიშნება $\underline{\lim} A_n$ სიმბოლოთი) ეწოდება სიმრავლეს, განსაზღვრულს შემდეგი ტოლობით:

$$\underline{\lim} A_n = \bigcup_{n \in N} \bigcap_{m \geq n} A_m,$$

ქ. ი.

$$\underline{\lim} A_n = (A_0 \cap A_1 \cap \dots) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \dots) \cup (A_2 \cap A_3 \cap \dots) \cup \dots.$$

სიმრავლეთა მიმდევრობების ზედა და ქვედა ზღვრების განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ

$$\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n.$$

თუ მოცემულ $A_0, A_1, A_2, \dots$ სიმრავლეთა მიმდევრობა ისეთია, რომ $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n$, მაშინ $\overline{\lim} A_n$ ($\underline{\lim} A_n$) ეწოდება მოცემული მიმდევრობის ზღვარი და აღინიშნება $\lim A_n$ სიმბოლოთი.

სიმრავლეთა მიმდევრობის ზედა და ქვედა ზღვრების განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ თუ სიმრავლეთა მიმდევრობა მონოტონურია, მაშინ მას გააჩნია ზღვარი და მისი მნიშვნელობა ტოლი იქნება $\bigcup_n A_n$ -ის ან $\bigcap_n A_n$ -ის, იმის მიხედვით ზრდადია თუ კლებადი მოცემული მიმდევრობა.

მაგალითი 3. ვთქვათ, მოცემულია სიმრავლეთა მიმდევრობა $A_n = \left[0, \frac{n-1}{n}\right]$, $n=1, 2, 3, \dots$. რადგან $A_1, A_2, A_3, \dots$ მიმდევრობა

ზრდადია, ამიტომ $\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[0, \frac{n-1}{n}\right] = [0, 1)$.

მაგალითი 4. ვთქვათ, მოცემულია სიმრავლეთა მიმდევრობა $A_n = \left[0, \frac{n+1}{n}\right]$, $n=1, 2, 3, \dots$. რადგან $A_1, A_2, A_3, \dots$ მიმდევრობა

კლებადია, ამიტომ გვექნება $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[0, \frac{n+1}{n}\right] = [0, 1]$.

როგორც ამ პარაგრაფის დასაწყისშივე აღვნიშნეთ ყოველი სიმრავლე შესაძლებელია თავად იყოს სხვა სიმრავლის ელემენტი. ეს გარემოება საშუალებას გვაძლევს განვიხილოთ სიმრავლეები, რომელთა ელემენტებიც იქნებიან სიმრავლეები. სიმრავლეთა სიმრავლეებს ეწოდებათ სიმრავლეთა კლასები ან სიმრავლეთა ოჯახები. მაგალითად, თუ R არის რიცხვითი ღერძი, მაშინ ყველა ინტერვალთა ერთობლიობა წარმოქმნის სიმრავლეთა კლასებს R -ში.

მოცემული A სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა ოჯახს ეწოდება A სიმრავლის ბულებანი და აღინიშნება $P(A)$ ან 2^A სიმბოლოებით.

სიმრავლეთა $\{A_i : i \in I\}$ ოჯახს ეწოდება დიზიუნქტიური, თუ შესრულებულია პირობა

$$(\forall i)(\forall j)(i \in I \wedge j \in I \wedge i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset).$$

ვიტყვი, რომ A სიმრავლე დაფარულია სიმრავლეთა $A_0, A_1, A_2, \dots$ ოჯახით, თუ

$$A \subset \bigcup_n A_n,$$

ხოლო თუ მოცემული სიმრავლეთა $A_0, A_1, A_2, \dots$ ოჯახი დიზიუნქტიურია და შესრულებულია ტოლობა $A = \bigcup_n A_n$, მაშინ

სიმრავლეთა $A_0, A_1, A_2, \dots$ ოჯახი წარმოადგენს მოცემული A სიმრავლის დაშლას.

ვიტყვი, რომ $(a_i : i \in I)$ ელემენტთა ოჯახი არის დიზიუნქტიური $\{A_i : i \in I\}$ სიმრავლეთა ოჯახის სელექტორი, თუ

$$(\forall i)(i \in I \Rightarrow a_i \in A_i).$$

სიმრავლეთა კლასების მაგალითებს წარმოადგენენ რაიმე უნივერსალურ სიმრავლეზე განსაზღვრული იდეალი და ფილტრი, რომლებიც უაღრესად დიდ როლს თამაშობენ მათემატიკური ანალიზის მთელ რიგ მნიშვნელოვანი საკითხების შესწავლაში.

ვთქვათ, U უნივერსალური სიმრავლეა. U სიმრავლის ქვესიმრავლეთა I კლასს ეწოდება იდეალი U -ზე, თუ ამ კლასისათვის შესრულებულია შემდეგი პირობები:

- 1) $\emptyset \in I$;
- 2) $U \notin I$;

$$3) (\forall A)(\forall B)(A \in I \wedge B \in I \Rightarrow A \cup B \in I);$$

$$4) (\forall A)(\forall B)(A \in I \wedge B \subset A \Rightarrow B \in I).$$

იდეალის ცნების ორადული განსაზღვრებაა ფილტრის ცნება. კერძოდ, U სიმრავლის ქვესიმრავლეთა Φ კლასს ეწოდება ფილტრი U -ზე, თუ ამ კლასისათვის შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$$1) \emptyset \notin \Phi;$$

$$2) U \in \Phi;$$

$$3) (\forall A)(\forall B)(A \in \Phi \wedge B \in \Phi \Rightarrow A \cap B \in \Phi);$$

$$4) (\forall A)(\forall B)(A \in \Phi \wedge A \subset B \Rightarrow B \in \Phi).$$

§3. სიმრავლეთა თეორიის აქსიომები

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, მათემატიკური ლოგიკა და სიმრავლეთა თეორია არის მთელი თანამედროვე მათემატიკის მყარი ლოგიკური საფუძველი და ეს გარემოება განაპირობებს ამ დისციპლინის უაღრესად დიდ მნიშვნელობას. გარდა ამისა, სიმრავლურ-თეორიულ მეთოდებს აქვს მრავალი გამოყენება როგორც მათემატიკის წმინდა თეორიულ დარგებში (აღგებრა, გეომეტრია, ტოპოლოგია, მათემატიკური და ფუნქციონალური ანალიზი და სხვ.), ისევე მათემატიკის გამოყენებით დარგებში (გრაფთა თეორია, კომბინატორიკა, ალბათობის თეორია და სხვ.). სიმრავლეთა თეორია ამჟამად განიხილება მათემატიკურ ლოგიკასთან მჭიდრო კავშირში, მისი აქსიომატიკის კვლევა და ანალიზი უშუალო თანახებაშია ფილოსოფიის ისეთ ფუნდამენტურ საკითხებთან, როგორიცაა პოტენციალური და აქტუალური უსასრულობების არსი, კავშირი დისკრეტულსა და უწყვეტ სტრუქტურებს შორის, ლოგიკური პარადოქსების

ახსნა-განმარტებები, ობიექტის არსებობის კრიტერიუმები, კავშირი აქსიომატურ თეორიებსა და მათ მოდელებს შორის და ა.შ.

მეცნიერების განვითარების საწყის ეტაპზე ძირითადი ცნებები და დებულებები, კერძოდ, აქსიომები, ბუნების საგნებსა და მოვლენებზე უშუალო დაკვირვებით მიიღებიან. მეცნიერების განვითარების შემდგომ საფეხურზე თეორიული კვლევით მიღებულ შედეგებზე დაყრდნობით შესაძლებელი ხდება აქსიომათა ნუსხის დაზუსტება, რაც წარმოადგენს გამოსავალ წერტილს მეცნიერული კვლევის გაფართოებისათვის.

სიმრავლეთა თეორია წარმოადგენს უნივერსალურ ფუნდამენტს მთელი მათემატიკისათვის. ყოველი მათემატიკური მიმართულება შეიძლება წარმოვიდგინოთ მოცემული სტრუქტურის სიმრავლეთა ერთობლიობის სახით. მაგრამ თეორიულ-სიმრავლური უნივერსუმის ინტუიციურ ცნებებს ზოგჯერ მიეყავართ წინააღმდეგობამდე.

მაგალითისათვის განვიხილოთ ინგლისელი მათემატიკოსის ბერტრან რასელის (1872-1970) პარადოქსი. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, სიმრავლე თავად შეიძლება იყოს სიმრავლის ელემენტიც, მაგრამ სიმრავლეთა უმრავლესობა არ წარმოადგენს თავის თავის ელემენტს. მაგალითად, დედამიწაზე მცხოვრები ადამიანთა სიმრავლე არ არის თავის თავის ელემენტი, რადგან ეს სიმრავლე არ არის ადამიანი. მიუხედავად ამისა, არსებობენ სიმრავლეები, რომლებიც არიან თავისთავის ელემენტები. მაგალითად, ყველა სიმრავლეთა სიმრავლე.

ახლა განვიხილოთ E სიმრავლე, რომელიც არის ყველა ისეთი სიმრავლეთა სიმრავლე, რომლებიც არ წარმოადგენენ თავისთავის ელემენტებს. ე. ი.

$$E = \{A : A \notin A\}.$$

მაშინ ნებისმიერი A სიმრავლისათვის გვექნება დამოკიდებულება

$$A \in E \Leftrightarrow A \notin A.$$

თუ A -ს შევცვლით E -თი, მივიღებთ, რომ

$$E \in E \Leftrightarrow E \notin E.$$

ასეთი ტიპის პარადოქსები არის შედეგი აქსიომატური სიმრავლეთა თეორიის. ყოველი აქსიომატურ თეორიაში

თავდაპირველად შემოდის საწყისი ცნებები და შემდეგ ამ ცნებებისათვის აღგენენ აქსიომებს. სიმრავლეთა თეორიისათვის ძირითადი ცნებაა თვით სიმრავლე. სიმრავლე იქმნება განსაზღვრული ობიექტების შერჩევით და სიმრავლე ამ ობიექტებით სრულად განისაზღვრება, ამიტომ სიმრავლის ელემენტები შეიძლება იყოს ნებისმიერი ბუნების. აქედან გამომდინარე საჭიროა სიმრავლის ელემენტებზე შემოვიღოთ გარკვეული შეზღუდვები, რომლებიც აგვარიდებენ პარადოქსებს. მაგალითად, პარადოქსები შესაძლებელია ავიცილოთ თავიდან, თუ შემოვიტანთ ობიექტთა ერთობლიობის ორ ფორმას. ერთ-ერთს მათ შორის ვუწოდოთ კლასები, მეორეს კი – სიმრავლეები. თანაც, სიმრავლეები იქნებიან კლასებიდან მხოლოდ ისინი, რომლებიც თვითონ შეიძლება იყოს სხვა კლასების ელემენტები. გარდა ამისა, შეიძლება ჩაითვალოს, რომ სიმრავლე იგება საფეხურების მიხედვით. ყოველი მიმდინარე საფეხურისთვის წინამორბედი საფეხური (ასეთის არსებობის შემთხვევაში) იგება უფრო „ადრე“ (ლოგიკური აზრით). ე. ი. მიმართება „ადრე“ ალაგებს საფეხურებს. ყოველი სიმრავლე იგება გარკვეული საფეხურების შემდეგ, რის შემდეგაც შესაძლებელია მისი გამოყენება.

მსგავსი ტიპის შეზღუდვები თავიდან აგვაცილებს პარადოქსებს, მაგრამ მიუხედავად ამისა მიზანშეწონილია შემოვისაზღვროთ მხოლოდ ისეთი სიმრავლეების განხილვით, რომელთა არსებობა შესაძლებელია დამტკიცდეს რაიმე აქსიომათა სისტემით.

ასეთი აქსიომათა სისტემა 1908 წელს შემოთავაზებული იყო გერმანელი მათემატიკოსის ერნსტ ცერმელოს (1871-1953) მიერ, რომელიც შემდგომ სრულყო ებრაელმა მათემატიკოსმა აბრაჰამ ფრენკელმა (1891-1965), ამიტომ ამ აქსიომათა სისტემას ეწოდება ცერმელო-ფრენკელის სიმრავლეთა თეორია (ZF).

(ZF) სიმრავლეთა თეორიის აქსიომებია:

1. მოცულობის აქსიომა (ექსტენსიონალობის აქსიომა): ყოველი სიმრავლე სავსებით განისაზღვრება მისი ელემენტებით. ორი სიმრავლე ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ისინი შედგებიან ერთიდაიგივე ელემენტებისაგან.

ლოგიკური ოპერაციებით მოცულობის აქსიომა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow A = B.$$

2. **ცარიელი სიმრავლის არსებობის აქსიომა:** არსებობს სიმრავლე, რომელიც არც ერთ ელემენტს არ შეიცავს. ე. ი.

$$\exists \emptyset = \{x : x \neq x\}.$$

3. **წყვილის არსებობის აქსიომა:** ნებისმიერი A და B სიმრავლეებისათვის არსებობს სიმრავლე, რომლის ერთადერთი ელემენტიც იქნება A და B .

ლოგიკური ოპერაციებით ეს აქსიომა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\text{თუ } \exists A \text{ და } \exists B, \text{ მაშინ } \exists \{A, B\}.$$

4. **გაერთიანების აქსიომა:** ნებისმიერი A სიმრავლის ყველა ელემენტთა გაერთიანება არის სიმრავლე.

ე. ი. ნებისმიერი A სიმრავლისათვის არსებობს სიმრავლე $\cup A$, რომელიც შედგება ყველა იმ ელემენტებისაგან, რომლებიც A სიმრავლეში შედიან ელემენტების სახით.

ლოგიკური ოპერაციებით გაერთიანების აქსიომა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\text{თუ } \exists A, \text{ მაშინ } \exists \cup A = \{a : a \in b \text{ რომელიმე } b \in A\}.$$

5. **ხარისხის აქსიომა (სიმრავლის ბულეანის არსებობის აქსიომა):** ნებისმიერი A სიმრავლის ყველა შესაძლო ქვესიმრავლეთა ერთობლიობა წარმოადგენს სიმრავლეს.

როგორც უკვე შევთახმდით §2-ში, A სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა კლასს ეწოდება ამ სიმრავლის ბულეანი და აღინიშნება $P(A)$ სიმბოლოთი.

ლოგიკური ოპერაციებით ხარისხის აქსიომა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\text{თუ } \exists A, \text{ მაშინ } \exists P(A) = \{B : B \subset A\}.$$

6. **უსასრულობის აქსიომა.** არსებობს ისეთი სიმრავლეთა ოჯახი X , რომელსაც ეკუთვნის $\emptyset$ სიმრავლე და თუ $A \in X$, მაშინ X -ში არსებობს ელემენტი B , რომელიც შეიცავს A სიმრავლის ყველა ელემენტს და თვით A სიმრავლესაც.

უსასრულობის აქსიომა განაპირობებს უსასრულო სიმრავლის არსებობას. ამ აქსიომის ერთ-ერთ ეკვივალენტურ ფორმას მივიღებთ, თუ დავუშვებთ ყველა ნატურალურ N რიცხვითა სიმრავლის არსებობას.

$$\exists N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \text{ სადაც } 0 = \emptyset, n+1 = n \cup \{n\}.$$

7. **ჩანაცვლების აქსიომა:** ყოველი A სიმრავლისათვის და ყოველი A -ზე განსაზღვრული $\varphi(x)$ ფუნქციისათვის არსებობს სიმრავლე, რომელის შეიცავს $\varphi(x)$ ობიექტებს, სადაც $x \in A$.

ლოგიკური ოპერაციებით ჩანაცვლების აქსიომა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\exists B = \{y : x \in A \wedge y = \varphi(x)\}.$$

შევნიშნოთ, რომ წყვილის არსებობის აქსიომა გამომდინარეობს სხვა აქსიომებიდან, ამიტომ მას აქსიომათა ჩამონათვალში სწორად არ წერენ.

იმისათვის, რომ სიმრავლეთა თეორიის აქსიომათა სისტემა იყოს სრული, ანუ ფორმალიზებული იყოს მათემატიკური განსჯის ცნობილი მეთოდები, აუცილებელია (ZF) აქსიომათა სისტემას დაემატოს ორი ურთიერთსაწინააღმდეგო დებულებიდან ერთ-ერთი: ამორჩევის აქსიომა (AC) ან დეტერმინირების აქსიომა (AD).

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ნებისმიერი თანამედროვე მათემატიკური თეორია დაფუძნებულია სიმრავლეთა თეორიის ყველაზე პოპულარულ აქსიომათა სისტემაზე, როგორიცაა ცერმელო-ფრენკელ (ZF) სიმრავლეთა თეორია. მაგრამ შემდგომი განვითარებისათვის აუცილებელია ამორჩევის აქსიომის (AC) მიღება. ამორჩევის აქსიომის გარეშე შეუძლებელია განვითარდეს არა მარტო მათემატიკური ლოგიკა (სიმრავლეთა თეორია და მოდულების თეორია), არამედ მათემატიკის ისეთი თანამედროვე დარგებიც, როგორიცაა, ტოპოლოგია, ფუნქციონალური ანალიზი, ალგებრა, ზომის თეორია და ა. შ.

ამორჩევის აქსიომა 1904 წელს შემოღებულ იქნა ე. ცერმელოს მიერ.

ვთქვათ, ყოველი $x \in A$ მოცემულია სიმრავლე $A_x \neq \emptyset$.
 ყოველი A_x სიმრავლიდან რომელიმე $y \in A_x$ ელემენტის
 ამორჩევით მივიღებთ A -ზე განსაზღვრულ ისეთ f ფუნქციას,
 რომ $f(x) \in A_x$, ყოველი $x \in A$. ე.ი. $f(x) = y$. ასეთი სახის
 f ფუნქციას ეწოდება ამორჩევის ფუნქცია.

არსებობს ამორჩევის აქსიომის სხვადასხვა ექვივალენტური
 ფორმები.

ა) ვთქვათ,

$$F = \{A_i : i \in I\}$$

არის არაცარიელი დიზუნქტიური სიმრავლეების ოჯახი. მაშინ
 არსებობს ისეთი $B = \{x_i : i \in I\}$ სიმრავლე, რომელიც შეიცავს
 ერთადერთ x_i ელემენტს ყოველი $A_i \in F$ სიმრავლიდან.

ბ) არაცარიელ სიმრავლეთა ყოველი A_x ოჯახისათვის
 არსებობს ამორჩევის f ფუნქცია, ე. ი.

$$\forall A_x \neq \emptyset, \exists f : P(A_x) \rightarrow A_x$$

ისეთი რომ

$$f(A) \in A, \forall A \subset A_x, A \neq \emptyset.$$

მრავალი ფაქტორის გამო შეუძლებელია ამორჩევის
 აქსიომის მთლიანად უარყოფა. რომ შევინარჩუნოთ გარკვეული
 კარგი თვისებები, მაგალითად ლებეგის ზომისათვის,
 საკმარისია, მივიღოთ ამორჩევის აქსიომის უფრო სუსტი
 ფორმა, მაგალითად, დამოკიდებული ამორჩევის პრინციპი (DC).
 დამოკიდებული ამორჩევის პრინციპს შევსებებით შემდეგ
 თავებში.

თანამედროვე მათემატიკაში მიღებულია შემდეგი აღნიშვნა:

$$(ZF) \wedge (AC) = (ZFC).$$

ამორჩევის აქსიომის აღტერნატივას წარმოადგენს
 დეტერმინირების აქსიომა, რომელიც 1962 წელს შემოტანილ
 იქნა პოლონელი მათემატიკოსების გუგო შტეინჰაუზისა (1887-
 1972) და იან მიხელსკის მიერ.

განვიხილოთ ნატურალურ რიცხვთა უსასრულო
 მიმდევრობების A სიმრავლე. A სიმრავლესთან ასოცირდება

ორი მოთამაშის შემდეგი უსასრულო G_A თამაში: პირველი მოთამაშე იწყებს თამაშს $n_0 \in N$ რიცხვის ამორჩევით. შემდეგ მეორე მოთამაშე ირჩევს $n_1 \in N$ რიცხვს და ა.შ. თამაშის შედეგს წარმოადგენს

$$\phi: N \rightarrow N$$

ფუნქცია, განსაზღვრული შემდეგი პირობით:

$$\phi(i) = n_i$$

ნებისმიერ $i \in N$ -სთვის.

თუ $\varphi \in A$, მაშინ იგებს პირველი მოთამაშე, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი - მეორე მოთამაშე. მოგების სტრატეგია ორივე მოთამაშისათვის განსაზღვრულია ცხადი სახით.

A სიმრავლეს ეწოდება დეტერმინირებული, თუ უსასრულო თამაშში ერთ მოთამაშეს მაინც გააჩნია მომგებიანი სტრატეგია. (AD) გულისხმობს, რომ ყოველი A სიმრავლე არის დეტერმინირებული.

მართებულია შემდეგი დებულება:

დეტერმინირების აქსიომა ეწინააღმდეგება ამორჩევის აქსიომას.

სიმრავლეთა თეორიის სხვა აქსიომებს შევეხებით შემდეგ თავებში და ნაწილობრივ მაინც შევეცდებით ამ აქსიომებზე დაყრდნობით აგებული მათემატიკური თეორიების მთელი სიღამაზე და სიმდიდრე გადმოვცეთ.

§4. ბინარული მიმართება. ფუნქცია

მათემატიკაში ხშირად გვხვდება სიტუაციები, როცა რაიმე სიმრავლის ელემენტებს შორის არსებობს გარკვეული ტიპის მიმართებები. მოცემულ სიმრავლეზე ამ სიმრავლის ელემენტებს შორის ნებისმიერი მიმართების მოცემა გულისხმობს ზუსტად განისაზღვროს რომელი ელემენტები იმყოფებიან ამ მიმართებაში და რომელი არა.

მოცემულ $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ ($n \in N$) სიმრავლეებზე განსაზღვრული n -ადგილიანი მიმართება, ან n -ადგილიანი პრედიკატი P , ეწოდება $A_0 \times A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1}$ დეკარტული ნამრავლის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს და ეს ფაქტი აღინიშნება $P(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ სიმბოლოთი, სადაც

$$(\forall i)(0 \leq i \leq n-1 \Rightarrow a_i \in A_i).$$

როცა $n=0$, მაშინ P ეწოდება უნარული და წარმოადგენს A_1 სიმრავლის ქვესიმრავლეს. ბინარული (ანუ ორადგილიანი, ანუ $n=1$ -სთვის) მიმართება ეწოდება დალაგებულ წყვილთა სიმრავლეს. ყველა ასეთ წყვილთა სიმრავლეს კი ეწოდება მოცემული ბინარული მიმართების გრაფიკი. $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ ელემენტებს ეწოდებათ P მიმართების კოორდინატები ან კომპონენტები.

ნებისმიერი A სიმრავლისათვის $id_A = \{(a, a) : a \in A\}$ მიმართებას ეწოდება იგივეური მიმართება ანუ დიაგონალი, ხოლო $U_A = A^2 = A \times A = \{(a, b) : a \in A, b \in A\}$ მიმართებას კი – სრული მიმართება ანუ სრული კვადრატი.

ვთქვათ, P ნებისმიერი ბინარული მიმართებაა.

მოცემული P ბინარული მიმართების განსაზღვრის არე ეწოდება შემდეგ სიმრავლეს:

$$pr_1(P) = \{a : (\exists b)((a, b) \in P)\},$$

ხოლო სიმრავლეს

$$pr_2(P) = \{b : (\exists a)((a, b) \in P)\}$$

ეწოდება მოცემული P მიმართების მნიშვნელობათა სიმრავლე.

P ბინარული მიმართების შექცევული მიმართება განისაზღვრება შემდეგი დამოკიდებულებით:

$$P^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in P\}.$$

ვთქვათ, მოცემულია სამი A, B და C სიმრავლე. ორი $P \subset A \times B$ და $T \subset B \times C$ ბინარული მიმართების კომპოზიცია განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$P \circ T = \{(a, c) : (\exists b)((a, b) \in P \wedge (b, c) \in T)\}.$$

ნებისმიერი P , T და K ბინარული მიმართებებისათვის ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$1. (P^{-1})^{-1} = P;$$

$$2. (P \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ P^{-1};$$

$$3. (P \circ T) \circ K = P \circ (T \circ K).$$

ამ ტოლობების დამტკიცებები ევრდნობა მხოლოდ ზემოთ მოყვანილ ცნებებს და მათი ჭეშმარიტების დადგენა მიივინდია მკითხველისათვის.

მაგალითი 1. ვთქვათ, P ბინარული მიმართება მოცემულია შემდეგი დამოკიდებულებით:

$$P = \{(x, y) : x, y \in R \wedge 2x \geq 3y\}.$$

იპოვეთ $pr_1(P)$, $pr_2(P)$, P^{-1} , $P \circ P^{-1}$.

ამოხსნა. ზემოთ მოყვანილი განსაზღვრებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ

$$pr_1(P) = pr_2(P) = R.$$

$$P^{-1} = \{(y, x) : y, x \in R \wedge 2y \geq 3x\};$$

$$P \circ P^{-1} = \{(x, y) : x, y \in R \wedge 4x \geq 9y\} \subset R^2.$$

განვიხილოთ $P \subset A \times B$ ბინალური მიმართებების ზოგიერთი მნიშვნელოვანი სახეები.

ა) P ბინარულ მიმართებას ეწოდება რეფლექსური, თუ მას ეკუთვნის ყველა (a, a) სახის წყვილი.

მაგალითად, $a < b$ მიმართება არ არის რეფლექსური, მაგრამ $a \leq b$ მიმართება კი – რეფლექსურია. თუ ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე მოცემული მიმართება რეფლექსურია, მაშინ სიბრტყის წერტილთა შესაბამის სიმრავლეს აუცილებლად მიეკუთვნება $y = x$ წრფის ყველა წერტილი.

ბ) P ბინარულ მიმართებას ეწოდება სიმეტრიული, თუ ის (a, b) წყვილთან ერთად აუცილებლად შეიცავს (b, a) წყვილსაც.

მაგალითად, $x < -y$ მიმართება სიმეტრიულია, ხოლო $x < y$ კი – არა. თუ ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე მოცემული მიმართება სიმეტრიულია, მაშინ სიბრტყის წერტილთა შესაბამისი სიმრავლე სიმეტრიული იქნება $y = x$ წრფის მიმართ.

გ) P ბინარულ მიმართებას ეწოდება ანტისიმეტრიული, თუ $(a, b) \in P$ და $(b, a) \in P$, მაშინ $a = b$.

ბინარული მიმართების ანტისიმეტრიულობის განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ

$$P \cap P^{-1} \subset id_A.$$

დ) ბინალურ მიმართებას ეწოდება ტრანზიტული, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობა:

$$\{(a, b) \in P \wedge (b, c) \in P\} \Rightarrow (a, c) \in P.$$

ტრანზიტული ბინარული მიმართების მარტივ მაგალითებად გამოდგება ჩართვის მიმართება, მიმართება „ნაკლები“ (თუ $a < b \wedge b < c$, მაშინ $a < c$).

ვთქვათ, მოცემულია ორი P და T ბინარული მიმართება. ამბობენ, რომ P მიმართება არის T -ს შევიწროება, ან რაც იგივეა, რომ T მიმართება აგრძელებს P -ს, თუ $P \subset T$. თუ $A \subset pr_1(P)$, მაშინ T -ს შევიწროება A სიმრავლეზე – ეს არის შემდეგი სიმრავლე:

$$T/A = \{(a, b) : (a, b) \in T \wedge a \in A\}.$$

მაგალითი 2. მოცემულია P ბინარული მიმართება განსაზღვრული შემდეგი პირობით:

$$P \subset R^2, (x, y) \in P \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

იპოვეთ, მოცემული P ბინარული მიმართების განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა სიმრავლე და გამოვარკვეოთ არის თუ არა ეს მიმართება რეფლექსური, სიმეტრიული და ტრანზიტული.

ამოხსნა. ცხადია, რომ $pr_1(P) = [-1, 1]$, $pr_2 = [-1, 1]$. რადგან $x^2 + x^2 \neq 1$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვისათვის $[-1, 1]$ შუალედიდან, ამიტომ მოცემული P მიმართება არ არის რეფლექსური. ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ $(x, y) \in P$, მაშინ $(y, x) \in P$, ეს კი ნიშნავს, რომ P მიმართება სიმეტრიულია. შემდეგ, რადგან $x^2 + y^2 = 1$ ამიტომ $(1, 0) \in P$ და $(0, 1) \in P$, მაგრამ $0 \neq 1$. შესაბამისად, P მიმართება არ არის ანტისიმეტრიული. და ბოლოს, თუ $(x, y) \in P \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ და $(y, z) \in P \Rightarrow y^2 + z^2 = 1$, მაშინ $x^2 + z^2 = 2 - 2y^2 \neq 1$. ე. ი. $(x, z) \notin P$ და P მიმართება არ არის ტრანზიტული.

ბინარულ მიმართებებს შორის განსაკუთრებით ინტერესს იწვევენ ისეთი მიმართებები, რომლებიც ერთდროულად არიან რეფლექსური, სიმეტრიული და ტრანზიტული. ასეთ მიმართებებს ექვივალენტურობის მიმართებები ეწოდებათ. თუ P არის ექვივალენტურობის მიმართება და $(a, b) \in P$, მაშინ ეწერთ $a \sim b$.

ნებისმიერ A სიმრავლეზე ექვივალენტურობის მიმართების ელემენტალურ მაგალითად შეიძლება გამოდგეს A სიმრავლის ობიექტებს შორის იგივეობის ან ტოლობის მიმართება, რომელიც სრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა ორი ელემენტი ემთხვევა ერთმანეთს.

ნებისმიერი A სიმრავლის $x \in A$ ელემენტის ექვივალენტურობის კლასები ეწოდება შემდეგ სიმრავლეს:

$$E(x) = \{y : x \sim y\},$$

ხოლო A სიმრავლის ელემენტების ექვივალენტურობის კლასების სიმრავლეს „ $\sim$ “ ექვივალენტურობის მიმართების მიმართ ეწოდება A -ს ფაქტორ-სიმრავლე და აღინიშნება $A/\sim$ სიმბოლოთი. ე. ი.

$$A/\sim = \{E(x) : x \in A\}.$$

თეორემა 1. ნებისმიერ A სიმრავლეზე ყოველი ექვივალენტურობის მიმართება განსაზღვრავს A სიმრავლის დაშლას ექვივალენტურობის კლასებად.

დამტკიცება. A სიმრავლის ყოველ x ელემენტს შევესაბამოთ A_x სიმრავლეთა კლასი, განსაზღვრული შემდეგი დამოკიდებულებით:

$$A_x = \{y : y \sim x\}.$$

ცხადია, $A_x \neq \emptyset$ ($x \in A$). მართლაც, რეფლექსურობის თვისებიდან გამომდინარე $x \sim x$, და შესაბამისად, $x \in A_x$.

თუ $y_1 \in A_x$ და $y_2 \in A_x$, მაშინ $y_1 \sim y_2$. მართლაც, A_x სიმრავლეთა კლასის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ $y_1 \sim x$ და $y_2 \sim x$. მიმართების სიმეტრიულობიდან გამომდინარეობს, რომ $x \sim y_2$, ხოლო ტრანზიტულობიდან კი მივიღებთ, რომ $y_1 \sim y_2$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ თუ $x_1 \sim x_2$, მაშინ $A_{x_1} = A_{x_2}$. მართლაც, ვთქვათ, $y \in A_{x_1}$, ე. ი. $y \sim x_1$. ბოლო ექვივალენტურობიდან და $x_1 \sim x_2$ პირობიდან ტრანზიტულობის თვისებით მივიღებთ, რომ $y \sim x_2$. ე. ი. $y \in A_{x_2}$. მაშასადამე, $A_{x_1} \subset A_{x_2}$. შებრუნებული ჩართვა მტკიცდება ანალოგიურად. საბოლოოდ მივიღეთ, რომ

$$(x \sim y) \Rightarrow (A_x = A_y).$$

აღვიღად მტკიცდება, რომ სხვადასხვა კლასის ელემენტები არ არიან ექვივალენტურები. მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ $y_1 \sim y_2$, $y_1 \in A_{x_1}$, $y_2 \in A_{x_2}$, მაშინ ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ $A_{y_1} = A_{x_1}$, $A_{y_2} = A_{x_2}$, $A_{y_1} = A_{y_2}$, და შესაბამისად, $A_{x_1} = A_{x_2}$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ სხვადასხვა კლასები არ თანაიკვეთებიან ერთმანეთთან. მართლაც, თუ $y \in A_{x_1}$ და

$y \in A_{x_2}$, მაშინ კვლავ ზემოთ ჩატარებული მსჯელობიდან მივიღებთ, რომ $A_y = A_{x_1}$ და $A_y = A_{x_2}$, და შესაბამისად, $A_{x_1} = A_{x_2}$.

და ბოლოს, შევნიშნოთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ წარმოდგენას:

$$A = \bigcup_{x \in A} A_x.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ბოლო თეორემიდან შეიძლება დავასკვნათ, რომ:

ფაქტორ-სიმრავლე $A/\sim$ წარმოადგენს A სიმრავლის დაშლას. პირიქით, თუ (A_k) არის A სიმრავლის დაშლა, მაშინ A -ზე რომელიმე k -სთვის შეიძლება განისაზღვროს მოცემული დაშლის შესაბამისი ექვივალენტურობის მიმართება შემდეგი წესით:

$$x \sim y \Leftrightarrow x, y \in A_k.$$

მაგალითი 3. ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე განვსაზღვროთ R_ν ექვივალენტურობის მიმართება შემდეგი პირობით:

$$\{(x, y) \in R^2 \Leftrightarrow x \in R \wedge y \in R \wedge x - y \in Q\},$$

სადაც, როგორც ყოველთვის, Q აღნიშნავს ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს.

ცხადია, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

ა). $(x, x) \in R_\nu$;

ბ). $(x, y) \in R_\nu \Rightarrow (y, x) \in R_\nu$;

გ). $\{(x, y) \in R_\nu \wedge (y, z) \in R_\nu\} \Rightarrow (x, z) \in R_\nu$.

R სიმრავლის დაშლას, რომელიც მიიღება R_ν ექვივალენტურობის დამოკიდებულებით, ეწოდება R -ის ვიტალის დაშლა და აღინიშნება R/Q სიმბოლოთი.

R სიმრავლის ვიტალის დაშლის ყოველ სელექტორს ეწოდება ვიტალის ქვესიმრავლე R -ში.

აქვე აღვნიშნოთ, რომ ვიტალის ქვესიმრავლე R -ში თამაშობს განსაკუთრებულ როლს ზომის თეორიის უმნიშვნელოვანეს საკითხების შესწავლაში და მას შემდეგ თავებში დავუბრუნდებით.

განვიხილოთ ბინარული მიმართების კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი სახე, რომელსაც ნაწილობრივი დალაგების მიმართების სახელითაა ცნობილი.

ნებისმიერ სიმრავლეზე ნაწილობრივი დალაგების მიმართებას ეწოდება ამავე სიმრავლეზე განსაზღვრულ ბინარულ მიმართებას, რომელიც არის რეფლექსური, ტრანზიტული და ანტისიმეტრიული.

ნაწილობრივი დალაგების მიმართების აღსანიშნავად გამოიყენება „ $\leq$ ” სიმბოლო.

ნაწილობრივი დალაგებული სიმრავლის მაგალითებია:

– ყველა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე მასზე განსაზღვრული ბუნებრივი დალაგებით:

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \geq 0.$$

– A სიმრავლის ბუდეანზე განსაზღვრული დალაგების მიმართება:

$$Y \leq X \Leftrightarrow Y \subset X.$$

– $N \setminus \{0\}$ სიმრავლეზე განსაზღვრული დალაგების მიმართება:

$$m \leq n \Leftrightarrow m/n.$$

(m/n სიმბოლო შინაარსობრივად გამოხატავს წინადადებას „ n ყოფს m -ს”).

A სიმრავლეს ეწოდება ნაწილობრივად დალაგებული, თუ მასზე განსაზღვრულია ნაწილობრივი დალაგების რაიმე „ $\leq$ ” მიმართება. ამ შემთხვევაში ნაწილობრივი დალაგებას აღვნიშნავენ „ $\leq_A$ ” სიმბოლოთი, ხოლო თვით ნაწილობრივად დალაგებულ სიმრავლეს ჩაწერენ $(A, \leq_A)$ ფორმით ან უბრალოდ $(A, \leq)$ სახით.

თუ B არის ნაწილობრივად დალაგებული A სიმრავლის ქვესიმრავლე, მაშინ A სიმრავლის ნაწილობრივი დალაგების მიმართებასთან ასოცირდება დალაგების მიმართება B სიმრავლეში და ასეთი სახით დალაგებულ B სიმრავლეს ეწოდება A სიმრავლის ნაწილობრივად დალაგებული ქვესიმრავლე.

ვთქვათ, A არის ნაწილობრივად დალაგებული სიმრავლე, ხოლო B კი მისი ქვესიმრავლე.

$a \in A$ ელემენტს ეწოდება ნაწილობრივად დალაგებული B სიმრავლის მაჟორანტი (შესაბამისად, მინორანტი) თუ შესრულებულია შემდეგი პირობა:

$$(\forall b)(b \in B \Rightarrow b \leq a)$$

$$(\text{შესაბამისად, } (\forall b)(b \in B \Rightarrow a \leq b)).$$

ნაწილობრივად დალაგებული A სიმრავლის B ქვესიმრავლის ზედა საზღვარი ანუ $\sup(B)$ ეწოდება მის მაჟორანტებს შორის უმცირესს, ხოლო B სიმრავლის მინორანტებს შორის უდიდესს ეწოდება B სიმრავლის ქვედა საზღვარი ანუ $\inf(B)$.

ნაწილობრივად დალაგებული A სიმრავლის a ელემენტს ეწოდება უდიდესი ელემენტი (შესაბამისად, უმცირესი) თუ შესრულებულია შემდეგი პირობა:

$$(\forall b)(b \in A \wedge b \leq a)$$

$$(\text{შესაბამისად, } (\forall b)(b \in A \wedge a \leq b)).$$

ყოველ ნაწილობრივად დალაგებულ სიმრავლეში არ შეიძლება არსებობდეს ერთზე მეტი უდიდესი (შესაბამისად, უმცირესი) ელემენტი. მართლაც, თუ x_1 და x_2 არის რაიმე სიმრავლის ორი უდიდესი ელემენტი, მაშინ $x_1 \leq x_2 \wedge x_2 \leq x_1$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $x_1 = x_2$.

ნაწილობრივად დალაგებული A სიმრავლის a ელემენტს ეწოდება მაქსიმალური ელემენტი (შესაბამისად, მინიმალური) თუ შესრულებულია შემდეგი პირობა:

$$(\forall b)(b \in A \wedge a \leq b \Rightarrow b = a)$$

$$(\text{შესაბამისად, } (\forall b)(b \in A \wedge b \leq a \Rightarrow a = b)).$$

შევნიშნოთ, რომ ნაწილობრივად დალაგებულ სიმრავლეს შეიძლება გააჩნდეს რამდენიმე მაქსიმალური ან რამდენიმე მინიმალური ელემენტი.

მაგალითი 4. არაცარიელი A სიმრავლის $P(A)$ ბულეანში, რომელიც დალაგებულია შემდეგი $Y \leq X \Leftrightarrow Y \subset X$ დამოკიდებულებით, უმცირესი ელემენტია $\emptyset$ და უდიდესი ელემენტია A . $\emptyset$ და A ამავე დროს ერთადერთი მინიმალური და ერთადერთი მაქსიმალური ელემენტია $P(A)$ -ში.

თუ A სიმრავლე ორ ელემენტს მაინც შეიცავს, მაშინ $P(A) \setminus \{\emptyset\}$ სიმრავლეში უმცირესი ელემენტი არ არსებობს, უდიდესი ელემენტი კვლავ იქნება A , რომელიც იმავე დროს ერთადერთი მაქსიმალური ელემენტიც არის, ხოლო A -ს ყოველი ერთელემენტიანი სიმრავლე იქნება მინიმალური ელემენტი $P(A) \setminus \{\emptyset\}$ -ში.

მაგალითი 5. განვიხილოთ $N \setminus \{0\}$ სიმრავლე, რომელიც დალაგებულია $m \leq n \Leftrightarrow m/n$ დამოკიდებულებით. მაშინ $N \setminus \{0\}$ -ში უდიდესი და მაქსიმალური ელემენტები არ არსებობს, ხოლო უმცირესი და ერთადერთი მინიმალური ელემენტი არის 1. თუ განვიხილავთ N სიმრავლის დალაგებულ $N \setminus \{0, 1\}$ ქვესიმრავლეს, მაშინ უდიდესი და მაქსიმალური ელემენტი არ არსებობს, ხოლო უმცირესი და მინიმალური ელემენტი იქნება მარტივი რიცხვი.

მაგალითი 6. ვთქვათ, არაცარიელი A სიმრავლის $P(A)$ ბულეანი დალაგებულია შემდეგი $Y \leq X \Leftrightarrow Y \subset X$ დამოკიდებულებით და B არის ნებისმიერი არაცარიელ სიმრავლეთა კლასი $P(A)$ -დან. თუ B -ს გააჩნია უმცირესი

(შესაბამისად, უდიდესი) ელემენტი C , მაშინ C არის B -ში შემავალი სიმრავლეების თანაკვეთა (შესაბამისად, გაერთიანება). პირიქით, თუ B -ში შემავალი სიმრავლეების თანაკვეთა (შესაბამისად, გაერთიანება) აგრეთვე ეკუთვნის B -ს, მაშინ ის არის უმცირესი (შესაბამისად, უდიდესი) ელემენტი B -ში.

აქვე შევნიშნოთ, რომ B -ში შემავალი სიმრავლეების თანაკვეთა (შესაბამისად, გაერთიანება) წარმოადგენს ქვედა საზღვარს (შესაბამისად, ზედა საზღვარს).

საზოგადოდ, ნებისმიერ ორ x და y ელემენტისათვის არ არის აუცილებელი შესრულდეს $x \leq y$ ან $y \leq x$ დამოკიდებულებებიდან ერთ-ერთი. ასეთ შემთხვევაში x და y ელემენტებს არასადარი ეწოდებათ მოცემული დალაგების მიმართებისათვის.

A სიმრავლეზე განსაზღვრულ P მიმართებას ეწოდება ბმული, თუ შესრულებულია დამოკიდებულება:

$$(\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \Rightarrow (x, y) \in P \vee (y, x) \in P).$$

დალაგებულ A სიმრავლეს ეწოდება წრფივად დალაგებული ან უბრალოდ დალაგებული, თუ მასზე განსაზღვრული დალაგების მიმართება ბმულია. ე. ი.

$$(\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \Rightarrow x \leq y \vee y \leq x).$$

წრფივად დალაგებული სიმრავლის კლასიკური მაგალითია ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე განსაზღვრული ბუნებრივი დალაგების მიმართება.

მნიშვნელოვანია აღინიშნოს, რომ ერთიდამავე სიმრავლეზე შესაძლებელია შემოვიტანოთ სხვადასხვა დალაგების მიმართება, რის გამოც მივიღებთ განსხვავებულ დალაგებულ სიმრავლეებს. მაგალითად, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე ერთი მხრივ შეიძლება დავალაგოთ „ბუნებრივი გზით“, ე. ი. მივიღებთ

$$0, 1, 2, 3, \dots,$$

მეორე მხრივ, შეიძლება დავალაგოთ ცალკე ყველა კენტი რიცხვების ზრდის მიხედვით და ცალკე ყველა ლუწი რიცხვების ზრდის მიხედვით და ამავე დროს ვიგულისხმოთ,

რომ ყოველი კენტი რიცხვი წინ უსწრებს ყოველ ლუწ რიცხვს. ამ შემთხვევაში მივიღებთ შემდეგ დალაგებულ სიმრავლეს:

$$1, 3, 5, \dots, 2, 4, 6, \dots$$

დალაგებულ A სიმრავლეს ეწოდება სავსებით დალაგებული, თუ მისი ნებისმიერი არაცარიელი ქვესიმრავლე შეიცავს უმცირეს ელემენტს.

მაგალითად, $[0, 1]$ სეგმენტი არის დალაგებული, მაგრამ არ არის სავსებით დალაგებული, რადგან $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ არ შეიცავს

უმცირეს ელემენტს. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, მასზე განსაზღვრული ბუნებრივი დალაგების მიმართებით, არის სავსებით დალაგებული სიმრავლე. ცხადია, რომ ყოველი სასრული დალაგებული სიმრავლე სავსებით დალაგებულია.

დალაგებულ სიმრავლეს ეწოდება ინდუქციური, თუ მის ყოველ წრფივად დალაგებულ ქვესიმრავლეს გააჩნია მაქორანტი.

თუ მოცემულ დალაგებულ $(A, \leq)$ სიმრავლეში გვაქვს $a \leq x \leq b$ ($a, b \in A$), მაშინ ამბობენ, რომ x ელემენტი ძეგს a და b -ს შორის. ყველა იმ x ელემენტთა სიმრავლეს, რომლებიც ძეგს a და b -ს შორის ეწოდება დალაგებული A სიმრავლის (a, b) ინტერვალი. თუ (a, b) ინტერვალს დაეუმატებთ a და b ელემენტებს, მაშინ მივიღებთ $[a, b]$ სეგმენტს. ანალოგიურად განისაზღვრება შემდეგი სიმრავლეებიც:

$$[a, b[= \{x : x \in A \wedge a \leq x < b\},$$

$$]a, b] = \{x : x \in A \wedge a < x \leq b\}.$$

თუ საბაზისო დალაგებულ სიმრავლეზე ავიღებთ ყველა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეს, მაშინ მივიღებთ მათემატიკური ანალიზის ცნობილ ტერმინებს (ინტერვალი ანუ შუალედი, სეგმენტი ანუ მონაკვეთი, ნახევრად ღია ინტერვალები).

ბინარული მიმართების ერთ-ერთ მნიშვნელოვან კერძო სახეს წარმოადგენს ფუნქცია.

ვთქვათ, მოცემულია ორი A და B სიმრავლე. ბინარულ მიმართებას $f \subset A \times B$ ეწოდება ფუნქცია ან გადასახვა A სიმრავლიდან B სიმრავლეში, თუ $pr_1(f) = A$, $pr_2(f) \subset B$ და შესრულებულია შემდეგი დამოკიდებულება:

$$\{(x, y) \in f \wedge (x, y') \in f\} \Rightarrow y = y'.$$

თუ $pr_1(f) \subset A$, მაშინ f -ს ეწოდება ნაწილობითი ფუნქცია. ტერმინები „შესაბამისობა“, „გადასახვა“, „ოპერატორი“ წარმოადგენენ სიტყვა „ფუნქციის“ სინონიმებს.

ფუნქციის შემთხვევაში ხშირად ვისარგებლებთ შემდეგი ექვივალენტური აღნიშვნებით:

$$pr_1(f) = \text{dom}(f), \quad pr_2(f) = \text{ran}(f).$$

თუ f არის ფუნქცია A სიმრავლიდან B -ში, მაშინ ეს ფაქტი აღინიშნება

$$f: A \rightarrow B, \quad f: A \xrightarrow{f} B, \quad x \rightarrow f(x), \quad y = f(x) \quad (x \in \text{dom}(f))$$

სიმბოლოებით, ხოლო ყველა გადასახვების სიმრავლე A სიმრავლიდან B სიმრავლეში აღინიშნება $(B)^A$ სიმბოლოთი.

ყველა $\{(x, f(x)) : x \in A\}$ წყვილთა სიმრავლეს ეწოდება

$x \rightarrow f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი. შევნიშნოთ, რომ თეორიულ-სიმრავლური თვალსაზრისით ფუნქციის ცნება და ფუნქციის გრაფიკი ემთხვევა ერთმანეთს.

გადასახვას $f: A \rightarrow B$ ეწოდება ინიექციური, თუ შესრულებულია შემდეგი დამოკიდებულება:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)),$$

ან რაც იგივეა, რომ ნებისმიერი $b \in B$ ელემენტის წინარესახე $f^{-1}(b)$ ან ცარიელი სიმრავლეა ან შეიცავს მხოლოდ ერთ ელემენტს.

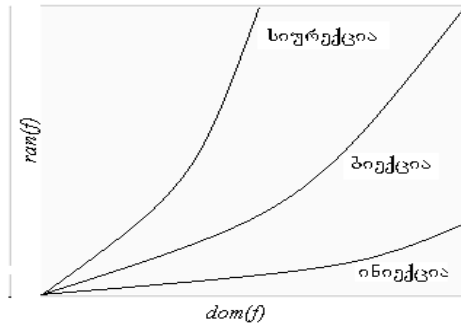
გადასახვას $f: A \rightarrow B$ ეწოდება სიურექციული, თუ

$$\forall b \in B \Rightarrow (\exists a \in A \wedge f(a) = b),$$

ან რაც იგივეა, რომ ნებისმიერი $b \in B$ ელემენტის წინარესაზე $f^{-1}(b)$ არაცარიელი სიმრავლეა.

დაბოლოს, $f: A \rightarrow B$ გადასახვას ეწოდება ბიექციური (ანუ ბიექცია) თუ ის ერთდროულად ინიექციაცაა და სიურექციაც. თუ f გადასახვა ბიექციაა, მაშინ ამბობენ, რომ f ამყარებს ურთიერთცალსახა თანადობას A და B სიმრავლეებს შორის.

სქემატურად ზემოთ მოყვანილი გადასახვები შეიძლება წარმოვიდგინოთ ნახაზზე.



რადგან ფუნქცია წარმოადგენს ბინარულ მიმართებას, ამიტომ ბევრ ცნებას არ გავიმეორებთ. მაგრამ წიგნის შინაარსიდან გამომდინარე აუცილებელი მიგვაჩნია ზოგიერთი ცნება თუ წინადადება ჩამოვაყალიბოთ ფუნქციის ტერმინებში.

ვთქვათ, მოცემულია სამი A, B და C სიმრავლე და ორი

$$f: A \rightarrow B, \quad g: B \rightarrow C$$

გადასახვა. მაშინ ამ გადასახვების კომპოზიცია ეწოდება ისეთ $h: A \rightarrow C$ გადასახვას, რომელიც განისაზღვრება $h(a) = f(g(a))$ ($a \in A$) ტოლობით და აღინიშნება $h = f \circ g$ ფორმით.

ვთქვათ, მოცემულია ორი $f: A \rightarrow B$ და $f_0: A_0 \rightarrow B$ ფუნქცია, სადაც $A_0 \subset A$. თუ $f(a) = f_0(a)$ ტოლობა სრულდება A_0 სიმრავლეზე, მაშინ f ფუნქციას ეწოდება f_0 ფუნქციის გაგრძელება A სიმრავლეზე ანუ f_0 არის f -ის

შევიწროება A_0 სიმრავლეზე. ის ფაქტი, რომ f_0 არის f -ის შევიწროება A_0 სიმრავლეზე ჩაიწერება $f_0 = f|_{A_0}$ სახით.

ვთქვათ, მოცემულია $f: A \rightarrow B$ ფუნქცია და ვთქვათ, $A_k \subset A$, $B_k \subset B$. მართებულია დამოკიდებულებები:

$$1) f\left(\bigcup_k A_k\right) = \bigcup_k f(A_k);$$

$$2) f\left(\bigcap_k A_k\right) \subset \bigcap_k f(A_k);$$

$$3) f(A_0) \setminus f(A_1) \subset f(A_0 \setminus A_1);$$

$$4) f^{-1}\left(\bigcup_k B_k\right) = \bigcup_k f^{-1}(B_k);$$

$$5) f^{-1}\left(\bigcap_k B_k\right) = \bigcap_k f^{-1}(B_k);$$

$$6) f^{-1}(B_0 \setminus B_1) = f^{-1}(B_0) \setminus f^{-1}(B_1);$$

$$7) (B_0 \subset B_1) \Rightarrow (f^{-1}(B_0) \subset f^{-1}(B_1)).$$

მითითებული ტოლობების დამტკიცებები არ არის დაკავშირებული დიდ სირთულეებთან, ამიტომ მათი გააზრება მიგვინდია მკითხველისათვის.

თეორემა 2 (ბანახი). დავუშვათ, რომ ორი X და Y სიმრავლისათვის $f: X \rightarrow Y$ და $g: Y \rightarrow X$ ინიექციური გადასახვებია. მაშინ არსებობს X_0, X_1, Y_0 და Y_1 სიმრავლეები ისეთი, რომ

$$X = X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2 = \emptyset, Y = Y_1 \cup Y_2, Y_1 \cap Y_2 = \emptyset,$$

და $f|_{X_0}: X_0 \rightarrow Y_0$, $g|_{Y_1}: Y_1 \rightarrow X_1$ გადასახვები ბიექციებია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\phi: P(X) \rightarrow P(X)$ იყოს გადასახვა, განსაზღვრული ფორმულით

$$\phi(Z) = X \setminus g(Y \setminus f(Z)),$$

სადაც $Z \in P(X)$. თუ $(Z_k : k \in I)$ არის X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაიმე ოჯახი, მაშინ 1) თანახმად

$$\phi\left(\bigcup_{k \in I} Z_k\right) = \bigcup_{k \in I} \phi(Z_k).$$

შემოვიდლოთ აღნიშვნა

$$A = \emptyset \cup \phi(\emptyset) \cup \phi^2(\emptyset) \cup \dots$$

და შევნიშნოთ, რომ

$$\phi(A) = A.$$

ამრიგად, ჩვენ გვაქვს

$$A = X \setminus g(Y \setminus f(A)), \quad X \setminus A = g(Y \setminus f(A)).$$

თუ დავუშვებთ, რომ

$$X_0 = A, \quad X_1 = X \setminus A, \quad Y_0 = f(A), \quad Y_1 = Y \setminus f(A),$$

მაშინ მივიღებთ ბანახის თეორემის დამტკიცებას.

ბანახის თეორემა მნიშვნელოვანია მთელი რიგის საკითხების შესწავლისას და ჩვენ მას გამოვიყენებთ შემდეგში.

ამ პარაგრაფის ბოლოს მოვიყვანოთ დეკარტული ნამრავლის განსაზღვრა სიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახისათვის.

ვთქვათ, მოცემულია სიმრავლეთა $\{A_i : i \in I\}$ ოჯახი, სადაც I ინდექსთა ნებისმიერი სიმრავლეა.

მოცემულ $\{A_i : i \in I\}$ სიმრავლეთა ოჯახის დეკარტული ნამრავლი ეწოდება შემდეგ სიმრავლეს:

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f : f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i, f(i) \in A_i \text{ ყოველი } i \in I\text{-სათვის}\}.$$

მოვიყვანოთ სიმრავლეთა დეკარტულ ნამრავლთან დაკავშირებული რამდენიმე სასარგებლო ტოლობა, რომელთა დამტკიცებასაც ასევე მივანდობთ მკითხველს.

ნებისმიერი არაცარიელი I და J სიმრავლეებისათვის მართებულია შემდეგი ტოლობები:

$$\bigcap_{i \in I} A_i \times \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A_i \times B_i);$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i \times \bigcup_{j \in J} B_j = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j);$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i \times \bigcap_{j \in J} B_j = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j).$$

§5. სიმრავლის სიმძლავრე. სასრული და უსასრულო სიმრავლეები

მოცემულ A და B სიმრავლეებს ეწოდება ექვივალენტური, ან ტოლსიმძლავრიანი, თუ არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა (ბიექცია) A და B სიმრავლეებს შორის.

თუ ორი A და B სიმრავლე ექვივალენტურია, მაშინ ვწერთ: $A \sim B$.

ყველა სიმრავლის კლასში ტოლსიმძლავრიანობა წარმოადგენს ექვივალენტურობის მიმართებას. მართლაც, ვთქვათ, მოცემულია A , B და C სიმრავლეები. მაშინ:

ა) $A \sim A$, ვინაიდან იგივეური ასახვა A -დან A -ზე არის ბიექცია;

ბ) თუ $A \sim B$, მაშინ $B \sim A$.

მართლაც, რადგან $A \sim B$, არსებობს ბიექცია $f: A \rightarrow B$.

ამიტომ $f^{-1}: B \rightarrow A$ ასახვაც ბიექციაა. ე. ი. $B \sim A$.

გ) თუ $A \sim B$ და $B \sim C$, მაშინ $A \sim C$.

მართლაც, $A \sim B$ და $B \sim C$ დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობენ ბიექციური ასახვები $f: A \rightarrow B$ და $g: B \rightarrow C$. ამიტომ $f \circ g: A \rightarrow C$

კომპოზიციაც იქნება ბიექცია. ე. ი. $A \sim C$.

§4-ის თეორემა 1-დან გამომდინარეობს, რომ ექვივალენტურობის მიმართება ყველა შესაძლო სიმრავლეთა კლასს დაეოფს ექვივალენტურობის კლასებად.

რაიმე A სიმრავლის სიმძლავრე ეწოდება რომელიმე წარმომადგენელს A სიმრავლის ტოლსიმძლავრიანი

სიმრავლეთა კლასიდან და აღინიშნება $\text{card}(A)$ ან $|A|$ სიმბოლოებით. ამგვარად, სიმრავლის სიმძლავრე რომელიმე სიმრავლეა.

მაგალითი 1. ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერი $]a, b[$ და $]c, d[$ ინტერვალები ექვივალენტურია.

მართლაც, ბიექცია $f:]a, b[\rightarrow]c, d[$ შეიძლება განსაზღვროთ შემდეგი ფორმულით:

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a).$$

მაგალითი 2. ნამდვილ რიცხვთა $]a, b[$ ინტერვალის ექვივალენტურია R ნამდვილ რიცხვთა ღერძის.

რადგან მაგალითი 1-ის თანახმად ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერი ორი ინტერვალის ექვივალენტურია, ამიტომ

საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ინტერვალის

ექვივალენტურია R ნამდვილ რიცხვთა ღერძის. ეს ფაქტი კი გამომდინარეობს იქიდან, რომ $x \rightarrow \tan x$ გადასახვა

განსაზღვრავს $f: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow R$ ბიექციას.

ვიტყვიოთ, რომ

$$\text{card}(A) < \text{card}(B),$$

თუ არ არსებობს A სიმრავლის ბიექცია B -ზე, მაგრამ არსებობს A სიმრავლის ბიექცია B სიმრავლის საკუთრივ ქვესიმრავლეზე.

ცხადია, რომ თუ არსებობს A სიმრავლის ინიექცია B სიმრავლეში, მაშინ

$$\text{card}(A) \leq \text{card}(B).$$

თუ არსებობს A სიმრავლის სიურექცია B -ზე, მაშინ

$$\text{card}(A) \geq \text{card}(B).$$

წინა პარაგრაფში მოყვანილი ბანახის თეორემიდან უშუალოდ გამოდინარეობს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1 (კანტორ-ბერნშტეინი). თუ $f: A \rightarrow B$ და $g: B \rightarrow A$ ინიექციური გადასახვებია, მაშინ არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა A და B სიმრავლეებს შორის.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ ორი სიმრავლიდან ყოველი ექვივალენტურია მეორის რაიმე ნაწილის, მაშინ ეს სიმრავლეები ექვივალენტურია.

მაგალითი 3. ნებისმიერი ინტერვალის წერტილთა A სიმრავლე ექვივალენტურია ნებისმიერი სეგმენტის წერტილთა B სიმრავლის.

მართლაც, განვიხილოთ რაიმე სეგმენტი A_1 ისეთი, რომ $A_1 \subset A$ და ისეთი ინტერვალი B_1 , რომ $B_1 \subset B$. ცხადია, რომ $A \sim A_1$, $B \sim B_1$. მაშინ თეორემა 1-ის თანახმად $A \sim B$.

საზოგადოდ, სიმრავლეები სიმძლავრეების მიხედვით იყოფა ორ ძირითად ნაწილად. ესენია: სასრული და უსასრულო სიმრავლეები.

რაიმე A სიმრავლეს ეწოდება სასრული, თუ არსებობს $n \in \mathbb{N}$ რიცხვი, რომ $A \sim \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. ამ შემთხვევაში $\text{card}(A) = n$. ეს ნიშნავს, რომ სასრული სიმრავლის სიმძლავრე უდრის მასში შემავალი ელემენტების რაოდენობას. საზოგადოდ, სასრული სიმრავლის თვისებაა, რომ ის არ შეიძლება იყოს თავისი საკუთრივი ქვესიმრავლის ტოლსიმძლავრიანი.

მაგალითი 4. ვთქვათ, $n(A)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ სასრული A სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობა. თუ მოცემულია ორი სასრული A და B სიმრავლე, მაშინ მართებულია შემდეგი ტოლობა:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

ორი სიმრავლის გაერთიანების ელემენტების რაოდენობის გამოსათვლელ მითითებულ ფორმულას ჩართვისა და გამორიცხვის მეთოდი ეწოდება. ეს მეთოდი შეიძლება განზოგადდეს სასრული რაოდენობის სიმრავლეთა

ოჯახისათვის. კერძოდ, თუ მოცემულია სასრულ სიმრავლეთა $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$ სასრული ოჯახი, შესაბამისად

$$n(A_0), n(A_1), n(A_2), \dots, n(A_{m-1})$$

ელემენტთა რაოდენობით, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$\begin{aligned} n(A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{m-1}) &= n(A_0) + n(A_1) + n(A_2) + \dots + \\ &+ n(A_{m-1}) - \{n(A_0 \cap A_1) + n(A_0 \cap A_2) + \dots + n(A_{m-2} \cap A_{m-1})\} + \\ &+ \{n(A_0 \cap A_1 \cap A_2) + n(A_0 \cap A_1 \cap A_3) + \dots + n(A_{m-3} \cap A_{m-2} \cap \\ &\cap A_{m-1})\} + \dots + (-1)^{m-1} n(A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{m-1}). \end{aligned}$$

სიმრავლეს, რომელიც არ არის სასრული უსასრულო სიმრავლე ეწოდება. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ უსასრულო სიმრავლე, რომელიც თავისი რომელიმე საკუთრივი ქვესიმრავლის ტოლსიმძლავრეანია.

რაიმე A სიმრავლეს ეწოდება თვლადი, თუ $A \sim N$. ეს ნიშნავს, რომ A სიმრავლე თვლადია, თუ შესაძლებელია A სიმრავლის ყველა ელემენტების გადანომრა უსასრულო მიმდევრობის $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ სახით ისე, რომ ყოველ ელემენტს მიენიჭოს მხოლოდ ერთი ნომერი და ყოველი ნატურალური n რიცხვი იყოს მხოლოდ ერთი ელემენტის ნომერი.

თუ სიმრავლე სასრული ან თვლადია, მაშინ მას არაუმეტეს თვლადი სიმრავლე ეწოდება.

ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმძლავრე აღინიშნება $\aleph_0$ (ალეფი) ასოთი.

სიმრავლეს, რომელიც ექვივალენტურია ყველა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლის ეწოდება კონტინუუმის სიმძლავრის მქონე სიმრავლე ანუ კონტინუალური სიმრავლე. კონტინუუმის სიმძლავრე აღინიშნება c ასოთი.

მოვიყვანოთ თეორემები უსასრულო სიმრავლეების შესახებ.

თეორემა 2. თვლადი სიმრავლის ნებისმიერი ქვესიმრავლე არაუმეტეს თვლადია.

დამტკიცება. მართლაც, ვთქვათ A სიმრავლე თვლადია და B - კი მისი ნებისმიერი ქვესიმრავლეა. A სიმრავლის

თვლადობის გამო შესაძლებელია მისი ელემენტების წარმოდგენა უსასრულო $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ მიმდევრობის სახით. განვსაზღვროთ B სიმრავლეში შემავალი ელემენტების მიმდევრობა შემდეგი წესით: b_1 იყოს B სიმრავლის ის ელემენტი, რომელიც პირველად გვხვდება $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ მიმდევრობაში. თუ $b_0, b_1, b_3, \dots, b_{n-1}$ ელემენტები უკვე განსაზღვრულია, მაშინ b_n იყოს $B \setminus \{b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}\}$ სიმრავლის ის ელემენტი, რომელიც პირველად გვხვდება $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ მიმდევრობაში. ცხადია, ამ წესით განისაზღვრება B სიმრავლის ელემენტთა ინიექციური (ე. ი. თუ $k_1 \neq k_2$, მაშინ $b_{k_1} \neq b_{k_2}$) მიმდევრობა.

შესაძლებელია ორი შემთხვევა: B სიმრავლის ელემენტები შესაძლოა ამოიწუროს სასრული ან თვლადი ნაბიჯების შემდეგ. პირველ შემთხვევაში B სიმრავლე იქნება სასრული, ხოლო მეორე შემთხვევაში კი – თვლადი.

ამით თეორემა 2 დამტკიცებულია.

თეორემა 3. ყოველი უსასრულო სიმრავლე შეიცავს თვლად ქვესიმრავლეს.

დამტკიცება. ვთქვათ, A ნებისმიერი უსასრულო სიმრავლეა. განვიხილოთ $P(A) \setminus \{\emptyset\}$ სიმრავლის თავის თავზე იგივეური ასახვა. მაშინ ამორჩევის აქსიომის თანახმად არსებობს გადასახვა

$$f: P(A) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow A,$$

რომ

$$(\forall B)(B \subset A \wedge B \neq \emptyset) \Rightarrow f(B) \in B.$$

დაუშვათ, რომ $a_0 = f(A)$. თუ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ ელემენტები განსაზღვრულია, მაშინ

$$a_n = f(A \setminus \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}).$$

მაშასადამე, განსაზღვრულია თვლადი ინიექციური $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ მიმდევრობა, რომელიც წარმოადგენს A სიმრავლის ქვესიმრავლესაც.

ამით თეორემა 3 დამტკიცებულია.

მაგალითი 5. თვლადი სიმრავლის სიმძლავრე არის უსასრულო სიმრავლეების სიმძლავრეებს შორის უმცირესი.

მართლაც, ვთქვათ, A ნებისმიერი უსასრულო სიმრავლეა. ლოგიკურად შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

პირველი, $A \sim N$. მაშინ A თვლადი სიმრავლეა.

მეორე, A არ არის N -ის ექვივალენტური. მაშინ თეორემა 3-ის თანახმად არსებობს $A_1 \subset A$ თვლადი სიმრავლე. ე. ი. არსებობს ბიექცია $f: N \rightarrow A_1$. მაგრამ f გადასახვა იმავდროულად არის ინიექციაც და $card(A) > card(N)$.

თეორემა 4. თვლადი სიმრავლეების თვლადი გაერთიანება თვლადია.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია $(A_k: k \in N)$ თვლადი სიმრავლეების დიზიუნქტიური თვლადი ოჯახი. მოცემული ოჯახის თითოეული თვლადი სიმრავლე წარმოვიდგინოთ უსასრულო მიმდევრობის სახით.

$$A_0: a_{00}, a_{01}, a_{02}, \dots, a_{0n}, \dots$$

$$A_1: a_{10}, a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots$$

.....

$$A_k: a_{k0}, a_{k1}, a_{k3}, \dots, a_{kn}, \dots$$

.....

განვიხილოთ $A = \bigcup_{k \in N} A_k$ გაერთიანება. ცხადია, რომ ამ

გაერთიანების ელემენტები შესაძლებელია დავალაგოთ ცნობილი მეთოდების გამოყენებით (მაგალითად, კანტორის დიაგონალური მეთოდით, რომლის არსს მოვიყვანოთ §6-ში):

$$a_{00}, a_{01}, a_{11}, a_{10}, a_{02}, a_{12}, a_{22}, a_{21}, a_{20}, \dots,$$

რაც ნიშნავს A სიმრავლის თვლადობას.

ამით თეორემა 4 დამტკიცებულია.

როგორც ვნახეთ, თეორემა 3-ის დამტკიცებაში გამოვიყენეთ ამორჩევის აქსიომა. საჭმე ის არის, რომ თეორემა 4-ის დამტკიცებაშიც შეუძლებელია გვერდი ავუაროთ ამ აქსიომას. მართლაც, გვაქვს სიმრავლეთა $\{A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_k, \dots\}$ ($k \in N$) ოჯახი, სადაც ყოველი A_k სიმრავლე თვლადია. ამიტომ ყოველი k -სთვის არსებობს A_k სიმრავლის ელემენტების ნუმერაცია:

$$A_k = \{a_{k0}, a_{k1}, \dots\} \quad (k \in N).$$

მაგრამ ყოველი A_k სიმრავლისათვის არსებობს ერთზე მეტი ნუმერაცია. თუ ყოველი k -სთვის E_k -თი ავღნიშნავთ A_k სიმრავლის ნუმერაციათა სიმრავლეს, მაშინ ზემოთ მოყვანილი ცხრილის გამოყენებისათვის საჭიროა ყოველი A_k ($k \in N$) სიმრავლისათვის ავირჩიოთ ერთი კონკრეტული ნუმერაცია. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ყოველი E_k სიმრავლიდან უნდა ავირჩიოთ ერთი ელემენტი. ე. ი. დაგვჭირდება ამორჩევის ფუნქცია $\{E_0, E_1, E_2, E_3, \dots\}$ სიმრავლეთა ოჯახისათვის.

თეორემა 5. უსასრულო A სიმრავლის სიმძლავრე არ შეიცვლება, თუ მას გავაერთიანებთ თვლად ან სასრულო B სიმრავლესთან.

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმობთ, რომ $A \cap B = \emptyset$. თეორემა 3-ის თანახმად, მართებულია A სიმრავლის წარმოდგენა შემდეგი სახით:

$$A = A_1 \cup B_1,$$

სადაც B_1 არის თვლადი სიმრავლე.

გვაქვს

$$B \cup A = (B \cup B_1) \cup A_1.$$

რადგან $B \cup B_1$ თვლადი სიმრავლეა, ამიტომ არსებობს ბიექცია $f: B \cup B_1 \rightarrow B_1$. მაშინ $\varnothing$ გადასახვა განვსაზღვრული შემდეგი ფორმულით

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in B \cup B_1, \\ x, & x \in B_1, \end{cases}$$

არის ბიექცია $A \cup B$ და A სიმრავლეებს შორის. ე. ი. $A \cup B \sim A$.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 6. არათვლადი A სიმრავლის სიმძლავრე არ შეიცვლება, თუ მას გამოვაკლებთ თვლად ან სასრულ B სიმრავლეს.

დამტკიცება. A სიმრავლე წარმოვიდგინოთ $A = (A \setminus B) \cup B$ სახით. რადგან A სიმრავლე არათვლადია, ამიტომ $A \setminus B$ იქნება უსასრულო და თეორემა 5-ის თანახმად მივიღებთ

$$\text{card}(A \setminus B) = \text{card}((A \setminus B) \cup B) = \text{card}(A).$$

ამით თეორემა 6 დამტკიცებულია.

მაგალითი 6 (ჰილბერტის სასტუმრო). წარმოვიდგინოთ, რომ სადღაც, შორეულ კოსმოსში მდებარეობს სასტუმრო უსასრულო რაოდენობის ერთადგილიანი ნომრებით. ერთხელ სასტუმროს ესტუმრა ადამიანი და მოითხოვა მისთვის გამოეყოთ ცალკე ოთახი. სასტუმროს დირექტორმა აღმოაჩინა, რომ ყველა ნომერი დაკავებული იყო, მაგრამ მიუხედავად ამისა, მან შეძლო დაეკმაყოფილებინა სტუმარის მოთხოვნა. როგორ შეძლო მან ეს?

თავდაპირველად დირექტორმა დააღაბა სასტუმროს ნომრები უსასრულო $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \dots$ მიმდევრობის სახით, სასტუმროს შესაბამის ნომრებში მცხოვრები ადამიანები $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, \dots$ მიმდევრობის სახით, ხოლო ახალი სტუმარი კი – აღნიშნა b -თი. ახალი სტუმარი მოათავსა a_0 ნომერში, ძველი b_0 სტუმარი გადაიყვანა a_1 ნომერში, b_1 სტუმარი გადაიყვანა a_2 ნომერში და ა. შ.

მოყვანილი მაგალითი გვიჩვენებს, რომ თუ გვაქვს ბიექცია $f: A \rightarrow B$, მაშინ შესაძლებელია ავაგოთ ბიექცია $f_1: A_1 \rightarrow B$,

სადაც A_1 არის სიმრავლე, რომელიც მიიღება A სიმრავლისაგან ერთი ელემენტის დამატებით.

შევნიშნოთ, რომ „ჰილბერტის სასტუმროს“ იდეა ხშირად გამოიყენება სხვადასხვა სიმრავლეების ექვივალენტურობის დასადგენად. მაგალითად, ცხადია რომ $[a, b] \sim]a, b[$.

თეორემა 7. თვლადი სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე კონტინუალური სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ, A მოცემული თვლადი სიმრავლეა. ეს ნიშნავს, რომ მისი ელემენტები შეიძლება წარმოვადგინოთ ისეთი $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \dots$ მიმდევრობის სახით, რომლის ელემენტები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან ნატურალური ინდექსებით. თეორემა იქნება დამტკიცებული თუ ვაჩვენებთ, რომ ნატურალურ რიცხვთა ნებისმიერი ზრდადი მიმდევრობა ექვივალენტურია ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის, რომელიც ეკუთვნის $]0, 1[$ ინტერვალს (როგორც უკვე ვნახეთ, $]0, 1[\sim R$). ყოველ $a \in]0, 1[$ ნამდვილ რიცხვს შეესაბამება ერთადერთი უსასრულო ორობითი წილადი $0, \alpha_0 \alpha_1 \dots$ და პირიქით.

ყოველ $0, \alpha_0 \alpha_1 \dots$ რიცხვს შევესაბამოთ ნატურალურ რიცხვთა ზრდადი $(n_k : k \in N)$ მიმდევრობა, სადაც მიმდევრობის ზრდადობას განსაზღვრავს მიმდევრობის წევრების ის მნიშვნელობები, რომლებისთვისაც $\alpha_k = 1$ (მაგალითად, $0, 000101001$ ორობით წილადს შევესაბამოთ $4, 6, 9, \dots$). ე. ი. ყოველ $a \in]0, 1[$ რიცხვს შეესაბამება ერთადერთი ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა და პირიქით, ყოველ ზრდად ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობას შეესაბამება ერთადერთი ორობითი წილადი (მაგალითად, $3, 5, 7, \dots$ მიმდევრობას შეესაბამება $0, 001001001 \dots$ რიცხვი). ეს ნიშნავს, რომ არსებობს ურთიერთცაღსახა თანადობა ნატურალურ რიცხვთა ყველა ზრდად მიმდევრობებსა და $]0, 1[$ ინტერვალის ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს შორის. აქედან კი

გამომდინარეობს, რომ თვლადი სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე კონტინუალურია.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 8. თვლად სიმრავლეთა თვლადი ოჯახის დეკარტული ნამრავლი კონტინუალური სიმრავლეა.

დამტკიცება. საკმარისია მოვიყვანოთ დამტკიცება ყველა შესაძლო უსასრულო მიმდევრობების $N^N = N \times N \times N \times \dots$ სიმრავლისათვის. კერძოდ, ვაჩვენოთ, რომ $N^N \sim]0,1]$.

ვთქვათ, $x = (k_0, k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, \dots)$ არის ნატურალურ რიცხვთა რაიმე მიმდევრობა. ამ მიმდევრობას შევუსაბამოთ ნატურალურ რიცხვთა ზრდადი $y = (n_0, n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, \dots)$ მიმდევრობა, განსაზღვრული შემდეგი წესით: $n_0 = k_0, n_1 = n_0 + k_1, \dots, n_i = n_{i-1} + k_i, \dots$. ამის შემდეგ y მიმდევრობას შევუსაბამოთ $z \in]0,1]$ რიცხვი, რომლის მძიმის შემდეგ $n_0, n_1, n_2, \dots$ ადგილებზე წერია ერთიანები, ხოლო დანარჩენ ადგილებზე კი – ნულები. მაგალითად, $x = (3, 1, 2, 2, 2, \dots)$ მიმდევრობას შევუსაბამოთ $y = (3, 4, 6, 8, 10, \dots)$ მიმდევრობა და ამ შემთხვევისათვის $z = 0,0011010101\dots$.

განსაზღვრების თანახმად, y მიმდევრობა ზრდადია, ამიტომ ამ მიმდევრობაში შემავალი რიცხვებს შორის გვაქვს რაგინდ დიდი რიცხვები. ამის გამო შესაბამის z რიცხვის ჩანაწერში იქნება უსასრულო რაოდენობა ერთიანები და ამავე დროს ყოველი ასეთი რიცხვი განსაზღვრავს ერთადერთ რიცხვს $]0,1]$ შუალედიდან. ე. ი. აგებულია გადასახვა N^N სიმრავლიდან $]0,1]$ შუალედში.

შევნიშნოთ, რომ ორ განსხვავებულ მიმდევრობას შეესაბამება განსხვავებული რიცხვები $]0,1]$ შუალედიდან.

მართლაც, ვთქვათ, $(k_0, k_1, \dots, k_{i-1}, \dots) \neq (k'_0, k'_1, \dots, k'_{n-1}, \dots)$.

მაშინ მოიძებნება ისეთი ნომერი t , რომ

$k_0 = k'_0, \dots, k_{t-1} = k'_{t-1}$, მაგრამ $k_t \neq k'_t$. ვიგულისხმობთ, რომ $k_t < k'_t$. ამ შემთხვევაში გვქვია $n_0 = n'_0, \dots, n_{t-1} = n'_{t-1}$.

მაგრამ $n_t < n'_t$. ამის გამო პირველი ათწილადის n_t -ურ ადგილზე (მძიმის შემდეგ) წერია ერთიანი, ხოლო მეორე ათწილადის იგივე ნომრის (მძიმის შემდეგ) ადგილზე კი – ნული. ეს იმას ნიშნავს, რომ მიღებული ათწილადები განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან. საბოლოოდ მივიღეთ, რომ გადასახვა $f: N^N \rightarrow]0,1]$ არის ინიექციური.

რადგან ნებისმიერ $z \in]0,1]$ რიცხვს შეესაბამება ზრდადი $y = (n_0, n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, \dots)$ მიმდევრობა, რომელიც შედგება იმ ადგილის ნომრებისაგან, სადაც მძიმის შემდეგ წერია ერთიანები, ხოლო ყოველ ასეთ მიმდევრობას კი – შეესაბამება $x = (k_0, k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, \dots)$ მიმდევრობა, სადაც $k_0 = n_0$ და $k_i = n_i - n_{i-1}$ ($i \geq 2$). ცხადია, რომ $f(x) = z$. ე.ი. გადასახვა f არის ბიექცია და შესაბამისად, $N^N \sim]0,1]$. მაშასადამე, $\text{card}(N^N) = c$.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 9. კონტინუალური სიმრავლეების სასრული და თვლადი ოჯახის დეკარტული ნამრავლი კონტინუალური სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია კონტინუალურ სიმრავლეთა $A_0, A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ ოჯახი და ვთქვათ,

$$A = A_0 \times A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k \times \dots.$$

დამტკიცება მოვიყვანოთ იმ შემთხვევისათვის, როცა მოცემულია ასეთი სიმრავლეთა თვლადი ოჯახი.

განვიხილოთ $a = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \in A$ ელემენტი, სადაც $a_k \in A_k$ ($k \in N$). რადგან ყოველი A_k სიმრავლე კონტინუალურია, ამიტომ არსებობს ბიექცია $f: A_k \rightarrow N^N$. ეს

ნიშნავს, რომ a მიმდევრობის ყოველ a_k ელემენტს შეესაბამება ნატურალური რიცხვთა განსაზღვრული მიმდევრობა:

$$a_0 \rightarrow (n_{01}, n_{02}, \dots, n_{0m}, \dots),$$

$$a_1 \rightarrow (n_{11}, n_{12}, \dots, n_{1m}, \dots),$$

.....

$$a_k \rightarrow (n_{k1}, n_{k2}, \dots, n_{km}, \dots),$$

.....

ხოლო a მიმდევრობას k - i შეესაბამება უსასრულო ცხრილი

$$a \rightarrow \begin{pmatrix} n_{01} & n_{02} & \dots & n_{0m} & \dots \\ n_{11} & n_{12} & \dots & n_{1m} & \dots \\ n_{21} & n_{22} & \dots & n_{2m} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \end{pmatrix},$$

რომელიც შედგება ნატურალური რიცხვებისაგან. შევნიშნოთ, რომ სხვადასხვა ელემენტებს შეესაბამება სხვადასხვა ცხრილი.

ცხადია, რომ ასეთი ცხრილის ელემენტთა რაოდენობა თვლადია, როგორც თვლადი რაოდენობა ელემენტების თვლადი გაერთიანება. ამიტომ შესაძლებელია მისი ელემენტების ჩაწერა მიმდევრობის სახით. ამის გამო ყველა ცხრილისათვის ასეთი მიმდევრობები შეიძლება შევადგინოთ ერთიდიგივე სახით (მაგალითად, კანტორის დიაგონალური მეთოდით). მაშინ განსხვავებულ ცხრილებს შეესაბამებათ განსხვავებული მიმდევრობები და შესაბამისად, მივიღებთ ბიექციურ გადასახვას A სიმრავლიდან N^N სიმრავლეზე. ე. ი. $\text{card}(A) = c$.

ამით თეორემა 8 დამტკიცებულია.

თეორემა 8-დან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ სიბრტყის ყველა წერტილთა სიმრავლე კონტინუალური სიმრავლეა. ეს ფაქტი თავის დროზე ჩაითვადა მოულოდნელობად, რადგან კანტორი თვლიდა, რომ სიბრტყის წერტილთა სიმრავლის სიმძლავრე მეტი იყო, ვიდრე წრფის წერტილთა სიმრავლის

სიმძლავრე. „ვხედავ, მაგრამ არ მჯერა” - ამ ფაქტის დამტკიცების შემდეგ კანტორი წერდა დედეკინდს.

თეორემა 10 (კანტორი). ნებისმიერი სიმრავლის ბულანის სიმძლავრე მეტია თვით სიმრავლის სიმძლავრეზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია ნებისმიერი A სიმრავლე. როგორც ყოველთვის $P(A)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ A სიმრავლის ბულანი.

თუ A სიმრავლის ყოველ a ელემენტს შევესაბამებთ ერთელემენტიან $\{a\}$ სიმრავლეს, მაშინ ცხადია, რომ A სიმრავლე ექვივალენტურია თავისი ერთელემენტიანი სიმრავლეებისაგან შედგენილი ქვესიმრავლეთა სიმრავლის. ე. ი. ცხადია, რომ $\text{card}(A) \leq \text{card}(P(A))$. ამის გამო საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ A და $P(A)$ არ არიან ექვივალენტურები. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ე. ი. არსებობს ბიექცია

$$f: A \rightarrow P(A).$$

ნებისმიერი $a \in A$ ელემენტისათვის შესაძლებელია შემდეგი ორი შემთხვევიდან ერთ-ერთი: პირველი, a შედის $f(a)$ ქვესიმრავლეში ან მეორე, a არ შედის $f(a)$ -ში. განვიხილოთ $B \subset A$ ქვესიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს მეორე პირობას. ე. ი. $B = \{a: a \in A \wedge a \notin f(a)\}$. რადგან $B \in P(A)$ და f გადასახვა ბიექციაა, ამიტომ B -ს გააჩნია წინასახე $b \in A$, თანაც ერთადერთი.

განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

ა) $b \in f(b) = B$, ე. ი. b აკმაყოფილებს პირველ პირობას;

ბ) $b \notin f(b) = B$, ე. ი. b აკმაყოფილებს მეორე პირობას.

მივიღეთ წინააღმდეგობა. ეს ნიშნავს, რომ ჩვენი დაშვება მცდარია, ე. ი. არ არსებობს ბიექცია $A \rightarrow P(A)$. მაშასადამე, $\text{card}(A) < \text{card}(P(A))$.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 7. თუ A რაიმე სასრული სიმრავლეა და $\text{card}(A) = n$ მაშინ $\text{card}(P(A)) = 2^n$.

მართლაც, A სიმრავლის ბულეანი შეიცავს ერთ ცარიელ სიმრავლეს, C_n^1 რაოდენობის ერთელემენტური სიმრავლეს, C_n^2 რაოდენობის ორელემენტური სიმრავლეს და ა. შ. (C_n^m - ით აღნიშნულია n ელემენტური სიმრავლის m ელემენტური ქვესიმრავლეთა რაოდენობა ანუ ჯუფდება n -დან m -ად). ანუ $P(A)$ -ს ელემენტთა რაოდენობა იქნება:

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

შევნიშნოთ, რომ ეს ფორმულა მართებული იქნება იმ შემთხვევებშიც, როცა A სიმრავლე ცარიელი სიმრავლეა ($n=0$) და როცა A ერთელემენტური სიმრავლეა ($n=1$).

მაგალითი 8. თუ A ნებისმიერი სიმრავლეა, მაშინ $\text{card}(P(A)) = 2^{\text{card}(A)}$.

მართლაც, ვთქვათ, მოცემულია რაიმე A სიმრავლე და $B \in P(A)$. განვსაზღვროთ B სიმრავლისათვის მახასიათებელი ფუნქცია

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } x \in B, \\ 0, & \text{როცა } x \in A \setminus B. \end{cases}$$

ამრიგად, განსაზღვრულია ბიექციური გადასახვა

$$\chi: P(A) \rightarrow \{0,1\}^A.$$

ე. ი. $P(A) \sim \{0,1\}^A$. მაშასადამე, $\text{card}(P(A)) = 2^{\text{card}(A)}$.

თეორემა 11. $c = 2^{\aleph_0}$.

სიმრავლეთა თეორიის ბევრ კლასიკურ, ასევე თანამედროვე, ლიტერატურაში სიმრავლეს, რომლის სიმძლავრე ტოლია $c = 2^{\aleph_0}$ ეწოდება კონტინუალური. კონტინუუმის სიმძლავრის ასეთი განსაზღვრა არის საფუძველი კარდინალურ რიცხვთა მთელი თეორიის შემდგომი განვითარებისათვის.

თეორემა 10-დან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი თეორემის მართებულობა:

თეორემა 12. უსასრულო სიმრავლეებს შორის არ არსებობს სიმრავლე უდიდესი სიმძლავრით.

§6. ორდინალური რიცხვები. ტრანსფინიტული ინფუქციის მეთოდი

ორ დალაგებულ $(A, \leq)$ და $(B, \leq)$ სიმრავლეს ეწოდება იზომორფული, თუ არსებობს ბიექცია $f: A \rightarrow B$, რომელიც ინარჩუნებს A სიმრავლეში განსაზღვრულ რიგს. ე. ი.

$$(\forall a_1)(\forall a_2)(a_1 \in A \wedge a_2 \in A \wedge a_1 \leq a_2 \Leftrightarrow f(a_1) \leq f(a_2)).$$

მაგალითი 1. ორი სასრული ტოლი სიმძლავრის მქონე დალაგებული A და B სიმრავლე იზომორფულია. მართლაც, ვთქვათ, ამ სიმრავლეების ელემენტები მოცემულია იმ დალაგების მიხედვით, რომელიც განსაზღვრულია მოცემულ სიმრავლეებზე:

$$A = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}),$$

$$B = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_{k-1}).$$

თუ a_i -ს შევუსაბამებთ b_i ($i \in [0, k]$) ელემენტს, მაშინ ცხადია მივიღებთ იზომორფიზმს A და B სიმრავლეებს შორის.

მაგალითი 2. წრფივი გარდაქმნა $y = \frac{x-a}{b-a}$ ამყარებს

იზომორფიზმს რიცხვითი ღერძის $a < x < b$ და $0 < y < 1$ ინტერვალებს შორის. აქვე შევნიშნოთ, რომ რიცხვითი ღერძის ყველა ინტერვალს და მათთან ერთად მთელი რიცხვითი ღერძი იზომორფულია.

ცხადია, რომ ორი დალაგებული სიმრავლის იზომორფიზმის ცნება წარმოადგენს ექვივალენტურობის მიმართებას ყველა დალაგებულ სიმრავლეთა კლასში და ამიტომ, როგორც უკვე

ავღნიშნეთ §4-ში, ასეთი მიმართება ყველა დალაგებულ სიმრავლეთა კლასს დაეფოს ექვივალენტურობის კლასებად.

მოცემული დალაგებული სიმრავლის რიგობრივი ტიპი ეწოდება ამ სიმრავლის იზომორფული სიმრავლეთა კლასის რომელიმე წარმომადგენელს.

საესებით დალაგებული სიმრავლის რიგობრივ ტიპს ეწოდება რიგობრივი ანუ ორდინალური რიცხვი. უსასრულო ორდინალურ რიცხვს ეწოდება ტრანსფინიტული რიცხვი.

ნატურალურ N რიცხვთა სიმრავლის ორდინალური რიცხვი აღინიშნება ω ან ω_0 ასოებით, ხოლო დალაგების მიმართებაში იგულისხმება ბუნებრივი დალაგება.

მაგალითი 3. განვიხილოთ საესებით დალაგებული სიმრავლე

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

ეს სიმრავლე იზომორფულია ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის. თუ მოცემულ სიმრავლეს დაუშმატებთ რიცხვს 1 და დავალაგებთ ზრდადობის მიხედვით, მივიღებთ

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots, 1.$$

მიღებული სიმრავლე კვლავ საესებით დალაგებული თვლადი სიმრავლეა, მაგრამ არ არის ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის იზომორფული. ეს დასკვნა გამოძდინარეობს თუნდაც იმ ფაქტიდან, რომ მოცემულ სიმრავლეს გააჩნია უდიდესი ელემენტი, ხოლო ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს კი ასეთი ელემენტი არ გააჩნია. ამ მოცემულ სიმრავლეს ეწოდება $\omega+1$ ტიპის სიმრავლე.

ვთქვათ, $(A, \leq)$ ნებისმიერი დალაგებული სიმრავლეა. A სიმრავლის დალაგებულ $(B, \leq)$ ქვესიმრავლეს ეწოდება მონაკვეთი, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობა:

$$(\forall a)(\forall b)(a \in A \wedge b \in B \wedge a \leq b \Rightarrow a \in B).$$

თუ a არის დალაგებული $(A, \leq)$ სიმრავლის ელემენტი, მაშინ ამ ელემენტით განსაზღვრული მონაკვეთი აღინიშნება S_a^A სიმბოლოთი და განსაზღვრავს შემდეგ სიმრავლეს:

$$S_a^A = \{b : b \in A \wedge b \leq a\}.$$

ორდინალური რიცხვის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ორდინალური რიცხვები სიმრავლეებს წარმოადგენენ. ორ ორდინალურ α და β რიცხვს ეწოდება ტოლი, თუ α და β სიმრავლეები იზომორფულია და ამ შემთხვევაში ეწერთ $\alpha = \beta$.

ორდინალურ α რიცხვს ეწოდება ორდინალურ β რიცხვზე ნაკლები, თუ α იზომორფულია β სიმრავლის საკუთრივი მონაკვეთისა და ეწერთ $\alpha < \beta$.

დავრწმუნდეთ, რომ ნებისმიერი ორდინალური α და β რიცხვებისათვის $\alpha < \beta$ და $\beta < \alpha$ დამოკიდებულებები გამორიცხავენ ერთმანეთს.

დავუშვათ საწინააღმდეგო. ე. ი. $\alpha < \beta$ და $\beta < \alpha$ დამოკიდებულებები სრულდება ერთდროულად. ვთქვათ, f არის α -ს იზომორფიზმი β -ს საკუთრივ მონაკვეთზე, ხოლო g კი არის β -ს იზომორფიზმი α -ს საკუთრივ მონაკვეთზე. მაშინ კომპოზიცია $h = f \circ g$ იქნება α -ს იზომორფიზმი თავის საკუთრივ მონაკვეთზე, რაც წინააღმდეგობაა, ვინაიდან არ არსებობს დალაგებული A სიმრავლის იზომორფიზმი თავის საკუთრივ მონაკვეთზე. მართლაც, თუ φ წარმოადგენს დალაგებული $(A, \leq)$ სიმრავლის იზომორფიზმი თავის თავში, მაშინ

$$(\forall a)(a \in A \Rightarrow a \leq \varphi(a)). \quad (*)$$

დავუშვათ, $(*)$ პირობის საწინააღმდეგო. ე. ი. $\varphi(a) < a$. განვიხილოთ სიმრავლე

$$B = \{a : a \in A \wedge \varphi(a) < a\}$$

და b -თი აღენიშნოთ B სიმრავლის უმცირესი ელემენტი. თუ $\varphi(b) = c$, მაშინ ცხადია, რომ $c < b$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\varphi(c) < \varphi(b) = c$. რაც იმას ნიშნავს, რომ $c \in B$ და c ელემენტი მკაცრად წინ უსწრებს b უმცირესს ელემენტს. მივიღეთ წინააღმდეგობა.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ

$$(1) \alpha < \beta \quad \wedge \quad \alpha = \beta,$$

$$(2) \beta < \alpha \quad \wedge \quad \alpha = \beta$$

დამოკიდებულებებში მოცემული თანაფარდობები ერთმანეთს გამოირიცხავენ.

ვაჩვენოთ, რომ ორდინალურ რიცხვთა კლასში შესრულებულია ე. წ. ტრისოტომიის თვისება.

ყოველი α ორდინალური რიცხვისათვის შეგვიძლია განვიხილოთ მისი ყველა მონაკვეთის $W(\alpha)$ სიმრავლე, რომელიც იზომორფულია α -ს. α და β ორდინალური რიცხვებისთვის შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$C = W(\alpha) \cap W(\beta)$$

და დავუშვათ, რომ γ არის C სიმრავლის რიგობრივი ტიპი. ცხადია, რომ C სიმრავლე შედგება ისეთი ორდინალური რიცხვებისაგან, რომლებიც ერთდროულად არ აღემატებიან α და β ორდინალურ რიცხვებს. ცხადია, რომ $\gamma < \alpha$ და $\gamma < \beta$ დამოკიდებულებები ერთდროულად არ შეიძლება იყოს შესრულებული. წინააღმდეგ შემთხვევაში მივიღებდით, რომ γ ერთდროულად წარმოადგენს α და β ორდინალური რიცხვებიდან თითოეულის საკუთრივ მონაკვეთს, რომელიც მათ თანაკვეთას ემთხვევა.

ამგვარად, შესრულებულია ოთხი ლოგიკური შემთხვევიდან სამი:

$$1) \gamma < \alpha \quad \wedge \quad \gamma = \beta. \quad \text{ე. ი.} \quad \beta < \alpha;$$

$$2) \gamma < \beta \quad \wedge \quad \gamma = \alpha. \quad \text{ე. ი.} \quad \alpha < \beta;$$

$$3) \gamma = \alpha \quad \wedge \quad \gamma = \beta. \quad \text{ე. ი.} \quad \alpha = \beta.$$

ამით ტრისოტომიის თვისება დამტკიცებულია.

ყველა ორდინალურ რიცხვთა სიმრავლე არის დალაგებული სიმრავლე ბუნებრივი დალაგების შემდეგი მიმართებით:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta.$$

ორდინალური რიცხვებისათვის მართებულია შემდეგი წინადადებები:

- $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$ ნებისმიერი α -სთვის;

- $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ არის უმცირესი ორდინალი, რომელიც მეტია α -ზე;

- ორდინალთა ნებისმიერ არაცარიელ სიმრავლეს გააჩნია უმცირესი ელემენტი.

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. თვლადზე არამეტი სიმძლავრის ყველა ორდინალური რიცხვთა კლასი არათვლადია.

დამტკიცება. აღნიშნული კლასის შესაბამისი ორდინალური რიცხვი ავლნიშნოთ ω_1 ასოთი. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ე. ი. ω_1 ორდინალური რიცხვი თვლადი სიმძლავრისაა. განვიხილოთ ნებისმიერი x ელემენტი, რომელიც არ მიეკუთვნება ω_1 სიმრავლეს. მაშინ ვიგულისხმოთ, რომ $\omega_1 \cup \{x\}$ სიმრავლეში ყოველი ელემენტი ω_1 სიმრავლიდან წინ უსწრებს x -ს, რაც განაპირობებს ω_1 სიმრავლის სავსებით დალაგებულობას. რადგან $\omega_1 \cup \{x\}$ სიმრავლე თვლადია, ამიტომ $\omega_1 \cup \{x\}$ სიმრავლის შესაბამისი ორდინალური რიცხვიც თვლადია და ის უნდა იყოს ω_1 -ის მონაკვეთი. რაც შეუძლებელია.

ამით თეორემა 1 დამტკიცებულია.

განსაზღვრების თანახმად, ω_1 არის პირველი არათვლადი ტრანსფინიტული რიცხვი და ყოველი ორდინალური $\alpha < \omega_1$ რიცხვი სასრულია ან თვლადია. აქედან გამომდინარეობს, რომ თვლადზე არამეტი სიმძლავრის ყველა ორდინალური რიცხვთა კლასის ყოველი არათვლადი ქვესიმრავლის შესაბამისი ორდინალური რიცხვია ω_1 . პირველი არათვლადი ω_1

ორდინალური რიცხვის შესაბამისი სიმძლავრე აღინიშნება $\aleph_1$ ასოთი.

თეორემა 2. არ არსებობს ისეთი კარდინალური რიცხვი m , რომელიც აკმაყოფილებს

$$\aleph_0 < m < \aleph_1$$

უტოლობას.

მართლაც, ვთქვათ, ასეთი რიცხვი არსებობს. რადგან $m < \aleph_1$, ამიტომ არსებობს თვლადზე არამეტი სიმძლავრის ყველა ორდინალური რიცხვთა კლასის ქვესიმრავლე M ისეთი, რომ $\text{card}(M) = m$. მაგრამ $\aleph_0 < m < \aleph_1$ დამოკიდებულების გამო M სიმრავლე არათვლადია და ამიტომ $\text{card}(M) = \aleph_1$. მიღებული წინააღმდეგობა ცხადყოფს თეორემა 2-ის მართებულობას.

როგორც უკვე ვნახეთ, ყველა ორდინალური რიცხვთა კლასი სავსებით დალაგებული სიმრავლეა. ბუნებრივად ისმის შეკითხვა: ნებისმიერ სიმრავლეზე შესაძლებელია თუ არა განისაზღვროს სავსებით დალაგების მიმართება?

ამ შეკითხვაზე პასუხს იძლევა ცერმელოს თეორემა, რომლის ფორმულირებასაც მოვიყვანთ სიმრავლეთა თეორიის სხვა ფუნდამენტალურ წინადადებებთან დამოკიდებულებაში.

თეორემა 3. (ZF) სიმრავლეთა თეორიის ფარგლებში შემდეგი წინადადებები ექვივალენტურია:

- ა) ამორჩევის აქსიომა ჭეშმარიტია;
- ბ) (ცერმელოს თეორემა) ყოველ სიმრავლეში შესაძლებელია განისაზღვროს სავსებით დალაგების მიმართება;
- გ) (ცორნის ლემა) ყოველი ინდუქციური სიმრავლე შეიცავს მაქსიმალურ ელემენტს.

ახლა ვთქვათ, α ნებისმიერი ორდინალური რიცხვია.

ვითქვით, რომ α არის მომდევნო ორდინალი, თუ რომელიმე β ორდინალური რიცხვისათვის $\alpha = \beta + 1$.

ვითქვით, რომ α არის ზღვრული ორდინალი, თუ შესრულებულია პირობა

$$\alpha = \sup \{ \beta : \beta < \alpha \}.$$

ე. ი. α ზღვრული ორდინალია, თუ ის არ არის მომდევნო ორდინალი.

მაგალითი 4. 0 არის ზღვრული ორდინალი.

ყოველი ორდინალური α რიცხვი შეიძლება წარმოდგენილ იქნას შემდეგი ფორმით

$$\alpha = \beta + n,$$

სადაც β არის ზღვრული ორდინალური, ხოლო $n < \omega$. თუ n რიცხვი ღუწია, მაშინ α -ს ეწოდება ღუწი ორდინალი, ხოლო თუ n კენტი, მაშინ კი კენტი ორდინალი.

კონფინალობა ზღვრული α ორდინალისთვის არის უმცირესი ξ ორდინალი, რომლისთვისაც არსებობს ორდინალთა $\{\alpha_\zeta : \zeta < \xi\}$ ისეთი ოჯახი, რომ

$$(\forall \zeta)(\zeta < \xi \Rightarrow \alpha_\zeta < \alpha),$$

$$\alpha = \sup \{\alpha_\zeta : \zeta < \xi\}.$$

მაგალითი 5. $0 < t < 1$ ინტერვალი კონფინალურია

ქვესიმრავლის, რომელიც შედგება ყველა $\frac{n}{n+1}$ ($n \in N$) სახის წერტილებისაგან.

ორდინალურ რიცხვთა თეორიის არითმეტიკაში მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ხარტოგის რიცხვი $X(A)$, რომელიც ნებისმიერი A სიმრავლისათვის განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$X(A)$ = (უმცირესი α , რომლისთვისაც არ არსებობს ბიექცია α -დან A -ში).

ხარტოგის რიცხვისთვის სრულდება შემდეგი თვისებები:

1'. $X(A)$ არის კარდინალური რიცხვი ყოველი A -სთვის;

2'. $X(A)$ არის უმცირესი კარდინალური რიცხვი, რომელიც მეტია A -ზე.

კარდინალური რიცხვები (ალეფები) განისაზღვრება შემდეგი რეკურენტული დამოკიდებულებებით:

$$\aleph_0 = \omega_0 = \omega,$$

$$\aleph_{\alpha+1} = \omega_{\alpha+1} = X(\omega_\alpha),$$

$$\aleph_\alpha = \omega_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \omega_\beta, \text{ თუ } \alpha \text{ არის ზღვრული ორდინალი.}$$

კარდინალურ ω_α რიცხვს ეწოდება მიუღწევადი, თუ ის რეგულარულია და მის შესაბამის რიგობრივ α ინდექსს არ გააჩნია წინამორბედი.

კარდინალურ α რიცხვს ეწოდება დომინანტური, თუ

$$(\forall \beta) (\beta \text{ არის კარდინალური რიცხვი} \ \& \ \beta < \alpha \Rightarrow 2^\beta < \alpha).$$

კარდინალურ ω_α რიცხვს ეწოდება ძლიერად მიუღწევადი, თუ ის ერთდროულად არის მიუღწევადიც და დომინანტურიც.

ახლა განვსაზღვროთ ჯამისა და ნამრავლის ოპერაციები კარდინალურ რიცხვთა ნებისმიერი ოჯახისათვის.

ვთქვათ, $(\alpha_i)_{i \in I}$ არის კარდინალურ რიცხვთა რაიმე ოჯახი. მაშინ

$$\sum_{i \in I} \alpha_i = \text{card} \left(\bigcup_{i \in I} (A_i \times \{i\}) \right),$$

$$\prod_{i \in I} \alpha_i = \text{card} \left(\prod_{i \in I} A_i \right),$$

სადაც $(A_i)_{i \in I}$ სიმრავლეთა ისეთი ნებისმიერი ოჯახია, რომ

$$\text{card}(A_i) = \alpha_i \quad (i \in I).$$

კერძოდ, თუ მოცემულია ორი α და β კარდინალური რიცხვი, მაშინ

$$\alpha + \beta = \text{card} \left((\alpha \times \{\emptyset\}) \cup (\beta \times \{1\}) \right),$$

$$\alpha \cdot \beta = \text{card}(\alpha \times \beta).$$

უსასრულო კარდინალურ α რიცხვს ეწოდება რეგულარული, თუ ის არ წარმოიდგინება კარდინალურ რიცხვთა

$$\sum_{i \in I} \alpha_i$$

ისეთი ჯამის სახით, რომლისთვისაც

$$Card(I) < \alpha,$$

$$(\forall i)(i \in I \Rightarrow \alpha_i < \alpha).$$

თუ უსასრულო კარდინალური α რიცხვი წარმოიდგინება ზემოთ მითითებული ჯამის სახით, მაშინ α -ს ეწოდება სინგულარული.

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4. თუ α უსასრულო კარდინალური რიცხვია, მაშინ $\alpha \cdot \alpha = \alpha$.

დამტკიცება. როცა $\alpha = \aleph_0$, მაშინ თეორემის მართებულობა ცხადია. ახლა დავუშვათ, რომ თეორემა მართებულია ყველა უსასრულო $\beta < \alpha$ -სთვის. შესაბამისად, გვაქვს $\beta \cdot \beta < \alpha$. განვსაზღვროთ დალაგების $\ll$ მიმართება $\alpha \cdot \alpha$ -ზე შემდეგი პირობით:

$$(\xi, \eta) \ll (\xi', \eta')$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ შესრულებულია შემდეგი სამი პირობა:

$$(1) \max(\xi, \eta) < \max(\xi', \eta'),$$

$$(2) \max(\xi, \eta) = \max(\xi', \eta') \wedge \xi < \xi',$$

$$(3) \max(\xi, \eta) = \max(\xi', \eta') \wedge \xi = \xi' \wedge \eta < \eta'.$$

ადვილი დასანახია, რომ ასეთი გზით განსაზღვრულია დალაგების მიმართება $\alpha \cdot \alpha$ -ზე. ყოველი $(\gamma, \theta) \in \alpha \cdot \alpha$ წყვილისთვის გვაქვს

$$\{(\xi, \eta) : (\xi, \eta) \ll (\gamma, \theta) \subset (\max(\gamma, \theta) + 1) \times (\max(\gamma, \theta) + 1)\}.$$

აქედან კი გამოდინარეობს, რომ

$$card(\{(\xi, \eta) : (\xi, \eta) \ll (\gamma, \theta)\}) \leq \omega \cdot card(\gamma) \cdot card(\theta) < \alpha.$$

მაშასადამე, $\alpha \cdot \alpha \leq \alpha$ და რადგან $\alpha \leq \alpha \cdot \alpha$ თანაფარდობაც ავტომატურად შესრულებულია, ამიტომ მივიღებთ, რომ $\alpha \cdot \alpha = \alpha$.

ამით თეორემა 4 დამტკიცებულია.

თეორემა 4 და ბანახის თეორემიდან (იხილეთ, §4, თეორემა 2) უშუალოდ გამოდინარეობს, რომ ნებისმიერი უსასრულო α და β კარდინალური რიცხვებისათვის მართებულია ტოლობა

$$\alpha + \beta = \alpha \cdot \beta = \max(\alpha, \beta).$$

შემოვიტანოთ დანარჩენი ალგებრული ოპერაციები კარდინალური რიცხვებისათვის.

ვთქვათ, A და B ნებისმიერი სიმრავლეებია და ვთქვათ, $\text{card}(A) = \alpha$, $\text{card}(B) = \beta$. მაშინ

$$\text{card}(A^B) = \alpha^\beta.$$

ახლა, ვთქვათ, α, β და γ ნებისმიერი კარდინალური რიცხვებია. მაშინ:

$$(\alpha \cdot \beta)^\gamma = \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma;$$

$$\alpha^\gamma \cdot \alpha^\beta = \alpha^{\gamma+\beta};$$

$$(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}.$$

ადვილი დასანახია, რომ $\alpha^0 = 1$ ნებისმიერი α -სთვის და $1^\alpha = 1$. თუ α უსასრულო კარდინალური რიცხვია და $0 < \beta < \aleph_0$, მაშინ $\alpha^\beta = \alpha$. თუ $2 \leq \alpha \leq \beta$ და β არის უსასრულო კარდინალური რიცხვი, მაშინ $\alpha^\beta = 2^\beta$. შევნიშნოთ, რომ თუ $\alpha = \beta = \aleph_0$, მაშინ $c = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

დავუბრუნდეთ §3-ში მოყვანილ მსჯელობებს სიმრავლეთა თეორიის აქსიომატურ სისტემებთან დაკავშირებით. ამ პარაგრაფში მოვიყვანეთ დამატებითი აქსიომები ამორჩევის აქსიომისა და დეტერმინირების აქსიომის სახით. როგორც დავინახეთ ამორჩევის აქსიომის გარეშე შეუძლებელია დამტკიცდეს მათემატიკური ანალიზის ბევრი მნიშვნელოვანი თეორემა (იხილეთ, §5, თეორემა 3; თეორემა 4). გარკვეული აზრით სისრულისათვის ქვემოთ მოვიყვანოთ სხვა სიმრავლურ-თეორიული აქსიომები, რომლებიც აგრეთვე გადამწყვეტ როლს თამაშობენ თანამედროვე მათემატიკური თეორიის განვითარებაში.

§3-ში მოცემულია ამორჩევის აქსიომის სხვადასხვა ფორმა და აღნიშნეთ, რომ მათემატიკური ანალიზის ბევრ ამოცანებში უძღობესია გამოვიყენოთ **დამოკიდებული ამორჩევის პრინციპი** (DC). ის მდგომარეობს შემდეგში:

ვთქვათ, P არის ბინარული დამოკიდებულება არაცარიელ X სიმრავლეზე ისეთი, რომ

$$(\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in X \wedge (x, y) \in P)).$$

მაშინ არსებობს X სიმრავლის ელემენტების ისეთი $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, \dots$ მიმდევრობა, რომ ნებისმიერი $n \in \mathbb{N}$ რიცხვისათვის გვაქვს

$$(x_{n-1}, x_n) \in P.$$

(DC)-დან გამომდინარეობს შემდეგი დებულებები:

- 1) არაცარიელ სიმრავლეთა ყოველი თვლადი ოჯახისათვის არსებობს ამორჩევის ფუნქცია;
- 2) ყოველი უსასრულო სიმრავლე შეიცავს უსასრულო თვლად ქვესიმრავლეს;
- 3) ω_1 კარდინალი რეგულარულია.

კონტინუუმის ჰიპოთეზა (CH) მდგომარეობს შემდეგში:

$$c = 2^\omega = \omega_1.$$

განზოგადოებული კონტინუუმის ჰიპოთეზა (GCH) ყალიბდება შემდეგნაირად:

$$(\forall \alpha) (\alpha \text{ ნებისმიერი ორდინალი} \wedge 2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1}).$$

შევნიშნოთ, რომ აქსიომათა (ZFC) სისტემაში შეუძლებელია დამტკიცდეს როგორც კონტინუუმის ჰიპოთეზა, ასევე მისი უარყოფა.

ვთქვათ, $(X, \leq)$ ნაწილობრივ დალაგებული სიმრავლეა.

$Y \subset X$ სიმრავლეს ეწოდება კონიციალური, თუ ყოველი $x \in X$ ელემენტისთვის მოიძებნება $y \in Y$ ელემენტი ისეთი, რომ

$$y \leq x.$$

$Z \subset X$ სიმრავლეს ეწოდება თავსებადი, თუ ყოველი სასრული $T \subset Z$ სიმრავლისათვის მოიძებნება $x \in X$ ელემენტი ისეთი, რომ

$$x \leq t$$

ნებისმიერი $t \in T$ ელემენტისათვის.

კერძოდ, $x \in X$ და $y \in X$ ელემენტებს ეწოდებათ თავსებადი, თუ $\{x, y\}$ ორელემენტოვანი სიმრავლე თავსებადია X -ში.

$Y \subset X$ სიმრავლეს ეწოდება წვეილ-წვეილად არათავსებადი, თუ ნებისმიერი ორი განსხვავებული $x \in Y$ და $y \in Y$ ელემენტები არათავსებადია.

ვითქვით, რომ ნაწილობრივ დალაგებული $(X, \leq)$ სიმრავლე აკმაყოფილებს თვლად ჯაჭვთა პირობას, თუ ნებისმიერი წვეილ-წვეილად არათავსებადი ქვესიმრავლეები X -დან არა უმეტეს თვლადია.

მარტინის აქსიომა (MA) სიმრავლურ-თეორიული თვალსაზრისით ყალიბდება შემდეგნაირად:

ვთქვათ, $(X, \leq)$ ნაწილობრივ დალაგებული სიმრავლეა, რომელიც აკმაყოფილებს თვლად ჯაჭვთა პირობას, ხოლო F არის X სიმრავლის კონინიციალურ ქვესიმრავლეთა ისეთი ოჯახი, რომ $Card(F) < \mathfrak{c}$. მაშინ არსებობს X სიმრავლის ისეთი თავსებადი ქვესიმრავლე, რომელსაც F ოჯახის ყოველ სიმრავლესთან ექნება არაცარიელი თანაკვეთა.

$(ZF) \& (DC)$ სიმრავლეთა თეორიაში ადვილად მოწმდება შემდეგი იმპლიკაცია:

$$(CH) \Rightarrow (MA).$$

პარაგრაფის ბოლოს მოვიყვანოთ ტრანსფინიტული ინდუქციის მეთოდის არსი, რომელიც ერთ-ერთ მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის მთელი რიგი საკითხების გადაწყვეტაში.

ტრანსფინიტული ინდუქციის მეთოდი წარმოადგენს მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის განზოგადებას ნებისმიერი სავსებით დალაგებული სიმრავლეებისათვის. ამ მეთოდის არსი მდგომარეობს შემდეგში:

ვთქვათ, მოცემულია სავსებით დალაგებული A სიმრავლე და ვთქვათ, $T(a)$ რაიმე ისეთი წინადადებაა, რომლის ჩამოყალიბება შესაძლებელია ნებისმიერი $a \in A$ ელემენტისთვის. თუ ეს წინადადება მართებულია A სიმრავლის პირველი ელემენტისათვის და ასევე მართებულია

a -სთვის იმ შემთხვევაში, თუ $T(a)$ მართებულია ყველა იმ ელემენტებისათვის, რომელიც წინ უსწრებს a -ს, მაშინ $T(a)$ მართებულია ყოველი $a \in A$ ელემენტისთვის.

ტრანსფინიტული ინდუქციის მეთოდის დამტკიცებისათვის საკმარისია შევნიშნოთ, რომ თუ იარსებებდა ისეთი $a \in A$ ელემენტები, რომ T წინადადება იქნებოდა მცდარი, მაშინ ამ ელემენტების სიმრავლეში იარსებებს უმცირესი ელემენტი და აღვნიშნოთ ის a' -ით. მაგრამ ასეთი a' ელემენტის არსებობას მიუყვართ წინააღმდეგობამდე, რადგან ყოველი $a < a'$ ელემენტებისათვის $T(a)$ წინადადება იქნებოდა ჭეშმარიტი.

შევნიშნოთ, რომ თუ $A = N$, მაშინ მივიღებთ მათემატიკურ ინდუქციის პრინციპს.

§7. რიცხვითი სიმრავლეები

წინა პარაგრაფებში განვიხილეთ აბსტრაქტული სიმრავლეების თვისებები და მათი ზოგადი თეორიული ასპექტები. ობიექტების აბსტრაქტულობა განპირობებული იყო იმ თვალსაზრისით, რომ ჩვენთვის არ იყო არსებითი სიმრავლის შემადგენელი ელემენტების ბუნება. თუმცა როგორც უკვე ვნახეთ თვალსაჩინოებისათვის ბევრ მაგალითში ვიხილავდით რიცხვით სიმრავლეებსაც.

რიცხვითი სიმრავლეების ცალკე გამოყოფა ბუნებრივია იმ აზრით, რომ ისინი წარმოადგენენ ნამდვილი ცვლადის ანალიზის ფუნდამენტს, ხოლო მრავალგანზომილებიანი ევკლიდეს სივრცე, როგორც ნამდვილ რიცხვთა ღერძების დეკარტული ნამრავლი, არის საბაზისო სივრცე მთელი მათემატიკისათვის. აქვე აღვნიშნოთ, რომ ნამდვილ რიცხვთა გეომეტრია უკვე მეტნაკლებად გააზრებულია მათემატიკისა და ფიზიკის სასკოლო კურსის პროგრამებიდან.

საყოველთაოდ მიღებულია რიცხვითი სიმრავლეების შემდეგი აღნიშვნები:

$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ - ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე;

$N^+ = N \setminus \{0\}$ - ყველა დადებითი ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე;

$Z = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ - ყველა მთელ რიცხვთა სიმრავლე;

$Q = \left\{ \frac{m}{n} : m \in Z, n \in N^+ \right\}$ - ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე;

$I = \{x : x \text{ არის უსასრულო არაპერიოდული ათწილადი}\}$ - ყველა ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე;

$R = \{x : x \in Q \cup I\}$ - ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე.

ცხადია, რომ მართებულია შემდეგი თანაფარდობა:

$$N \subset Z \supset Q \subset R.$$

თეორემა 1. ნატურალურ რიცხვთა ყველა მიმდევრობების სიმრავლე კონტინუალური სიმრავლეა.

დამტკიცება. განვიხილოთ ნატურალურ რიცხვთა რაიმე $n_0, n_1, n_2, \dots$ მიმდევრობა და შევუესაბამოთ მას ნატურალურ რიცხვთა ზრდადი $k_0, k_1, k_2, \dots$ მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$k_0 = n_0, \quad k_1 = k_0 + n_1, \quad k_2 = k_1 + n_2, \quad \dots$$

ე. ი. ყოველ ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობას შეესაბამება ერთადერთი ელემენტი ნატურალურ რიცხვთა ზრდადი მიმდევრობათა სიმრავლიდან და პირიქით, ყოველ ნატურალურ რიცხვთა ზრდად მიმდევრობას შეესაბამება ერთადერთი ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლითა სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა.

მაგალითი 2. ყველა მთელ რიცხვთა Z სიმრავლე თვლადია.

მართლაც, გადასახვა

$$f : Z \rightarrow N,$$

განსაზღვრული პირობით

წარმოადგენს ბიექციას Z -დან N -ზე.

მართლაც, ნებისმიერი რაციონალური რიცხვი ჩაიწერება

რაციონალური რიცხვები (ასეთია, მხოლოდ $\frac{0}{1}$), შემდეგ ორის
 ტოლი სიმაღლის მქონე რაციონალური რიცხვები (ასეთებია,
 მხოლოდ $\frac{1}{1}$ და $\frac{-1}{1}$) და ა. შ. ამ პროცესით მოხერხდება

რაციონალურ რიცხვთა თვლადობის დამტკიცება
შესაძლებელია წარმოვადგინოთ კანტორის დიაგონალური
მეთოდით, რომელსაც სქემატურად აქვს შემდეგი სახე:



მაგალითი 4. ვთქვათ, A არის R ნამდვილი ღერძის რაიმე თვლადი სიმრავლე. მაშინ არსებობს ისეთი $a \in R$ რიცხვი, რომ $\{x + a : x \in A\} \cap A = \emptyset$.

მართლაც, განვიხილოთ სიმრავლე $B = \{x - y : x, y \in A\}$. რადგან A სიმრავლე თვლადია, ამიტომ B სიმრავლაც თვლადია. ვთქვათ, $a \in R \setminus B$, მაშინ ყოველი $a \in R \setminus B$ რიცხვისათვის ცხადია, რომ შესრულებს სასურველი სიმრავლური ტოლობა.

მაგალითი 5. ყველა ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე კონტინუალური სიმრავლეა.

მართლაც, რადგან $I = R \setminus Q$, R არათვლადია და Q თვლადია, ამიტომ $\text{card}(I) = \text{card}(R) = \mathfrak{c}$.

თეორემა 2 (კანტორი). ვთქვათ, R ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე მოცემულია სეგმენტთა კლესადი (ჩართვის თვალსაზრისით) $\{[a_n, b_n] : n \in N\}$ მიმდევრობა,

რომლისთვისაც შესრულებულია პირობა:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n - a_n| = 0.$$

მაშინ არსებობს მხოლოდ ერთი რიცხვი, რომელიც ეკუთვნის ყველა $[a_n, b_n]$ ($n \in N$) სეგმენტს.

კანტორის თეორემის დამტკიცება მოცემულია ბევრ მათემატიკური ანალიზის სახელმძღვანელოში, ამიტომ მას ჩვენ არ მოვიყვანთ.

შევნიშნოთ, რომ ჩვენს მიერ ჩამოყალიბებულია თეორემა ნამდვილ რიცხვთა ღერძისათვის, ამიტომ თეორემაში ფიგურირებენ რიცხვითი სეგმენტები და ნამდვილი რიცხვები. საყურადღებოა ის ფაქტი, რომ კანტორის თეორემით ხასიათდება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის უწყვეტობა. ეს კი თავის მხრივ შეესაბამება ჩვენს გეომეტრიულ წარმოდგენას ნამდვილი ღერძის უწყვეტობასთან დაკავშირებით. მართლაც, თუ წარმოვიდგენთ, რომ ნამდვილ რიცხვთა ღერძის ორ წერტილს შორის გვაქვს „შუქი“, მაშინ შესაძლებელია აიგოს სეგმენტთა კლესადი (ჩართვის თვალსაზრისით) მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს კანტორის თეორემის პირობებს. მაშინ

არ იარსებებს რიცხვი, რომელიც ეკუთვნის ყველა ამ სეგმენტს და მის ადგილს დაიკავებდა ეს „შუქი“. გეომეტრიაში წრფის უწყვეტობა განსაზღვრულია აქსიომით, რადგან ეს ფაქტი სხვა აქსიომებიდან არ გამომდინარეობს. ამ თვალსაზრისით კანტორის თეორემას შეიძლება ვუწოდოთ ნამდვილი ღერძის უწყვეტობის აქსიომა.

მაგალითი 6. ყველა ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლე და ყველა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე არ არიან ექვივალენტურები.

მართლაც, ვთქვათ f არის ნებისმიერი გადასახვა N -დან R -ში. ცხადია, რომ საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $f: N \rightarrow [0,1]$

გადასახვა არ არის ბიექცია.. განვიხილოთ $[0,1] \subset R$ მონაკვეთი და დავყოთ ის სამ კონგრუენტულ ნაწილად. ცხადია, რომ ერთი მაინც ამ ნაწილებიდან არ შეიცავს 1-ის სახეს f გადასახვის დროს და ავღნიშნოთ ის Δ_1 -ით. ე. ი. $f(1) \notin \Delta_1$.

ახლა დავყოთ Δ_1 კვლავ სამ კონგრუენტულ ნაწილად და ავირჩიოთ ის ნაწილი, რომელიც არ შეიცავს 2-ის სახეს f გადასახვის დროს და ავღნიშნოთ ის Δ_2 -ით. ე. ი. $f(2) \notin \Delta_2$. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ უსასრულოდ მივიღებთ $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \dots \supset \Delta_n \dots$ მიმდევრობას, სადაც $f(n) \notin \Delta_n$.

რადგან Δ_n მონაკვეთის სიგრძე ტოლია $\frac{1}{3^n}$ და $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = 0$,

ამიტომ ჩალაგებულ სეგმენტთა პრინციპიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს წერტილი a , რომელიც ეკუთვნის ყველა მითითებულ მონაკვეთს.

შევნიშნოთ, რომ არც ერთი ნატურალური n რიცხვის სახე f გადასახვის დროს არ შეიძლება იყოს a , რადგან როგორც უკვე ავღნიშნეთ $a \in \Delta_n$ და $f(n) \notin \Delta_n$. ეს ნიშნავს, რომ $f: N \rightarrow R$ გადასახვა არ არის ბიექცია და რადგან ის ნებისმიერია ნიშნავს, რომ N და R სიმრავლეები არ არიან ექვივალენტურები.

ყველა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეს უწოდებენ რიცხვით კონტინუუმს, ხოლო, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლე ეწოდება ისეთ სიმრავლეებს, რომლებიც ექვივალენტურები არიან R -ის.

მაგალითი 7. განვიხილოთ $[0,1]$ სეგმენტი და დავყოთ ის სამ კონგრუენტულ მონაკვეთად $\frac{1}{3}$ და $\frac{2}{3}$ წერტილებით. $[0,1]$

სეგმენტიდან ამოვავდოთ $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ შუალედი და დარჩენილი

ორი $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ და $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ მონაკვეთი კვლავ დავყოთ სამ

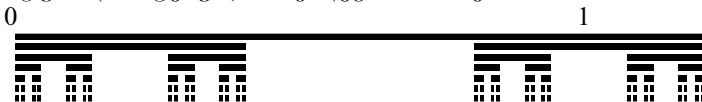
კონგრუენტულ მონაკვეთად და თითოეული მათგანიდან კვლავ ამოვავდოთ შუა ნაწილები. ე. ი. $\left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]$ და $\left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$

ინტერვალები. ამის შემდეგ დარჩენილი ოთხი მონაკვეთისათვის $\left[0, \frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$, $\left[\frac{8}{9}, 1\right]$ ჩავატაროთ ანალოგიური

მოქმედება. დავყოთ ყოველი მათგანი სამ კონგრუენტულ ნაწილად და თითოეული მათგანიდან ამოვავდოთ შუა ნაწილი.

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ უსასრულოდ, მაშინ $[0,1]$ სეგმენტში დარჩენილ წერტილთა სიმრავლეს კანტორის სიმრავლე ეწოდება.

პირველი ექვსი ნაბიჯი კანტორის სიმრავლის აგებისა სქემატურად მოცემულია შემდეგ ნახაზზე:



კანტორის C სიმრავლისათვის ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულას:

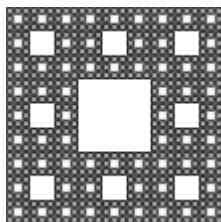
$$C = [0, 1] \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^m-1-1} \left(\frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m} \right).$$

კანტორის სიმრავლის ყოველი წერტილი შესაძლებელია წარმოვიდგინოთ უსასრულო სამობითი წილადის სახით, რომლის ყოველი ციფრი მძიმის შემდეგ უდრის 0-ს ან 2-ს. რადგან უსასრულო მიმდევრობების სიმრავლე, რომელიც ჩაწერილია 0 ან 2-ით, კონტინუალურია, ამიტომ კანტორის სიმრავლეც კონტინუალურია.

კანტორის სიმრავლის აგების კონსტრუქციიდან გამომდინარე შეიძლება დარჩეს შთაბეჭდილება იმისა, რომ ინტერვალების უსასრულო ამოგდებისას C სიმრავლე შედგება მხოლოდ ამოგდებული ინტერვალების ბოლო წერტილებისაგან. ამ ინტერვალების ბოლო წერტილები ქმნიან მხოლოდ თვლად A სიმრავლეს, ხოლო როგორც უკვე ვნახეთ, კანტორის სიმრავლე კონტინუალურია. ამიტომ $C \setminus A$ კონტინუალური სიმრავლეა. ე. ი. კანტორის სიმრავლე შეიცავს როგორც ამოგდებული მონაკვეთების ბოლო წერტილებს, ასევე ამ მონაკვეთების შორის წერტილებსაც.

კანტორის სიმრავლეს ეწოდება დისკონტინუუმი ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე.

ამ პარაგრაფის ბოლოს მოვიყვანოთ ბრტყელი დისკონტინუუმის მაგალითი. ვთქვათ, C_0 არის $0 \leq x, y \leq 1$ კვადრატის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლის კოორდინატები ეკუთვნიან აბსცისათა და ორდინატთა ღერძების $[0, 1]$ სეგმენტების კანტორის სიმრავლეებს (იხილეთ ნახაზი. თეთრი კვადრატები წარმოადგენენ მოცემული კვადრატიდან ამოგდებულ არეებს. ამოგდების პროცესი გრძელდება უსასრულოდ).



C_0 სიმრავლეს ეწოდება სერპინსკის ხალიჩა.

§8. ჯგუზი. რბოლი. ველი. ბარლაჰმნათა ჯგუზუბი

არითმეტიკის კურსიდან ცნობილია უმარტივესი მოქმედებანი რიცხვებზე. ასეთ მოქმედებებს განეკუთნებიან შეკრების, გამოკლებისა და გამრავლების ოპერაციები. ამ ოპერაციების ერთ-ერთ საერთო მახასიათებლად შეიძლება ჩაითვალოს შემდეგი გარემოება: ყოველი მათგანი რაიმე ორ რიცხვს შეუსაბამებს მესამე რიცხვს (შესაბამისად, ჯამს, სხვაობას და ნამრავლს). აქვე შევნიშნოთ, რომ მაგალითად, გამოკლების ოპერაციის დროს ორი რიცხვის სხვაობა დამოკიდებულია არა მხოლოდ ამ რიცხვებზე, არამედ იმაზე რომელი რიცხვი იქნება საკლები და რომელი მაკლები. ეს ნიშნავს, რომ ოპერაციის შედეგი დამოკიდებულია არა მარტო რიცხვებზე, არამედ მათ რიგზეც.

ყოველივე ზემოთთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ არითმეტიკული ოპერაციები ტარდება დალაგებულ რიცხვთა წყვილებზე და ყოველი ასეთი ოპერაცია წარმოადგენს გადასახვას, რომელიც ყოველ რიცხვთა წყვილს შეუსაბამებს გარკვეულ რიცხვს.

საზოგადოდ, აღგებრა შეისწავლის ისეთ სიმრავლეებს, რომლებისთვისაც განსაზღვრულია გარკვეული ტიპის ოპერაციები. ასეთ სიმრავლეებს აღგებრული სისტემები ეწოდებათ. შესაძლებელია აღგებრულ სისტემებზე განსაზღვრული იყოს ერთი, ორი და საზოგადოდ ნებისმიერი სასრული რაოდენობა ოპერაციებისა (გარდა გამონაკლისისა).

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე A სიმრავლე. ვიტყვი, რომ A -ზე განსაზღვრულია ბინარული აღგებრული ოპერაცია ან უბრალოდ აღგებრული ოპერაცია, თუ ყოველ ორ გარკვეულ რიგით აღებულ ელემენტს A -დან, რაიმე წესით შეესაბამება სრულიად განსაზღვრული მესამე ელემენტი იგივე A სიმრავლიდან.

აღგებრული სისტემების მაგალითებია: ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე მასზე განსაზღვრული შეკრების, გამოკლებისა და გამრავლების ბინარული აღგებრული ოპერაციებით; გარკვეული რიგის კვადრატულ მატრიცთა სიმრავლე მასზე განსაზღვრული შეკრებისა და გამრავლების ბინარული აღგებრული ოპერაციებით და სხვ.

ბინარული აღგებრული ოპერაციის განსაზღვრება ერთის მხრივ გულისხმობს მესამე რიცხვის ერთადერთობას. მეორე მხრივ, განსაზღვრებაში მინიშნებულია ელემენტების რიგი. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, არ არის გამორიცხული რომ $(a, b) \in A$ და $(b, a) \in A$ წყვილებს შეესაბამებოდნენ სხვადასხვა ელემენტები A -დან. ასეთ შემთხვევაში ბინარულ აღგებრულ ოპერაციას არაკომუტატიური ეწოდება. წინააღმდეგ შემთხვევაში ოპერაცია კომუტატიურია.

ვთქვათ, მოცემულია ორი A და A' სიმრავლე, რომლებშიც განსაზღვრულია თითო აღგებრული ოპერაცია.

მოცემულ A და A' სიმრავლეებს ეწოდებათ იზომორფულები, თუ არსებობს $f: A \rightarrow A'$ ბიექცია, რომელსაც გააჩნია შემდეგი თვისება: თუ f გადასახვის დროს $(a, b) \in A$ წყვილს შეესაბამება $c \in A$ ელემენტი და $(a', b') \in A'$ წყვილს შეესაბამება $c' \in A'$ ელემენტი, მაშინ $f(c) = c'$.

მაგალითი 1. ყველა ლუწ რიცხვთა სიმრავლე იზომორფულია ყველა 3-ის ჯერადი რიცხვების სიმრავლის, თუ ყოველ $2k$ სახის რიცხვებს შევუსაბამებთ $3k$ ტიპის რიცხვებს, რომლებიც ეკუთვნიან სხვა სიმრავლეს ($k \in N$). იგულისხმება, რომ თითოეულ სიმრავლეში განსაზღვრულია შეკრების ოპერაცია.

მაგალითი 2. განვიხილოთ შემდეგი ორი აღგებრული სისტემა: ყველა დადებითი ნამდვილ რიცხვთა R^+ სიმრავლე მასზე განსაზღვრული გამრავლების ოპერაციის მიმართ და მეორე, ყველა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე, მასზე განსაზღვრული შეკრების ოპერაციის მიმართ. ვთქვათ, $\varphi: R^+ \rightarrow R$ არის ისეთი გადასახვა, რომ $\varphi(a) = \lg a$ ($a \in R^+$). ცხადია, რომ φ გადასახვა არის ბიექცია ლოგარითმული ფუნქციის ზრდადობისა და უწყვეტობის გამო. შემდეგი ტოლობიდან

$$(\forall a)(\forall b)(a \in R^+ \& b \in R^+ \Rightarrow \lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b).$$

გამომდინარეობს, რომ

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) + \varphi(b).$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ მოცემული ალგებრული სისტემები იზომორფულია.

ვთქვათ, კვლავ მოცემულია ორი A და A' სიმრავლე, რომლებშიც შესაბამისად განსაზღვრულია თითო „ $\otimes$ ” და „ $\odot$ ” ალგებრული ოპერაციები. განვიხილოთ გადასახვა $\varphi: A \rightarrow A'$, რომელიც ყოველ $a \in A$ ელემენტს შეუსაბამებს სრულიად განსაზღვრულ $a' = \varphi(a)$ ელემენტს A' სიმრავლიდან, თანაც A' სიმრავლის ყოველ ელემენტს გააჩნია არა ნაკლებ ერთი წინარესახე A -დან φ გადასახვის დროს. ასეთ გადასახვას ეწოდება ჰომომორფული, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობა:

$$\begin{aligned} &(\forall a)(\forall b)(a \in A \wedge b \in A \wedge \varphi(a) = a' \wedge \varphi(b) = b' \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varphi(a \otimes b) = a' \odot b'). \end{aligned}$$

როგორც ვხედავთ, ორ სიმრავლეს შორის ჰომომორფიზმი არის ამავე სიმრავლეებს შორის იზომორფიზმის განზოგადება.

მაგალითი 3. ვთქვათ, A არის ყველა მთელ რიცხვთა სიმრავლე, რომელშიც განსაზღვრულია ჯამის ოპერაცია, ხოლო $A' = \{-1, 1\}$ ორელემენტიანი სიმრავლეა, რომელშიც განსაზღვრულია გამრავლების ოპერაცია. გადასახვა იყოს ისეთი, რომ ყოველ ღუწ რიცხვს A -დან შეესაბამება 1, ხოლო ყოველ კენტ რიცხვს კი -1. ასეთი გადასახვა წარმოადგენს ჰომომორფიზმს A -დან A' -ში, რადგან „ღუწ რიცხვს დამატებული კენტი რიცხვი კენტი რიცხვია” წესს შეესაბამება $1 \cdot (-1) = -1$ ტოლობა.

მაგალითი 4. განვიხილოთ არანულოვანი რიგის არაგადაგვარებული კვადრატულ მატრიცთა მულტიპლიკატიური M სიმრავლე (ე. ი. მითითებულ სიმრავლეში განსაზღვრულია გამრავლების ოპერაცია) და

ნამდვილ რიცხვთა მულტიპლიკატიური $R \setminus \{0\}$ სიმრავლე. მაშინ არსებობს ჰომომორფიზმი მითითებულ სიმრავლეებს შორის. მართლაც, ავაგოთ გადასახვა

$$\varphi: M \rightarrow R \setminus \{0\}$$

შემდეგი წესით: ყოველ $A \in M$ მატრიცას შევესაბამოთ მისი შესაბამისი $\det(A) \in R \setminus \{0\}$ დეტერმინანტი. ასეთი წესით აგებული გადასახვა ინარჩუნებს ოპერაციას, რადგან ნებისმიერი $A, B \in M$ მატრიცებისათვის

$$\varphi(A \cdot B) = \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$$

ეს ნიშნავს, რომ φ არის ჰომომორფული გადასახვა მოცემულ სიმრავლეებს შორის.

სხვადასხვა ალგებრულ სისტემებში განსაკუთრებულ როლს თამაშობს ალგებრული სისტემები ერთი ალგებრული ოპერაციით. ასეთ ალგებრულ სისტემებს ჯგუფები ეწოდებათ. ჯგუფი წარმოადგენს ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ობიექტს თანამედროვე მათემატიკაში. ჯგუფთა თეორიის მეთოდები ფართოდ გამოიყენება გეომეტრიული გარდაქმნების, მათემატიკური ანალიზის, ტოპოლოგიის, არქიტექტურის, კრისტალოგრაფიის და სხვა მეცნიერული მიმართულებების ძირეული საკითხების შესწავლისათვის.

არაცარიელ G სიმრავლეს, ერთი ბინარული ალგებრული „·“ ოპერაციით, ეწოდება ჯგუფი, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1) ასოციაციურობა:

$$(\forall a)(\forall b)(\forall c)(a \in G \wedge b \in G \wedge c \in G \Rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c));$$

2) ერთეულოვანი ელემენტის არსებობა:

G -ში არსებობს ისეთი e ელემენტი, რომ

$$(\forall a)(a \in G \Rightarrow e \cdot a = a \cdot e = a);$$

3) შებრუნებული ელემენტის არსებობა:

$$(\forall a)(a \in G \Rightarrow \exists a^{-1} \in G \wedge a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e).$$

შეგნიშნოთ, რომ „ $\cdot$ ” ოპერაცია არის რაიმე ბინარული ალგებრული ოპერაციის პირობითი აღნიშვნა და არ ნიშნავს ყოველთვის გამრავლების ოპერაციას.

მაგალითი 5. ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე წარმოადგენს ჯგუფს შეკრების ოპერაციის მიმართ. ერთეულოვანი ელემენტის როლში გამოდის 0, ხოლო შებრუნებული ელემენტის როლში კი მოცემული რიცხვის მოპირდაპირე ($a \rightarrow -a$, $a \in R$).

მაგალითი 6. ყველა დადებითი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე არის ჯგუფი გამრავლების ოპერაციის მიმართ. ამ შემთხვევაში ერთეულოვანი ელემენტის როლს თამაშობს 1, ხოლო შებრუნებული ელემენტისას კი მოცემული რიცხვის

შებრუნებული ($a \rightarrow \frac{1}{a}$, $a > 0$, $a \in R$).

მაგალითი 7. ყველა ერთიდაიგივე რიგის არაგადაგვარებული კვადრატული მატრიცთა სიმრავლე ქმნის არაკომუტატიურ ჯგუფს მატრიცთა გამრავლების ოპერაციის მიმართ. ამ შემთხვევაში ერთეულოვანი ელემენტის როლს ასრულებს იგივე რიგის ერთეულოვანი მატრიცა, ხოლო შებრუნებული ელემენტის როლს კი განსახილველი მატრიცის შებრუნებული მატრიცა (ცხადია, რომ იგულისხმება 1-ზე მეტი რიგის მატრიცთა სიმრავლე).

კომუტატიურ ჯგუფს აბელის ჯგუფი ეწოდება და მის აღსანიშნავად ვისარგებლებთ $(G, +)$ სიმბოლოთი, ხოლო არაკომუტატიურ ჯგუფს კი ჩავწერთ $(G, \cdot)$ სახით. კომუტატიური ჯგუფის შემთხვევაში ერთეულოვანი ელემენტის როლში ავიღებთ „0”-ს, ხოლო $a \in G$ ელემენტის შებრუნებული ელემენტის როლში კი „ $-a$ ”-ს.

ჯგუფის ზოგადი განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს კომუტატიური ჯგუფის შემდეგი განსაზღვრა:

არაცარიელ G სიმრავლეს, ერთი ბინარული ალგებრული „ $+$ ” ოპერაციით, ეწოდება კომუტატიური ჯგუფი, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$$1')(a+b)+c=a+(b+c);$$

$$2')a+b=b+a;$$

$$3')a+0=a;$$

$$4')a+(-a)=0.$$

თუ ჯგუფი შედგება სასრული რაოდენობა ელემენტებისაგან მას სასრული ჯგუფი ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში ჯგუფი უსასრულოა. სასრულ ჯგუფებში ელემენტების რაოდენობას ეწოდება ჯგუფის რიგი.

H ეწოდება G ჯგუფის ქვეჯგუფი, თუ $H \subset G$ და H წარმოადგენს ჯგუფს G -ში განსაზღვრული ალგებრული ოპერაციის მიმართ.

მაგალითი 8. ყველა 3-ის ჯერადი მთელი რიცხვების სიმრავლე არის ადიტიური მთელ რიცხვთა Z ჯგუფის ქვეჯგუფი (ე. ი. Z არის ჯგუფი შეკრების ოპერაციის მიმართ).

მართლაც, გვაქვს

$$H = \{a : a = 3k, k \in Z\}, \quad H \subset Z.$$

განვიხილოთ $h_1, h_2 \in H$ ელემენტები, თანაც $h_1 = 3k_1$ და $h_2 = 3k_2$ ($k_1, k_2 \in Z$). რადგან Z ადიტიური ჯგუფია, ამიტომ $k_1 + k_2 \in Z$ და ამიტომ

$$h_1 + h_2 = 3(k_1 + k_2) \in H.$$

ახლა ვთქვათ, $h = 3k \in H$ ნებისმიერი ელემენტია ($k \in Z$). რადგან $-k \in Z$, ამიტომ

$$-h = -3k = 3(-k) \in H.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ H არის Z -ის ქვეჯგუფი.

თეორემა 1. თუ H_1 და H_2 რაიმე G ჯგუფის ქვეჯგუფებია, მაშინ $H_1 \cap H_2$ თანაკვეთა აგრეთვე მოცემული G ჯგუფის ქვეჯგუფია.

თეორემა 1-ის დამტკიცება არ წარმოადგენს რაიმე სიძნელეს და მისი დამტკიცება მიგვინდია მკითხველთათვის.

შევნიშნოთ, რომ თეორემა 1 მართებულია როგორც სასრული, ასევე უსასრულო რაოდენობა ქვეჯგუფებისათვის.

ვთქვათ, G რაიმე ჯგუფია და $n \in \mathbb{N}$ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია. n რაოდენობის ელემენტების ნამრავლს, რომელთაგან თითოეული არის $a \in G$ ელემენტი

ეწოდება a ელემენტის n -ური ხარისხი და აღინიშნება a^n სიმბოლოთი. თუ ჯგუფში განსაზღვრულია შეკრების ოპერაცია, მაშინ a ელემენტის ხარისხების ნაცვლად გამოიყენება ტერმინი ჯერადობა ამავე ელემენტისათვის და წერენ $n \cdot a$.

G ჯგუფის ქვეჯგუფს, რომელიც შედგება $a \in G$ ელემენტის ყველა ხარისხისაგან ეწოდება G ჯგუფის ციკლური ქვეჯგუფი და აღინიშნება $\{a\}$ სიმბოლოთი.

G ჯგუფს ეწოდება ციკლური ჯგუფი, თუ ის შედგება მისი რომელიმე a ელემენტის ხარისხებისაგან, ანუ დაემთხვევა თავის რომელიმე ციკლურ $\{a\}$ ქვეჯგუფს. $a \in G$ ელემენტს ეწოდება წარმომქმნელი ელემენტი. ცხადია, რომ ყოველი ციკლური ჯგუფი კომუტატიურია.

მაგალითი 9. ყველა მთელი რიცხვთა სიმრავლის $\mathbb{Z}$ ადიტიური ჯგუფი ციკლური ჯგუფია, რადგან ყოველი მთელი რიცხვი ჯერადია 1-ის. შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში წარმომქმნელ ელემენტად შეიძლება გამოვიყენოთ -1-იც.

ვთქვათ, H და W არის $(G, \cdot)$ ჯგუფის ორი ქვეჯგუფი. მაშინ:

$$H \cdot W = \{h \cdot w : h \in H \wedge w \in W\};$$

$$H^{-1} = \{h^{-1} : h \in H\}$$

$$h \cdot W = \{h\} \cdot W = \{h \cdot w : w \in W\}$$

$$W \cdot h = W \cdot \{h\} = \{w \cdot h : w \in W\}.$$

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე $(G, \cdot)$ ჯგუფი და ვთქვათ, H არის მისი ნებისმიერი ქვეჯგუფი. თუ $g \in G$ ნებისმიერი

ელემენტი, მაშინ $g \cdot H$ -ს ეწოდება G ჯგუფის მარცხენა მოსაზღვრე კლასები H ქვეჯგუფის მიმართ, რომელიც წარმოქმნილია g ელემენტით. შევნიშნოთ, რომ $g \in G$ ელემენტი შედის $g \cdot H$ მოსაზღვრე კლასში. მართლაც, რადგან H ქვეჯგუფი შეიცავს ერთეულოვან e ელემენტს, ამიტომ $g \cdot e = g$.

ადვილი საჩვენებელია, რომ G ჯგუფის ორი მოსაზღვრე კლასი H ქვეჯგუფის მიმართ ან ემთხვევიან ერთმანეთს, ან არიან თანაუკვეთები. აქედან გამომდინარე შეიძლება დავასკვნათ, რომ G ჯგუფი წარმოიდგინება, როგორც მისი ნებისმიერი H ქვეჯგუფის მიმართ თანაუკვეთი მარცხენა მოსაზღვრე კლასების გაერთიანება. G ჯგუფის ასეთ დაშლას ეწოდება მარცხენა დაშლა H ქვეჯგუფის მიმართ.

სრულიად ანალოგიურად განისაზღვრება $(G, \cdot)$ ჯგუფის მარჯვენა მოსაზღვრე $H \cdot g$ ($H \subset G, g \in G$) კლასები H ქვეჯგუფის მიმართ, რომლებიც წარმოქმნილია g ელემენტით. ასევე ზუსტად ანალოგიურად განისაზღვრება G მარჯვენა დაშლა H ქვეჯგუფის მიმართ.

მაგალითი 10. კვლავ განვიხილოთ ყველა მთელ რიცხვთა სიმრავლის ადიტიური Z ჯგუფი და მისი $H = \{h : h = 5k, k \in Z\}$ ქვეჯგუფი. რადგან Z ჯგუფი კომუტატიურია, ამიტომ მოცემული H ჯგუფიც კომუტატიურია. ამიტომ Z ჯგუფის დაშლა მარცხენა და მარჯვენა მოსაზღვრე კლასებად ემთხვევიან ერთმანეთს. დავშალოთ Z ჯგუფი წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მოსაზღვრე კლასებად H ქვეჯგუფის მიმართ. პირველ მოსაზღვრე კლასად ავიღოთ თვით

$$H = \{\dots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots\} = 0 + H$$

ქვეჯგუფი, რომელიც შედგება 5-ის ჯერადი რიცხვებისაგან. მეორე მოსაზღვრე კლასი განესაზღვროთ შემდეგი სახით

$$1 + H = \{h : h = 5k + 1, k \in Z\} = \{\dots, -14, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$$

ცხადია, რომ ეს მოსაზღვრე კლასი შეიცავს იმ ელემენტებს, რომლებიც 5-ზე გაყოფისას ნაშთში გვაძლევს 1-ს. მესამე მოსაზღვრე კლასი იქნება $2+H$, მეოთხე იქნება $3+H$ და მეხუთე კი - $4+H$. რადგან 5-ზე გაყოფისას ნაშთი შეიძლება იყოს 0, 1, 2, 3, 4, ამიტომ H ქვეჯგუფით წარმოქმნილი სხვა განსხვავებული მოსაზღვრე კლასი არ იარსებებს. ცხადია, რომ ჩვენს მიერ აგებული მოსაზღვრე კლასების ელემენტები სრულად ამოწურავენ Z ჯგუფის ელემენტებს, ამიტომ

$$Z = H \cup (1+H) \cup (2+H) \cup (3+H) \cup (4+H).$$

ე. ი. Z ადიტიური ჯგუფი წარმოადგინეთ თანაუკვეთი მარცხენა მოსაზღვრე კლასების გაერთიანების სახით.

ვთქვათ, კვლავ მოცემულია რაიმე $(G, \cdot)$ ჯგუფი. $H \subset G$ ქვეჯგუფს ეწოდება ნორმალური გამყოფი ანუ ინვარიანტული ქვეჯგუფი, თუ G ჯგუფის H ქვეჯგუფის მიმართ მარცხენა და მარჯვენა დაშლები ემთხვევიან ერთმანეთს. ე. ი. $H \subset G$ ქვეჯგუფს ეწოდება ნორმალური გამყოფი, თუ ნებისმიერი $g \in G$ ელემენტისათვის

$$g \cdot H = H \cdot g.$$

ნორმალური გამყოფის განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი კომუტატიური ჯგუფის ყოველი ქვეჯგუფი ამავე დროს არის ნორმალური გამყოფიც.

ვთქვათ, $H \subset G$ არის $(G, \cdot)$ ჯგუფის ნორმალური გამყოფი.

თუ $H_1 = g_1 \cdot H$ და $H_2 = H \cdot g_2$ ($g_1, g_2 \in G$) არიან G ჯგუფის ნებისმიერი ორი მოსაზღვრე კლასი H ქვეჯგუფის მიმართ, მაშინ ცხადია, რომ $H_1 \cdot H_2 = g_1 \cdot g_2 \cdot H = H \cdot g_1 \cdot g_2$ აგრეთვე არის G ჯგუფის მოსაზღვრე კლასი H -ის მიმართ (ცხადია, რომ $H \cdot H = H$). ადვილია ჩვენება იმისა, რომ G ჯგუფის ყველა მოსაზღვრე კლასების სიმრავლე H ქვეჯგუფის მიმართ წარმოადგენს ჯგუფს G/H -ში განსაზღვრული ოპერაციის მიმართ. ასეთ ჯგუფს ეწოდება G ჯგუფის ფაქტორ-ჯგუფი H ნორმალური გამყოფის მიმართ და

ადინიშნება G/H სიმბოლოთი (იხილეთ §4-ში ფაქტორ-სიმრავლის ცნება და შეადარეთ ფაქტორ-ჯგუფის ცნებას).

მაგალითი 11. დაუვბრუნდეთ მაგალით 10-ს. H ქვეჯგუფი წარმოადგენს კომუტატიური, ადიტიური Z ჯგუფის ნორმალურ გამყოფს. ცხადია, რომ

$$Z/H = \{H, 1+H, 2+H, 3+H, 4+H\}.$$

ვაჩვენოთ, რომ Z/H არის ჯგუფი. მართლაც,

$$\begin{aligned} (3+H) + (4+H) &= (3+4) + H = 7 + H = \\ &= (h : h = 7 + 5k = 2 + 5(k+1), k \in Z) = 2 + H; \end{aligned}$$

$$(3+H) + H = (3+H) + (0+H) = 3+H = H + (3+H);$$

$$(2+H) + (3+H) = 5+H = \{h : h = 5 + 5k = 5(1+k), k \in Z\} = H.$$

მოყვანილი ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ Z/H ჯგუფია. ამ ჯგუფის ერთეულოვან ელემენტს წარმოადგენს H , ხოლო $2+H$ ელემენტის შებრუნებული ელემენტია $3+H$.

მაგალითი 12. განვიხილოთ რაციონალურ რიცხვთა მულტიპლიკატიური $G = Q \setminus \{0\}$ ჯგუფი და მისი $H = \{1, -1\}$ ნორმალური გამყოფი. მაშინ G და ფაქტორ-ჯგუფი G/H არიან ჰომომორფულები.

პირველ რიგში ავაგოთ G/H ფაქტორ-ჯგუფი. ვთქვათ, $q \in Q$ და $q > 0$. რადგან $q \cdot H = \{q, -q\}$ ამიტომ მოსაზღვრე კლასები ემთხვევიან ერთმანეთს. აქედან გამომდინარეობს, რომ $G/H = (\{q, -q\}, q \in Q, q > 0)$. ახლა G ჯგუფი გადავსახოთ G/H ფაქტორ-ჯგუფში შემდეგი წესით:

$$\varphi(q) = q \cdot H = \{q, -q\}.$$

რადგან ნებისმიერი $q, r \in Q$, $q, r > 0$ რიცხვებისათვის მართებულია შემდეგი ტოლობა

$$\varphi(q \cdot r) = (q \cdot r) \cdot H = q \cdot H \cdot r \cdot H = \varphi(q) \cdot \varphi(r),$$

ამიტომ φ გადასახვა ინარჩუნებს ოპერაციას და ე. ი. φ გადასახვა არის ჰომომორფიზმი მოცემულ სიმრავლეებს შორის.

ჯგუფის თავისთავში ჰომომორფულ გადასახვას ენდომორფიზმი ეწოდება, ხოლო ჯგუფის თავისთავში იზომორფულ გადასახვას კი – ავტომორფიზმი.

დავუბრუნდეთ აღგებრულ სისტემებს და განვიხილოთ სისტემები, რომლებშიც განსაზღვრულია ორი აღგებრული ოპერაცია.

რგოლი ეწოდება ნებისმიერ $\mathfrak{M}$ სიმრავლეს, რომელშიც განსაზღვრულია ორი ბინალური აღგებრული „+“ და „·“ ოპერაცია, თანაც „+“ ოპერაციის მიმართ წარმოადგენს კომუტატიურ ჯგუფს, ხოლო „·“ ოპერაციის მიმართ კი ორმაგად დისტრიბუტიურია. ე. ი. თუ $a, b, c \in \mathfrak{M}$, მაშინ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$$ა) (a+b)+c = a+(b+c);$$

$$ბ) a+b = b+a;$$

$$გ) a+0 = a;$$

$$დ) a+(-a) = 0;$$

$$ე) (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c;$$

$$ვ) a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

თუ „·“ ოპერაცია ასოციაციურია, ე. ი. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, მაშინ რგოლს ასოციაციური რგოლი ეწოდება, ხოლო თუ „·“ ოპერაცია კომუტატიურია, ე. ი. $a \cdot b = b \cdot a$, მაშინ რგოლს კომუტატიური რგოლი ეწოდება.

სხეული ეწოდება ისეთ T რგოლს, რომლისთვისაც $T \setminus \{0\}$ სიმრავლე „·“ ოპერაციის მიმართ წარმოადგენს ჯგუფს. ე. ი. ა) – ვ) პირობებთან ერთად უნდა შესრულდეს შემდეგი დამატებითი პირობები:

$$ზ) (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$$

თ) არსებობს ერთეულოვანი ელემენტი;

ი) ყოველ ელემენტს $T \setminus \{0\}$ გააჩნია შებრუნებული ელემენტი.

ველი ეწოდება კომუტაციურ სხეულს. ე. ი. ა) – ი) პირობებს უნდა დაემატოს პირობა:

კ) $a \cdot b = b \cdot a$.

მაგალითი 13. განვიხილოთ ნებისმიერი არაცარიელი X სიმრავლე და მისი $P(X)$ ბულეანი. თუ $P(X)$ -ში „+“ ოპერაციის ნაცვლად ავიღებთ „ Δ “ სიმეტრიულ სხვაობას, ხოლო „ $\cdot$ “ ოპერაციის ნაცვლად კი „ $\cap$ “ თანაკვეთას, მაშინ მივიღებთ რგოლს, რომელიც ასოციაციურიც იქნება და კომუტაციურიც. მართლაც, თუ $A, B, C \in P(X)$, მაშინ შესრულდება შემდეგი ტოლობები:

ა. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$;

ბ. $A \Delta B = B \Delta A$;

გ. ერთეულოვანი ელემენტია $\emptyset$, რადგან $A \Delta \emptyset = A$;

დ. ყოველი A სიმრავლის მოპირდაპირე სიმრავლეა A , რადგან $A \Delta A = \emptyset$;

ე. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$;

ვ. $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$;

ზ. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

თ. $A \cap B = B \cap A$.

შევნიშნოთ, რომ აღებული ოპერაციებით $P(X)$ არ იქნება ველი, რადგან არ სრულდება თ) და ი) პირობები.

მაგალითი 14. ყველა ერთიდაიგივე რიგის კვადრატული მატრიცთა სიმრავლე ქმნის რგოლს მატრიცთა შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციის მიმართ. მაგრამ ეს სიმრავლე არ არის ველი, რადგან მატრიცთა გამრავლების ოპერაციის მიმართ მოცემული სიმრავლე არაკომუტაციურია (იგულისხმება, რომ მატრიცთა რიგი მეტია ერთზე).

ჯგუფების ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს მაგალითს წარმოადგენენ გარდაქმნათა ჯგუფები. გარდაქმნათა ჯგუფები თამაშობენ განსაკუთრებულ როლს მათემატიკის მთელი რიგი

მიმართულებებისათვის. განსაკუთრებით გამოყოფის ღირსია ე. წ. ერლანგელის პროგრამა, რომლის ძირითადი იდეა მდგომარეობს იმაში, რომ ჯგუფის სახე განსაზღვრავს გეომეტრიას (მოძრაობათა ჯგუფი განსაზღვრავს ევკლიდეს გეომეტრიას, აფინური გარდაქმნათა ჯგუფი – აფინურ გეომეტრიას, პროექციულ გარდაქმნათა ჯგუფი – პროექციულ გეომეტრიას და ა. შ.)

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე X სიმრავლე.

X სიმრავლის თავისთავში ბიექციას ამ სიმრავლის გარდაქმნა ეწოდება. განვიხილოთ X სიმრავლის ყველა შესაძლო გარდაქმნა, ე. ი. ყველა შესაძლო $f: X \rightarrow X$ ბიექციების სიმრავლე. ასეთი გარდაქმნების სიმრავლე აღვნიშნოთ G ასოთი და G -ში განვსაზღვროთ „ $\cdot$ ” ოპერაცია შემდეგი პირობით: ყოველ ორ g_1 და g_2 გარდაქმნას შევესაბამოთ გარდაქმნა, რომელიც მიიღება ამ გარდაქმნების თანმიმდევრული მოქმედების შედეგად. ე. ი. ყოველი $x \in X$ ელემენტისათვის შესრულებულია პირობა:

$$(g_1 \cdot g_2)(x) = g_2(g_1(x)).$$

ასეთ გარდაქმნას ეწოდება მოცემულ g_1 და g_2 გარდაქმნათა კომპოზიცია და აღინიშნება $g_1 \circ g_2$ სიმბოლოთი.

ადვილი საჩვენებელია, რომ X სიმრავლის ყველა გარდაქმნათა G სიმრავლე წარმოადგენს ჯგუფს. ასეთ ჯგუფში ერთეულოვანი ელემენტის როლს ასრულებს იგივეური გადასახვა, ხოლო $g \in G$ ელემენტის შებრუნებული ელემენტი g^{-1} შექცეული გადასახვა.

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე $(G, \cdot)$ ჯგუფი. ფიქსირებული $a \in G$ ელემენტისათვის $x \rightarrow ax$ და $x \rightarrow xa$ გადასახვებს G ჯგუფის თავის თავში შესაბამისად ეწოდებათ მარცხენა და მარჯვენა ძვრები. $x \rightarrow axa^{-1}$ გადასახვას G ჯგუფის თავის თავში ეწოდება G ჯგუფის ავტომორფიზმი. შევნიშნოთ, რომ G ჯგუფის ყველა ავტომორფიზმთა სიმრავლეს წარმოადგენს ჯგუფს გარდაქმნათა კომპოზიციის ოპერაციის მიმართ.

მაგალითი 15. სამგანზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში მოძრაობა ქმნის ჯგუფს. ეს ფაქტი მართებულია ისეთი მოძრაობებისთვისაც, რომლებშიც უძრავად რჩება მოცემული წერტილი. ასეთ მოძრაობას ეწოდება მობრუნება ამ წერტილის მიმართ.

მაგალითი 16. ვთქვათ, G არის ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლის ყველა ისეთი გარდაქმნათა სიმრავლე, რომელიც მოიცემა ფორმულით $f(x) = x + a$, სადაც $a \in R$. ადვილია ჩვენება იმისა, რომ G არის ჯგუფი გარდაქმნათა „ $\cdot$ ” ოპერაციის მიმართ.

მართლაც, პირველ რიგში შევამოწმოთ, რომ თუ $f \in G$ და $h \in G$, მაშინ $f \cdot h \in G$. მოცემული „ $\cdot$ ” ოპერაციისათვის მართებულია ტოლობა $(f \cdot h)(x) = f(h(x))$.

f_a სიმბოლოთი აღვნიშნოთ R სიმრავლის გარდაქმნათა სიმრავლე, რომელიც განსაზღვრულია $x \rightarrow x + a$ დამოკიდებულებით. მაშინ

$$(f_a \cdot f_b)(x) = f_b(f_a(x)) = f_b(x + a) = x + a + b = f_{a+b}(x).$$

ე. ი. $f_a \cdot f_b \in G$.

მოცემული ოპერაციის ასოციაციურობის თვისება ტრივიალურია.

ერთეულოვანი ელემენტის როლს შეასრულებს $f_0(x) = x$ ($x \in R$) იგივეური გარდაქმნა, ხოლო f_a გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნაა $x \rightarrow x - a$. ეს გარდაქმნა აღვნიშნოთ f_{-a} სიმბოლოთი და ცხადია, რომ $f_{-a} \in G$. მაშასადამე, G ჯგუფია.

ვთქვათ, X რაიმე სიმრავლეა, ხოლო G არის სიმრავლის რაიმე გარდაქმნათა ჯგუფი.

ვიტყვი, რომ G ჯგუფი მოქმედებს ტრანზიტულად X სიმრავლეზე, თუ ადგილი აქვს დამოკიდებულებას

$$(\forall x)(\forall y)(x \in X \wedge y \in X \Rightarrow (\exists g)(g \in G \wedge g(x) = y)).$$

ვიტყვი, რომ G ჯგუფი მოქმედებს თავისუფლად X სიმრავლეზე, თუ შესრულებულია პირობა

$$(\forall g)(g \in G \Rightarrow ((\exists x)(x \in X \wedge g(x) = x) \Rightarrow g = I_X)),$$

სადაც I_X სიმბოლოთი აღნიშნულია იგივეური გარდაქმნა X სიმრავლისა თავის თავზე.

ადვილი დასანახია, რომ ბოლო დამოკიდებულება ექვივალენტურია შემდეგი თანაფარდობის:

$$(\forall g)(\forall h)(g \in G \wedge h \in G \Rightarrow ((\exists x)(x \in X \wedge g(x) = h(x)) \Rightarrow g = h))$$

მაგალითი 17. ყველა პარალელურ გადატანათა π_n ჯგუფი

ეკვლიდეს n -განზომილებიან R^n სივრცეში მოქმედებს ტრანზიტულად და თავისუფლად (ეკვლიდეს სასრულგანზომილებიან სივრცეებზე მასალა იხილეთ შემდეგ თავებში).

ყოველ არაცარიელ X სიმრავლის ყოველ გარდაქმნათა G ჯგუფთან, ექვივალენტურობის შემდეგი დამოკიდებულებით

$$R\{x, y\} - x \in X \wedge y \in X \wedge ((\exists g)(g \in G \wedge g(x) = y)),$$

კანონიკურად ასოცირდება X სივრცის დაშლა ექვივალენტურობის კლასებად. ამ კლასებს ეწოდებათ G ჯგუფის ინტრანზიტულობის კლასები, ანუ G -ორბიტები.

თუ Z არის X სიმრავლის ქვესიმრავლე, მაშინ

$$G(Z) = \bigcup_{g \in G, z \in Z} \{g(z)\}.$$

თუ $Z = \{z\}$ ($z \in X$), მაშინ ეწერთ $G(z)$ და მას, ე. ი. $G(z)$ -ს, ეწოდება z წერტილის ორბიტა G ჯგუფის მიმართ.

მაგალითი 18. ჯგუფი G მოქმედებს ტრანზიტულად X სიმრავლეზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა X სივრცის დაშლა ინტრანზიტულობის კლასებად იქნება ერთელემენტისანი, ანუ დამთხვევა $\{X\}$ -ს.

ვთქვათ, Y არის ძირითადი ბაზისური X სივრცის ქვესიმრავლე და G არის X სივრცის გარდაქმნათა ჯგუფი. Y სიმრავლის თვლადი G -კონფიგურაცია ეწოდება ისეთ Y' სიმრავლეს, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$Y' \subset \bigcup_{i \in I} g_i(Y),$$

სადაც $\{g_i : i \in I\}$ არის რომელიღაც (Y' -ზე დამოკიდებული) გარდაქმნათა თვლადი ოჯახი G ჯგუფიდან.

ვთქვათ, $\{(G_i, \cdot) : i \in I\}$ ჯგუფთა ნებისმიერი ოჯახია და ყოველი $i \in I$ ინდექსისათვის $(G_i, \cdot)$ ჯგუფის ერთეულოვანი ელემენტია e_i . $\{(G_i, \cdot) : i \in I\}$ ჯგუფთა ოჯახის პირდაპირი ნამრავლი ეწოდება

$$G = \prod_{i \in I} G_i$$

ჯგუფის ისეთ ქვეჯგუფს, რომლის ყოველი

$$x = \{x_i : i \in I\} \in G$$

ელემენტისთვის შესრულებულია პირობა

$$\text{card}(\{i : i \in I \ \& \ x_i \neq e_i\}) < \omega.$$

ცხადია, რომ თუ ინდექსთა I სიმრავლე სასრულია, მაშინ $\{(G_i, \cdot) : i \in I\}$ ჯგუფთა ოჯახის პირდაპირი ნამრავლი დაემთხვევა G ჯგუფს, რომელსაც ჯგუფთა მითითებული ოჯახის სრული ნამრავლი ეწოდება.

არსებობენ მნიშვნელოვანი კლასი ჯგუფებისა, რომლებიც თავიანთი შინაგანი ბუნებით ახლოს არიან კომპუტაციურ ჯგუფებთან. ასეთ ჯგუფებს განეკუთვნებიან ამოხსნადი ჯგუფები, რომელთა სახელწოდება დაკავშირებულია აღგებრული განტოლებების რადიკალებში ამოხსნადობასთან.

$(G, \cdot)$ ჯგუფს ეწოდება ამოხსნადი, თუ მისთვის არსებობს $\{G_i : 0 \leq i \leq n\}$ ქვეჯგუფთა კომპოზიციური მწკრივი, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

- ა) $\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_n = G$;
- ბ) $(\forall i)(0 \leq i \leq n-1 \Rightarrow G_{i-1}$ არის G_i ჯგუფის ნორმალური გამყოფი);
- გ) $(\forall i) (0 \leq i \leq n-1 \Rightarrow G_i / G_{i-1}$ ფაქტორ-ჯგუფი არის კომპუტაციური).

მოვიყვანოთ რამდენიმე მნიშვნელოვანი თეორემა ჯგუფთა თეორიიდან, რომლებიც დაგვჭირდება ჩვენი შემდგომი მსჯელობასათვის.

თეორემა 2. ვთქვათ, $(G, +)$ და $(H, +)$ ნებისმიერი კომუტატიური ჯგუფებია, თანაც $(G, +)$ ჯგუფი გაყოფადია. თუ $H' \subset H$ ნებისმიერი ქვეჯგუფია, მაშინ ყოველი

$$\Psi': H' \rightarrow G$$

ჰომომორფიზმი შეიძლება გაგრძელდეს

$$\Psi: H \rightarrow G$$

ჰომომორფიზმამდე.

თეორემა 3. ყოველი კომუტატიური $(G, +)$ ჯგუფისათვის არსებობს ჩართვის თვალსაზრისით მინიმალური კომუტატიური გაყოფადი G' ჯგუფი ისეთი, რომ $G \subset G'$.

თეორემა 4. ვთქვათ, $(G, +)$ ნებისმიერი კომუტატიური ჯგუფია. მაშინ არსებობს G ჯგუფის ჩართვის თვალსაზრისით ზრდადი ქვეჯგუფთა ისეთი $\{G_n: n < \omega\}$ თვლადი ოჯახი, რომ

$$(1) \bigcup \{G_n: n < \omega\} = G;$$

(2) ყოველი G_n ($n < \omega$) ჯგუფი წარმოიდგინება ციკლური ჯგუფების პირდაპირი ჯამის სახით.

თეორემა 2, თეორემა 3-ისა და თეორემა 4-ის დამტკიცებები შეიძლება იხილოთ ჯგუფთა თეორიის ნებისმიერ სახელმძღვანელოებში.

მართებულია შემდეგი თეორემა, რომლის დამტკიცებაც ეკუთვნის ა. ხარაზიშვილს.

თეორემა 5. ვთქვათ, $(G, +)$ ნებისმიერი არათვლადი კომუტატიური ჯგუფია. არსებობს $(H, +)$ კომუტატიური ჯგუფი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$1) \text{card}(H) = \omega_1;$$

$$2) H \text{ არის } G \text{ ჯგუფის ჰომომორფული სახე.}$$

დამტკიცება. პირობის თანახმად, $(G, +)$ ჯგუფი არათვლადი ჯგუფია, ამიტომ არსებობს $G_1 \subset G$ კომუტატიური ჯგუფი ისეთი, რომ

$$\text{card}(G_1) = \omega_1.$$

თეორემა 3-ის თანახმად არსებობს ჩართვის თვალსაზრისით მინიმალური კომპუტაციური გაყოფადი $(G'_1, +)$ ჯგუფი ისეთი, რომ

$$G_1 \subset G'_1.$$

განვიხილოთ განტოლება

$$nx = g,$$

სადაც $g \in G_1$ და $n \in N \setminus \{0\}$. ყოველი $g \in G_1$ ელემენტისათვის ავიღოთ მოცემული განტოლების $\tilde{x}$ ამონახსნი G'_1 -ში და ამ ამონახსნების სიმრავლე აღვნიშნოთ $\tilde{X}$ -ით. G_2 -ით აღვნიშნოთ $G_1 \cup \tilde{X}$ სიმრავლეზე მოჭიმული ქვეჯგუფი G'_1 -ში. ცხადია, რომ

$$\text{card}(G_2) = \omega_1, \quad G_1 \subset G_2.$$

თუ G_2 ჯგუფზე G_1 ჯგუფის მსგავსად, ჩავატარებთ ანალოგიურ მსჯელობას მივიღებთ G_3 ჯგუფს, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\text{card}(G_3) = \omega_1, \quad G_2 \subset G_3.$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ G'_1 -ის კომპუტაციურ ქვეჯგუფთა მიმდევრობას, რომლებისთვისაც შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$$G_1 \subset G_2 \subset G_3 \subset \dots$$

$$(\forall i)(i \in N \Rightarrow \text{card}(G_i) = \omega_1).$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$G' = \bigcup_{i \in N} G_i.$$

ცხადია, რომ $\text{card}(G') = \omega_1$ და მითითებული

კონსტრუქციით მიღებული G' ჯგუფი არის გაყოფადი.

ახლა განვიხილოთ კანონიკური ჩადგმა (ეპიმორფიზმი)

$$u_{(G_1, G')} : G_1 \rightarrow G'.$$

რადგან $(G', +)$ ჯგუფი გაყოფადია, ამიტომ $u_{(G_1, G')}$

ჰომომორფული ასახვა შეიძლება გავაგრძელოთ

$$\phi: G \rightarrow G'$$

ჰომომორფიზმად (იხილეთ თეორემა 2). შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$H = \phi(G).$$

ვინაიდან

$$G_1 \subset H \subset G',$$

ამიტომ გვექნება

$$\text{card}(H) = \omega_1.$$

ამით თეორემა 5 დამტკიცებულია.

როგორც ჩანს, თეორემა 5 თავისი შინაარსით წმინდა ალგებრული ხასიათისაა, მაგრამ ის ფართოდ გამოიყენება მათემატიკური ანალიზის ბევრ მნიშვნელოვანი დებულებების დასამტკიცებლად.

§ 9. სიმრავლეთა რბოლი. სიმრავლეთა σ -რბოლი

ზომის თეორიისათვის ერთ-ერთი ფუნდამენტალური საკითხია გარკვეული თვისებების მქონე სიმრავლეთა კლასების არსებობა. როგორც უკვე ვნახეთ, მოცემული სიმრავლისათვის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლის ანუ ბულეანის სიმძლავრე მეტია თვით მოცემული სიმრავლის სიმძლავრე (კანტორის თეორემა). ამის შემდეგ თუ განვიხილავთ სიმრავლეს, რომლის ელემენტებსაც წარმოადგენენ მოცემული სიმრავლის ბულეანის ელემენტები, მაშინ მიღებული სიმრავლის ბულეანს ექნება მეტი სიმძლავრე, ვიდრე შუალედურ სიმრავლეს. უფრო მეტიც, უსასრულო სიმრავლეთა კლასში არ არსებობს უდიდესი სიმძლავრის მქონე სიმრავლე (იხილეთ, §5, თეორემა 12).

ყოველივე ზემოთთქმული ნიშნავს იმას, რომ მოცემული სიმრავლისათვის შესაძლებელია აიგოს მდიდარი (სიმძლავრის თვალსაზრისით) ოჯახი ქვესიმრავლეთა კლასებისა და ეს

ფაქტი მნიშვნელოვანია სხვადასხვა სიმრავლეთა კლასების არსებობის საკითხისათვის. ზომის თეორიის ძირითად ინტერესს წარმოადგენს მოცემული სიმრავლის სიმრავლეთა კლასებიდან გამოიყოს რაც შეიძლება მეტი სიმრავლის სიმრავლეთა კლასები, რომლებიც აკმაყოფილებენ გარკვეულ თვისებებს. ასეთ სიმრავლეთა კლასებს განეკუთვნებიან: სიმრავლეთა რგოლი, ალგებრა, სიმრავლეთა მონოტონური კლასები, σ -რგოლი, σ -ალგებრა და სხვ.

საბაზისო E სიმრავლის არაცარიელ ქვესიმრავლეთა $\mathbb{R}$ კლასს ეწოდება რგოლი, თუ ის ჩაკეტილია თანაკვეთის და სიმეტრიული სხვაობის (ორი სიმრავლის) ოპერაციის მიმართ. ე. ი. ქვესიმრავლეთა $\mathbb{R}$ კლასი არის რგოლი, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობა:

$$(\forall A)(\forall B)(A \in \mathbb{R} \wedge B \in \mathbb{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathbb{R} \wedge A \Delta B \in \mathbb{R}).$$

ცხადია, რომ ყოველი რგოლი ჩაკეტილია აგრეთვე გაერთიანებისა და სხვაობის ოპერაციების მიმართაც. ეს ფაქტი გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობებიდან (მითითებული ტოლობების მართებულობა შეამოწმეთ დამოუკიდებლად):

$$A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B);$$

$$A \setminus B = A \cap (A \Delta B).$$

რგოლის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ $\emptyset \in \mathbb{R}$, რადგან

$$(\forall A)(A \in \mathbb{R} \Rightarrow A \setminus A = \emptyset).$$

თუ გამოვიყენებთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდს მივიღებთ რგოლის განსაზღვრას ნებისმიერი სასრული რაოდენობა სიმრავლეებისათვის. ე. ი. საბაზისო E სიმრავლის არაცარიელ ქვესიმრავლეთა $\mathbb{R}$ კლასს ეწოდება რგოლი, თუ

$$(\forall k)(\forall A_k) \left(A_k \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq k \leq n-1 \Rightarrow \bigcap_{k=0}^{n-1} A_k \in \mathbb{R} \wedge \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k \in \mathbb{R} \right).$$

მაგალითი 1. ნებისმიერი სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა კლასი ანუ ბულვანი ქმნის რგოლს.

მაგალითი 2. ვთქვათ მოცემულია რიცხვითი ღერძი და განვიხილოთ $\mathbb{R}$ სიმრავლეთა კლასი, რომელიც წარმოქმნილია

რიცხვითი ღერძის მარცხნიდან ჩაკეტილი და მარჯვნიდან ღია ყველაშესაძლო ინტერვალების სასრული გაერთიანებებით, ე. ი.

$\mathbb{R}$ სიმრავლე შეიცავს $\bigcup_{k=1}^n [a_k, b_k[$ ($a_k, b_k \in \mathbb{R}$) სახის

სიმრავლეებს. მიღებული სიმრავლეთა $\mathbb{R}$ კლასი რგოლია.

სრული გარკვეულობისათვის აღვნიშნოთ, რომ სიმრავლეთა რგოლი და რგოლი აღგებრული თვალსაზრისით არ არის ერთიდაიგივე. თუმცა ზოგიერთ შემთხვევაში ისინი წარმოადგენენ ერთიდაიგივე სიმრავლეთა კლასის მატარებელს (იხილეთ, §8, მაგალითი 13) და ეს არის კიდევ საფუძველი საერთო სახელწოდებისა. შემდგომში ხშირად სიმრავლეთა რგოლის ნაცვლად ვისარგებლებთ უბრალოდ ტერმინით „რგოლი“. თუ გარკვეულ სიტუაციებში დაგვჭირდება აღგებრული რგოლი, მაშინ მას შინაარსობრივად დავაზუსტებთ.

საბაზისო E სიმრავლის არაცარიელ ქვესიმრავლეთა რგოლს ეწოდება აღგებრა, თუ $E \in \mathbb{R}$.

აღგებრის განსაზღვრა შესაძლებელია ჩამოყალიბდეს შემდეგი ფორმითაც:

საბაზისო E სიმრავლის არაცარიელ ქვესიმრავლეთა $\mathbb{R}$ კლასს ეწოდება აღგებრა, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

- 1) $(\forall A)(\forall B)(A \in \mathbb{R} \wedge B \in \mathbb{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathbb{R})$;
- 2) $(\forall A)(A \in \mathbb{R} \Rightarrow A' = E \setminus A \in \mathbb{R})$.

მაგალითი 3. სიმრავლეთა კლასი $\{\emptyset, E\}$ წარმოადგენს აღგებრას.

მაგალითი 4. ვთქვათ, E არათვლადი სიმრავლეა. განვიხილოთ E სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ისეთი კლასი, რომელშიც ყოველი სიმრავლე სასრული ან თვლადია, ან მათი დამატებები არის სასრული ან თვლადი. აღგებრის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ აგებული სიმრავლეთა კლასი აღგებრაა.

სიმრავლეთა რგოლისა და ალგებრის განსაზღვრებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი წინადადებების მართებულობა:

- საბაზისო სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რგოლების ნებისმიერი სიმრავლის თანაკვეთა რგოლია;
- საბაზისო სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ალგებრების ნებისმიერი სიმრავლის თანაკვეთა ალგებრაა.

თეორემა 1. თუ X არის საბაზისო E სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაიმე კლასი, მაშინ არსებობს ჩართვის თვალსაზრისით უმცირესი რგოლი, რომელიც X -ს შეიცავს.

დამტკიცება. რადგან E საბაზისო სიმრავლის ბუდეანი ქმნის რგოლს, ამიტომ არსებობს თუნდაც ერთი რგოლი, რომელიც შეიცავს X სიმრავლეთა კლასს. ცხადია, რომ ასეთი სიმრავლეთა კლასების თანაკვეთა კვლავ იქნება რგოლი და რა თქმა უნდა საძიებელი სიმრავლე.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ჩართვის თვალსაზრისით უმცირეს რგოლს, რომელიც შეიცავს სიმრავლეთა X კლასს, ეწოდება ამ კლასით წარმოქმნილი რგოლი და აღინიშნება $\mathbb{R}(X)$ სიმბოლოთი.

გამოვარკვეით ასეთი გზით განსაზღვრული სიმრავლეთა რგოლის სტრუქტურა.

დავუშვათ, რომ $\mathbb{R}_0 = X$ და ვთქვათ, $\mathbb{R}_0, \mathbb{R}_1, \dots, \mathbb{R}_{n-1}$ სიმრავლეთა კლასები უკვე განსაზღვრულია. $\mathbb{R}_n$ იყოს $\bigcup_{k=0}^{n-1} \mathbb{R}_k$ გაერთიანების ელემენტების ყველაშესაძლო

სხვაობების სასრული ოჯახების გაერთიანების კლასი. ცხადია,

რომ $\mathbb{R}_{n-2} \subset \mathbb{R}_{n-1}$ და $\mathbb{R}_{n-1} = \bigcup_{k=0}^{n-1} \mathbb{R}_k$.

უშუალოდ მოწმდება, რომ

$$\mathbb{R}(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{R}_n.$$

აგებული რგოლის სტრუქტურა შესაძლებელია ჩაიწეროს ფორმალურადაც:

$$\mathbb{R}_0 = X;$$

$$\mathbb{R}_n = \{Y : (\exists A)(\exists B)(A \in \mathbb{R}_{n-1} \wedge B \in \mathbb{R}_{n-1} \wedge (Y = A \Delta B) \vee \\ \vee Y = A \cap B)\}.$$

ცხადია, რომ ამ შემთხვევაშიც, ისევე როგორც პირველ ვარიანტში, მივიღებთ ჩართვის თვალსაზრისით ზრდად

სიმრავლეთა მიმდევრობას და $\mathbb{R}(X)$ წარმოიდგინება $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{R}_n$

გაერთიანებით სახით.

მოცემული სტრუქტურის შემოწმების დროს არსებითია შენიშვნა: $\emptyset \in \mathbb{R}_1$, ამის შემდეგ ცხადია, რომ ფაქტიურად

$\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{R}_n$ არის სიმრავლე, რომელსაც მივიღებთ თუ X -ის

ელემენტებს გავაერთიანებთ, ავიღებთ მათ სხვაობებს, მიღებულ სიმრავლეებს გავაერთიანებთ M -თან, კვლავ

განვიხილავთ სხვაობებს და ა. შ. ბუნებრივია $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{R}_n$

გაერთიანება იქნება რგოლი, შეიცავს X -ს და არის მინიმალური (X სიმრავლის შემცველობის თვალსაზრისით), რადგან თუ ამ გაერთიანებიდან ამოვავდებთ რომელიმე ელემენტს, მაშინ გაერთიანების ან სხვაობის ოპერაციების მიმართ ჩაკეტილობა დაირღვევა ან X არ იქნება აგებული რგოლის ელემენტი.

თეორემა 2. თუ X სიმრავლეთა რაიმე კლასია, მაშინ $\mathbb{R}(X)$ სიმრავლეთა კლასში შემავალი ყოველი სიმრავლე დაიფარება X სიმრავლეთა კლასის ელემენტების სასრული გაერთიანების სახით.

დამტკიცება. იმ სიმრავლეთა კლასი, რომელიც შესაძლებელია დაიფაროს X სიმრავლეთა კლასის ელემენტების სასრული გაერთიანების სახით, არის რგოლი. ცხადია, რომ ეს რგოლი შეიცავს X -ს და შესაბამისად შეიცავს $\mathbb{R}(X)$ -საც.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3. ვთქვათ, $\mathbb{R}_1$ და $\mathbb{R}_2$ შესაბამისად არიან E_1 და E_2 საბაზისო სიმრავლეების ქვესიმრავლეთა სიმრავლეების რაიმე ორი რგოლი. მაშინ $A \times B$ ($A \in \mathbb{R}_1 \wedge B \in \mathbb{R}_2$) სახის დიზიუნქტიური სიმრავლეების ყველაშესაძლო სასრული გაერთიანებების სიმრავლე ქმნის $\mathbb{R}$ რგოლს.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ $A \times B$ ($A \in \mathbb{R}_1 \wedge B \in \mathbb{R}_2$) სახის სიმრავლის სასრული თანაკვეთა არის იგივე ტიპის სიმრავლე. თუ ამ ორი სიმრავლიდან ერთ-ერთი ცარიელი სიმრავლეა, ე. ი. თანაკვეთა იქნება ცარიელი სიმრავლე და მაშინ თეორემის დამტკიცება ტრივიალურია.

თუ

$$F_1 = A_1 \times B_1, \quad F_2 = A_2 \times B_2 \quad \text{და} \quad (a, b) \in F_1 \cap F_2,$$

მაშინ $a \in A_1 \cap A_2$ და $b \in B_1 \cap B_2$, შესაბამისად,

$$F_1 \cap F_2 \subset (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

მეორე მხრივ, $(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$ დეკარტული ნამრავლი შედის როგორც F_1 -ში, ასევე F_2 დეკარტულ ნამრავლში. ამიტომ

$$F_1 \cap F_2 = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

რადგან $\mathbb{R}_1$ და $\mathbb{R}_2$ რგოლებია, ამიტომ $A_1 \cap A_2 \in \mathbb{R}_1$ და $B_1 \cap B_2 \in \mathbb{R}_2$. ეს ნიშნავს, რომ $\mathbb{R}$ ჩაკეტილია სასრული რაოდენობის თანაკვეთის ოპერაციის მიმართ.

შემდეგი დამოკიდებულებიდან

$$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)] \cup [(A_1 \setminus A_2) \times B_1]$$

გამომდინარეობს, რომ განხილული ტიპის სიმრავლეების სხვაობა იგივე სახისაა. რადგან

$$\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} C_i \right) \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{m-1} D_j \right) = \bigcup_{i=0}^{n-1} \bigcap_{j=0}^{m-1} (C_i \setminus D_j).$$

ამიტომ მივდივართ იმ დასკვნამდე, რომ $\mathbb{R}$ ჩაკეტილია სიმრავლეთა სხვაობის ოპერაციის მიმართაც. ვინაიდან $\mathbb{R}$ -ის

დიზიუნქტიური სიმრავლეთა სასრული ოჯახის გაერთიანება კვლავ შედის $\mathbb{R}$ -ში, ამით თეორემა 3 დამტკიცებულია.

საბაზისო E სიმრავლის არაცარიელ ქვესიმრავლეთა Ξ კლასს ეწოდება ნახევარგოლი, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1. $(\forall A)(\forall B)(A \in \Xi \wedge B \in \Xi \Rightarrow A \cap B \in \Xi)$;
2. $(\forall A)(\forall B)(A \in \Xi \wedge B \in \Xi \wedge A \subset B \Rightarrow \exists \{C_0, C_1, \dots, C_{n-1}\} \in \Xi$
 $\wedge A = C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \dots \subset C_n = B \wedge C_k \setminus C_{k-1} \in \Xi) \quad (1 \leq k \leq n)$.

შევნიშნოთ, რომ ყოველი ნახევარგოლი შეაცავს ცარიელ სიმრავლეს.

მაგალითი 5. განვიხილოთ ნებისმიერი X სიმრავლე და ავაგოთ X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა კლასი, რომელიც შედგება ცარიელი სიმრავლისაგან და მოცემული სიმრავლის ყველა ერთელემენტური სიმრავლეებისაგან. ცხადია, რომ ასეთი გზით აგებული სიმრავლეთა კლასი იქნება ნახევარგოლი.

სიმრავლეთა ყოველი $\mathbb{R}$ რგოლი არის ნახევარგოლიც. მართლაც,

$$A \in \mathbb{R} \wedge B \in \mathbb{R} \wedge A \subset B \Rightarrow \exists C = B \setminus A \wedge B = A \cup C.$$

მაგალითი ნახევარგოლისა, რომელიც არ არის რგოლი წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა ღერძის (a, b) სახის ინტერვალების სიმრავლე ან $[a, b]$ მონაკვეთების სიმრავლე. ამ შემთხვევაში ინტერვალების სიმრავლეში ჩართულია ცარიელი (a, a) ინტერვალი, ხოლო მონაკვეთების სიმრავლეში კი ერთწერტილიანი $[a, a]$ მონაკვეთი.

თეორემა 4. Ξ ნახევარგოლის ნებისმიერი სიმრავლეთა $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ სასრული ოჯახისათვის Ξ ნახევარგოლში არსებობს $B_0, B_1, B_2, \dots, B_{t-1}$ სიმრავლეთა სასრული დიზიუნქტიური ოჯახი ისეთი, რომ ყოველი A_k ($0 \leq k \leq n-1$) სიმრავლე შეიძლება წარმოდგენილ იქნას B_s ($0 \leq s \leq t-1$) სიმრავლეების გაერთიანების სახით. ე. ი.

$$A_k = \bigcup_{s \in N_k} B_s,$$

სადაც N_k არის $\{0, 1, 2, 3, \dots, s-1\}$ სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლე.

თეორემა 4 დამტკიცდება ეფუძნება მათემატიკური ინდუქციის მეთოდს, რომელიც არ წარმოადგენს რაიმე განსაკუთრებულ სირთულეს. ჩვენ მას გამოვიყენებთ, როგორც დამხმარე დებულებას და ამიტომ მის დამტკიცებას არ მოვიყვანთ.

დავუბრუნდეთ ისევ $\mathbb{R}(X)$ სიმრავლის სტრუქტურას.

ამასთან დაკავშირებით ავღნიშნოთ, რომ $\mathbb{R}(\Xi)$ კლასს მარტივი აგებულება აქვს. მართებულია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 5. სიმრავლეთა $\mathbb{R}(\Xi)$ კლასი ემთხვევა Ξ ნახევარგოლის ელემენტებისაგან შედგენილი ყველაშესაძლო სასრული ოჯახების გაერთიანებების კლასს.

დამტკიცება. Ξ ნახევარგოლის ელემენტებისაგან შედგენილი ყველაშესაძლო სასრულო ოჯახების გაერთიანებების კლასი აღვნიშნოთ $\mathbb{R}'$ -ით და ვაჩვენოთ, რომ ის რგოლია.

$$\text{ვთქვათ, } A \in \mathbb{R}', B \in \mathbb{R}', A = \bigcup_{k=0}^{n-1} D_k, B = \bigcup_{k=0}^{m-1} Q_k, \text{ სადაც}$$

$$\text{ყოველი } D_k \in \mathbb{R}', Q_k \in \mathbb{R}'.$$

რადგან $D_0, D_1, \dots, D_{n-1}, Q_0, Q_1, \dots, Q_{m-1}$ სიმრავლეები Ξ ნახევარგოლის ელემენტებია, ამიტომ თეორემა 4-ის თანახმად არსებობს სიმრავლეთა დიზიუნქტიური სასრული ოჯახი $B_0, B_1, B_2, \dots, B_{t-1}$ ისეთი, რომ ყოველი D_k და Q_k სიმრავლეები წარმოიდგინება B_s სიმრავლეების გაერთიანების სახით.

ვთქვათ, N_1 და N_2 არიან $\{0, 1, 2, 3, \dots, t-1\}$ სიმრავლის ისეთი ქვესიმრავლეები, რომ

$$A = \bigcup_{i \in N_1} B_i \text{ და } B = \bigcup_{j \in N_2} B_j.$$

ცხადია, რომ

$$A \cap B = \bigcup_{i \in N_1 \cap N_2} B_i \text{ და } A \Delta B = \bigcup_{i \in N_1 \Delta N_2} B_i.$$

მაშასადამე, $A \cap B \in \mathbb{R}'$ და $A \Delta B \in \mathbb{R}'$. შესაბამისად, $\mathbb{R}'$ რგოლია, მისი განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ იგი არის მინიმალური რგოლი, რომელიც შეიცავს Ξ -ს.

ამით თეორემა 5 დამტკიცებულია.

თეორემა 5-ის დამტკიცების პროცესიდან შეგვიძლია დავასკვნათ შემდეგი:

Ξ ნახევარრგოლით წარმოქმნილი $\mathbb{R}(\Xi)$ რგოლი შედგება საბაზისო E სიმრავლის ისეთი და მხოლოდ ისეთი ელემენტებისაგან, რომლებიც წარმოიდგინებიან Ξ ნახევარრგოლის დიზიუნქტიური ელემენტების სასრული ოჯახების გაერთიანებების სახით.

საბაზისო E სიმრავლის არაცარიელ სიმრავლეთა $\mathcal{S}$ კლასს ეწოდება σ -რგოლი, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$$ა) (\forall A)(\forall B)(A \in \mathcal{S} \wedge B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{S});$$

$$ბ) (\forall k)(\forall A_k) \left(k \in N \wedge A_k \in \mathcal{S} \Rightarrow \bigcup_{k \in N} A_k \in \mathcal{S} \right).$$

ამრიგად, $\mathcal{S}$ რგოლი არის σ -რგოლი, თუ ის ჩაკეტილია მისი ელემენტების ნებისმიერი თვლადი ოჯახის გაერთიანებების მიმართ. თუ $\mathcal{S}$ არის σ -რგოლი და $A_k \in \mathcal{S}$ ($k \in N$) მაშინ შემდეგი ტოლობიდან გამომდინარე

$$\bigcap_{k \in N} A_k = E \setminus \bigcup_{k \in N} (E \setminus A_k)$$

(იხილეთ, §2, ფორმულა (2)) დავასკვნით, რომ

$$\bigcap_{k \in N} A_k \in \mathcal{S}.$$

ეს ნიშნავს, რომ σ -რგოლი ჩაკეტილია მისი ელემენტების თვლადი თანაკვეთების მიმართ. ასევე შევნიშნოთ, რომ თუ $A_k \in \mathcal{S}$ ($k \in N$), მაშინ $\overline{\lim} A_k$ და $\underline{\lim} A_k$ აგრეთვე არიან $\mathcal{S}$ რგოლის ელემენტები (იხილეთ, §2).

საბაზისო E სიმრავლის არაცარიელ ქვესიმრავლეთა $\mathcal{S}$ კლასს ეწოდება σ -ალგებრა, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$$ა. (\forall k)(\forall A_k) \left(k \in N \wedge A_k \in \mathcal{S} \Rightarrow \bigcup_{k \in N} A_k \in \mathcal{S} \right);$$

$$ბ. (\forall A)(A \in \mathcal{S} \Rightarrow A' \in \mathcal{S}).$$

ანუ, თუ $\mathcal{S}$ არის σ -რგოლი და $E \in \mathcal{S}$, მაშინ $\mathcal{S}$ -ს ეწოდება σ -ალგებრა.

უმარტივესი მაგალითი σ -ალგებრისა არის რაიმე სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა კლასი.

ადვილია ჩვენება იმასა, რომ

- σ -რგოლების ნებისმიერი ოჯახის თანაკვეთა წარმოადგენს σ -რგოლს;

- σ -ალგებრების ნებისმიერი ოჯახის თანაკვეთა წარმოადგენს σ -ალგებრას.

ჩართვის თვალსაზრისით უმცირეს σ -რგოლს, რომელიც შეიცავს საბაზისო E სიმრავლის ქვესიმრავლეთა X კლასს, ეწოდება X კლასით წარმოქმნილი σ -რგოლი და აღინიშნება $\mathcal{S}(X)$ სიმბოლოთი.

გავარკვიოთ $\mathcal{S}(X)$ -ის სტრუქტურა.

განვსაზღვროთ $(\mathcal{S}_\xi : \xi < \omega_1)$ ტრანსფინიტული მიმდევრობა შემდეგნაირად: $\mathcal{S}_0 = X$. თუ $\eta < \omega_1$ ორდინალური

რიცხვისთვის ნაწილობითი $(\mathcal{S}_\xi : \xi < \eta)$ სიმრავლეთა

მიმდევრობა უკვე აგებულია, მაშინ $\mathcal{S}_\eta$ იყოს $\bigcup_{\xi < \eta} \mathcal{S}_\xi$

გაერთიანების ელემენტების ყველაშესაძლო სხვაობების თვალაღი ოჯახების გაერთიანებების სიმრავლე. ცხადია, რომ

$$M \subset \mathcal{S}_\xi \subset \mathcal{S}_\eta \subset \mathcal{S}(X) \quad (0 < \xi < \eta) \quad \text{და} \quad \mathcal{S}_\eta = \bigcup_{\xi < \eta} \mathcal{S}_\xi.$$

უშუალოდ მოწმდება, რომ

$$\mathcal{S}(X) = \bigcup_{\xi < \omega_1} \mathcal{S}_\xi.$$

ბოლო წარმოდგენიდან უშუალოდ ვღებულობთ, რომ

$$\mathcal{S}(\Xi) = \mathcal{S}(\mathbb{R}(\Xi)).$$

თეორემა 6. ვთქვათ, Z არის საბაზისო E სივრცის ნებისმიერი სიმრავლეთა კლასი, ხოლო A რაიმე ფიქსირებული სიმრავლე E -დან. მაშინ

$$\mathcal{S}(Z) \cap A = \mathcal{S}(Z \cap A).$$

დამტკიცება. K ასოთი აღვნიშნოთ $B \cup (C \setminus A)$ სახის სიმრავლეთა კლასი E -დან, სადაც $B \in \mathcal{S}(Z \cap A)$ და $C \in \mathcal{S}(Z)$. ადვილია შემოწმება იმისა, რომ K კლასი არის σ -რგოლი.

თუ $T \in Z$, მაშინ შემდეგი დამოკიდებულებებიდან

$$T = (T \cap A) \cup (T \setminus A), \quad T \cap A \in Z \cap A \subset \mathcal{S}(Z \cap A)$$

გამომდინარეობს, რომ $T \in K$. ე. ი. $Z \subset K$ და შესაბამისად $\mathcal{S}(Z) \subset K$.

ცხადია, რომ $K \cap A = \mathcal{S}(Z \cap A)$ და ამიტომ $\mathcal{S}(Z) \cap A \subset \mathcal{S}(Z \cap A)$.

რადგან $\mathcal{S}(Z) \cap A$ არის σ -რგოლი და მართებულია დამოკიდებულება $Z \cap A \subset \mathcal{S}(Z) \cap A$, ამიტომ გვექნება $\mathcal{S}(Z \cap A) \subset \mathcal{S}(Z) \cap A$.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

და ბოლოს განვიხილოთ კიდევ ერთი სიმრავლეთა კლასი, რომელსაც სიმრავლეთა მონოტონური კლასები ეწოდებათ.

საბაზისო E სიმრავლის არაცარიელ ქვესიმრავლეთა M კლასს ეწოდება მონოტონური კლასი, თუ ის თავისი ელემენტების ნებისმიერ ზრდად (კლებად) მიმდევრობასთან ერთად შეიცავს ასეთი მიმდევრობების ზღვარს.

ისევე როგორც სხვა სიმრავლეთა კლასების განხილვის შემთხვევაში მტკიცდება, რომ მონოტონური კლასების ნებისმიერი ოჯახის თანაკვეთა ასევე მონოტონური კლასია და ამ თვალსაზრისით ნებისმიერი $X \subset P(E)$ სიმრავლეთა კლასებისათვის არსებობს ჩართვის თვალსაზრისით უმცირესი მონოტონური კლასი, რომელიც მას შეიცავს. ასეთ უმცირეს კლასს ეწოდება X კლასით წარმოქმნილი მონოტონური კლასი და აღინიშნება $M(X)$ სიმბოლოთი.

გამოვარკვეით $M(X)$ სიმრავლეთა კლასის სტრუქტურა.

განვსაზღვროთ $(M_\xi : \xi < \omega_1)$ ტრანსფინიტული მიმდევრობა შემდეგნაირად: $M_0 = X$. თუ $\eta < \omega_1$ ორდინალური რიცხვისთვის ნაწილობითი $(M_\xi : \xi < \eta)$ სიმრავლეთა მიმდევრობა უკვე აგებულია, მაშინ M_η იყოს $\bigcup_{\xi < \eta} M_\xi$ -დან აღებული ყველაშესაძლო მიმდევრობების ზღვარი.

უშუალოდ მოწმდება, რომ

$$M(X) = \bigcup_{\xi < \omega_1} M_\xi.$$

თეორემა 7. ყოველი σ -რგოლი წარმოადგენს მონოტონურ კლასს; მონოტონური რგოლი არის σ -რგოლი.

დამტკიცება. თეორემის პირველი ნაწილი ტრივიალურია σ -რგოლის აგების სტრუქტურიდან გამომდინარე. იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ თეორემის მეორე ნაწილი საჭიროა შევნიშნოთ, რომ რგოლი, რომელიც იმავდროულად არის მონოტონური კლასიც, ჩაკეტილია გაერთიანების თვალადი ოპერაციის მიმართ.

ვთქვათ, M მონოტონური რგოლია და $A_k \in M$ ($k \in N$). რადგან M რგოლია, ამიტომ

$$\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k \in M \quad (n \in N).$$

შევნიშნოთ, რომ $\left\{ \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k \right\}$ სიმრავლეთა მიმდევრობა ზრდადია,

ამიტომ მისი ზღვარი ტოლია $\bigcup_{k \in N} A_k$ -ს (იხილეთ §2). და

ბოლოს, რადგან M რგოლი მონოტონურია, ამიტომ

$$\bigcup_{k \in N} A_k \in M.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 8. თუ $\mathbb{R}$ რგოლია, მაშინ $M(\mathbb{R}) = S(\mathbb{R})$.

დამტკიცება. რადგან σ -რგოლი არის მონოტონური კლასი და $\mathbb{R} \subset S(\mathbb{R})$, ამიტომ

$$M(\mathbb{R}) = M \subset S(\mathbb{R}).$$

თუ M კლასი რგოლია (ე. ი. ის σ -რგოლიცაა) და $\mathbb{R} \subset M(\mathbb{R})$, ამიტომ $S(\mathbb{R}) \subset M(\mathbb{R})$.

ვაჩვენოთ, რომ M კლასი წარმოადგენს რგოლს.
ვთქვათ,

$$K(Z) = \{Z : Z \setminus T, T \setminus Z, Z \cup T \in M\},$$

სადაც T რაიმე ფიქსირებული სიმრავლეა M -დან.

სიმრავლეთა $K(Z)$ კლასის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ $Z \in K(T)$, $T \in K(Z)$.

თუ სიმრავლეთა $K(Z)$ კლასი არაცარიელია და $\{Z_n : n \in N\}$ არის ამ კლასში შემავალი რაიმე მონიტონური მიმდევრობა, მაშინ

$$\lim_n Z_n \setminus T = \lim_n (Z_n \setminus T) \in M,$$

$$T \setminus \lim_n Z_n = \lim_n (T \setminus Z_n) \in M,$$

$$T \cup \lim_n Z_n = \lim_n (Z_n \cup T) \in M.$$

ეს ნიშნავს, რომ $K(Z)$ არის მონიტონური კლასი.

თუ $Z \in \mathbb{R}$ და $T \in \mathbb{R}$, მაშინ რგოლის განსაზღვრების თანახმად $Z \in K(T)$. რადგან ბოლო დამოკიდებულება მართებულია ნებისმიერი $Z \in \mathbb{R}$ სიმრავლისათვის, ამიტომ $\mathbb{R} \subset K(T)$. საიდანაც M -ის განსაზღვრების თანახმად უშუალოდ გამოდინარეობს, რომ

$$M \subset K(Z).$$

ახლა თუ $Z \in M$ და $T \in \mathbb{R}$, მაშინ $Z \in K(T)$ და შესაბამისად, $T \in K(Z)$. ისევე როგორც ზევით, ბოლო დამოკიდებულება მართებულია ნებისმიერი $T \in \mathbb{R}$ სიმრავლისათვის, ამიტომ მივიღებთ

$$M \subset K(Z).$$

ეს ჩართვა მართებულია ნებისმიერი $Z \in M$ სიმრავლისათვის. რაც იმას ნიშნავს, რომ M არის რგოლი და თეორემა 7-ის თანახმად ის ამავე დროს არის σ -რგოლიც.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

მათემატიკური ანალიზის მთელი რიგის საკითხების კვლევაში დიდ როლს თამაშობს ბორელის სიმრავლეები ანუ B -სიმრავლეები. რიცხვით ღერძზე ბორელის სიმრავლე არის $[a, b]$ სახის ყველა სეგმენტთა კლასის მიერ წარმოქმნილ უმცირეს σ -ალგებრა (ბორელის σ -ალგებრის სტრუქტურას და თვისებებს დაეუბრუნდებით შემდეგ თავებში).

ვთქვათ, მოცემულია გადასახვა $f: A \rightarrow B$ და $\mathfrak{A}$ და Ω არიან შესაბამისად A და B სიმრავლეების ქვესიმრავლეთა რაიმე კლასები. $f(\mathfrak{A})$ -ით აღვნიშნოთ ყველა $f(X)$ ($X \subset A$) სახეთა სიმრავლე, ხოლო $f^{-1}(\Omega)$ -ით კი ყველა $f^{-1}(Y)$ ($Y \subset B$) წინარესახეთა სიმრავლე. მაშინ მართებულია შემდეგი წინადადებები:

- (1) თუ Ω რგოლია, მაშინ $f^{-1}(\Omega)$ -ც რგოლია;
- (2) თუ Ω ალგებრაა, მაშინ $f^{-1}(\Omega)$ -ც ალგებრაა;

(3) თუ Ω არის σ -ალგებრა, მაშინ $f^{-1}(\Omega)$ -ც არის σ -ალგებრა;

$$(4) \mathbb{R}(f^{-1}(\Omega)) = f^{-1}(\mathbb{R}(\Omega));$$

$$(5) \mathcal{S}(f^{-1}(\Omega)) = f^{-1}(\mathcal{S}(\Omega)).$$

საბაზისო სიმრავლეებზე განსაზღვრულ ქვესიმრავლეთა მოყვანილი კლასების სხვადასხვა თვისებების შესწავლას დაეუბრუნდებით შემდეგ თავებში.

§10. ტოპოლოგიური სივრცეები

ჩვენს მიერ გადმოცემულ მასალაში გამოსავალი ობიექტი იყო საბაზისო სიმრავლეები, რომელთა „შინაგანი“ ბუნებაზე ინფორმაცია ფაქტიურად არ იყო ცნობილი (თუ არ ჩავთვლით, მაგალითად, მოცემული სიმრავლის სიმძლავრეს). მოცემული საბაზისო სიმრავლე გარკვეული აქსიომატიკის შემოტანის შემდეგ მასში შემავალი ელემენტების ბუნების თავისებურებების აღქმა შესაძლებლობას იძლევა გამოსავალი ობიექტის ისეთ სტრუქტურულ ობიექტად გადაქცევას, რომელიც შესასწავლ და გამოსაკვლევ თემატიკას გახდის უფრო მრავალფეროვანს და სრულყოფილს. ამავე დროს ასეთ ობიექტებზე შესაძლებელია განისაზღვროს გაცილებით მდიდარი სიმრავლეთა კლასები, შემოტანილ იქნას სხვადასხვა სტრუქტურები, რომლების შესაბამისად ქმნიან გაცილებით ფართო სპექტრს კვლევებისათვის. ასეთ ობიექტთა რიცხვს განეკუთვნებიან სხვადასხვა სახის სივრცეები (ტოპოლოგიური, მეტრიკული, ნორმირებული, ვექტორული და სხვ.).

ვთქვათ, მოცემულია საბაზისო E სიმრავლე.

ტოპოლოგია E სიმრავლეში ეწოდება E სიმრავლის ნებისმიერ ისეთ ქვესიმრავლეთა $\mathfrak{F}$ კლასს, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) ცარიელი სიმრავლე $\emptyset$ და თვით E სიმრავლე ეკუთვნის $\mathfrak{F}$ კლასს;

2) $\mathfrak{F}$ სიმრავლეთა კლასის ელემენტთა ნებისმიერი ოჯახის გაერთიანება (სასრული ან უსასრულო) ეკუთვნის $\mathfrak{F}$;

3) $\mathfrak{F}$ სიმრავლეთა კლასის ელემენტთა ნებისმიერი სასრული ოჯახის თანაკვეთა ეკუთვნის $\mathfrak{F}$.

E სიმრავლეს, მასზე განსაზღვრული ტოპოლოგიით, ეწოდება ტოპოლოგიური სივრცე და აღინიშნება $(E, \mathfrak{F})$ წყვილის სახით. შევთახმდეთ, რომ ჩვენ ხშირად ვისარგებლებთ ტერმინით „ტოპოლოგიური სივრცე“ და ამ შემთხვევაში მას აღვნიშნავთ მხოლოდ E ასოთი.

სიმრავლეებს, რომლებიც ეკუთვნიან $\mathfrak{F}$ სიმრავლეთა კლასს ეწოდება ღია სიმრავლეები. ცარიელი სიმრავლე $\emptyset$ და გამოსავალი E სიმრავლე ღია სიმრავლეებია. შემდგომში ტოპოლოგიური სივრცის ელემენტებს ვუწოდოთ წერტილები.

მაგალითი 1. განვიხილოთ სიმრავლეთა კლასი, რომელიც შედგება მხოლოდ $\emptyset$ და E სიმრავლეებისაგან. ცხადია, რომ ასეთი სიმრავლეთა კლასი ქმნის ტოპოლოგიას.

მაგალით 1-ში განსაზღვრულ ტოპოლოგიას ანტიდისკრეტული ანუ ტრივიალური ტოპოლოგია ეწოდება.

მაგალითი 2. განვიხილოთ E სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა კლასი ანუ ბუდეანი. ამ სიმრავლეთა კლასით განსაზღვრულ $\mathfrak{F}$ ტოპოლოგიას ეწოდება დისკრეტული ტოპოლოგია E -ზე. ხოლო $(E, \mathfrak{F})$ წყვილს ეწოდება დისკრეტული ტოპოლოგიური სივრცე. დისკრეტული ტოპოლოგიური სივრცის ყოველი ქვესიმრავლე ღია სიმრავლეა.

მაგალითი 3. განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე და ტოპოლოგია შემოვიდოთ შემდეგი წესით: ტოპოლოგია არის იმ სიმრავლეთა ოჯახი R -დან, რომელიც ყოველი წერტილის ნაცვლად შეიცავს რაიმე ღია ინტერვალს ნამდვილ რიცხვთა

დერმიდან (ამ შემთხვევაში ღია ინტერვალი ემთხვევა ღია სიმრავლეს).

როგორც მოყვანილი მაგალითებიდანაც ჩანს ერთიდაიგივე სიმრავლეზე შეიძლება განისაზღვროს სხვადასხვა ტოპოლოგია.

ვთქვათ, E სიმრავლეზე სხვადასხვა ხერხით შემოტანილია ორი $\mathfrak{T}_1$ და $\mathfrak{T}_2$ ტოპოლოგია.

ვიტყვიან, რომ ტოპოლოგია $\mathfrak{T}_1$ არის უფრო სუსტი, ვიდრე ტოპოლოგია $\mathfrak{T}_2$ ან ტოპოლოგია $\mathfrak{T}_2$ უფრო ძლიერია, ვიდრე $\mathfrak{T}_1$, თუ $\mathfrak{T}_1 \subset \mathfrak{T}_2$. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ყოველი ღია სიმრავლე $\mathfrak{T}_1$ ტოპოლოგიაში ამავე დროს არის ღია სიმრავლე $\mathfrak{T}_2$ ტოპოლოგიაში.

ხშირ შემთხვევაში რაიმე სიმრავლეზე შემოტანილი ტოპოლოგიების შედარება შეუძლებელია. ამ დროს მოცემულ ტოპოლოგიებს არასადარი ტოპოლოგიები ეწოდებათ.

მაგალით 1 და მაგალით 2-ში მოყვანილი ანტიდისკრეტული და დისკრეტული ტოპოლოგიები შესაბამისად არიან ყველაზე სუსტი და ყველაზე ძლიერი მოცემულ E სიმრავლეზე განსაზღვრულ ტოპოლოგიებს შორის.

ვთქვათ, $(E, \mathfrak{T})$ ტოპოლოგიური სივრცეა და $E_0 \subset E$ ნებისმიერი სიმრავლეა. სიმრავლეთა $G \cap E_0$ ($G \in \mathfrak{T}$) კლასი წარმოადგენს ტოპოლოგიას E_0 სიმრავლეზე და რის შემდეგაც E_0 გადაიქცევა ტოპოლოგიურ სივრცედ. ამ შემთხვევაში E_0 -ზე გვაქვს ინდუცირებული ტოპოლოგია, ხოლო თვით E_0 -ს ეწოდება E ტოპოლოგიური სივრცის ქვესივრცე.

ორ ტოპოლოგიურ E_1 და E_2 სივრცეს ეწოდება ჰომეომორფული, თუ არსებობს ბიექცია $f: E_1 \rightarrow E_2$, რომლის მიხედვითაც ყოველი ღია $G \subset E_1$ სიმრავლისათვის $f(G)$ სიმრავლეც ღია სიმრავლეა E_2 -ში. ტოპოლოგიური

თვალსაზრისით ჰომომორფული სივრცეები გაიგივებულნი არიან ერთმანეთთან.

$(E, \mathfrak{F})$ ტოპოლოგიურ სივრცეში F სიმრავლეს ეწოდება ჩაკეტილი სიმრავლე, თუ $G = E \setminus F$ არის ღია სიმრავლე იმავე სივრცეში. მოცემულ ტოპოლოგიურ სივრცეში ყველა ჩაკეტილ სიმრავლეთა K კლასი აკმაყოფილებს შემდეგ თვისებებს:

1. ცარიელი სიმრავლე $\emptyset$ და თვით E სიმრავლე ეკუთვნის K კლასს;
2. K სიმრავლეთა კლასის ელემენტთა ნებისმიერი ოჯახის თანაკვეთა (სასრული ან უსასრულო) ეკუთვნის K ;
3. K სიმრავლეთა კლასის ელემენტთა ნებისმიერი სასრული ოჯახის გაერთიანება ეკუთვნის K .

როგორც ვხედავთ, K სიმრავლეთა კლასი განისაზღვრება $\mathfrak{F}$ სიმრავლეთა კლასით. ამიტომ საბაზისო E სიმრავლეზე ტოპოლოგია შეიძლება შემოტანილ იქნას აგრეთვე K სიმრავლეთა კლასის საშუალებით და სიმრავლეებს ეწოდოს ჩაკეტილი სიმრავლეები, ხოლო ღია სიმრავლე განვსაზღვროთ, როგორც ჩაკეტილი სიმრავლის დამატება.

E ტოპოლოგიური სივრცის ღია სიმრავლეთა თვლად თანაკვეთას ეწოდება G_δ ტიპის სიმრავლე, ხოლო ჩაკეტილ სიმრავლეთა თვლად გაერთიანებას კი - F_σ ტიპის სიმრავლე.

შევნიშნოთ, რომ G_δ და F_σ ტიპის სიმრავლეები ყოველთვის არ არიან შესაბამისად ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეები E ტოპოლოგიური სივრცეში. მაგალითად, თუ განვიხილავთ ყველა ნამდვილ რიცხვთა ღერძის

$$\left(-\frac{1}{n}-1, 1+\frac{1}{n}\right) \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$$

სახის თვლად ღია სიმრავლეთა

ოჯახს, მაშინ ცხადია, რომ მათი თანაკვეთა იქნება $[-1,1]$ სიმრავლე, რომელიც არ არის ღია სიმრავლე.

ვთქვათ, მოცემულია E ტოპოლოგიური სივრცე. $x \in E$ წერტილს ეწოდება $E_1 \subset E$ სიმრავლის შიგა წერტილი, თუ არსებობს ღია $G \subset E$ სიმრავლე ისეთი, რომ $x \in G$.

ტოპოლოგიური სივრცის $x \in E$ წერტილის მიდამო ეწოდება ნებისმიერ ისეთ $V \subset E$ სიმრავლეს, რომლისთვისაც x შიგა წერტილია. შევნიშნოთ, რომ წერტილის მიდამო შეიძლება არ იყოს ღია სიმრავლე, მაგრამ ყოველი ღია სიმრავლე არის ნებისმიერი თავისი წერტილის მიდამო და წერტილის ყოველი მიდამო შეიცავს ამ წერტილის ღია მიდამოს.

ტოპოლოგიური სივრცის x წერტილის მიდამოთა $V(x)$ სიმრავლეს ეწოდება ფუნდამენტალური ანუ x წერტილის მიდამოთა ბაზისი, თუ x წერტილის ნებისმიერი V მიდამოსათვის არსებობს $V_x \in V(x)$ მიდამო, რომ $V_x \subset V$.

ტოპოლოგიური E სივრცის ყველა წერტილის ბაზისთა ერთობლიობას ეწოდება E ტოპოლოგიური სივრცის ბაზისი. სივრცის ბაზისი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

ა. თუ $V \in V(x)$, მაშინ $x \in V$;

ბ. თუ $V_1, V_2 \in V(x)$, მაშინ არსებობს $V \in V(x)$ ისეთი, რომ $V \subset V_1 \cap V_2$;

გ. როგორც გინდ იყოს $V_x \in V(x)$ მიდამო, არსებობს $V'_x \in V(x)$ ისეთი, რომ $V'_x \subset V_x$, თანაც ნებისმიერი $y \in V'_x$ წერტილისათვის მოიძებნება $V_y \in V(y)$ ისეთი, რომ $V_y \subset V_x$.

ჩაკეტილი სიმრავლის განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ E ტოპოლოგიური სივრცის F სიმრავლე ჩაკეტილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $E \setminus F$ სიმრავლის ყოველ წერტილს გააჩნია მიდამო. ე. ი. F სიმრავლე ჩაკეტილია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ყოველი x წერტილი, რომლის მიდამოც თანაიკვეთება F -თან, ეკუთვნის F -ს. ამ მოსაზრებიდან გამომდინარე შემოვიტანოთ შემდეგი განსაზღვრა:

E ტოპოლოგიური სივრცის $x \in E$ წერტილს ეწოდება A სიმრავლის დაგროვების ანუ ზღვარითი წერტილი, თუ ამ წერტილის ნებისმიერი მიდამო შეიცავს x წერტილისაგან განსხვავებულ A სიმრავლის წერტილსაც. ასეთ შემთხვევაში

შეიძლება იმის მტკიცება, რომ x წერტილის ნებისმიერი მიდამო თანაიკვეთება A -თან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x \in A$ ან x წერტილი A სიმრავლის დაგროვების წერტილია.

ყოველივე ზემოთთქმულიდან გამომდინარე მართებულია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 1. ტოპოლოგიური სივრცის ქვესიმრავლე ჩაკეტილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ის შეიცავს თავისი ყველა დაგროვების წერტილს.

დისკრეტულ ტოპოლოგიურ სივრცეში არც ერთი წერტილი არ არის დაგროვების წერტილი.

მაგალით 3-ში მოყვანილ ტოპოლოგიურ სივრცეში გვაქვს სხვადასხვა შემთხვევა. მაგალითად, თუ $A = (0,1)$, მაშინ $[0,1]$ სეგმენტის ყოველი წერტილი A სიმრავლის დაგროვების წერტილია; თუ $A = \left(\frac{1}{z} : z \in \mathbb{Z}\right)$, მაშინ 0 არის A სიმრავლის

ერთადერთი დაგროვების წერტილი; მთელ რიცხვთა $\mathbb{Z}$ სიმრავლეს დაგროვების წერტილი არ გააჩნია.

$x_0 \in A$ წერტილს ეწოდება A სიმრავლის იზოლირებული წერტილი, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო, რომელიც არ შეიცავს A სიმრავლის x_0 -სგან განსხვავებულ არც ერთ წერტილს.

თუ A სიმრავლე ჩაკეტილია და არ შეიცავს იზოლირებულ წერტილებს, მაშინ მას სრულყოფილი სიმრავლე ეწოდება. ეს ნიშნავს, რომ სრულყოფილი სიმრავლის ყოველი წერტილი არის ამ სიმრავლის ზღვარითი წერტილი.

სრულყოფილი სიმრავლის მაგალითებია: $[a,b]$ სეგმენტი, ნამდვილ რიცხვთა ღერძი, კანტორის სიმრავლე.

ვთქვათ, კვლავ მოცემულია E ტოპოლოგიური სივრცე. $A \subset E$ ქვესიმრავლის ჩაკეტვა არის ყველა იმ ჩაკეტილ სიმრავლეთა თანაკვეთა, რომლებიც შეიცავს A -ს და აღინიშნება $\overline{A}$ სიმბოლოთი. რადგან ჩაკეტილ სიმრავლეთა ნებისმიერი თანაკვეთა ჩაკეტილია, ამიტომ სიმრავლის ჩაკეტვაც ჩაკეტილი სიმრავლეა. რადგან $\overline{A}$ სიმრავლე შედის

ყველა ჩაკეტილ სიმრავლეში, ამიტომ ის არის უმცირესი ჩაკეტილი სიმრავლე, რომელიც ეკუთვნის A -ს. ეს ნიშნავს, რომ A სიმრავლე ჩაკეტილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A = \overline{A}$.

მართებულია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 2. ნებისმიერი სიმრავლის ჩაკეტვა არის ამ სიმრავლისა და მისი დაგროვების წერტილების გაერთიანება.

თეორემა 2-ის დამტკიცება არ წარმოადგენს სირთულეს და მის დამტკიცებას არ მოვიყვანთ.

$A \subset E$ სიმრავლის ჩაკეტვის ოპერაციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

ა) $\overline{\emptyset} = \emptyset$;

ბ) $A \subset \overline{A}$;

გ) $(A_1 \subset A_2) \Rightarrow (\overline{A_1} \subset \overline{A_2})$;

დ) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$;

ე) $\overline{\overline{A}} = A$.

ვთქვათ, E ტოპოლოგიური სივრცეა. $A \subset E$ სიმრავლეს ეწოდება მკვრივი $E_0 \subset E$ სიმრავლეში, თუ $E_0 \subset \overline{A}$. თუ $\overline{A} = E$, მაშინ A სიმრავლეს ეწოდება ყველგან მკვრივი E -ში. $A \subset E$ სიმრავლეს ეწოდება არსად მკვრივი E -ში, თუ $E \setminus \overline{A}$ სიმრავლე ყველგან მკვრივია. ე. ი. A სიმრავლე არსად მკვრივია E -ში, თუ E სივრცის ყოველი V მიდამო შეიცავს ისეთ V_1 მიდამოს, რომ $A \cap V_1 = \emptyset$.

არსად მკვრივი სიმრავლის განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს არსად მკვრივი სიმრავლის შემდეგი ექვივალენტური განსაზღვრებები:

- $A \subset E$ სიმრავლე არსად მკვრივია E -ში, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ მისი დამატება A' შეიცავს ღია ყველგან მკვრივ სიმრავლეს;

- $A \subset E$ სიმრავლე არსად მკვერივია E -ში, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $\overline{A}$ სიმრავლეს არ გააჩნია შიგა წერტილები.

მაგალითი 4. განვიხილოთ კანტორის სიმრავლის (იხილეთ, მაგალითი 7, §7) აგების მეთოდი. პირველ ეტაპზე დარჩენილ $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ და $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ სეგმენტებს ვუწოდოთ I რანგის სეგმენტები,

მეორე ეტაპზე დარჩენილ $\left[0, \frac{1}{9}\right], \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right], \left[\frac{8}{9}, 1\right]$

სეგმენტებს, რომლებიც მიიღება $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ და $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$

ინტერვალების ამოგდებათ პირველი ეტაპის შემდეგ დარჩენილი სეგმენტებიდან, ვუწოდოთ II რანგის სეგმენტები და ა. შ.

ცხადია, რომ n -ური რანგის სეგმენტის სიგრძეა $\frac{1}{3^n}$ და რომ

მივიღოთ მისგან $(n+1)$ რანგის სეგმენტი, საჭიროა n -ური რანგის სეგმენტიდან ამოვაგდოთ სეგმენტი, რომლის ცენტრია

ამ სეგმენტის შუა წერტილი და სიგრძეა $\frac{1}{3^{n+1}}$. შევნიშნოთ,

რომ ნებისმიერი n -სთვის ყველა n -ური რანგის სეგმენტის გაერთიანება ფარავს კანტორის C სიმრავლეს.

განვიხილოთ ნებისმიერი $I = (\alpha, \beta) \subset [0, 1]$ ინტერვალი. თუ ეს ინტერვალი არ შეიცავს C სიმრავლის წერტილებს, მაშინ იმ ინტერვალის როლში, რომელიც შედის I -ში, განვიხილოთ თავად I ინტერვალი. თუ არსებობს ისეთი $x_0 \in C$ წერტილი, რომ $x_0 \in I$, მაშინ არსებობს რაიმე, თუნდაც მაღალი, n რანგის სეგმენტი, რომელიც შეიცავს x_0 -ს და ეკუთვნის I ინტერვალს. ამის შემდეგ ავიღოთ ინტერვალი სიგრძით $\frac{1}{3^{n+1}}$ და ცენტრით ამ სეგმენტის შუა წერტილში. ეს ინტერვალი არ

შეიცავს x_0 წერტილს და ეკუთვნის I -ს. შესაბამისად, C სიმრავლე არსად მკვრივია $[0,1]$ სეგმენტში.

ვთქვათ, კვლავ E ტოპოლოგიური სივრცეა. მართებულია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 3. E სივრცის არსად მკვრივი სიმრავლის ნებისმიერი ქვესიმრავლე არსად მკვრივია; არსად მკვრივი სიმრავლეების სასრული ოჯახის გაერთიანება არსად მკვრივი სიმრავლეა; არსად მკვრივი სიმრავლის ჩაკეტვა არსად მკვრივი სიმრავლეა.

დამტკიცება. პირველი წინადადება ტრივიალურია. მეორე კი დაგამტკიცოთ ორი არსად მკვრივი სიმრავლის შემთხვევაში.

ვთქვათ, A_1 და A_2 არსად მკვრივი სიმრავლეებია E ტოპოლოგიურ სივრცეში. არსად მკვრივი სიმრავლის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი V მიდამოსათვის არსებობს V_1 და V_2 მოდამოები, რომ $V_1 \subset V \setminus A_1$, $V_2 \subset V_1 \setminus A_2$ და $V_2 \subset V_1 \subset V$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $V_2 \subset V \setminus (A_1 \cup A_2)$. ეს კი ნიშნავს, $A_1 \cup A_2$ არსად მკვრივია E -ში.

მესამე წინადადება გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ ნებისმიერი მიდამო, რომელიც ეკუთვნის A' , აგრეთვე ეკუთვნის $\overline{A'}$ -საც.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ, E რაიმე ტოპოლოგიური სივრცეა. $A \subset E$ სიმრავლეს ეწოდება პირველი კატეგორიის სიმრავლე, თუ A წარმოიდგინება არსად მკვრივი სიმრავლეების თვლადი ოჯახის გაერთიანების სახით. სიმრავლეს, რომელიც არ არის პირველი კატეგორიის ეწოდება მეორე კატეგორიის სიმრავლე.

თეორემა 4 (ბერი). E სივრცის პირველი კატეგორიის სიმრავლის დამატება ყველგან მკვრივია; ღია ყველგან მკვრივი სიმრავლეთა ნებისმიერი თანაკვეთა ყველგან მკვრივი სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\{A_n : n \in N\}$ არსად მკვრივი სიმრავლეთა ოჯახია E ტოპოლოგიურ სივრცეში და $A = \bigcup_{n \in N} A_n$. ნებისმიერი V მიდამოსათვის არსებობს

$V_0 \subset V \setminus A_0$. ვთქვათ, V_1 არის ისეთი მიდამო, რომ $V_1 \subset V_0 \setminus A_1$, და ა. შ. მაშინ $\bigcap_{n \in N} V_n$ არაცარიელი

ქვესიმრავლეა $V \setminus A$ სიმრავლის. ე. ი. A' ყველგან მკვრივია.

თეორემის მეორე ნაწილი ექვივალენტურია პირველის.

ამით ბერის თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5 (ბანახი). ვთქვათ, E ტოპოლოგიური სივრცეა და $(V_i : i \in I)$ არის ღია პირველი კატეგორიის სიმრავლეთა ოჯახი E -დან. მაშინ $\bigcup_{i \in I} V_i$ გაერთიანება აგრეთვე ღია

პირველი კატეგორიის სიმრავლეა E -ში.

დამტკიცება. ვთქვათ, $(G_j : j \in J)$ არის მაქსიმალური (ჩართვის მიმართ) არაცარიელი დიზიუნქტიური ღია სიმრავლეთა ოჯახი E -დან ისეთი, რომ

$$(\forall j)(j \in J \Rightarrow \exists i \in I \wedge G_j \subset V_i).$$

ასეთი ოჯახის არსებობა გამომდინარეობს ცორნის ლემიდან.

$(G_j : j \in J)$ სიმრავლეთა ოჯახის მაქსიმალურობიდან გამომდინარეობს, რომ $\overline{V} \setminus \bigcup_{j \in J} G_j$ სიმრავლე არსად მკვრივია

E -ში. მაშასადამე, $\bigcup_{j \in J} G_j$ გაერთიანება არის პირველი

კატეგორიის სიმრავლე. მართლაც, გვაქვს

$$G_j = \bigcup_{n \in N} X_{j,n},$$

სადაც $X_{j,n}$ სიმრავლეები არიან არსად მკვრივი სიმრავლეები

E სივრცეიდან. ყოველი $n \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის დაეუშვათ, რომ

$$X_n = \bigcup_{j \in J} X_{j,n}.$$

$(G_j : j \in J)$ სიმრავლეთა ოჯახის დიზიუნქტიურობიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $n \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის X_n სიმრავლე აგრეთვე არსად მკვრივია, თანაც

$$\bigcup_{j \in J} G_j = \bigcup_{n \in N} X_n.$$

აქედან კი გამომდინარეობს ბანახის თეორემის დამტკიცება.

შეგნიშნოთ, რომ ბანახის თეორემა მართებულია (*ZFC*)

სიმრავლეთა თეორიაში. მარტინის აქსიომის (*MA*) მიღების შემთხვევაში კი მართებულია შემდეგი თეორემა, რომელსაც მოვიყვანთ დამტკიცების გარეშე.

თეორემა 6. თუ მივიღებთ მარტინის აქსიომას, მაშინ *R*-ში ნებისმიერი პირველი კატეგორიის სიმრავლეთა $\{Y_i : i \in I\}$ ოჯახის გაერთიანება კვლავ პირველი კატეგორიისაა, თუ $\text{card}(I) < \mathfrak{c}$.

ტოპოლოგიური სივრცის ღია სიმრავლეთა Ω კლასს ეწოდება მოცემული ტოპოლოგიური სივრცის ბაზა, თუ ყოველი ღია სიმრავლე შეიძლება წარმოვიდგინოთ Ω სიმრავლეთა კლასის რომელიღაც ქვეკლასის გაერთიანების სახით.

ღია სიმრავლეთა O კლასს ეწოდება ღია ქვებაზა, თუ O სიმრავლის ყველა სასრული არაცარიელი თანაკვეთების სიმრავლე წარმოადგენს სივრცის ბაზას.

მაგალითი 5. ნამდვილ რიცხვთა ღერძის ყველა ღია რაციონალურბოლოებიანი ინტერვალების ოჯახი ქმნის ბაზას (იხილეთ, მაგალითი 3).

მაგალითი 6. $x > r$ და $x < r$ სახის სხივთა ოჯახი ქმნის ქვებაზას ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე.

სივრცეს თვლადი ბაზით ეწოდება სივრცე $\mathcal{W}$ წონით (სივრცის წონა არის ისეთი უმცირესი α კარდინალური რიცხვი, რომ სივრცეს გააჩნია ბაზა α სიმძლავრით).

ცხადია, რომ შეიძლება შემოტანილ იქნას სივრცის ჩაკეტილი ბაზის ცნება. თუ გამოვიყენებთ ორადულობის პრინციპს, მივიღებთ სივრცის ჩაკეტილი ბაზის შემდეგ ცნებას:

ტოპოლოგიური სივრცის ჩაკეტილ სიმრავლეთა T კლასს ეწოდება მოცემული ტოპოლოგიური სივრცის ბაზა, თუ ყოველი ჩაკეტილი სიმრავლე შეიძლება წარმოვიდგინოთ T სიმრავლეთა კლასის რომელიღაც ქვეკლასის თანაკვეთის სახით.

ვთქვათ, მოცემულია ორი ტოპოლოგიური E_1 და E_2 სივრცე. ტოპოლოგია $E_1 \times E_2$ სივრცეში განისაზღვრება შემდეგი წესით:

სიმრავლეს $A \subset E_1 \times E_2$ ეწოდება ღია სიმრავლე $E_1 \times E_2$ სივრცეში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ A სიმრავლე წარმოადგენს $G \times H$ დეკარტული ნამრავლის გაერთიანებას, სადაც G და H შესაბამისად არიან E_1 და E_2 ტოპოლოგიური სივრცეების ღია სიმრავლეები.

რადგან ღია სიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახის გაერთიანება $E_1 \times E_2$ სივრცეში კვლავ ღია სიმრავლეა, ამიტომ მართებულია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 14. სასრული რაოდენობა ტოპოლოგიურ სივრცეთა ნამრავლი ტოპოლოგიური სივრცეა.

ახლა ვთქვათ, $\{E_t : t \in T\}$ არის ტოპოლოგიურ სივრცეთა რაიმე ნებისმიერი ოჯახი. $\prod_{t \in T} E_t$ სივრცეში განვსაზღვროთ ტოპოლოგია შემდეგი წესით:

$\prod_{t \in T} E_t^*$ სახის სიმრავლეთა ოჯახი არის ქვებაზა $\prod_{t \in T} E_t$ სივრცეში, სადაც მოცემული $t_0 \in T$ ინდექსისათვის და მოცემული ღია $G \subset E_{t_0}$ სიმრავლისათვის $E_{t_0}^* = G$ და $E_t^* = E_t$, თუ $t \neq t_0$.

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\prod_{t \in T} E_t$ სივრცის ბაზის ელემენტებს აქვს $\prod_{t \in T} G_t$ სახე, სადაც G_t ($t \in T$) ღია სიმრავლეებია E_t ($t \in T$) სივრცეებში და მხოლოდ სასრული რაოდენობა ინდექსებისათვის განსხვავდებიან E_t სივრცეებისაგან. ამის გარდა, შეიძლება ჩაითვალოს, რომ G_t სიმრავლე ეკუთვნის E_t სიმრავლის ბაზას.

ასეთი წესით განსაზღვრულ ტოპოლოგიას ეწოდება ტიხონოვის ტოპოლოგია ნამრავლ სივრცეში.

§11. მეტრიკული სივრცეები

ტოპოლოგიური სივრცეების მნიშვნელოვან კლასს წარმოადგენს მეტრიკული სივრცეები. მათემატიკური ანალიზის ძირითადი ცნებების (ზღვარი, უწყვეტობა) შემოტანის დროს საჭიროა განისაზღვროს წერტილებს შორის გარკვეული მეტრიკული მახასიათებლები სიბრტყეზე და სივრცეში. ასეთი მიდგომა შესაძლებელია განზოგადდეს უფრო ფართო ობიექტთა კლასებისათვის, რომლებსაც მიეცემა მეტრიკული სივრცის ცნებამდე.

ვთქვათ, E ნებისმიერი სიმრავლეა.

რიცხვით ρ ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია $E \times E$ სიმრავლეზე ეწოდება მეტრიკა E -ზე, თუ ნებისმიერი $x, y, z \in E$ წერტილებისათვის სრულდება შემდეგი პირობები:

1. $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (სამკუთხედის აქსიომა).

სიმრავლეს, რომელშიც შემოტანილია მეტრიკა, მეტრიკული სივრცე ეწოდება. მეტრიკული სივრცის ობიექტებს წერტილები ეწოდებათ. თუ E სიმრავლეზე შემოტანილია ρ მეტრიკა, მაშინ მეტრიკულ სივრცეს აღნიშნავენ (E, ρ) წყვილის სახით, მაგრამ ისევე როგორც ტოპოლოგიური სივრცის შემთხვევაში ხშირად შემოვიფარგლებით უბრალოდ E ჩანაწერით.

მიღებულია, რომ ტერმინი „მეტრიკა“ შეიძლება შეიცვალოს ტერმინით „მანძილი ორ წერტილს შორის“.

მაგალითი 1. ნებისმიერ არაცარიელ სიმრავლე, მასზე განსაზღვრული მეტრიკით

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } x \neq y, \\ 0, & \text{თუ } x = y, \end{cases}$$

არის მეტრიკული სივრცე.

ეს მაგალითი გვიჩვენებს, რომ ნებისმიერ არაცარიელ სიმრავლეზე შესაძლებელია განისაზღვროს მეტრიკა.

მაგალითი 2. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე მასზე განსაზღვრული მეტრიკით

$$\rho(x, y) = |x - y|$$

წარმოადგენს მეტრიკულ სივრცეს.

მაგალითი 3. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე მასზე განსაზღვრული მეტრიკით

$$\rho(m, n) = |m - n|$$

არის მეტრიკული სივრცე.

მაგალითი 4. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე მასზე განსაზღვრული მეტრიკით

$$\rho(m, n) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } m = n, \\ 1 + \frac{1}{m+n}, & \text{თუ } m \neq n, \end{cases}$$

არის მეტრიკული სივრცე.

ბოლო ორი მაგალითი გვიჩვენებს, რომ ერთიდაიგივე სიმრავლეზე შესაძლებელია განისაზღვროს სხვადასხვა მეტრიკა.

მაგალითი 5. ყველა ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ n -ეულების სიმრავლე მასზე განსაზღვრული მეტრიკით

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} (y_k - x_k)^2}$$

არის მეტრიკული სივრცე.

ასეთ მეტრიკულ სივრცეს ეწოდება n -განზომილებიანი ევკლიდეს სივრცე და აღინიშნება R^n სიმბოლოთი.

მაგალითი 6. $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ყველა ნამდვილ უწყვეტ ფუნქციათა $C[a, b]$ სივრცე მასზე განსაზღვრული მეტრიკით

$$\rho(f, g) = \max_{a \leq t \leq b} |g(t) - f(t)|$$

არის მეტრიკული სივრცე.

ვთქვათ, M_K არის $C[a, b]$ სივრცის იმ ყველა f ფუნქციების სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ ლიფშიცის პირობას: ნებისმიერი $t_1, t_2 \in [a, b]$ რიცხვებისათვის სრულდება უტოლობა

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq K \cdot |t_2 - t_1|,$$

სადაც K რაიმე ფიქსირებული რიცხვია. M_K სიმრავლე ჩაკეტილია და ის ემთხვევა $[a, b]$ -ზე ყველა ისეთ ლიფერენცირებად ფუნქციათა სიმრავლის ჩაკეტვას, რომლების აკმაყოფილებენ $|f'(t)| \leq K$ პირობას. ხოლო ფუნქციათა $M = \bigcup_K M_K$ სიმრავლე არ არის ჩაკეტილი. შევნიშნოთ, რომ

$$\overline{M} = C[a, b].$$

მაგალითი 7. განვიხილოთ ყველაშესაძლო ნამდვილ რიცხვთა $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, \dots)$ მიმდევრობების სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 < \infty.$$

ამ სიმრავლეზე განსაზღვრული მეტრიკა

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} (y_k - x_k)^2}$$

მოცემულ სიმრავლეს გადააქცევს მეტრიკულ სივრცედ. ეს სივრცე აღინიშნება l_2 სიმბოლოთი.

მაგალითი 8. განვიხილოთ ყველაშესაძლო ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობების სიმრავლე და მის ნებისმიერ ორ $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, \dots)$ და $y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, \dots)$ წერტილისათვის განვსაზღვროთ მეტრიკა

$$\rho(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|},$$

რომელიც მოცემულ სიმრავლეს გადააქცევს მეტრიკულ სივრცედ.

მიღებული მეტრიკული სივრცე აღინიშნება R^N სიმბოლოთი.

მაგალითი 9. განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა ყველა შემოსაზღვრულ $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, \dots)$ მიმდევრობათა სიმრავლე და მის ნებისმიერ ორ $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, \dots)$ და $y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, \dots)$ წერტილისათვის განვსაზღვროთ მეტრიკა ტოლობით

$$\rho(x, y) = \sup_n |y_n - x_n|.$$

ასეთი მეტრიკა მოცემულ სიმრავლეს გადააქცევს მეტრიკულ სივრცედ.

ყოველი მეტრიკული სივრცე ბუნებრივად წარმოქმნის სხვა მეტრიკულ სივრცეებსაც.

ვთქვათ, M არის E მეტრიკული სივრცის ნებისმიერი ქვესიმრავლე, რომელშიც განსაზღვრულია ρ_E მეტრიკა. თუ M სიმრავლეზე განსაზღვრავთ მეტრიკას

$$\rho_M(x, y) = \rho_E(x, y) \quad (x, y \in M),$$

მაშინ M აგრეთვე იქნება მეტრიკული სივრცე და მას ეწოდება E მეტრიკული სივრცის ქვესივრცე. ამის გამო ρ_M მეტრიკას ეწოდება ინდუცირებული მეტრიკა, წარმოქმნილი ρ_E მეტრიკით.

მაგალითი 10. სფეროზე განსაზღვრული მეტრიკა, რომელიც სფეროს ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილს განსაზღვრავს, როგორც ამ წერტილების შემაერთებული ქორდის სიგრძეს, ინდუცირებულია სივრცეში განსაზღვრული მეტრიკით. მეორე მხრივ, სფეროზე განსაზღვრება მეტრიკა, სადაც სფეროს ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი განსაზღვრება, როგორც იმ უმოკლესი რკალის სიგრძე, რომელიც ძვეს სფეროზე და რომელიც აერთებს მოცემულ წერტილებს ერთმანეთთან. ასეთ შემთხვევაში მიღებული მეტრიკული სივრცე არ იქნება საბაზისო სივრცის ქვესივრცე.

ვთქვათ, E ნებისმიერი სიმრავლეა.

რიცხვით ρ ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია $E \times E$ სიმრავლეზე ეწოდება ფსევდომეტრიკა E -ზე, თუ ნებისმიერი $x, y, z \in E$ წერტილებისათვის სრულდება შემდეგი პირობები:

$$1^\circ. \quad \rho(x, x) = 0;$$

$$2^\circ. \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$$

$$3^\circ. \quad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\rho(x, y) \geq 0.$$

თუ დავუშვებთ შემდეგ პირობას

$$(x \neq y) \Rightarrow [\rho(x, y) \neq 0],$$

მაშინ მივიღებთ ზემოთმოყვანილ მეტრიკის განსაზღვრებას.

ასეთ შემთხვევაში, შესაბამისად, სიმრავლეს, რომელიც აღჭურვილია ფსევდომეტრიკით, ეწოდება ფსევდომეტრიკული სივრცე.

ფსევდომეტრიკულ სივრცეთა თეორია ისეთივე საინტერესოა კვლევის თვალსაზრისით, როგორც მეტრიკულ სივრცეთა თეორია. ჩვენ ფსევდომეტრიკულ სივრცეებს შევხებით ნაწილობრივ და ამის გამო ფაქტებს ამ საკითხის გარშემო მოვიყვანთ საჭიროებისამებრ.

მაგალითი 11. თუ მოცემულია $f: E \rightarrow R$ ფუნქცია, მაშინ

$$\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$$

ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია არის ფსევდომეტრიკა.

ვთქვათ, მოცემულია E მეტრიკული სივრცე. E მეტრიკულ სივრცეში ჩაკეტილი ბირთვი ეწოდება შემდეგ სიმრავლეს:

$$\overline{U}(a, r) = \{x \in E : \rho(a, x) \leq r\}.$$

ამ შემთხვევაში a -ს ეწოდება ბირთვის ცენტრი, ხოლო r -ს კი – ბირთვის რადიუსი.

E მეტრიკულ სივრცეში სფერო ეწოდება შემდეგ სიმრავლეს:

$$S(a, r) = \{x \in E : \rho(a, x) = r\}.$$

ამ შემთხვევაშიც a -ს ეწოდება სფეროს ცენტრი, ხოლო r -ს კი – სფეროს რადიუსი.

სხვაობას

$$U(a, r) = \overline{U}(a, r) \setminus S(a, r) = \{x \in E : \rho(a, x) < r\},$$

ეწოდება ღია ბირთვი ანუ a წერტილის მიდამო.

მართებულია შემდეგი წინადადებები:

ა) a წერტილის ნებისმიერი სასრული მიდამოების თანაკვეთა შეიცავს ამ წერტილის მიდამოს;

ბ) E მეტრიკული სივრცის ორი განსხვავებულ წერტილს გააჩნიათ თანაუკვეთი მიდამოები;

გ) თუ $x \in U(a, r)$, მაშინ x წერტილს გააჩნია მიდამო,

რომელიც მთლიანად შედის $U(a, r)$ -ში.

ტოპოლოგიური სივრცე, რომლის ტოპოლოგიასაც წარმოქმნის რაიმე მეტრიკა, ეწოდება მეტრიზებადი. მაგრამ აქვე შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი ტოპოლოგიური სივრცე არ

არის მეტრიზებადი, თანაც გავითვალისწინოთ, რომ სხვადასხვა მეტრიკამ შეიძლება წარმოქმნას ერთიდაიგივე ტოპოლოგია.

ვთქვათ, მოცემულია ორი მეტრიკული (E_1, ρ_1) და (E_2, ρ_2) სივრცე. $f: E_1 \rightarrow E_2$ გადასახვას ეწოდება უწყვეტი $x_0 \in E_1$ წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ ყველა $x \in E_1$ წერტილისათვის, რომლისთვისაც $\rho_1(x, x_0) < \delta$, სრულდება

$$\rho_2(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$$

უტოლობა.

თუ E_1 და E_2 ტოპოლოგიური სივრცეებია, მაშინ უწყვეტი გადასახვის ცნება ჩამოყალიბდება შემდეგი სახით: f გადასახვას E_1 ტოპოლოგიური სივრციდან E_2 ტოპოლოგიურ სივრცეში ეწოდება უწყვეტი $x_0 \in E_1$ წერტილში, თუ ნებისმიერი V ღია მიდამოსათვის, რომელიც შეიცავს $f(x_0)$ -ს, არსებობს x_0 წერტილის ისეთი U მიდამო, რომ $f(x) \in V$ ნებისმიერი $x \in U$ წერტილისათვის.

თუ $f: E_1 \rightarrow E_2$ არის ურთიერთცალსახა თანადობა მოცემულ სივრცეებს შორის, მაშინ არსებობს $x = f^{-1}(y)$ ($x \in E_1, y \in E_2$) შექცეული გადასახვა E_2 სივრციდან E_1 -ში. თუ f გადასახვა ურთიერთცალსახა და ურთიერთუწყვეტია, მაშინ მას ჰომეომორფული გადასახვა ეწოდება, ხოლო თვით სივრცეებს კი – ჰომეომორფულები.

ჰომეომორფული მეტრიკული სივრცეების მაგალითს წარმოადგენს რიცხვითი ღერძი და ნებისმიერი ინტერვალი, მაგალითად, $(-1, 1)$ ინტერვალი. ამ შემთხვევაში

ჰომეომორფიზმი მყარდება $y = \frac{2}{\pi} \cdot \arctg x$ ფორმულით.

ვთქვათ, კვლავ მოცემულია E მეტრიკული სივრცე.

E მეტრიკული სივრცის წერტილთა $(x_k : k \in N)$ მიმდევრობას ეწოდება ფუნდამენტალური, თუ ის აკმაყოფილებს კოშის კრიტერიუმს: თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი n_ε , რომ ყოველი $n' > n_\varepsilon$ და $n'' > n_\varepsilon$ სრულდება $\rho(x_{n'}, x_{n'') < \varepsilon$ უტოლობა.

მეტრიკული სივრცის განსაზღვრების სამკუთხედის აქსიომიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ყოველი კრებადი მიმდევრობა ფუნდამენტალურია.

თუ E მეტრიკულ სივრცეში ყოველი ფუნდამენტალური მიმდევრობა კრებადია, მაშინ მოცემულ მეტრიკულ სივრცეს სრული სივრცე ეწოდება.

მაგალითი 12. ნამდვილ რიცხვთა R ღერძი, მასზე განსაზღვრული მეტრიკით

$$\rho(x, y) = |x - y|, \quad (x, y \in R)$$

სრული მეტრიკული სივრცეა.

მართლაც, ვთქვათ, $\{x_k : k \in N\}$ ნებისმიერი ფუნდამენტალური მიმდევრობაა R -დან. მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი n_0 , რომ, როცა $m, n > n_0$, სრულდება უტოლობა

$$\rho(x_m, x_n) = |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

კოშის ცნობილი თეორემის თანახმად, ნამდვილ რიცხვთა შემოსაზღვრული მიმდევრობის ზღვრის არსებობის შესახებ, გამომდინარეობს ისეთი $x^* \in R$ რიცხვის არსებობა, რომ $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_k, x^*) = 0$.

ეს კი ამტკიცებს მაგალით 12-ში მოყვანილ ფაქტს.

მაგალითი 13. n -განზომილებიანი ევკლიდეს R^n სივრცე არის სრული მეტრიკული სივრცე.

მართლაც, ვთქვათ, R^n სივრცეში მოცემულია ფუნდამენტალური მიმდევრობა

$$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, \dots,$$

სადაც $x_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$.

რადგან

$$\rho(x_k^{(p)}, x_k^{(q)}) \leq \rho(x_p, x_q)$$

ყოველი $k = 0, 1, \dots, n-1$ ინდექსისათვის, ამიტომ ყოველი $x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots, x_k^{(m)}, \dots$ მიმდევრობა ($k = 0, 1, \dots, n-1$) არის ნამდვილ რიცხვთა ფუნდამენტალური მიმდევრობა. მაგალითი 12-დან გამომდინარეობს, რომ

$$x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} x_k^{(m)} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

ცხადია, რომ $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, \dots$ მიმდევრობა კრებადია $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ წერტილში.

სრული მეტრიკული სივრცეების მაგალითებია: l_2 , $C[a, b]$, R^N და სხვა მეტრიკული სივრცეები.

მაგალითი 14. რაციონალურ რიცხვთა Q სივრცე, მასზე განსაზღვრული მეტრიკით

$$\rho(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|, \quad (r_1, r_2 \in Q)$$

არ არის სრული მეტრიკული სივრცე.

მართლაც, განვიხილოთ რაციონალურ რიცხვთა

$(r_n : n \in N)$ მიმდევრობა, სადაც $r_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. ცხადია, რომ ეს

მიმდევრობა ფუნდამენტალურია, მაგრამ მისი ზღვარი არ არის რაციონალური რიცხვი.

მართებულია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 1. იმისათვის, რომ მეტრიკული სივრცე იყოს სრული აუცილებელი და საკმარისია, რომ მოცემულ სივრცეში ყოველი ერთმანეთში ჩალაგებულ ჩაკეტილ ბირთვთა მიმდევრობას, რომელთა რადიუსები მიისწრაფიან ნულისკენ, ჰქონდეს არაცარიელი თანაკვეთა.

თეორემა 2. სრული მეტრიკული E სივრცის E_0 ქვესიმრავლე სრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა E_0 ჩაკეტილი სიმრავლეა E -ში.

სრული მეტრიკული სივრცეთა თეორიაში ფუნდამენტალურ როლს თამაშობს შემდეგი თეორემა:

თეორემა 3 (ბერი). სრული მეტრიკული E სივრცე არ შეიძლება წარმოვიდგინოთ არსად მკვრივი სიმრავლეების თვლადი გაერთიანების სახით.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ე. ი. $E = \bigcup_{n \in N} M_n$,

სადაც M_n ($n \in N$) არსად მკვრივია E -ში. ვთქვათ, U_0 არის ერთეულოვანი ბირთვი E -ში. რადგან M_0 სიმრავლე არაა მკვრივი U_0 -ში, ამიტომ არსებობს ისეთი ჩაკეტილი ბირთვი $U_1 \subset U_0$, რომლის რადიუსი ნაკლებია $\frac{1}{2}$ -ზე და $U_1 \cap M_0 = \emptyset$.

რადგან M_1 არაა მკვრივი U_1 -ში, ამიტომ იგივე მიზეზით არსებობს ისეთი ჩაკეტილი $U_2 \subset U_1$ ბირთვი, რომლის რადიუსი ნაკლებია $\frac{1}{3}$ -ზე და $U_2 \cap M_1 = \emptyset$. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ ერთმანეთში ჩალაგებულ ჩაკეტილ ბირთვთა $\{U_n : n \in N\}$ მიმდევრობას, რომელთა რადიუსების მიმდევრობა მიისწრაფის ნულისკენ, თანაც $U_n \cap M_n = \emptyset$. თეორემა 1-დან გამომდინარეობს, რომ $\bigcap_{n \in N} U_n \neq \emptyset$. ვთქვათ,

$x \in \bigcap_{n \in N} U_n$. ეს წერტილი, აგების თანახმად, არ ეკუთვნის არც ერთ M_n ($n \in N$) სიმრავლეს. ე. ი. $x \notin \bigcup_{n \in N} M_n$, მაშასადამე,

$E \neq \bigcup_{n \in N} M_n$. მივიღეთ, წინააღმდეგობა.

ამით თეორემა 3 დამტკიცებულია.

თეორემა 3-დან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4. სრულ მეტრიკულ სივრცეში პირველი კატეგორიის სიმრავლის დამატება მეორე კატეგორიის სიმრავლეა.

ვთქვათ, E მეტრიკული სივრცეა. E^* სრული მეტრიკული სივრცეს ეწოდება E მეტრიკული სივრცის გასრულება, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1). E არის E^* სივრცის ქვესივრცე;

2). E ყველგან მკერვიანია E^* -ში, ე. ი. $\overline{E} = E^*$.

მაგალითი 15. ყველა ნამდვილ რიცხვთა სივრცე არის ყველა რაციონალურ რიცხვთა სივრცის გასრულება.

ვიტყვიან, რომ f ბიექცია ორ მეტრიკულ (E_1, ρ_1) და (E_2, ρ_2) მეტრიკულ სივრცეებს შორის არის იზომეტრია, თუ ნებისმიერი $x_1, x_2 \in E_1$ წერტილებისათვის მართებულია ტოლობა

$$\rho_1(x_1, x_2) = \rho_2(f(x_1), f(x_2)).$$

მეტრიკულ სივრცეებს, რომელთა შორის არსებობს იზომეტრია, იზომეტრიული სივრცეები ეწოდებათ.

თეორემა 5 (პაუსდორფი). ნებისმიერი მეტრიკული (E, ρ) სივრცისათვის არსებობს გასრულება, თანაც გასრულება ერთადერთია იზომეტრიამდე სიზუსტით.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ, $\overline{f}(E, R)$ -ით E სივრცის ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეში ყველა შემოსაზღვრულ გადასახვათა სიმრავლე და შემდეგი ტოლობით განვსაზღვროთ ფუნქცია

$$\rho'(f, g) = \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)| \quad (f, g \in \overline{f}(E, R)).$$

ცხადია, რომ ρ' არის მეტრიკა $\overline{f}(E, R)$ სივრცეში, თანაც $(\overline{f}(E, R), \rho')$ მეტრიკული სივრცე სრულია.

ვთქვათ, $p \in E$. ყოველ $x \in E$ წერტილს შევუსაბამოთ $f_x \in \overline{f}(E, R)$ ფუნქცია შემდეგი წესით:

$$(\forall y)(y \in E \Rightarrow f_x(y) = \rho(y, p) - \rho(y, x)).$$

ვაჩვენოთ, რომ ასეთი წესით განსაზღვრული $f_x(y)$ მართლაც ეკუთვნის $\overline{f}(E, R)$ სიმრავლეს. მართლაც,

$$|f_x(y)| = |\rho(y, p) - \rho(y, x)| \leq \rho(p, x),$$

მაშასადამე,

$$\sup_{y \in E} |f_x(y)| \leq \rho(p, x),$$

რაც ნიშნავს $f_x(y)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია და შესაბამისად, $f_x \in \overline{f}(E, R)$.

განვიხილოთ გადასახვა

$$\Phi: E \rightarrow \overline{f}(E, R),$$

ისეთი, რომ

$$(\forall x)(x \in E \Rightarrow \Phi(x) = f_x).$$

ვაჩვენოთ, რომ Φ იზომეტრიული გადასახვაა. მართლაც,

$$(\forall z)(z \in E \Rightarrow |f_x(z) - f_y(z)| = |\rho(z, y) - \rho(z, x)| \leq \rho(x, y)),$$

ამიტომ

$$\sup_{x \in E} |f_x(z) - f_y(z)| \leq \rho(x, y).$$

მეორეს მხრივ, თუ $z = y$, მაშინ

$$|f_x(y) - f_y(y)| = \rho(x, y).$$

მაშასადამე

$$\sup_{x \in E} |f_x(z) - f_y(z)| = \rho(x, y),$$

და შესაბამისად,

$$\rho'(\Phi(x), \Phi(y)) = \rho(x, y).$$

ახლა განვიხილოთ $\Phi(E)$ სიმრავლის ჩაკეტვა $\overline{\Phi(E)}$ მოცემულ $(\overline{f}(E, R), \rho')$ სივრცეში, რომელიც, როგორც სრული მეტრიკული სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე, იქნება სრული და მითითებულ სივრცეში $\Phi(E)$ არის ყველგან მკვრივი სიმრავლე.

დავრწმუნდეთ, რომ (E, ρ) მეტრიკული სივრცის გასრულება ერთადერთია იზომეტრიამდე სიზუსტით.

ვთქვათ, (E_1, ρ_1) და (E_2, ρ_2) არის (E, ρ) სივრცის ორი გასრულება. გადასახვა

$$\varphi: E_1 \rightarrow E_2$$

განსაზღვრულია შემდეგი პირობით

$$(\forall x_1^*)(x_1^* \in E_1 \Rightarrow \varphi(x_1^*) = x_2^*) \quad (x_2^* \in E_2)$$

მაშინ, როცა: თუ (x_n) არის E_1 სივრცის წერტილთა მიმდევრობა, რომელიც კრებადია x_1^* წერტილისაკენ ρ_1 მეტრიკით, მაშინ x_2^* იყოს ისეთი წერტილი E_2 -დან, რომლისკენაც კრებადია (x_n) მიმდევრობა ρ_2 მეტრიკით.

უშუალოდ მოწმდება, რომ გადასახვა φ არის იზომეტრია E_1 სივრციდან E_2 სივრცეში.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

§12. ვექტორული სივრცეები. ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცეები

არაცარიელ L სიმრავლეს, $x, y, z, \dots$ ელემენტებით ეწოდება ვექტორული ანუ წრფივი სივრცე, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

I. ნებისმიერი ორი $x, y \in L$ ელემენტს შეესაბამება ერთადერთი $z \in L$ ელემენტი, რომელსაც მოცემული ელემენტების ჯამი ეწოდება და აღინიშნება $x + y$ სიმბოლოთი, თანაც

$$1) \quad x + y = y + x \quad (\text{კომუტატიურობა});$$

$$2) \quad x + (y + z) = (x + y) + z \quad (\text{ასოციაციურობა});$$

3) L -ში არსებობს ისეთი ელემენტი 0 , რომ $x + 0 = x$, ნებისმიერი $x \in L$ ელემენტისათვის;

4) ნებისმიერი $x \in L$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი ელემენტი $-x$, რომ $x + (-x) = 0$.

II. ნებისმიერი α რიცხვისათვის და ნებისმიერი $x \in L$ ელემენტისათვის განსაზღვრულია $\alpha x \in L$ ელემენტი, რომელსაც ეწოდება x -ის ნამრავლი α -ზე, თანაც

$$1. \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x;$$

$$2. \quad 1 \cdot x = x;$$

$$3. \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x;$$

$$4. \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

იმის და მიხედვით, რომელ რიცხვთა ველზე ვიხილავთ ვექტორულ სივრცეებს, მათი სრულყოფილი სახელწოდებაც გამომდინარეობს ამ სიტუაციიდან (ნამდვილი ვექტორული სივრცე, კომპლექსური ვექტორული სივრცე და ა. შ.).

მაგალითი 1. R რიცხვითი ღერძი, მასზე განსაზღვრული შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციის მიმართ, არის ვექტორული სივრცე.

მაგალითი 2. ნამდვილ რიცხვთა ყველაშესაძლო $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ n -ულების სიმრავლე, სადაც შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციები განსაზღვრულია შემდეგი წესით

$$(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) + (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) = (x_0 + y_0, x_1 + y_1, \dots, x_{n-1} + y_{n-1})$$

$$\alpha(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = (\alpha x_0, \alpha x_1, \dots, \alpha x_{n-1}),$$

წარმოადგენს ვექტორულ სივრცეს. ამ სივრცეს ეწოდება n -განზომილებიანი არითმეტიკული R^n სივრცე.

მაგალითი 3. $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციების სიმრავლე, მასზე განსაზღვრული ფუნქციების შეკრებისა და ფუნქციის რიცხვზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ ქმნის $C[a, b]$ ვექტორულ სივრცეს.

მაგალითი 4. ნამდვილ რიცხვთა ყველაშესაძლო $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, \dots)$ მიმდევრობების სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას

$$l_2 = \left\{ x : x \in R^N \text{ \& } \sum_{i \in N} x_i^2 < +\infty \right\},$$

მასზე განსაზღვრული

$$(x_0, x_1, \dots) + (y_0, y_1, \dots) = (x_0 + y_0, x_1 + y_1, \dots)$$

$$\alpha(x_0, x_1, \dots) = (\alpha x_0, \alpha x_1, \dots)$$

ოპერაციებით, ქმნის ვექტორულ სივრცეს.

მაგალითი 5. ნამდვილ რიცხვთა ყველაშესაძლო $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ მიმდევრობების შემდეგი სიმრავლე, მაგალით 4-ში განსაზღვრული შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ ქმნის R^N ვექტორულ სივრცეს.

ორ ვექტორულ L და L^* სივრცეს ეწოდება იზომორფულები, თუ მათ ელემენტებს შორის არსებობს ისეთი ურთიერთცალსახა თანადობა, რომ

$$(\forall x, y \in L) (\forall x^*, y^* \in L^*) (x \leftrightarrow x^* \wedge y \leftrightarrow y^* \Rightarrow x + y \leftrightarrow x^* + y^* \wedge \wedge \alpha x \leftrightarrow \alpha x^*)$$

ნებისმიერი α რიცხვისთვის.

L ვექტორული სივრცის არაცარიელ M ქვესიმრავლეს ეწოდება წრფივი მრავალსახეობა, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობა:

$$(\forall k) (0 \leq k \leq n-1 \wedge x_k \in M \Rightarrow \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k \in M) \\ (n \in N).$$

ასეთი სახის ყველაშესაძლო წრფივი კომბინაციების სიმრავლე ქმნის ვექტორულ სივრცეს, რომელიც წარმოქმნილია $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ ვექტორებით.

L ვექტორული სივრცის $x, y, \dots, z$ ელემენტებს ეწოდებათ წრფივად დამოკიდებული, თუ არსებობს ისეთი $\alpha, \beta, \dots, \kappa$ რიცხვები, რომ

$$\alpha x + \beta y + \dots + \kappa z = 0.$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში ეს ელემენტები წრფივად დამოუკიდებელია. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, $x, y, \dots, z$ ელემენტები არიან წრფივად დამოუკიდებელი, თუ $\alpha x + \beta y + \dots + \kappa z = 0$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\alpha = \beta = \dots = \kappa = 0$.

L სივრცის ელემენტთა უსასრულო სიმრავლეს ეწოდება წრფივად დამოკიდებული, თუ მისი ნებისმიერი ელემენტთა სასრული სიმრავლე წრფივად დამოკიდებულია.

თუ L სივრცეში არსებობს n წრფივად დამოუკიდებელი ელემენტი, ხოლო ნებისმიერი $n+1$ რაოდენობის ელემენტი წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ ამბობენ, რომ n არის L სივრცის განზომილება. თუ L -ში არსებობს ნებისმიერი უსასრულო რაოდენობის წრფივად დამოუკიდებელი ელემენტი, მაშინ ამბობენ, რომ L სივრცე უსასრულო განზომილებიანია.

მაგალითად, R^n სივრცე n -განზომილებიანი ვექტორული სივრცეა. ამ სივრცეში არსებობს მხოლოდ n წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორი:

$$e_0 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_1 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_{n-1} = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

$C[a, b]$ უსასრულოგანზომილებიანი ვექტორული სივრცეა, რადგან $x_0(t) = 1, x_1(t) = t, \dots, x_{n-1}(t) = t^{n-1}, \dots$ ფუნქციათა უსასრულო სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

n -განზომილებიანი სივრცის ბაზისი ეწოდება n წრფივად დამოუკიდებელ ელემენტთა ნებისმიერ სიმრავლეს.

არაცარიელ $L' \subset L$ ქვესიმრავლეს ეწოდება ქვესივრცე, თუ

$$(\forall x)(\forall y)(x \in L' \wedge y \in L' \Rightarrow \alpha x + \beta y \in L')$$

ნებისმიერი α და β რიცხვებისათვის.

მაგალითად, ყველა იმ ვექტორთა სიმრავლე, რომლებიც პარალელურია რაიმე სიბრტყის ან რაიმე წრფის, არის R^3 სივრცის ქვესივრცე.

რიცხვით f ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია რომელიმე L ვექტორულ სივრცეში, ეწოდება ფუნქციონალი. f ფუნქციონალს ეწოდება ადიტიური, თუ

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (\forall x, y \in L)$$

და ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

ნებისმიერი α რიცხვისათვის.

ადიტიურ, ერთგვაროვან ფუნქციონალს ეწოდება წრფივი ფუნქციონალი.

f წრფივი ფუნქციონალის გული ანუ ნულ-სივრცე ეწოდება იმ $x \in L$ ელემენტთა სიმრავლეს, რომლისთვისაც $f(x) = 0$.

სიმრავლეს $\{x : x \in L \wedge f(x) = a \neq 0\}$ ეწოდება

ჰიპერსიბრტყე. ცხადია, რომ ჰიპერსიბრტყე მიიღება ნულ-სივრცის ძვრით.

მაგალითი 6. ვთქვათ, R^n სივრცეში მოცემულია $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in R^n$ ელემენტი და რიცხვთა რაიძე $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ რიცხვთა n -ეული. მაშინ

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x_i$$

არის წრფივი ფუნქციონალი R^n სივრცეში.

მაგალითი 7. ინტეგრალი

$$I(x) = \int_a^b x(t) dt$$

არის წრფივი ფუნქციონალი $C[a, b]$ სივრცეში.

რაიძე L ვექტორული სივრცის უმცირესი ვექტორული ქვესივრცეა $\{0\}$ სიმრავლე. L ვექტორული სივრცის ვექტორულ ქვესივრცეთა ნებისმიერი ოჯახის თანაკვეთა კვლავ ვექტორული ქვესივრცეა.

ვთქვათ, L ვექტორულ სივრცეზე მოცემულია რაიძე D სიმრავლე. L -ის უმცირეს ქვესივრცეს, რომელიც D -ს შეიცავს, ეწოდება D სიმრავლით წარმოქმნილი ქვესივრცე. თუ D არადავრთიელი სიმრავლეა, მაშინ ქვესივრცე, რომელიც

წარმოქმნილია D სიმრავლით შეიცავს $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i d_i$ სახის

ელემენტებს, სადაც $d_i \in D$, $0 \leq i \leq n-1$, $n \in N$. ქვესივრცეს, რომელიც წარმოქმნილის D სიმრავლით, ეწოდება D სიმრავლის წრფივი გარსი.

U სიმრავლეს ეწოდება გაწონასწორებული L ვექტორულ სივრცეში, თუ ნებისმიერი $x \in U$ ელემენტისათვის და ნებისმიერი $|\alpha| < 1$ რიცხვისათვის, გვაქვს $\alpha x \in U$.

ვთქვათ, მოცემულია L ნამდვილი ვექტორული სივრცე.

$M \subset L$ სიმრავლეს ეწოდება ამოზნექილი, თუ ის სივრცის ნებისმიერ ორ წერტილთან ერთად შეიცავს ამ წერტილების შემაერთებელ მონაკვეთს.

p ფუნქციონალს ეწოდება ამოზნექილი, თუ შესრულებულია პირობა

$$p(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y),$$

ნებისმიერი $x, y \in L$ და $0 \leq \alpha \leq 1$.

p ფუნქციონალს ეწოდება დადებითად-ერთგვაროვანი, თუ

$$p(\alpha x) = \alpha p(x),$$

ნებისმიერი $x \in L$ და $\alpha > 0$.

ცხადია, რომ ამოზნექილი და დადებითად-ერთგვაროვანი ფუნქციონალისათვის შესრუდება უტოლობა

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y).$$

დადებითად-ერთგვაროვან ამოზნექილ ფუნქციონალს ეუწოდოთ ერთგვაროვან-ამოზნექილი ფუნქციონალი. ერთგვაროვან-ამოზნექილი p ფუნქციონალს გააჩნია შემდეგი თვისებები;

ა) $p(0) = 0$;

ბ) $(\forall x)(x \in L \wedge p(x) \leq 0 \Rightarrow p(x) = 0)$;

გ) $(\forall \alpha)(p(\alpha x) \geq \alpha p(x))$.

მაგალითი 8. ყოველი წრფივი ფუნქციონალი არის ერთგვაროვან-ამოზნექილი. თუ f წრფივია, მაშინ

$p(x) = |f(x)|$ ფუნქციონალი არის ერთგვაროვან-ამოზნექილი.

ვთქვათ, L ვექტორული სივრცეა.

ერთგვაროვან-ამოზნექილ p ფუნქციონალს, რომელიც განსაზღვრულია L სივრცეში, ეწოდება ნორმა, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

(1) $p(x) \geq 0$, თანაც $p(x) = 0$ მხოლოდ $x = 0$ წერტილში;

(2) $(\forall x)(\forall y)(x \in L \wedge y \in L \Rightarrow p(x+y) \leq p(x) + p(y))$;

(3) $(\forall \alpha)(p(\alpha x) = |\alpha|p(x))$.

L ვექტორულ სივრცეს, რომელშიც მოცემულია რაიმე ნორმა, ეწოდება ნორმირებული სივრცე. $x \in L$ ელემენტის ნორმა აღინიშნება $\|x\|$ სიმბოლოთი.

სრულ ნორმირებულ სივრცეს ბანახის სივრცე ეწოდება. რადგან ყოველი ნორმირებული სივრცე, მასზე განსაზღვრული მეტრიკით

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

გადაიქცევა მეტრიკულ სივრცედ, ამიტომ ყველა ის ცნება და ფაქტი, რომლებსაც ადგილი ჰქონდა მეტრიკულ სივრცეებში, შეიძლება გადმოვიტანოთ ნორმირებულ სივრცეებშიც.

მაგალითი 9. თუ R -ზე განსაზღვრავთ ნორმას $\|x\| = |x|$ სახით, მაშინ R იქნება ნორმირებული სივრცე.

მაგალითი 10. განვიხილოთ R^n სივრცე და დავეუშვათ, რომ

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} x_k^2},$$

სადაც $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$. ასეთი სახით განსაზღვრული ნორმით R^n სივრცე არის ნორმირებული სივრცე.

წრფივ ფუნქციონალს $f: L \rightarrow R$ ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ $\sup_{\|x\|=1} |f(x)| < \infty$. რიცხვს $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$ ეწოდება f წრფივი ფუნქციონალის ნორმა.

ვექტორულ სივრცეს, მასზე განსაზღვრული სკალარული ნამრავლით, ეწოდება ევკლიდური სივრცე.

ევკლიდეს სივრცეში ნორმა განისაზღვრება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

არანულოვან (x_α) ვექტორთა სიმრავლეს ეწოდება ორთოგონალური, თუ $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ ($\alpha \neq \beta$). (x_α) ორთოგონალურ სიმრავლეს ეწოდება სრული, თუ მისი

ჩაკეტილი წრფივი გარსი ემთხვევა მთელ სივრცეს. სრულ ორთოგონალურ (x_α) სიმრავლეს ეწოდება ორთოგონალური ბაზისი. თუ (x_α) სიმრავლე ისეთია, რომ

$$(x_\alpha, x_\beta) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } \alpha \neq \beta, \\ 1, & \text{თუ } \alpha = \beta, \end{cases}$$

მაშინ მას ორთონორმალური სისტემა ეწოდება.

მაგალითი 11. განვიხილოთ R^n სივრცე, მასზე განსაზღვრული ჩვეულებრივი შეკრების, გამრავლებისა და სკალარული ნამრავლის ოპერაციით, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი სახით:

$$(x, y) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i.$$

ეს სივრცე არის ევკლიდური სივრცე და მასზე ორთოგონალურ ბაზისს ქმნიან შემდეგი ვექტორები:

$$e_0 = (1, 0, 0, \dots, 0),$$

$$e_1 = (0, 1, 0, \dots, 0),$$

.....

$$e_{n-1} = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

მაგალითი 12. განვიხილოთ

$$l_2 = \left\{ x : x \in R^N \text{ \& } \sum_{i \in N} x_i^2 < +\infty \right\}$$

სივრცე, მასზე განსაზღვრული სკალარული ნამრავლის ოპერაციით

$$(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i.$$

ეს სივრცე არის ევკლიდური სივრცე. ამ სივრცეში ორთოგონალურ ბაზისს ქმნის ვექტორთა შემდეგი სისტემა:

I. ნებისმიერი $x, y \in E$ წყვილისათვის და $x+y$ ელემენტის V_{x+y} მიდამოსათვის არსებობს x და y ელემენტების V_x და V_y მიდამოები ისეთი, რომ

$$V_x + V_y \subset V_{x+y};$$

(A და B სიმრავლისთვის $A+B = \{a+b : a \in A \wedge b \in B\}$).

II. როგორიც გინდ იყოს $x \in E$ ელემენტი, რიცხვი α და αx ელემენტის $V_{\alpha x}$, არსებობს x ელემენტის V_x მიდამო და ისეთი $\varepsilon > 0$ რიცხვი, რომ ნებისმიერი β რიცხვისათვის, რომლისთვისაც $|\beta - \alpha| < \varepsilon$, გვაქვს ჩართვა

$$\beta V_x \subset V_{\alpha x}.$$

ადვილი დასანახია, რომ E ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცის ყოველი ვექტორული ქვესივრცე აგრეთვე ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცეა, თუ ის აღჭურვილი იქნება იგივე ტოპოლოგიითა და აღგებრული ოპერაციებით, როგორც გამოსავალი E სივრცე. ასეთ ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცეს ეწოდება E ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცის ქვესივრცე.

ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცის განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცის რამდენიმე თვისება.

1'. თუ $G \subset E$ ღია სიმრავლეა, მაშინ $x_0 + G$ ($x_0 \in E$)

სიმრავლე აგრეთვე ღია სიმრავლეა E -ში;

2'. თუ $G \subset E$ ღია სიმრავლეა და $\alpha \neq 0$, მაშინ $\alpha \cdot G$ აგრეთვე ღია სიმრავლეა E -ში;

3'. ყოველი $x \in E$ წერტილის მიდამოს აქვს $x+V$ სახე, სადაც V არის E სიმრავლის ნულოვანი ელემენტის რაიმე მიდამო (ეს ფაქტი უშუალოდ გამომდინარეობს თვისება 1-დან).

ცხადია, რომ თვისება 2. მართებული იქნება ჩაკეტილი სიმრავლეებისათვისაც.

ვაჩვენოთ 1. თვისების მართებულობა. ვთქვათ, $x \in x_0 + G$, ე. ი. გვექნება $x = x_0 + x'$, სადაც $x' \in G$.

დავუშვათ, რომ $V_{x'}$ არის x' წერტილის მიდამო, რომელიც შედის G -ში. რადგან, $x' = x + (-x_0)$, ამიტომ 1) პირობიდან გამომდინარე არსებობს x წერტილის V_x მიდამო და $(-x_0)$ წერტილის V_{-x_0} მიდამო, რომ $V_x + V_{-x_0} \subset V_{x'}$. ვინაიდან $-x_0 \in V_{-x_0}$, ამიტომ $-x_0 + V_x \subset V_{x'} \subset G$ და შესაბამისად, $V_x \subset x_0 + G$. ეს ნიშნავს, რომ x არის $x_0 + G$ სიმრავლის შიგა წერტილი.

ამით თვისება 1. დამტკიცებულია.

ვექტორული ტოპოლოგიური სივრცის ტოპოლოგიასა და ალგებრულ ოპერაციების მიმართებიდან გამომდინარეობს, რომ ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცეების ტოპოლოგია სავსებით განისაზღვრება ნულის მიდამოთა სისტემით. მართლაც, ვთქვათ, E არის ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე და $x \in E$. თუ V_x არის x წერტილის რაიმე მიდამო, მაშინ $V_x + x$ არის x წერტილის მიდამო. ცხადია, რომ ნებისმიერი $x \in E$ წერტილის მიდამო შეადგება მივიღოთ ასეთი წესით.

მაგალითი 13. ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცეებს განეკუთვნებიან ყველა ნორმირებული სივრცეები.

მაგალითი 14. განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა ყველაშესაძლო $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, \dots)$ მიმდევრობების R^N სივრცე. მოვიყვანოთ ნულის მიდამოების გამსაზღვრელი სისტემა შემდეგი წესით: ყოველი $U(k_0, k_1, \dots, k_{r-1}, \varepsilon)$ მიდამო განისაზღვრება $k_0, k_1, \dots, k_{r-1}$ მთელი რიცხვებითა და $\varepsilon > 0$ რიცხვით და შედგება ყველა იმ $x \in R^N$ წერტილებისაგან, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას:

$$|x_{k_i}| < \varepsilon \quad (i = 0, 2, \dots, r-1).$$

აგებული მიდამოთა სისტემით R^N იქნება ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე.

ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცეს ეწოდება ლოკალურად ამოხსნეილი, თუ მისი ნებისმიერი არაცარიელი ღია სიმრავლე შეიცავს არაცარიელ ამოხსნეილ ღია სიმრავლეს.

შევნიშნოთ, რომ თუ E ლოკალურად ამოხსნეილი სივრცეა, მაშინ ნებისმიერი $x \in E$ წერტილისათვის და მისი ნებისმიერი U მიდამოსათვის არსებობს x -ის ისეთი ამოხსნეილი მიდამო V , რომ $x \in V \subset U$.

მართლაც, ამ წინადადების დამტკიცებისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ მართებულობა $x=0$ წერტილისათვის. ვთქვათ, U არის ნულის რაიმე მიდამო. მაშინ მოიძებნება 0 -ის ისეთი მიდამო V , რომ $V-V \subset U$. რადგან E ლოკალურად ამოხსნეილია, ამიტომ არსებობს არაცარიელი ამოხსნეილი ღია სიმრავლე $V' \subset V$. თუ $y \in V'$, ამიტომ $V'-y$ არის ნულის ამოხსნეილი მიდამო, რომელიც შედის U -ში.

ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცეს ეწოდება ლოკალურად შემოსაზღვრული, თუ ამ სივრცეში არსებობს ნულის შემოსაზღვრული მიდამო.

შევნიშნოთ ასევე, რომ ყოველი ნორმირებული სივრცე ლოკალურად ამოხსნეილია. მართლაც, მასში ნებისმიერი არაცარიელი ღია სიმრავლე შეიცავს რაიმე ბირთვს. ამრიგად, ყოველი ნორმირებული სივრცე ლოკალურად ამოხსნეილი და ლოკალურად შემოსაზღვრულია. შეიძლება ჩვენება იმისა, რომ ნორმირებული სივრცეები მთლიანად ამოწურავენ იმ სივრცეთა სიმრავლეს, რომელთაც გააჩნიათ მითითებული თვისებები ერთდროულად.

ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცეს ეწოდება ნორმირებადი, თუ მასზე არსებობს ისეთი ნორმა, რომ ამ ნორმით ინდუცირებული მეტრიკა თავსებადია მოცემული სივრცის ტოპოლოგიასთან.

მართებულია შემდეგი წინადადებები:

- თუ ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე ლოკალურად შემოსაზღვრულია, მაშინ მას გააჩნია თვლადი ლოკალური ბაზა;

- ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე მეტრიზებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მას გააჩნია თვლადი ლოკალური ბაზა;

- ყოველი ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე არის ჰაუსდორფის სივრცე;

- ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცის ნულის ყოველი მიდამო შეიცავს ნულის გაწონასწორებულ მიდამოს.

G სიმრავლეს ეწოდება ტოპოლოგიური ჯგუფი, თუ ის აღჭურვილია ჯგუფის სტრუქტურით და შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1") $f : (x, y) \rightarrow xy$ გადასახვა $G \times G$ დეკარტული ნამრავლიდან G სიმრავლეში უწყვეტია;

2") $f : x \rightarrow x^{-1}$ გადასახვა G სიმრავლისა თავის თავზე უწყვეტია.

ღია სიმრავლეების ტერმინებში 2") პირობა ჩამოყალიბდება შემდეგი ფორმით: xy ელემენტის ნებისმიერი V მიდამისათვის არსებობს x და y ელემენტების ისეთი U_x და U_y მიდამოები, რომ $U_x U_y \subset V$. ანალოგიურად, 3") პირობა ნიშნავს, რომ x^{-1} ელემენტის ნებისმიერი V მიდამისათვის არსებობს x -ის ისეთი მიდამო U , რომ $U^{-1} \subset V$.

G ტოპოლოგიური ჯგუფის ღია სიმრავლეთა V კლასი, რომელიც შეიცავს ჯგუფის ერთეულოვან e ელემენტს, ეწოდება ბაზისი e წერტილში, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1°. როგორიც გინდ იყოს $x \neq e$ ელემენტი G ტოპოლოგიური ჯგუფიდან, V -ში არსებობს ისეთი U სიმრავლე, რომ $x \notin U$;

2°. ნებისმიერი ორი $U_1, U_2 \in V$ სიმრავლისათვის არსებობს ისეთი $U_3 \in V$ სიმრავლე, რომ $U_3 \subset U_1 \cap U_2$;

3°. ნებისმიერი $U_1 \in V$ სიმრავლისათვის არსებობს ისეთი $U_2 \in V$ სიმრავლე, რომ $U_2^{-1} U_2 \subset U_1$;

4°. ნებისმიერი $U_1 \in V$ სიმრავლისათვის და ნებისმიერი $x \in G$ წერტილისათვის არსებობს ისეთი $U_2 \in V$ სიმრავლე, რომ $U_2 \subset xU_1x^{-1}$;

5°. ნებისმიერი $U_1 \in V$ სიმრავლისათვის და ნებისმიერი $x \in G$ წერტილისათვის არსებობს ისეთი $U_2 \in V$ სიმრავლე, რომ $U_2x \subset U_1$.

G ჯგუფის e ერთეულოვანი ელემენტის ყველა მიდამოთა სიმრავლე ქმნის ბაზისს e წერტილში. პირიქით, თუ რაიმე G ჯგუფში გამოყოფილია V სიმრავლეთა კლასი, რომელიც აკმაყოფილებს 1°–5° პირობებს და თუ სიმრავლეთა ამ კლასში ბაზისად ავიღებთ ისეთი სიმრავლეთა კლასს, რომელიც მიიღება V სიმრავლეთა კლასში შემავალი სიმრავლეების ყველაშესაძლო ძვრებით, მაშინ G ჯგუფი გახდება ტოპოლოგიური ჯგუფი.

ტოპოლოგიური ჯგუფის e ერთეულოვანი ელემენტის U მიდამოს ეწოდება სიმეტრიული, თუ $U^{-1} = U$. ერთეულოვანი ელემენტის ყველა სიმეტრიულ მიდამოთა კლასი ქმნის ბაზისს. თუ V არის e -ს ბაზისი, ხოლო F ნებისმიერი ჩაკეტილი სიმრავლეა G -ში, მაშინ $F = \cap \{UF : U \in V\}$.

G ტოპოლოგიურ ჯგუფის E ქვესიმრავლეს ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ e ერთეულოვანი ელემენტის ნებისმიერი U მიდამოსათვის არსებობს $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ სასრული ოჯახი (თუ $E \neq \emptyset$, მაშინ შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ მითითებული სიმრავლე ეკუთვნის E -ს) ისეთი, რომ სრულდება

$$E \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} x_i U$$
 პირობა. G ტოპოლოგიურ ჯგუფს ეწოდება

ლოკალურად შემოსაზღვრული, თუ მისი ერთეულოვანი ელემენტს გააჩნია შემოსაზღვრული მიდამო. ლოკალურად კომპაქტური ჯგუფის ნებისმიერი ჩაკეტილი ქვეჯგუფი და

ნებისმიერი ნორმალური გამყოფი არის ლოკალურად კომპაქტური ჯგუფი.

მაგალითი 15. ნებისმიერი G ჯგუფისათვის ტრივიალური და დისკრეტული ჯგუფები ამავე დრის არიან არის ტოპოლოგიური ჯგუფები (იხილეთ, მაგალითები 1, 2, §10).

მაგალითი 16. G ტოპოლოგიური ჯგუფის ნებისმიერი ქვეჯგუფი, აღჭურვილი G ტოპოლოგიით, აგრეთვე არის ტოპოლოგიური ჯგუფი.

მაგალითი 17. ვთქვათ, G რაიმე ჯგუფია და $\{G_i : i \in I\}$ არის G -ზე ტოპოლოგიათა ნებისმიერი ოჯახი ისეთი, რომ G ტოპოლოგიური ჯგუფია ყოველი G_i ($i \in I$) ტოპოლოგიის მიმართ. მაშინ G იქნება ტოპოლოგიური ჯგუფი $\sup_{i \in I} G_i$

ტოპოლოგიის მიმართაც. შევნიშნოთ, რომ $\sup_{i \in I} G_i$ ტოპოლოგია

G -ზე არის ყველაზე სუსტი ტოპოლოგია G ჯგუფის ტოპოლოგიებს შორის და უფრო ძლიერი, ვიდრე ყოველი G_i ($i \in I$) ტოპოლოგია.

§13. კომპაქტური სიმრავლეები

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ბევრი ფუნდამენტალური თვისება იძლევა გარკვეული განზოგადების ბიძგს აბსტრაქტული სიმრავლეების შემთხვევაში. სწორედ ასეთ შემთხვევასთან გვაქვს საქმე, როცა ვსაუბრობთ კომპაქტური (აგრეთვე უწოდებენ ბიკომპაქტური, კვაზიკომპაქტური) სიმრავლეებზე. როცა ნამდვილ რიცხვთა ღერძის ფუნდამენტალურ თვისებებზე მივუნიშნებთ ერთ-ერთი არსებითი თვისება მოცემულია ჰეინე-ბორელი-ლესბეგის კლასიკურ თეორემაში. ეს არის ის შემთხვევა, როცა თეორემა იმდენად გამოხატავს სიმრავლის თვისებას, რომ მას ვღებულობთ, როგორც განსაზღვრებას.

E ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება კომპაქტური, თუ E სივრცის ნებისმიერი ღია დაფარვიდან გამოიყოფა სასრული ქვედაფარვა.

კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცე, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ აქსიომას:

ტოპოლოგიური სივრცის ორ განსხვავებულ წერტილს გააჩნია თანაუკვეთი მოდამოები,
ეწოდება კომპაქტი.

მოყვანილ აქსიომას ეწოდება ჰაუსდორფის განცალკებადობის აქსიომა. სივრცეს, რომელიც აკმაყოფილებს ჰაუსდორფის განცალკებადობის აქსიომას, ეწოდება T_2 -სივრცე ანუ ჰაუსდორფის სივრცე.

ტოპოლოგიური სივრცის კომპაქტურობა შეიძლება დავახასიათოდ ჩაკეტილი სიმრავლის ტერმინებში. ამისათვის დაგეჭირდება შემდეგი განსაზღვრა.

რაიმე A სიმრავლის ქვესიმრავლეთა კლასს ეწოდება ცენტრირებული, თუ ამ სისტემის ნებისმიერი სასრული ელემენტთა თანაკვეთა არაცარიელია.

კომპაქტურობის განსაზღვრებიდან და ორადულობის პრინციპიდან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა:

თეორემა 1. იმისათვის, რომ ტოპოლოგიური სივრცე იყოს კომპაქტური აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ სივრცის ჩაკეტილ სიმრავლეთა ყოველი ცენტრირებულ სისტემას ჰქონდეს არაცარიელი თანაკვეთა.

დამტკიცება. ვთქვათ, (F_α) არის E ტოპოლოგიური სივრცის რაიმე ქვესიმრავლეთა ოჯახი. დე მორგანის ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$E \setminus \bigcup \{F : F \in F_\alpha\} = \bigcap \{E \setminus F : F \in F_\alpha\}.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ (F_α) სიმრავლეთა ოჯახი ფარავს E ტოპოლოგიურ სივრცეს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა (F_α) სიმრავლეთა ოჯახის ელემენტების დამატებების თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა. E სივრცის კომპაქტურობა ნიშნავს, რომ ყოველი ღია სიმრავლეთა ოჯახი, რომლის არცერთი სასრული ქვეოჯახი არ ფარავს E -ს, არ ფარავს E სივრცეს. ეს მოთხოვნა კი არის ტოლფასი იმისა, რომ ყოველი

ჩაკეტილ სიმრავლეთა ცენტრირებულ სისტემას აქვს არაცარიელი თანაკვეთა.

თეორემა 2. თუ E კომპაქტური სივრცეა, მაშინ მის ყოველ უსასრულო ქვესიმრავლეს გააჩნია ერთი მაინც ზღვართი წერტილი.

დამტკიცება. თუ E შეიცავს უსასრულო ქვესიმრავლეს, რომელსაც არა აქვს არც ერთი ზღვართი წერტილი, მაშინ ამ უსასრულო სიმრავლეში ავიღოთ თვლადი $X = (x_0, x_1, \dots)$ სიმრავლე, რომელსაც აგრეთვე არ გააჩნია ზღვართი წერტილი. მაგრამ მაშინ $X_n = (x_n, x_{n+1}, \dots)$ სიმრავლეთა ოჯახი ქმნის ჩაკეტილ სიმრავლეთა ცენტრირებულ სისტემას E -ში, რომლებსაც ექნებათ ცარიელი თანაკვეთა. ეს ნიშნავს, რომ E არ არის კომპაქტური სივრცე.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3. კომპაქტური E სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე კომპაქტურია.

დამტკიცება. ვთქვათ, F არის E კომპაქტური სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე და $\{F_\alpha\}$ კი არის $F \subset E$ ქვესივრცის ჩაკეტილ სიმრავლეთა ცენტრირებული სისტემა. მაშინ ყოველი F_α სიმრავლე აგრეთვე ჩაკეტილია E -ში და შესაბამისად, $\{F_\alpha\}$ აგრეთვე ცენტრირებული სისტემაა E -ში, ე. ი. $\bigcap_\alpha F_\alpha \neq \emptyset$. თეორემა 1-ის თანახმად, F სიმრავლე კომპაქტურია.

თეორემა 3 დამტკიცებულია.

თეორემა 3-დან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი:

თეორემა 4. კომპაქტის ნებისმიერი ჩაკეტილი ქვესიმრავლე კომპაქტია.

რადგან მეტრიკული სივრცე წარმოადგენს ტოპოლოგიური სივრცის კერძო შემთხვევას, ამიტომ ყველა ის ფაქტი, რომელიც მართებულია ტოპოლოგიური სივრცის შემთხვევაში მართებულია მეტრიკული სივრცის შემთხვევაშიც. მაგრამ მეტრიკული სივრცის მეტრიკული მახასიათებლები იძლევა კომპაქტური სიმრავლეების სხვა სახის დახასიათების საშუალებას.

მეტრიკული (E, ρ) სივრცის ქვესიმრავლეს ეწოდება კომპაქტური, თუ მისი ნებისმიერი უსასრულო მიმდევრობიდან გამოიყოფა კრებადი ქვემიმდევრობა.

იმის მიხედვით კრებადი ქვემიმდევრობის ზღვარი ეკუთვნის ამ სიმრავლეს თუ მის დამატებას, მას შესაბამისად უწოდებენ კომპაქტურს თავისთავში და კომპაქტურს სივრცეში.

ამისათვის დაგვჭირდება რამდენიმე დამხმარე ცნება.

ვთქვათ, M არის (E, ρ) მეტრიკული სივრცის რაიმე ქვესიმრავლე და $\varepsilon > 0$ რაღაც რიცხვია.

$A \subset E$ სიმრავლეს ეწოდება ε -ბადე M სიმრავლისათვის, თუ ნებისმიერი $x \in M$ წერტილისათვის მოიძებნება ერთი მაინც წერტილი $a \in A$, ისეთი რომ $\rho(x, a) < \varepsilon$.

შევნიშნოთ, რომ არ არის აუცილებელი, რომ $A \subset M$. უფრო მეტიც, შესაძლებელია, რომ $A \cap M = \emptyset$.

მაგალითად, მოეღ რიცხვთა სიმრავლე ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე ქმნის $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -ბადეს.

M სიმრავლეს (E, ρ) მეტრიკულ სივრცეში ეწოდება სავსებით შემოსაზღვრული, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მისთვის არსებობს სასრული ε -ბადე.

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5 (ჰაუსდორფი). იმისათვის, რომ (E, ρ) მეტრიკულ სივრცის M ქვესიმრავლე იყოს კომპაქტური, აუცილებელია, მაგრამ (E, ρ) სივრცის სისრულის შემთხვევაში საკმარისია, რომ M სიმრავლე იყოს სავსებით შემოსაზღვრული.

დამტკიცება. აუცილებლობა. ვთქვათ, M სიმრავლე კომპაქტურია (E, ρ) მეტრიკულ სივრცეში. დავაფიქსიროთ $\varepsilon > 0$ რიცხვი და ავიღოთ ნებისმიერი $x_0 \in M$ წერტილი.

თუ $\rho(x, x_0) < \varepsilon$ ნებისმიერი $x \in M$ წერტილისათვის, მაშინ ε -ბადე (ერთელემენტისანი) უკვე აგებულია. წინააღმდეგ

შემთხვევაში მოიძებნება ისეთი წერტილი $x_1 \in M$, რომ $\rho(x_0, x_1) \geq \varepsilon$. გვაქვს ორი შემთხვევიდან ერთ-ერთი: ან ნებისმიერი $x \in M$ წერტილისათვის $\rho(x, x_0)$ ან $\rho(x, x_1)$ ნაკლებია ε -ზე, მაშინ სასრული ε -ბადე (ორელემენტიანი) უკვე აგებულია, ან მოიძებნება $x_2 \in M$ წერტილი ისეთი, რომ $\rho(x_2, x_0) \geq \varepsilon$, $\rho(x_2, x_1) \geq \varepsilon$, და ა. შ.

ვაჩვენოთ, რომ ასეთი სასრული ნაბიჯით აგებული წერტილთა $x_0, x_1, \dots$ სიმრავლე ქმნის ε -ბადეს. მართლაც, ეს ასე რომ არ იყოს მივიღებდით $x_0, x_1, \dots$ წერტილთა ისეთ მიმდევრობას, რომ $\rho(x_i, x_j) \geq 0$ ($i \neq j$). რაც იმას ნიშნავს, რომ ეს მიმდევრობა, ისევე როგორც მისი ნებისმიერი ქვემიმდევრობა, არ იქნება კრებადი. ეს კი ეწინააღმდეგება გამოსავალი სივრცის კომპაქტურობის პირობას.

საკმარისობა. ვთქვათ, ნებისმიერი ε რიცხვისათვის არსებობს ε -ბადე. განვიხილოთ 0-სკენ კრებადი კლებადი $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots$ მიმდევრობა და ყოველი ε_k ($k \in N$) რიცხვისათვის ავაგოთ ε_k -ბადე:

$$x_0', x_1', \dots, x_{n_1}',$$

$$x_0'', x_1'', \dots, x_{n_2}'',$$

.....

განვიხილოთ M სიმრავლის ნებისმიერი უსასრულო $\{\bar{x}_k : k \in N\}$ მიმდევრობა და დავამტკიცოთ, რომ მისგან გამოიყოფა კრებადი ქვემიმდევრობა. ε_1 -ბადის ყოველ $x_0', x_1', \dots, x_{n_1}'$ წერტილზე შემოვხაზოთ სფეროები რადიუსით ε_1 და ცენტრებით ამ წერტილებში. მაშინ $\{\bar{x}_k : k \in N\}$ მიმდევრობის ყველა წერტილი მიეკუთვნება ამ სფეროებს. რადგან წერტილების სიმრავლე უსასრულოა, ხოლო სფეროების სიმრავლე კი სასრული, ამიტომ თუნდაც ერთი

სფერო მაინც შეიცავს $\{\bar{x}_k : k \in N\}$ მიმდევრობის უსასრულო რაოდენობის წერტილებს. ასეთი სფერო აღვნიშნოთ S_0 -ით, ხოლო მოცემული მიმდევრობის იმ უსასრულო წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც ეკუთვნიან S_0 -ს კი M_0 -ით. ახლა განვიხილოთ $\mathcal{E}_2$ -ბადის ის წერტილები, რომლებიც შედის S_0 -ში და ყოველ ასეთ წერტილებზე შემოვსახოთ სფეროები რადიუსით $\mathcal{E}_2$ და ცენტრებით ამ წერტილებში. ამ შემთხვევაშიც არსებობს თუნდაც ერთი სფერო, აღვნიშნოთ ის S_1 -ით, რომელიც შეიცავს M_0 სიმრავლის უსასრულო რაოდენობის წევრებს და ეს სიმრავლე აღვნიშნოთ M_1 -ით. ცხადია, რომ $M_1 \subset M_0$. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ მივიღებთ სფეროთა $S_0 \supset S_1 \supset \dots$ მიმდევრობას და აგრეთვე ნულისკენ კრებად რადიუსთა მიმდევრობას. ამის შემდეგ ავირჩიოთ წერტილთა მიმდევრობა ისე, რომ შესრულდეს პირობები:

$$\bar{x}_{k_0} \in S_0, \quad \bar{x}_{k_0} \notin S_1,$$

$$\bar{x}_{k_1} \in S_1, \quad \bar{x}_{k_1} \notin S_2$$

.....

მაშინ $\{\bar{x}_{k_m}\}$ მიმდევრობა იქნება $\{\bar{x}_k\}$ მიმდევრობის საძიებელი ფუნდამენტალური ქვემიმდევრობა. ნამდვილ რიცხვთა R ღერძის სისრულის გამო ამ ქვემიმდევრობის ზღვარი ეკუთვნის R და შესაბამისად, $\{\bar{x}_{k_m}\}$ მიმდევრობა კრებადია.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

უსასრულოგანზომილებიანი სივრცის განსაზღვრებების საფუძველზე ადვილად მტკიცდება შემდეგი თეორემა.

თეორემა 6. უსასრულოგანზომილებიან სივრცეში ყოველი კომპაქტი არსად მკვრივი სიმრავლეა.

ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცეს ეწოდება ლოკალურად კომპაქტური, თუ არსებობს ნულის მიდამო, რომლის ჩაკეტივაც კომპაქტურია.

თეორემა 7. ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე არის სასრულგანზომილებიანი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის ლოკალურად კომპაქტურია.

მაგალითი. ნამდვილ რიცხვთა ადიტიური R ჯგუფი სტანდარტული ტოპოლოგიით არის კომპუტატიური ლოკალურად კომპაქტურ ჯგუფი (იხილეთ, მაგალითი 3, §10).

ამ პარაგრაფის ბოლოს მოვიყვანოთ ტიხონოვის თეორემა, რომელიც წარმოადგენს სივრცეთა ნამრავლის ანალიზში ერთ-ერთ ფუნდამენტალურ წინადადებას.

თეორემა 8. კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეთა ნებისმიერი ოჯახის ნამრავლი კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეა ტიხონოვის ტოპოლოგიის მიმართ.

შევნიშნოთ, რომ ტიხონოვის თეორემა ექვივალენტურია ამორჩევის აქსიომის. ამ თეორემის დამტკიცებაში გამოიყენება ის ფაქტი, რომ არაცარიელ სიმრავლეთა ოჯახის ნებისმიერი დეკარტული ნამრავლი არაცარიელია, რაც თავის მხრივ წარმოადგენს ამორჩევის აქსიომის სხვაგვარ ჩამოყალიბებას. მეორე მხრივ, ჯ. კელიმ დაამტკიცა, რომ ტიხონოვის თეორემის მართებულობიდან გამომდინარეობს ამორჩევის აქსიომა. რაც იმას ნიშნავს, რომ (ZF) სიმრავლეთა თეორიაში ამორჩევის აქსიომა და ტიხონოვის თეორემა ექვივალენტურია.

§14. სეპარაბელური და არასეპარაბელური სივრცეები

სივრცეს, რომელის შეიცავს თვლად ყველგან მკვრივ ქვესიმრავლეს, სეპარაბელური სივრცე ეწოდება. თუ სივრცე არ არის სეპარაბელური, მას არასეპარაბელური სივრცე ეწოდება. სრულ სეპარაბელურ მეტრიკულ სივრცეს პოლონური სივრცე ეწოდება.

სეპარაბელური სივრცის მაგალითებია: R სივრცე, სადაც თვლადი ყველგან მკვრივი ქვესიმრავლეა რაციონალურ

რიცხვითა სიმრავლე, R^n სივრცე, სადაც თვლადი ყველგან მკვრივი ქვესიმრავლეა ვექტორთა სიმრავლე რაციონალური კოორდინატებით, $C[a, b]$ სივრცე, სადაც თვლადი ყველგან მკვრივი ქვესიმრავლეა ყველა რაციონალურ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრების სიმრავლე, l_2 და R^N სივრცეებში – ამ სივრცეების თვლადი ყველგან მკვრივი ქვესიმრავლეა ვექტორული ქვესივრცე, რომელიც შედგება ნამდვილ რიცხვთა ყველაშესაძლო ფინიტური მიმდევრობებისგან.

შეგახსენებთ, რომ R^N სივრცის ყველაშესაძლო ფინიტური მიმდევრობების სიმრავლე განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$R^{(N)} = \{x : x \in R^N \text{ \& Card } \{i : i \in N \text{ \& } x_i \neq 0\} < \omega\}.$$

თეორემა 1. თუ მეტრიკული სივრცე სავსებით შემოსაზღვრულია, მაშინ ის სეპარაბელურია.

დამტკიცება. მართლაც, ყოველი $n \in N \setminus \{0\}$ რიცხვისათვის

ავაგოთ $\frac{1}{n}$ -ბადე. თუ განვიხილავთ აგებული სიმრავლეების გაერთიანებას ყველა n -სათვის, მივიღებთ თვლად ყველგან მკვრის სიმრავლეს.

აქვე შევნიშნოლ, რომ რადგან სეპარაბელურ მეტრიკულ სივრცეებს გააჩნიათ თვლადი ბაზა, ამიტომ ყოველ სავსებით შემოსაზღვრულ მეტრიკულ სივრცეს აგრეთვე გააჩნია თვლადი ბაზა.

თეორემა 2. სეპარაბელური მეტრიკული სივრცის ყოველი მეტრიკული ქვესივრცე სეპარაბელურია.

დამტკიცება. ვთქვათ, (E, ρ) სეპარაბელური მეტრიკული სივრცეა, $D = \{x_k : k \in N\}$ თვლადი ყველგან მკვრივი სიმრავლეა E -ში, ხოლო E_0 არის E -ს ქვესიმრავლე. ავიღოთ დადებით რიცხვების ნულისკენ კრებადი მიმდევრობა $\{\varepsilon_n : n \in N\}$ და ყოველი $k = 0, 1, \dots$ რიცხვისათვის E_0 -ში ვიპოვოთ ისეთი z_{k_n} ელემენტი, რომ

$$\rho(x_k, z_{k_n}) < \rho(x_k, E_0) + \varepsilon_n, \text{ სადაც } \rho(x_k, E_0) = \inf_{x \in E_0} \rho(x_k, x).$$

ვთქვათ, $x \in E_0$ და $\varepsilon > 0$. მოიძებნება ისეთი $x_k \in D$ ელემენტი, რომ $\rho(x, x_k) < \varepsilon$. ავიღოთ n იმდენად დიდი, რომ შესრულდეს $\varepsilon_n < \varepsilon$ პირობა. მაშინ გვაქვს

$$\begin{aligned} \rho(x_k, z_{k_n}) &\leq \rho(x, x_k) + \rho(x_k, z_{k_n}) < \varepsilon + \rho(x_k, E_0) + \varepsilon_n \leq \\ &\leq \varepsilon + \rho(x_k, x) + \varepsilon_n < 3\varepsilon, \end{aligned}$$

საიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ $\{z_{k_n}\}$ სიმრავლე ყველგან მკვრივია E_0 -ში.

ამით თეორემა 2 დამტკიცებულია.

არასეპარაბელური მეტრიკული სივრცის მაგალითს წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა ყველა შემოსაზღვრული მიმდევრობების სიმრავლე (იხილეთ, მაგალითი 9, §11) მასზე განსაზღვრული მეტრიკით

$$\rho(x, y) = \sup_n |y_n - x_n|.$$

მართლაც, ვთქვათ, M არის ამ სივრცის ქვესიმრავლე, რომელიც შედგება ისეთი $\bar{x}(x_0, x_1, \dots)$ ელემენტებისაგან, სადაც x_k ($k \in N$) უდრის 1-ს ან 0-ს. ცხადია, რომ მანძილი M სიმრავლის ნებისმიერ ორ ელემენტს შორის ტოლია 1-ის. რადგან M სიმრავლე ექვივალენტურია ყველა ორობითი $0, a_0 a_1 \dots$ წილადების სიმრავლის, სადაც a_k ($k \in N$) უდრის 1-ს ან 0-ს, ამიტომ $\text{card}(M) = c$.

ავიღოთ $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$ რიცხვი და დავუშვათ, რომ არსებობს

მოცემული სივრცის ისეთი D ქვესიმრავლე, რომ შესრულდება პირობა

$$\rho(\bar{x}, y) < \varepsilon < \frac{1}{3},$$

სადაც $y \in D$. ამ შემთხვევაში სივრცის განსხვავებულ წერტილებს შეესაბამება D სიმრავლის განსხვავებული წერტილები, რომლებიც აკმაყოფილებენ ბოლო დამოკიდებულებას. წინააღმდეგ შემთხვევაში გვექნებოდა

$$\rho(\bar{x}_1, y) < \frac{1}{3} \text{ და } \rho(\bar{x}_2, y) < \frac{1}{3} \quad (\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in M, y \in D),$$

საიდანაც მივიღებდით

$$\rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2) < \rho(\bar{x}_1, y) + \rho(\bar{x}_2, y) < \frac{2}{3}.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ D სიმრავლე არათვლადია და მოცემული სივრცე არ შეიცავს ყველგან მკვრივ თვლად ქვესიმრავლეს.

არასეპარაბელური მეტრიკული სივრცეებისათვის გვაქვს შემდეგი კრიტერიუმი.

თეორემა 3. შემდეგი ორი წინადადება ექვივალენტურია

1) (E, ρ) მეტრიკული სივრცე არასეპარაბელურია;

2) არსებობს $\varepsilon > 0$ რიცხვი და არათვლადი $\{x_\xi : \xi < \omega_1\}$

წერტილთა სიმრავლე E სივრციდან ისეთი, რომ შესრულებულია პირობა

$$(\forall \zeta)(\forall \xi)(\zeta < \omega_1 \ \& \ \xi < \omega_1 \ \& \ \xi \neq \zeta \Rightarrow \rho(x_\zeta, x_\xi) \geq \varepsilon).$$

დამტკიცება. $1) \Rightarrow 2)$. დავუშვათ, რომ შესრულებულია 1) წინადადება. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ რადგან (E, ρ) მეტრიკული სივრცე არასეპარაბელურია, ამიტომ არსებობს ისეთი $\varepsilon > 0$ რიცხვი, რომ ε -ზე ნაკლები რადიუსის მქონე ბირთვების ნებისმიერი თვლადი ოჯახი არ წარმოადგენს E -ს დაფარვას.

ტრანსფინიტური ინდუქციის მეთოდით ავაგოთ $\{x_\xi : \xi < \omega_1\}$ წერტილთა ω_1 - მიმდევრობა E სივრცეში, რომელიც დააკმაყოფილებს 2) პირობას.

დავუშვათ, რომ $\xi < \omega_1$ ორდინალისათვის სივრცის წერტილთა ნაწილობრივი $\{x_\xi : \xi < \xi\}$ მიმდევრობა უკვე აგებულია.

$B_{x,r}$ – ით აღნიშნოთ ბირთვი E სივრცეში ცენტრით x წერტილში და რადიუსით r . ჩვენი დაშვების თანახმად, გვექნება

$$E \setminus \bigcup_{\zeta < \xi} B_{x_\zeta, \varepsilon} \neq \emptyset.$$

ამიტომ x_ξ წერტილად შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერი წერტილი მითითებული სხვაობიდან. ე. ი.

$$x_\xi \in E \setminus \bigcup_{\zeta < \xi} B_{x_\zeta, \varepsilon}.$$

ამით $\{x_\zeta : \zeta \leq \xi\}$ წერტილთა $(\xi + 1)$ -მიმდევრობა აგებულია, რომელიც აკმაყოფილებს 2) პირობას.

თუ გავაგრძელებთ ამ პროცესს ω_1 ორდინალამდე, მივიღებთ სასურველ ω_1 -მიმდევრობას.

2) $\Rightarrow$ 1). ვთქვათ სრულდება 2) პირობა და ვაჩვენოთ, რომ (E, ρ) მეტრიკული სივრცე არასეპარაბელურია. თუ ყოველ $x_\xi \in E$ წერტილისთვის განვიხილავთ $B_{x_\xi, \frac{\varepsilon}{2}}$ ბირთვს, მაშინ

ცხადია, რომ $\left\{ B_{x_\xi, \frac{\varepsilon}{2}} : \xi < \omega_1 \right\}$ სიმრავლეთა ოჯახი იქნება დიზიუნქტიური.

ვთქვათ, $\{y_k : k < \omega\}$ ნებისმიერი თვლადი წერტილთა სიმრავლეა სივრცეში. რადგან

$$\left\{ B_{x_\xi, \frac{\varepsilon}{2}} : \xi < \omega_1 \right\}$$

არათვლადი დიზიუნქტიური სიმრავლეთა ოჯახია E -ში, ამიტომ არსებობს ორდინალი $\xi_0 < \omega_1$ ისეთი, რომ

$$B_{x_{\xi_0}, \frac{\varepsilon}{2}} \cap \left(\bigcup_{k \in N} y_k \right) = \emptyset.$$

ეს კი ნიშნავს, რომ (E, ρ) მეტრიკული სივრცე არასეპარაბელურია.

თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა კი დავუბრუნდეთ ნორმირებულ სივრცეებს და მოვიყვანოთ მნიშვნელოვანი თეორემა წრფივი ფუნქციონალის გაგრძელების შესახებ.

თეორემა 4 (ხანი-ბანახი). ეთქვას p წარმოადგენს ერთგვაროვან-ამოზნექილ ფუნქციონალს ნამდვილ ვექტორულ L სივრცეში და L_0 არის L სივრცის წრფივი ქვესივრცე. თუ f_0 არის წრფივი ფუნქციონალი L_0 -ზე და

$$(\forall x)(x \in L_0 \Rightarrow f_0(x) \leq p(x)), \quad (1)$$

მაშინ f_0 შეიძლება გაავარძელოთ L სივრცეზე განსაზღვრულ f წრფივ ფუნქციონალამდე, რომლისთვისაც შესრულდება პირობა

$$(\forall x)(x \in L \Rightarrow f(x) \leq p(x)).$$

ხანი-ბანახის თეორემა შეიძლება ჩამოყალიბდეს შემდეგი ფორმით:

ნებისმიერი წრფივი შემოსაზღვრული f ფუნქციონალი, რომელიც განსაზღვრულია წრფივი ნორმირებული სივრცის წრფივ M მრავალსახეობაზე, შეიძლება გაავარძელოთ L სივრცეებზე ისე, რომ f ფუნქციონალის ნორმა არ გაიზარდეს.

ამ თეორემის დამტკიცება შედგება ორი საფეხურისაგან. პირველ საფეხურზე დგინდება f ფუნქციონალის საჭირო გაგრძელების არსებობა M -დან $M_1 \in L$ მრავალსახეობამდე, რომელიც მოჭიმულია $\{M, z\}$ სიმრავლეზე, სადაც $z \notin M$.

ნებისმიერი $u \in M_1$ ელემენტი ერთადერთი გზით წარმოიდგინება შემდეგი სახით: $u = tz + x$, $x \in M$. ამიტომ f ფუნქციონალის გაგრძელებას ექნება სახე

$$f_1(tz + x) = t f_1(z) + f(x),$$

სადაც იდეა მდგომარეობს $f_1(z)$ მუდმივის ამორჩევაში, თანაც ისე რომ ნორმა არ გაიზარდოს. ეს არის სუფთა ტექნიკური ამოცანა და შეიძლება იხილოთ ნებისმიერ სახელმძღვანელოში.

რაც შეეხება მეორე საფეხურს, უნდა განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

თუ L სივრცე სეპარებელურია, მაშინ f ფუნქციონალის გაგრძელება ხდება ეტაპობრივად

$$M_1 = \{M, x_0\}, M_2 = \{M_1, x_1\}, \dots, M_{k+1} = \{M_k, x_k\},$$

სადაც $x_k \notin M_k$ ელემენტის ამორჩევა ხდება L სივრცის ყველგან მკვრივი ქვესიმრავლიდან. საბოლოოდ მიიღება f ფუნქციონალის გაგრძელება.

არასეპარებელური სივრცის შემთხვევაში ამორჩევის აქსიომას გვერდს ვერ ავუვლით. ამ შემთხვევაში განიხილება f ფუნქციონალის ყველაშესაძლო გაგრძელებათა სიმრავლე, რომლებიც დალაგებულია შემდეგი მიმართებით:

$$f' \leq f'' \Leftrightarrow \text{dom}(f') \subset \text{dom}(f'').$$

ასეთი გაგრძელებათა ფუნქციონალების ოჯახის ნებისმიერი დალაგებული ქვესიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია ფუნქციონალით, რომელიც განსაზღვრულია განსაზღვრის არეების გაერთიანებაზე. ცორნის ლემის თანახმად, ასეთ ოჯახს გააჩნია მაქსიმალური ელემენტი, რომელის ამავე დროს იქნება საძიებელი ფუნქციონალი.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

§15. ბორელის სიმრავლეები. ბერის თვისების მქონე სიმრავლეები

ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეების ცნებების შემოტანის შემდეგ დავუბრუნდეთ ბორელის სიმრავლის ცნებას, რომელიც კონკრეტული მაგალითის სახით შემოვიტანეთ რიცხვითი ღერძის შემთხვევაში (იხილეთ §9). ბორელის სიმრავლის ცნება გარკვეული თვალსაზრისით წარმოადგენს ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეების ცნებების განზოგადებას იმ აზრით, რომ ასეთ სიმრავლეებზე ჩატარებულია სიმრავლურ-თეორიული ოპერაციები.

E ტოპოლოგიური სივრცეში ბორელის სიმრავლეთა B კლასი არის უმცირესი სიმრავლეთა ოჯახი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1') ყოველი ჩაკეტილი სიმრავლე ეკუთვნის B -ს;

2') $(\forall A)(A \in B \Rightarrow A' \in B)$;

3') $(\forall n) \left(n \in N \wedge A_n \in B \Rightarrow \bigcap_{n \in N} A_n \in B \right)$.

ცხადია, რომ ბორელის სიმრავლის განსაზღვრა შესაძლებელია მოყვანილ იქნას შემდეგი ექვივალენტური ფორმით:

E ტოპოლოგიური სივრცეში ბორელის სიმრავლეთა B კლასი არის უმცირესი სიმრავლეთა ოჯახი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1') ყოველი ღია სიმრავლე ეკუთვნის B -ს;

2') $(\forall A)(A \in B \Rightarrow A' \in B)$;

3') $(\forall n) \left(n \in N \wedge A_n \in B \Rightarrow \bigcup_{n \in N} A_n \in B \right)$.

მარტივი სიმრავლურ-თეორიული მეთოდებით მტკიცდება, რომ ტოპოლოგიური სივრცეში ბორელის სიმრავლეთა კლასი წარმოადგენს შემდეგი ტრანსფინიტული მიმდევრობის გაერთიანების სახით

$$B = F_0 \cup F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_\alpha \cup \dots,$$

სადაც:

1°) F_0 არის ჩაკეტილ სიმრავლეთა კლასი;

2°) F_α სიმრავლეთა ოჯახი არის $\{F_\xi : \xi < \alpha\}$ სიმრავლეთა

ოჯახის თვლადი მიმდევრობების თანაკვეთა ან გაერთიანება, დამოკიდებული იმაზე ღუწია თუ კენტი α ორდინალი.

ისევე როგორც ზევით მოყვანილ შემთხვევაში ამ სიტუაციაშიც გვაქვს ბოლო დებულების ექვივალენტური წინადადება:

ტოპოლოგიური სივრცეში ბორელის სიმრავლეთა კლასი წარმოადგენს შემდეგი ტრანსფინიტული მიმდევრობის გაერთიანების სახით

$$B = G_0 \cup G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_\alpha \cup \dots,$$

სადაც:

1°) G_0 არის ღია სიმრავლეთა კლასი;

2°) G_α სიმრავლეთა ოჯახი არის $\{G_\xi : \xi < \alpha\}$

სიმრავლეთა ოჯახის თვლადი მიმდევრობების თანაკვეთა ან გაერთიანება, დამოკიდებული იმაზე ღუწია თუ კენტი α ორდინალი.

შემდგომში E ტოპოლოგიური სივრცის ბორელის σ -ალგებრას ავღნიშნავთ $B(E)$ სიმბოლოთი.

ბორელის σ -ალგებრის სტრუქტურას აქვს არსებითი მნიშვნელობა ჩვენი შემდგომი მასალის გადმოცემისათვის და ამიტომ სასურველია მოვიყვანოთ სხვა მიდგომები (რა თქმა უნდა ექვივალენტური) ამ საკითხის არსის უკეთ გაგებისათვის.

ტოპოლოგიურ E სივრცეს ეწოდება სრულყოფილი, თუ მისი ყოველი ჩაკეტილი ქვესიმრავლე არის G_δ ტიპის ქვესიმრავლე ან ყოველი ღია სიმრავლე არის F_σ ტიპის ქვესიმრავლე E -ში.

ბორელის სიმრავლის განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. ვთქვათ, $B^*(E)$ არის E ტოპოლოგიური სივრცის ყველა ღია ქვესიმრავლეთა უმცირესი (ჩართვის თვალსაზრისით) კლასი, რომელიც ჩაკეტილია თვლადი გაერთიანებისა და თვლადი თანაკვეთის ოპერაციების მიმართ. თუ E არის სრულყოფილი ტოპოლოგიური სივრცე, მაშინ $B(E) = B^*(E)$.

რაიმე ტოპოლოგიური E სივრცისათვის შესაძლებელია $B^*(E)$ სიმრავლეთა კლასის განსაზღვრა ტრანსფინიტური რეკურსიის პრინციპის გამოყენებით. მართლაც, ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$B^*(E) = B_0^*(E) \cup B_1^*(E) \cup \dots \cup B_\xi^*(E) \cup \dots \quad (\xi < \omega_1),$$

სადაც $B_\xi^*(E)$ ($\xi < \omega_1$) კლასი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

1. $B_0^*(E)$ არის E სივრცის ყველა ღია სიმრავლეთა კლასი;

2. კენტი ξ ორდინალისათვის $B_\xi^*(E)$ სიმრავლეთა კლასი არის $\bigcup_{\zeta < \xi} B_\zeta^*(E)$ კლასის ნებისმიერი ელემენტების ყველაშესაძლო თვლადი თანაკვეთა;

3. ლუწი $\xi > 0$ ორდინალისათვის $B_\xi^*(E)$ სიმრავლეთა კლასი არის $\bigcup_{\zeta < \xi} B_\zeta^*(E)$ კლასის ნებისმიერი ელემენტების ყველაშესაძლო თვლადი გაერთიანება.

ცხადია, რომ ყოველი ტოპოლოგიური E სივრცისათვის $B^*(E) \subset B(E)$.

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2. ვთქვათ, E არის სრულყოფილი ტოპოლოგიური სივრცე. მაშინ ამ სივრცის ბორელის σ -ალგებრა $B(E)$ არის უმცირესი (ჩართვის თვალსაზრისით) სიმრავლეთა K კლასი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) E სივრცის ყველა ღია სიმრავლე ეკუთვნის K ;

2) სიმრავლეთა K კლასი ჩაკეტილია თვლადი თანაკვეთის ოპერაციის მიმართ;

3) სიმრავლეთა K კლასი ჩაკეტილია ამ კლასის წყვილ-წყვილად დიზიუნქტური ელემენტების თვლადი გაერთიანების ოპერაციის მიმართ.

დამტკიცება. სიმრავლეთა K კლასის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ $K \subset B(E)$.

დავუშვათ, რომ

$$H = \{X \subset E : X \in K \text{ \& } E \setminus X \in K\}.$$

აღვილია შემოწმება იმისა, რომ სიმრავლეთა H კლასისათვის სრულდება შემდეგი პირობები:

1. E სივრცის ყველა ღია სიმრავლე ეკუთვნის H ;

2. სიმრავლეთა H კლასი ჩაკეტილია თვლადი თანაკვეთის ოპერაციის მიმართ;

3. სიმრავლეთა H კლასი ჩაკეტილია ამ კლასის წყვილ-წყვილად დიზიუნქტური ელემენტების თვლადი გაერთიანების ოპერაციის მიმართ.

სიმრავლეთა K კლასის განსაზღვრებიდან ჩანს, რომ $K = H$. ასევე, K სიმრავლეთა კლასი არის E სივრცის σ -ალგებრა, რომელიც შეიცავს ამ სივრცის ყველა ღია ქვესიმრავლეს. ამიტომ $B(E) \subset K$.

ამით თეორემა 2 დამტკიცებულია.

ვთქვათ, E ტოპოლოგიური სივრცეა.

ვიტყვი, რომ $X \subset E$ სიმრავლეს გააჩნია ბერის თვისება E -ში, თუ X შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით

$$X = (G \cup Y) \setminus Z,$$

სადაც $G \subset E$ არის ღია სიმრავლე, ხოლო Y და Z კი არიან პირველი კატეგორიის სიმრავლეები E -დან.

აღვილი დასანახია ამ განსაზღვრების ექვივალენტური განსაზღვრებები:

$X \subset E$ სიმრავლე ფლობს ბერის თვისებას, თუ

$$X = (G \setminus Y) \cup Z,$$

სადაც G, Y და Z იგივე სახის სიმრავლეებია E -ში, როგორც ეს იყო წინა განსაზღვრაში.

$X \subset E$ სიმრავლე ფლობს ბერის თვისებას E -ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ არსებობს ისეთი $G \subset E$ სიმრავლე და ისეთი პირველი კატეგორიის $V \subset E$ სიმრავლეები, რომ

$$X = G \Delta V.$$

თეორემა 3. X სიმრავლე ფლობს ბერის თვისებას E ტოპოლოგიური სივრცეში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ის წარმოიდგინება $X = F \Delta V$ სახით, სადაც F ჩაკეტილი სიმრავლეა, ხოლო V კი - პირველი კატეგორიის სიმრავლეა E -ში.

დამტკიცება. თუ $X = G \Delta V_1$, სადაც G ღია სიმრავლეა, V_1 კი - პირველი კატეგორიის სიმრავლე, მაშინ $F_1 = \overline{G} \setminus G$ სიმრავლე არსად მკვრივი ჩაკეტილი სიმრავლეა, ხოლო $V = F_1 \Delta V_1$ სიმრავლე არის პირველი კატეგორიის.

თუ $F = \overline{G}$, მაშინ

$$X = G \Delta V_1 = (\overline{G} \Delta F_1) \Delta V_1 = \overline{G} \Delta (F_1 \Delta V_1) = F \Delta V.$$

ახლა ვთქვათ, $X = F \Delta V$ და G არის F სიმრავლის შიგა წერტილთა სიმრავლე. მაშინ $V_1 = F \setminus G$ სიმრავლე არსად მკვრივი სიმრავლეა, ხოლო $V_2 = V_1 \Delta V$ სიმრავლე კი პირველი კატეგორიის სიმრავლეა და

$$X = F \Delta V = (G \Delta V_1) \Delta V = G \Delta (V_1 \Delta V) = G \Delta V_2.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ რადგან ნებისმიერი A და B სიმრავლეებისათვის E -დან $(A \Delta B)' = A' \Delta B$, ამიტომ $(G \Delta V)' = G' \Delta V$.

მაშასადამე, მართებულია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 4. ბერის თვისების მქონე სიმრავლის დამატება აგრეთვე ფლობს ბერის თვისებას.

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5. E ტოპოლოგიური სივრცის ბერის თვისებების მქონე სიმრავლეთა კლასი σ -ალგებრას.

დამტკიცება. ვთქვათ, $X_i = G_i \Delta V_i$ ($i \in N$) არის ბერის თვისების მქონე სიმრავლეთა თვლადი ოჯახი E -ში. დაეუშვათ, რომ

$$G = \bigcup_{i \in N} G_i, \quad V = \bigcup_{i \in N} V_i, \quad X = \bigcup_{i \in N} X_i.$$

ცხადია, რომ G ღია სიმრავლეა, V არის პირველი კატეგორიის სიმრავლე და $G \setminus V \subset X \subset G \cup V$. მაშასადამე, $G \Delta X \subset V$ სიმრავლე პირველი კატეგორიის სიმრავლეა და $X = G \Delta (G \Delta X)$ სიმრავლე ფლობს ბერის თვისებას. მიღებული ფაქტი თეორემა 8-სთან ერთად გვაძლევს თეორემა 9-ის დამტკიცებას.

შემდგომში E ტოპოლოგიური სივრცის ბერის თვისების მქონე სიმრავლეთა σ -ალგებრას აღვნიშნავთ $B_0(E)$ სიმბოლოთი.

ვთქვათ, მოცემულია $(E, \mathfrak{V})$ ტოპოლოგიური სივრცე. ამ სივრცის ყველა პირველი კატეგორიის სიმრავლეთა კლასი აღვნიშნოთ $F_0(E)$ სიმბოლოთი.

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 6. $B_0(E) = F_0(E) \cup \mathfrak{V}$.

შევნიშნოთ, რომ თუ E ტოპოლოგიური სივრცეა, მაშინ ბორელის σ -ალგებრა წარმოქმნილია $\mathfrak{V}$ ტოპოლოგიით. ამიტომ საზოგადოდ ადგილი აქვს ჩართვას

$$B(E) \subset B_0(E),$$

მაგრამ შესაძლებელია მოვიყვანოთ არათვლადი ტოპოლოგიური სივრცის მაგალითები, სადაც ადგილი ექნება $B(E) = B_0(E)$ ტოლობას.

ბორელისა და ბერის სიმრავლეთა კლასით წარმოქმნილ σ -ალგებრებს შემდგომში დავუბრუნდებით მრავალჯერ.

ვთქვათ, მოცემულია $(E_1, \mathfrak{I}_1)$ და $(E_2, \mathfrak{I}_2)$ ტოპოლოგიური სივრცეები და f არის გადასახვა E_1 -დან E_2 -ში.

მოცემულ f გადასახვას ეწოდება ბორელის გადასახვა, თუ შესრულებულია პირობა:

$$(\forall Z)(Z \in B(E_2) \Rightarrow f^{-1}(Z) \in B(E_1)).$$

აქედან გამომდინარე ცხადია, რომ თუ f არის ბორელის გადასახვა, მაშინ

$$(\forall Z)(Z \in \mathfrak{I}_2 \Rightarrow f^{-1}(Z) \in B(E_1)).$$

თუ მოცემულია $(E_1, \mathfrak{I}_1)$ და $(E_2, \mathfrak{I}_2)$ პოლონური ტოპოლოგიური სივრცეები და ბორელის გადასახვა

$$g: X \rightarrow Y \quad (X \in B(E_1), Y \in B(E_2))$$

არის ბიექცია, მაშინ შექცეული გადასახვა

$$g^{-1}: Y \rightarrow X \quad (X \in B(E_1), Y \in B(E_2))$$

აგრეთვე ბორელის გადასახვაა. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, g არის ბორელის იზოფორმიზმი X და Y სიმრავლეებს შორის.

ვიტყვი, რომ გადასახვას

$$f: E_1 \rightarrow E_2$$

გააჩნია ბერის თვისება, თუ ყოველი ღია $G \subset E_2$ სიმრავლისათვის $f^{-1}(G)$ სიმრავლეს აქვს ბერის თვისება E_1 -ში.

მოყვანილი განსაზღვრებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა:

თეორემა 7. ვთქვათ, მოცემულია E_1 და E_2 ტოპოლოგიური სივრცეები და f არის გადასახვა E_1 -დან E_2 -ში. მაშინ შემდეგი სამი წინადადება ექვივალენტურია:

1. f გადასახვას გააჩნია ბერის თვისება;

2. ყოველი ჩაკეტილი $F \subset E_2$ სიმრავლისათვის $f^{-1}(F)$ სიმრავლეს გააჩნია ბერის თვისება E_1 -ში;

3. ყოველი ბორელის $Z \subset E_2$ სიმრავლისათვის $f^{-1}(Z)$ სიმრავლეს გააჩნია ბერის თვისება E_1 -ში.

კერძოდ, ყოველ ბორელის $f: E_1 \rightarrow E_2$ გადასახვას გააჩნია ბერის თვისება.

დამტკიცების გარეშე მოვიყვანოთ თეორემები, რომლებიც გამოიყენება მთელ რიგ სიტუაციებში.

თეორემა 8. ვთქვათ, E_1 და E_2 პოლონური სივრცეებია. თუ გადასახვა

$$g: X \rightarrow E_2 \quad (X \in B(E_1))$$

არის ინიექციური და უწყვეტი, მაშინ $g(X)$ ბორელის სიმრავლეა E_2 -ში.

თეორემა 9. ვთქვათ X და Y პოლონური ტოპოლოგიური სივრცეების ბორელის სიმრავლეებია. თუ $\text{card}(X) = \text{card}(Y)$, მაშინ X და Y სიმრავლეებს შორის არსებობს ბორელის იზომორფიზმი.

მაგალითი. თუ E არის თვლადი ტოპოლოგიური სივრცე, რომლის ყოველი ერთელემენტიანი სიმრავლე არის ჩაკეტილი სიმრავლე, მაშინ $B(E) = P(E)$, სადაც $P(E)$ სიმბოლოთი აღნიშნულია E სიმრავლის ბულეანი.

ცხადია, რომ $X = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ და $N = \{0, 1, 2, \dots\}$

სიმრავლეები არიან R ტოპოლოგიური სივრცის ქვესივრცეები და ყოველი $f: X \rightarrow N$ გადასახვა არის ბორელის იზომორფიზმი.

ვთქვათ, E რაიმე ტოპოლოგიური სივრცეა. საზოგადოდ,

$$B(E \times E) \neq B(E) \times B(E).$$

თუ განვიხილავთ ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრულ ტოპოლოგიურ სივრცეს (იხილეთ, §10, მაგალითი 3), მაშინ

$$B(R \times R) = B(R) \times B(R).$$

მართლაც, ადვილია ჩვენება იმისა, რომ

$$B(R) \times B(R) \subset B(R \times R).$$

მეორეს მხრივ, თუ W არის ღია სიმრავლე $R \times R$ დეკარტულ ნამრაველში, მაშინ არსებობენ $(U_n : n \in N)$ და $(V_n : n \in N)$ ღია სიმრავლების მიმდევრობები R -დან, რომ W წარმოიდგინება, როგორც გაერთიანება $U_n \times V_n$ ($n \in N$) სახის სიმრავლეებისა. ე. ი.

$$B(R \times R) \subset B(R) \times B(R).$$

უფრო ზოგადად, თუ მოცემულია ტოპოლოგიურ სივრცეთა $\{E_i : i \in I\}$ ოჯახი და $E = \prod_{i \in I} E_i$, მაშინ

$$\prod_{i \in I} B(E_i) \subset B(E),$$

ხოლო თუ მოცემულია ტოპოლოგიურ სივრცეთა თვლადი $\{E_n : n \in N\}$ ოჯახი, სადაც ყოველ E_n ($n \in N$) სივრცეს გააჩნია ღია სიმრავლეების თვლადი ბაზა, მაშინ

$$\prod_{n \in N} B(E_n) = B(E),$$

სადაც $E = \prod_{n \in N} E_n$.

§16. სიმრავლის ფუნქცია. ზომა რბოლზე

ვთქვათ, მოცემულია საბაზისო E სიმრავლე და მასზე განსაზღვრული სიმრავლეთა რაიმე M კლასი.

სიმრავლეთა M კლასზე განსაზღვრულ f ფუნქციას ეწოდება სიმრავლის ფუნქცია. თუ $\text{ran}(f) \subset R$, მაშინ f -ს ეწოდება სიმრავლის ნამდვილი ფუნქცია. ამ შემთხვევაშიც, როგორც ყოველთვის, R -ით აღნიშნულია ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე.

მაგალითი 1. ვთქვათ, M არის ყველაშესაძლო მართკუთხედების სიმრავლე სიბრტყეზე. თუ ყოველ მართკუთხედს M კლასიდან შევესაბამებთ მის ფართობს, მაშინ მივიღებთ სიმრავლის ნამდვილ ფუნქციას.

მაგალითი 2. ვთქვათ, M არის ნამდვილ რიცხვთა ღერძის ყველაშესაძლო (a, b) ($a, b \neq \pm \infty$) სახის ინტერვალთა კლასი. თუ ყოველ ინტერვალს M კლასიდან შევესაბამებთ ამ ინტერვალის სიგრძეს, მაშინ მივიღებთ სიმრავლის ნამდვილ ფუნქციას.

ვთქვათ, საბაზისო E სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლეთა M კლასზე განსაზღვრულია ნამდვილი ფუნქცია

$$\mu: M \rightarrow R,$$

რომელიც ღებულობს სასრულ ან უსასრულო მნიშვნელობებს.

μ ფუნქციას ეწოდება ადიტიური თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$$\begin{aligned} (\forall A)(\forall B)(A \in M \& B \in M \& A \cup B \in M \& A \cap B = \emptyset \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)). \end{aligned}$$

μ ფუნქციას ეწოდება სასრულად-ადიტიური თუ M სიმრავლეთა კლასის ნებისმიერი სასრული დიზიუნქტიური $\{M_0, M_1, \dots, M_{n-1}\}$ სიმრავლეთა ოჯახისათვის, რომელთა გაერთიანება ეკუთვნის M -ს, სრულდება ტოლობა

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} M_k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu(M_k).$$

μ ფუნქციას ეწოდება თვლადად-ადიტიური ანუ σ -ადიტიური, თუ M სიმრავლეთა კლასის ნებისმიერი დიზიუნქტიური $\{M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, \dots\}$ სიმრავლეთა მიმდევრობისათვის, რომელთა გაერთიანება ეკუთვნის M -ს, სრულდება ტოლობა

$$\mu\left(\bigcup_{k \in N} M_k\right) = \sum_{k \in N} \mu(M_k).$$

თუ შესრულებულია შემდეგი პირობა:

$$M \subset \bigcup_{n \in N} M_k \text{ და } \mu\left(\bigcup_{k \in N} M_k\right) \leq \sum_{k \in N} \mu(M_k),$$

მაშინ სიმრავლეთა μ ფუნქციას ეწოდება თვლადად ნახევრად-ადიტიური.

μ ფუნქციას ეწოდება მონოტონური, თუ შესრულებულია პირობა

$$(\forall X)(\forall Y)(X \in M \ \& \ Y \in M \ \& \ X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)).$$

μ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი ქვემოდან $A \in M$ სიმრავლეზე, თუ ნებისმიერი სიმრავლეთა ზრდადი მიმდევრობისათვის M -დან

$$M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_{n-1} \subset \dots,$$

რომლისთვისაც $\lim_n M_n = A$, სრულდება ტოლობა

$$\lim_n \mu(M_n) = \mu(A).$$

μ -ს ეწოდება უწყვეტი ზემოდან $A \in M$ სიმრავლეზე, თუ M სიმრავლეთა კლასის ნებისმიერი კლებადი სიმრავლეთა მიმდევრობისათვის M -დან

$$M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_{n-1} \supset \dots,$$

რომლისთვისაც $\lim_n M_n = A$ და თუნდაც ერთი მაინც n -სათვის $|\mu(M_n)| < \infty$, სრულდება ტოლობა

$$\lim_n \mu(M_n) = \mu(A).$$

μ ფუნქციას ეწოდება ზუბსტრაქციული, თუ შესრულებულია პირობა

$$(\forall X)(\forall Y)(X \in M \& Y \in M \& X \subset Y \& Y \setminus X \in M \& |\mu(X)| < \infty \Rightarrow \mu(Y \setminus X) = \mu(Y) - \mu(X)).$$

μ ფუნქციას ეწოდება ზომა თუ ის განსაზღვრულია რომელიმე $\mathbb{R}$ რგოლზე, არაუარყოფითი, თვლადად-ადიტიურია და $\mu(\emptyset) = 0$.

რადგან მართებულია

$$\bigcup_{k=0}^{n-1} M_k = M_0 \cup M_1 \cup \dots \cup M_{n-1} \cup \{\emptyset\} \cup \{\emptyset\} \cup \dots$$

ტოლობა, ამიტომ $\mathbb{R}$ რგოლზე ყოველი ზომა სასრულად-ადიტიურია.

მაგალითი 3. ვთქვათ, f არაუარყოფითი ნამდვილი ფუნქციაა, რომელიც განსაზღვრულია რაიმე M სიმრავლეზე და ღებულობს სასრულ ან უსასრულო მნიშვნელობებს.

ვთქვათ, $\mathbb{R}$ არის რგოლი, რომელიც შეიცავს M სიმრავლის ყველაშესაძლო სასრულ ქვესიმრავლეებს. შემდეგი პირობით განსაზღვრული μ ფუნქციონალი

$$\mu(\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \text{ და } \mu(\emptyset) = 0$$

$$(x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in M)$$

არის ზომა $\mathbb{R}$ რგოლზე.

მაგალითი 4. ვთქვათ, f არის ნამდვილი ერთი ცვლადის სასრული, ზრდადი და უწყვეტი ფუნქცია. მაშინ ყველა მარცხნიდან ჩაკეტილი და მარჯვნიდან ღია ინტერვალების კლასზე შემდეგი ტოლობით განსაზღვრული ფუნქციონალი

$$\mu([a, b]) = f(b) - f(a)$$

არის ზომა (ამ შემთხვევაში $\mathbb{R}$ რეალი წარმოქმნილია ყველა მარცხნიდან ჩაკეტილი და მარჯვნიდან ღია ინტერვალების სასრული ოჯახების გაერთიანებით, იხილეთ, §9).

მაგალითი 5. მაგალითი 2 შეიძლება განზოგადდეს R^n ($n \in N$) სივრცეებისთვისაც. კერძოდ, თუ დავუშვებთ, რომ R^n სივრცეში ინტერვალებს აქვს სახე

$$I = \{(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) : a_k \leq x_k < b_k, 0 \leq k \leq n-1\},$$

მაშინ μ ზომა R^n სივრცის ასეთი სახის ინტერვალების კლასით წარმოქმნილ რეოლზე განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით:

$$\mu(I) = \prod_{k=0}^{n-1} (b_k - a_k).$$

ვთქვათ, საბაზისო E სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაიმე $\mathbb{R}$ რეოლზე განსაზღვრულია რაიმე μ ზომა.

μ ზომას ეწოდება სასრული, თუ ნებისმიერი $A \in \mathbb{R}$ სიმრავლისათვის, სრულდება $\mu(A) < +\infty$ უტოლობა.

μ ზომას ეწოდება σ -სასრული, თუ არსებობს $\{X_i : i \in N\}$ სიმრავლეთა თვლადი ოჯახი E -დან ისეთი, რომ

$$(\forall i)(i \in N \Rightarrow X_i \in \mathbb{R}),$$

$$\bigcup_{i \in N} X_i = E,$$

$$(\forall i)(i \in N \Rightarrow \mu(X_i) < +\infty).$$

μ ზომას ეწოდება არანულოვანი (არატრივიალური, არაგადაგვარებული), თუ

$$\mu(E) \neq 0.$$

μ ზომას ეწოდება სრული, თუ შესრულებულია პირობა

$$((\forall X)(X \in \mathbb{R} \ \& \ \mu(X) = 0)) \Rightarrow ((\forall Y)(Y \subset X \Rightarrow Y \in \mathbb{R})).$$

μ ზომას ეწოდება არაატომური, თუ

$$(\forall X)(X \in \mathbb{R} \ \& \ \mu(X) > 0 \Rightarrow (\exists Y)(Y \subset X \ \& \ Y \in \mathbb{R} \ \& \ 0 < \mu(Y) < \mu(X))).$$

μ ზომას ეწოდება დიფუზიური, თუ შესრულებულია პირობა

$$(\forall x)(x \in E \ \& \ \{x\} \in \mathbb{R} \ \& \ \mu(x) = 0).$$

μ ზომას ეწოდება ალბათური, თუ

$$E \in \mathbb{R}, \quad \mu(E) = 1.$$

ზომებთან დაკავშირებულ სხვა განსაზღვრებებს მოვიყვანოთ შემდგომში საჭიროებისამებრ.

§17. ზომის თვისებები

ვთქვათ, E საბაზისო სიმრავლეა, ხოლო $\mathbb{R}$ არის E -ს ქვესიმრავლეთა რაიმე რგოლი, ხოლო μ კი $\mathbb{R}$ -ზე განსაზღვრული ზომაა.

მოვიყვანოთ $\mathbb{R}$ რგოლზე განსაზღვრული μ ზომის ძირითადი თვისებები.

თეორემა 1. სიმრავლეთა რაიმე $\mathbb{R}$ რგოლზე განსაზღვრული ზომა მონოტონური და ზუბსტრაქციულია.

დამტკიცება. რადგან, ნებისმიერი $X \in \mathbb{R}$ და $Y \in \mathbb{R}$ სიმრავლეებისათვის გვაქვს თანაფარდობა

$$X \in \mathbb{R} \ \& \ Y \in \mathbb{R} \ \& \ X \subset Y \ \& \ Y \setminus X \in \mathbb{R} \Rightarrow Y = X \cup (Y \setminus X),$$

შევნიშნოთ, რომ $X \cap (Y \setminus X) = \emptyset$. ზომის ადიტიურობის გამო გვექნება

$$\mu(Y) = \mu(X) + \mu(Y \setminus X).$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\mu(Y \setminus X) = \mu(Y) - \mu(X),$$

რაც ნიშნავს μ ზომის ზუბსტრაქციულობას.

რადგან $\mu(Y \setminus X) \geq 0$, ამიტომ ბოლო ტოლობიდან მივიღებთ

$$\mu(X) \leq \mu(Y).$$

რაც ნიშნავს μ ზომის მონოტონურობას.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2. სიმრავლეთა $\mathbb{R}$ რგოლზე განსაზღვრული ზომა არის სიმრავლის თვლადად ნახევრად-ადიტიური ფუნქცია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\mathbb{R}$ რგოლზე განსაზღვრულია μ ზომა, $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, \dots \in \mathbb{R}$ და $A \subset \bigcup_{k \in N} A_k$ ნებისმიერი

სიმრავლეა.

განვიხილოთ $\{B_k : k \in N\}$ სიმრავლეთა მიმდევრობა $\mathbb{R}$ -დან, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი წესით:

$$B_0 = A_0; \quad B_k = A_k \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} A_i.$$

$\{B_k : k \in N\}$ სიმრავლეთა ოჯახის აგებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ეს სიმრავლეთა ოჯახი დიზიუნქტიურია და $\bigcup_{k \in N} A_k = \bigcup_{k \in N} B_k$. რაც იმას ნიშნავს, რომ $A \subset \bigcup_{k \in N} B_k$.

ცხადია, რომ

$$A = \left(\bigcup_{k \in N} B_k \right) \cap A = \bigcup_{k \in N} (B_k \cap A),$$

$$B_k \cap A \in \mathbb{R}, \quad B_k \cap A \subset B_k \subset A_k \quad (k \in N).$$

ზომის თვლადად-ადიტიურობისა და მონოტონურობის გამო მივიღებთ

$$\mu(A) = \sum_{k \in N} \mu(B_k \cap A) \leq \sum_{k \in N} \mu(B_k) \leq \sum_{k \in N} \mu(A_k).$$

ამით თეორემა 2 დამტკიცებულია.

თეორემა 3. ვთქვათ, $\{A_n\}$ არის $\mathbb{R}$ რგოლის დიზიუნქტიური სიმრავლეთა სასრული ან უსასრულო მიმდევრობა და $A \in \mathbb{R}$ ნებისმიერი სიმრავლეა, რომლისთვისაც სრულდება ჩართვა

$$\bigcup_n A_n \subset A.$$

თუ μ არის სიმრავლეთა $\mathbb{R}$ რგოლზე განსაზღვრული ზომა, მაშინ

$$\sum_n \mu(A_n) \leq \mu(A).$$

დამტკიცება. თუ $\{A_n\}$ სიმრავლეთა ოჯახი სასრულია, მაშინ $\bigcup_n A_n \in \mathbb{R}$ და, შესაბამისად,

$$\sum_n \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \mu(A).$$

თუ მოცემული $\{A_n\}$ სიმრავლეთა ოჯახი თვლადია, მაშინ ბოლო უტოლობაში გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $n \rightarrow \infty$ და მივიღებთ სასურველ უტოლობას.

თეორემა 4. ზომა არის ქვემოდან უწყვეტი ფუნქცია განსაზღვრის არის ნებისმიერ ელემენტზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, საბაზისო სივრცის ქვესიმრავლეთა რაიმე $\mathbb{R}$ რგოლზე განსაზღვრულია μ ზომა, $A \in \mathbb{R}$ და $\{A_n\}$ არის $\mathbb{R}$ რგოლის ელემენტთა ისეთი ზრდადი მიმდევრობა, რომ

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

ცხადია, რომ

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

განვიხილოთ სიმრავლეთა დიზიუნქტიური $(A_{n+1} \setminus A_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ მიმდევრობა და A სიმრავლე წარმოვადგინოთ გაერთიანების სახით

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_{n+1} \setminus A_n).$$

მივიღეთ A სიმრავლის დაშლა, თანაც ყოველი შესაკრები $A_{n+1} \setminus A_n$ ($n = 0, 1, \dots$) ეკუთვნის $\mathbb{R}$ რგოლს.

რადგან $A_{n+1} = \bigcup_{k=0}^n (A_{n+1} \setminus A_k)$, ამიტომ მივიღებთ

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sum_{n \in N} [\mu(A_{n+1} \setminus A_n)] = \sum_{n \in N} [\mu(A_{n+1}) - \mu(A_n)] = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k [\mu(A_{n+1}) - \mu(A_n)] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k). \end{aligned}$$

შეგნიშნოთ, რომ ზომის ზუბსტრაქციულობის გამოყენების დროს საჭიროა მოთხოვნა იმისა, რომ სათანადო სიმრავლეები სასრული ზომისაა. თუ ერთი მაინც A_n ($n \in N$) სიმრავლე უსასრულო ზომისაა, მაშინ თეორემა ადვილად მტკიცდება ზომის მონოტონურობის გათვალისწინებით.

ამით თეორემა 4 დამტკიცებულია.

თეორემა 5. ზომა არის ზემოდან უწყვეტი ფუნქცია განსაზღვრის არის ნებისმიერ ელემენტზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, რაიმე $\mathbb{R}$ რგოლზე განსაზღვრულია μ ზომა, $A \in \mathbb{R}$ და $\{A_n\}$ არის $\mathbb{R}$ რგოლის ელემენტთა ისეთი კლესადი მიმდევრობა, რომ

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

ცხადია, რომ

$$A = \bigcap_{n \in N} A_n.$$

ვიგულისხმობთ, რომ $\mu(A_m) < \infty$. ასევე ცხადია, რომ $A \subset A_m$, საიდანაც მივიღებთ $\mu(A) \leq \mu(A_m)$ უტოლობას. რადგან $(A_m \setminus A_n : n \geq m)$ ზრდადი მიმდევრობაა, ამიტომ ზომის ზუბსტრაქციულობის თვისებიდან გამომდინარე მივიღებთ

$$\begin{aligned}
\mu(A_m) - \mu(A) &= \mu(A_m \setminus A) = \mu\left(A_m \setminus \lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \\
&= \mu\left[\lim_{n \rightarrow \infty} (A_m \setminus A_n)\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_m \setminus A_n) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} [\mu(A_m) - \mu(A_n)] = \mu(A_m) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n),
\end{aligned}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

$\mu(A_m) < \infty$ პირობის მოთხოვნა დაგვჭირდა იმიტომ, რომ გამოგვეყენებინა ზომის ზუბსტრაქციულობის თვისება. იმ შემთხვევაში როცა $(\forall n)(n \in N \Rightarrow \mu(A_n) = \infty)$ დამტკიცება იქნება ანალოგიური, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ მსჯელობა იწარმოებს $(A_n \setminus A)$ სიმრავლეთა კლესადი მიმდევრობისათვის, რომლის ზღვარია $\emptyset$.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 6. ვთქვათ, $\mathbb{R}$ რგოლზე განსაზღვრულია სასრული, არაუარყოფითი და ადიტიური ფუნქცია μ . მაშინ შემდეგი პირობები ექვივალენტურია:

(1) μ ფუნქცია ქვემოდან უწყვეტია $\mathbb{R}$ -ის ნებისმიერ ელემენტზე;

(2) μ ფუნქცია ზემოდან უწყვეტია $\emptyset$ სიმრავლეზე;

(3) μ არის ზომა.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ, რომ $(1) \Rightarrow (2)$. ვთქვათ, $\{A_n\}$ არის $\mathbb{R}$ რგოლის სიმრავლეთა ნებისმიერი ისეთი კლესადი მიმდევრობა, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \emptyset.$$

ცხადია, რომ $\bigcap_{n \in N} A_n = \emptyset$, ამიტომ თუ $A \in \mathbb{R}$, მაშინ

$(A \setminus A_n)$ სიმრავლეთა მიმდევრობა ზრდადია და თანაც

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A \setminus A_n) = A.$$

(1) თვისების გამო გვექნება

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \setminus A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\mu(A) - \mu(A_n)] = \mu(A) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

,

ქ. ო.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0.$$

შევნიშნოთ, რომ μ ზომის ადიტიურობა და სასრულობა აუცილებელია შემდეგი ტოლობის მართებულობის ჩვენებისათვის

$$\mu(A \setminus A_n) = \mu(A) - \mu(A_n).$$

მოცემული ზომის ადიტიურობისაგან აგრეთვე გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $A \in \mathbb{R}$ სიმრავლისათვის

$$\mu(A) = \mu(A \cup \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset),$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ $\mu(\emptyset) = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3). ვთქვათ, μ ზომა ზემოდან უწყვეტია $\emptyset$ სიმრავლეზე. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით ადვილია ჩვენება იმისა, რომ μ ზომის ადიტიურობიდან გამომდინარეობს μ ზომის სასრულად ადიტიურობა.

ვთქვათ, $\{A_n\}$ არის $\mathbb{R}$ რგოლის სიმრავლეთა ისეთი დიზიუნქტიური მიმდევრობა, რომ $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathbb{R}$.

განვიხილოთ $\mathbb{R}$ რგოლის ელემენტთა $\{B_n\}$ მიმდევრობა,

სადაც $B_n = A \setminus \bigcup_{k=0}^n A_k$. ცხადია, რომ $\{B_n\}$ სიმრავლეთა

მიმდევრობა კლებადია და $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \emptyset$. რადგან

$$A = \left(\bigcup_{k=0}^n A_k \right) \cup B_n,$$

ამიტომ

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) + \mu(B_n).$$

თუ ბოლო ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $n \rightarrow \infty$ მივიღებთ, რომ

$$\mu(A) = \sum_{n \in N} \mu(A_n),$$

რაც ნიშნავს μ ფუნქციის თვლად აღიტიურობას. ე.ი. μ ზომაა.

რაც შეეხება (3) $\Rightarrow$ (1) იმპლიკაცია გამომდინარეობს თეორემა 4-დან.

ამით თეორემა 6 დამტკიცებულია.

შენიშვნა. განვიხილოთ რაციონალურ რიცხვთა Q სიმრავლის ქვესიმრავლე, რომლებიც მოთავსებულია $[0,1]$ სეგმენტზე და აღნიშნოთ ის Q_0 -ით. ვთქვათ, $\Xi = \{x : x \in Q_0 \text{ \& } a \leq x < b\}$, სადაც $a, b \in Q_0$ და $0 \leq a \leq b \leq 1$.

შევნიშნოთ, რომ Ξ სიმრავლეთა კლასი არის ნახევარგოლი.

სიმრავლეთა ფუნქცია μ , განსაზღვრული Ξ სიმრავლეთა კლასზე შემდეგი ტოლობით

$$\mu(\{x : a \leq x < b\}) = b - a$$

არის სასრულად-აღიტიური, უწყვეტია როგორც ზემოდან, ასევე ქვემოდან, მაგრამ μ არ არის თვლად-აღიტიური. ეს ნიშნავს, რომ თეორემა 6 არ არის მართებული ნახევარგოლებისათვის.

თეორემა 7. ვთქვათ, $\mathbb{R}$ რგოლზე განსაზღვრულია μ ზომა. თუ $M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_{n-1} \subset \dots$ სიმრავლეთა ზრდადი მიმდევრობაა $\mathbb{R}$ -დან და $\lim_n M_n \in \mathbb{R}$, მაშინ

$$\mu\left(\lim_n M_n\right) = \lim_n \mu(M_n).$$

დამტკიცება. დაუშვათ, რომ $M_0 = \emptyset$. მაშინ

$$\begin{aligned}
\mu\left(\lim_n M_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n \in N} M_n\right) = \mu\left(\bigcup_{k \in N} (M_{k+1} \setminus M_k)\right) = \\
&= \sum_{k \in N} \mu(M_{k+1} \setminus M_k) = \lim_n \sum_{k=0}^{n-1} \mu(M_{k+1} \setminus M_k) = \\
&= \lim_n \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} (M_{k+1} \setminus M_k)\right) = \lim_n \mu(M_n).
\end{aligned}$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 8. ვთქვათ, $\mathbb{R}$ რგოლზე განსაზღვრულია μ ზომა და $M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_{n-1} \supset \dots$ არის სიმრავლეთა კლასადი მიმდევრობა $\mathbb{R}$ -დან, რომელთაგან ერთს მაინც μ -ს მიმართ გააჩნია სასრული ზომა. თუ $\lim_n M_n \in \mathbb{R}$, მაშინ

$$\mu\left(\lim_n M_n\right) = \lim_n \mu(M_n).$$

დამტკიცება. თუ $\mu(M_m) < \infty$, მაშინ ყოველი $n \geq m$ რიცხვისათვის სრულდება პირობა $\mu(M_n) \leq \mu(M_m) < \infty$ და ამიტომ $\mu\left(\lim_n M_n\right) < \infty$.

ცხადია, რომ $\{M_m \setminus M_n : n \geq m\}$ მიმდევრობა არის ზრდადი და ამიტომ წინა თეორემის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}
\mu(M_m) - \mu\left(\lim_n M_n\right) &= \mu\left(M_m \setminus \lim_n M_n\right) = \mu\left(\lim_n (M_m \setminus M_n)\right) = \\
&= \lim_n \mu(M_m \setminus M_n) = \lim_n (\mu(M_m) - \mu(M_n)) = \\
&= \mu(M_m) - \lim_n \mu(M_n).
\end{aligned}$$

რადგან პირობის თანახმად $\mu(M_m) < \infty$, ამიტომ თეორემა დამტკიცებულია.

**§18. ზომის გაგრძელების ამოცანა. საბაზისო
სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ნახევარბოლზე
განსაზღვრული სიმრავლის არაუარყოფითი თვალდად-
აღიტიური ფუნქციის გაგრძელება ამ ნახევარბოლით
წარმოქმნილ ბოლზე განსაზღვრულ ზომამდე**

ვთქვათ, $\mathfrak{R}_\mu$ და $\mathfrak{R}_\nu$ არიან საბაზისო E სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაიმე კლასები, რომლებზედაც შესაბამისად განსაზღვრულია სიმრავლის არაუარყოფითი, ადიტიური μ და ν ფუნქციები. μ ფუნქციას ეწოდება ν ფუნქციის გაგრძელება, თუ $\mathfrak{R}_\nu \subset \mathfrak{R}_\mu$ და ყოველი $A \in \mathfrak{R}_\nu$ სიმრავლისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\mu(A) = \nu(A).$$

საზოგადოდ ზომის გაგრძელების ამოცანა არის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ზომის თეორიისათვის და არა მარტო მისთვის. ამ საკითხის აქტუალობაზე მიუნიშნებს ელემენტალური გეომეტრიის ძირეული საკითხი ფიგურათა ფართობის გამოთვლის შესახებ. თავდაპირველად განიხილება მართკუთხედის ფართობის გამოთვლის წესი, შემდეგ კი ეს წესი ზოგადდება სხვადასხვა მრავალკუთხედებისათვის, შემდეგ კი ისეთი გეომეტრიული ფიგურებისათვის, როგორიცაა წრე და მისი ნაწილები და ა. შ.

ბუნებრივად ისმება ამოცანა იმის შესახებ, რომ ყოველთვის შესაძლებელია თუ არა სიმრავლეთა რაიმე კლასზე განსაზღვრული ზომის გაგრძელება და თუ ეს შესაძლებელია, არის თუ არა ის ერთადერთი.

ამ შეკითხვებზე პასუხი საზოგადოდ უარყოფითია. ამის საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. ვთქვათ, M სიმრავლეთა კლასი შედგება სამი A , B და C არაცარიელი სიმრავლისაგან, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$A \subset C, B \subset C, A \cap B = \emptyset.$$

სიმრავლეთა M კლასზე განვსაზღვროთ μ ზომა პირობით:

$$\mu(A) = \mu(B) = \mu(C) = 1.$$

დავუშვათ, რომ ν არის μ ზომის გაგრძელება. მაშინ გვაქვს

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) = \mu(A) + \mu(B) = 2,$$

$$\nu(A \cup B) \leq \nu(C) = \mu(C) = 1.$$

მივიღეთ წინააღმდეგობა.

ე. ი. ν არ არის μ ზომის გაგრძელება.

მაგალითი 2. ვთქვათ, M სიმრავლეთა კლასი შედგება ისეთი ორი A და B სიმრავლისაგან, რომ $A \cap B \neq \emptyset$, $A \setminus B \neq \emptyset$, $B \setminus A \neq \emptyset$. სიმრავლეთა M კლასზე განესაზღვროთ μ ზომა პირობით: $\mu(A) = \mu(B) = 1$.

M სიმრავლეთა კლასით წარმოქმნილი მინიმალური რგოლი შედგება ელემენტებისაგან:

$$\emptyset, A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A \Delta B.$$

დავუშვათ, რომ

$$\nu(C) = \begin{cases} 0, & C = \emptyset; \\ 1, & C = A \vee C = B; \\ \alpha, & C = A \cap B; \\ 2 - \alpha, & C = A \cup B; \\ 1 - \alpha, & C = A \setminus B \vee C = B \setminus A; \\ 2 - 2\alpha, & C = A \Delta B, \end{cases}$$

სადაც $\alpha \in [0, 1]$. ადვილია შემოწმება იმისა, რომ ν არის ზომა. ის წარმოადგენს გამოსავალი μ ზომის გაგრძელებას, მაგრამ α სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის ვღებულობთ განსხვავებულ გაგრძელებებს.

ე. ი. მოცემული μ ზომის გაგრძელება არ არის ერთადერთი.

ახლა ვთქვათ, Ξ არის E საბაზისო სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ნახევარრგოლი, რომელზეც განსაზღვრულია არაუარყოფითი, თვლად-ადიტიური ფუნქცია μ . როგორც

ვიციტ, ყოველი $A \in \mathbb{R}(\Xi)$ ელემენტი წარმოდგინება შემდეგი სახით

$$A = \bigcup_{k=0}^{m-1} A_k,$$

სადაც

$$(\forall k) \left(0 \leq k \leq m-1 \Rightarrow A_k \in \Xi \text{ \& } A_k \cap A_j = \emptyset \right),$$

ნებისმიერი $0 \leq j \leq m-1 \text{ \& } j \neq k$ ნატურალური რიცხვისათვის.

განვსაზღვროთ $\mathbb{R}(\Xi)$ რგოლზე სიმრავლის ფუნქცია $\overline{\mu}$ შემდეგი ფორმულით:

$$\overline{\mu}(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu(A_k).$$

ვახევნოთ, $\overline{\mu}$ ფუნქციის განსაზღვრის კორექტულობა.

თუ $A = \bigcup_{i=0}^{n-1} B_i$ არის $A \in \mathbb{R}(\Xi)$ ელემენტის სხვა

წარმოდგენა Ξ ნახევარგოლის ელემენტების დიზიუნქტიური ოჯახის გაერთიანების სახით, მაშინ ცხადია, რომ შესრულდება შემდეგი ტოლობები:

$$(\forall k) \left(0 \leq k \leq m-1 \Rightarrow A_k = \bigcup_{i=0}^{n-1} (A_k \cap B_i) \right);$$

$$(\forall i) \left(0 \leq i \leq n-1 \Rightarrow B_i = \bigcup_{k=0}^{m-1} (A_k \cap B_i) \right);$$

$$\mu(A_k) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu(A_k \cap B_i).$$

საიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_{k=0}^{m-1} \mu(A_k) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(A_k \cap B_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \mu(A_k \cap B_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu(B_i),$$

ქ. ი.

$$\sum_{k=0}^{m-1} \mu(A_k) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu(B_i),$$

რაც ნიშნავს $\overline{\mu}$ ფუნქციის განსაზღვრის კორექტულობას.

აღვილი დასაბუთებულია, რომ $\overline{\mu}$ არის μ ფუნქციის გაგრძელება და არაუარყოფითია. იმისათვის, რომ $\overline{\mu}$ იყოს ზომა საჭიროა დავამტკიცოთ, რომ $\overline{\mu}$ თვლადად-ადიტიურია.

ვთქვათ, $C \in \mathbb{R}(\Xi)$ და $C = \bigcup_{m \in N} C_m$, სადაც $\{C_m : m \in N\}$

სიმრავლეთა ოჯახი არის $\mathbb{R}(\Xi)$ -ს ელემენტთა დიზიუნქტიური მიმდევრობა. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1) $C \in \Xi$.

ამ შემთხვევაში ყოველი $m \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$C_m = \bigcup_{i=0}^{r_m} D_i^{(m)},$$

სადაც $\{D_i^m : 0 \leq i \leq r_m\}$ სიმრავლეთა ოჯახი არის Ξ

ნახევარგოლის ელემენტთა დიზიუნქტიური ოჯახის სასრული მიმდევრობა. ამიტომ

$$\overline{\mu}(C_m) = \sum_{i=0}^{r_m} \mu(D_i^{(m)}),$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\mu(C) = \sum_{m \in N} \sum_{i=0}^{r_m} \mu(D_i^{(m)}) = \sum_{m \in N} \overline{\mu}(C_m).$$

ვინაიდან $\overline{\mu}(C) = \mu(C)$, ამიტომ

$$\overline{\mu}(C) = \sum_{m \in N} \overline{\mu}(C_m).$$

2) $C \in \mathbb{R}(\Xi) \setminus \Xi$ და $C = \bigcup_{m \in N} C_m$.

ამ შემთხვევაში ერთის მხრივ, C სიმრავლისათვის ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$C = \bigcup_{j=0}^{n-1} F_j,$$

სადაც $\{F_j : 0 \leq j \leq n-1\}$ სიმრავლეთა ოჯახი არის Ξ ნახევარგოლის ელემენტთა ისეთი დიზიუნქტიური სასრული მიმდევრობა, რომ

$$C_m = \bigcup_{j=0}^{n-1} (C_m \cap F_j), \quad F_j = \bigcup_{m \in N} (C_m \cap F_j),$$

$$\overline{\mu}(F_j) = \sum_{m \in N} \overline{\mu}(C_m \cap F_j).$$

მეორეს მხრივ, გვაქვს

$$\begin{aligned} \overline{\mu}(C) &= \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\mu}(F_j) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{m \in N} \overline{\mu}(C_m \cap F_j) = \\ &= \sum_{m \in N} \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\mu}(C_m \cap F_j) = \sum_{m \in N} \overline{\mu}(C_m). \end{aligned}$$

ე. ი. $\overline{\mu}$ ფუნქცია თვლად-ადიტიურია და შესაბამისად ის არის ზომა $\mathbb{R}(\Xi)$ -ზე.

§19. მოცემულ ზომასთან ინდუცირებული ბარე და შიბა ზომები

ეთქვას, $\mathbb{R}$ არის E საბაზისო სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაიმე რგოლი და μ არის $\mathbb{R}$ -ზე განსაზღვრული ზომა. ვიგულისხმობთ, რომ E საბაზისო სიმრავლე იფარება $\mathbb{R}$ რგოლის ელემენტთა მიმდევრობით.

ნებისმიერი $A \subset E$ სიმრავლისათვის განვსაზღვროთ რიცხვი

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in N} \mu(A_n) \right\},$$

სადაც ქვედა საზღვარი აიღება $\mathbb{R}$ რგოლის ელემენტთა ისეთი ყველაშესაძლო $\{A_n\}$ მიმდევრობების მიმართ, რომ

$A \subset \bigcup_{n \in N} A_n$. ანუ, $\mu^*(A)$ განისაზღვრება, როგორც

$\sum_{n \in N} \mu(A_n)$ სახის ჯამების ქვედა საზღვარი, სადაც $\{A_n\}$

სიმრავლეთა მიმდევრობები $\mathbb{R}$ -დან აიღება ისე, რომ $\bigcup_{n \in N} A_n$

შეიცავდეს A -ს.

ასეთნაირად განსაზღვრულ μ^* ფუნქციას ეწოდება μ ზომით წარმოქმნილი ან μ ზომით ინდუცირებული (ასოცირებული) გარე ზომა.

თეორემა 1. μ^* ფუნქცია თელადად ნახევრად-ადიტიურია და წარმოადგენს μ ზომის გაგრძელებას. თუ μ არის σ -სასრული ზომა, მაშინ μ^* აგრეთვე არის სიმრავლის σ -სასრული ფუნქცია.

დამტკიცება. μ^* ფუნქციის განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს:

ა) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

ბ) თუ $A \in \mathbb{R}$, მაშინ $\mu^*(A) = \mu(A)$.

შევნიშნოთ, რომ გარე ზომის ა) თვისებაზე ხაზგასმა არ იყო აუცილებელი, რადგან ყოველი რგოლი შეიცავს $\emptyset$ სიმრავლეს, ხოლო ბ) წინადადება კი ნიშნავს, რომ μ^* არის μ ზომის გაგრძელება.

ახლა ვთქვათ,

$$Y = \bigcup_{i \in N} Y_i,$$

სადაც $Y \in P(E)$ და $(\forall i)(i \in N \Rightarrow Y_i \in P(E))$.

ვთქვათ, $\varepsilon > 0$ ნებისმიერი რიცხვიად $\mathbb{R}$ არის საბაზისო E სიმრავლის ბულეანით წარმოქმნილი რგოლი. ყოველი $i \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის არსებობს Y_i სიმრავლის დაფარვა $\mathbb{R}$ რგოლის ელემენტთა ისეთი $\{Y_j^{(i)} : j \in N\}$

მიმდევრობით და μ^* გარე ზომის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_{j \in N} \mu(Y_j^{(i)}) < \mu^*(Y_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

ცხადია, რომ ორმაგი ოჯახი $\{Y_j^{(i)} : i \in N \wedge j \in N\}$ არის Y

სიმრავლის დაფარვაც $\mathbb{R}$ -ის ელემენტებით. ამიტომ ისევ გარე ზომის განსაზღვრების თანახმად გვქვნება

$$\mu^*(Y) \leq \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \mu(Y_j^{(i)}) < \sum_{i \in N} \left(\mu^*(Y_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \right) = \sum_{i \in N} \mu^*(Y_i) + \varepsilon.$$

ქ. ო.

$$\mu^*(Y) \leq \sum_{i \in N} \mu^*(Y_i).$$

ეს ნიშნავს, რომ μ^* ფუნქცია თვლადად ნახევრად-ადიტიურია.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ თუ μ ზომა σ -სასრულია, მაშინ μ^* ფუნქციაც σ -სასრულია.

ვთქვათ, $Y \in P(E)$. მაშინ არსებობს Y სიმრავლის თვლადი დაფარვა $P(E)$ ბულეანით წარმოქმნილი $\mathbb{R}$ რგოლის ელემენტებით. დავუშვათ, რომ $Y \subset \bigcup_{i \in N} Y_i$. მეორეს მხრივ, μ ზომის σ -სასრულობიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $i \in N$ ინდექსისათვის არსებობს Y_i სიმრავლის ისეთი

თვლადი დაფარვა $\mathbb{R}$ რგოლის $\{Y_j^{(i)} : j \in N\}$ ელემენტებით, რომ

$$(\forall j) \left(j \in N \Rightarrow \mu(Y_j^{(i)}) < +\infty \right).$$

ამგვარად, $Y \subset \bigcup_{i \in N} \bigcup_{j \in N} Y_j^{(i)}$, სადაც $\mu^*(Y_j^{(i)}) < +\infty$.

ამით თეორემა 1 დამტკიცებულია.

თეორემა 2. ვთქვათ, A და B ბაზისური E სიმრავლის ისეთი ქვესიმრავლეებია, რომ $\mu^*(A) < +\infty$ ან $\mu^*(B) < +\infty$. მაშინ

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \Delta B).$$

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $\mu^*(B) \leq \mu^*(A)$ და $\mu^*(A) < +\infty$.

ვინაიდან ადგილი აქვს ჩართვას

$$A \Delta \emptyset \subset (A \Delta B) \cup (B \Delta \emptyset),$$

ამიტომ გვაქვს უტოლობა

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \Delta B) + \mu^*(B),$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\mu^*(A) - \mu^*(B) \leq \mu^*(A \Delta B).$$

თუ გავითვალისწინებთ ჩვენს დაშვებას საბოლოოდ მივიღებთ თეორემის დამტკიცებას.

თეორემა 3. საბაზისო E სიმრავლის ნებისმიერი A_1, A_2, B_1, B_2 სიმრავლეებისათვის ადგილი აქვს შემდეგ დამოკიდებულებებს:

$$\mu^*((A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2)) \leq \mu^*((A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2));$$

$$\mu^*((A_1 \cap A_2) \Delta (B_1 \cap B_2)) \leq \mu^*((A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2));$$

$$\mu^*((A_1 \setminus A_2) \Delta (B_1 \setminus B_2)) \leq \mu^*((A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)).$$

ეს უტოლობები უშუალოდ გამომდინარეობს სიმრავლეთა შორის მარტივი დამოკიდებულებებიდან, რომელთა გააზრება მიგვინდია მკითხველთათვის.

ვთქვათ, მოცემულია E საბაზისო სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაიმე $\mathbb{R}$ რგოლზე განსაზღვრული μ ზომა. ნებისმიერი $A \subset E$ ქვესიმრავლისათვის

$$\mu_*(A) = \sup_{\substack{C \subset A \\ C \in \mathcal{S}(\mathbb{R})}} \{\mu(C)\}$$

ტოლობით განსაზღვრულ რიცხვს ეწოდება A სიმრავლის შიგა ზომა ინდუცირებული (ასოცირებული) μ ზომასთან და აღინიშნება μ_* სიმბოლოთი.

ადვილი დასანახია, რომ μ_* შიგა ზომას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. $\mu_*(\emptyset) = 0$;
2. თუ $A \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, მაშინ $\mu_*(A) = \mu(A)$;
3. $(\forall A)(A \subset E \Rightarrow \mu_*(A) \leq \mu^*(A))$;
4. μ_* არის სიმრავლის მონოტონური ფუნქცია, ე. ი.
 $(\forall A)(\forall B)(A \subset E \& B \subset E \& A \subset B \Rightarrow \mu_*(A) \leq \mu_*(B))$;

ვთქვათ, $\mathbb{R}$ არის E საბაზისო სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაიმე რგოლი და μ არის $\mathbb{R}$ -ზე განსაზღვრული ზომა.

საბაზისო E სიმრავლის ნებისმიერი A ქვესიმრავლის ზომადი (μ ზომის მიმართ) გარსი ეწოდება ისეთ $B \supset A$ ბორელის სიმრავლეს, რომ სრულდება შემდეგი პირობა:

$$(\forall D)(D \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \& D \subset B \setminus A \Rightarrow \mu(D) = 0).$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, A სიმრავლის ზომადი გარსი არის ზომის თვალსაზრისით უმცირესი ბორელის სიმრავლე, რომელიც შეიცავს A -ს.

E საბაზისო სიმრავლის A ქვესიმრავლის ზომადი (μ ზომის მიმართ) ბირთვი ეწოდება ისეთ C ბორცვის სიმრავლეს, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$(C \subset A) \& (\forall D) (D \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \& D \subset A \setminus C \Rightarrow \mu(D) = 0).$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, A სიმრავლის ზომადი ბირთვი არის ზომის თვალსაზრისით უდიდესი ბორცვის სიმრავლე, რომელიც ეკუთვნის A სიმრავლეს.

მოვიყვანოთ შიგა ზომის კიდევ ერთი თვისება.

5. თუ $\{A_k : k \in N\}$ არის E საბაზისო სიმრავლის ქვესიმრავლეთა დიზიუნქტიური ოჯახი, მაშინ

$$\mu_* \left(\bigcup_{k \in N} A_k \right) \geq \sum_{k \in N} \mu_*(A_k).$$

მართლაც, ვთქვათ, ყოველი $k \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის C_k არის A_k სიმრავლის ზომადი ბირთვი. მაშინ:

$$\mu_*(A_k) = \mu(C_k),$$

$$\begin{aligned} \sum_{k \in N} \mu_*(A_k) &= \sum_{k \in N} \mu(C_k) = \mu \left(\bigcup_{k \in N} C_k \right) = \\ &= \mu_* \left(\bigcup_{k \in N} C_k \right) \leq \mu_* \left(\bigcup_{k \in N} A_k \right). \end{aligned}$$

თეორემა 4. ნებისმიერი $A \subset E$ ქვესიმრავლისათვის არსებობს C ზომადი ბირთვი და $\mu_*(A) = \mu(C)$. თუ C_1 და C_2 სიმრავლეები არიან $A \subset E$ სიმრავლის ზომადი ბირთვები, მაშინ $\mu(C_1 \triangle C_2) = 0$.

დამტკიცება. განვიხილოთ $E \setminus A$ სიმრავლის B ზომადი გარსი. დაერწმუნდეთ, რომ $E \setminus B$ არის A სიმრავლის ზომადი ბირთვი. მართლაც, თუ $D \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ და

$$D \subset A \setminus (E \setminus B) = B \setminus (E \setminus A), \text{ მაშინ } \mu(D) = 0.$$

ვთქვათ, C არის A სიმრავლის ნებისმიერი ზომადი ბირთვი. რადგან $C \subset A$, ამიტომ მივიღებთ

$$\mu(C) = \mu_*(C) \leq \mu_*(A).$$

დავუშვათ, რომ $\mu(C) < \mu_*(A)$. მაშინ μ_* შიგა ზომის განსაზღვრებიდან გამომდინარე იარსებებს ისეთი $X \in S(\mathbb{R})$ სიმრავლე, რომ $X \subset A$. მაგრამ $\mu(X) > \mu(C)$. რადგან $X \setminus C \subset A \setminus C$, ამიტომ $\mu(X \setminus C) = 0$. მაგრამ დაშვების თანახმად, $\mu(X \setminus C) \geq \mu(X) - \mu(C) > 0$. მივიღეთ წინააღმდეგობა. ე. ი. $\mu_*(A) = \mu(C)$.

თუ C_1 და C_2 სიმრავლეები არიან $A \subset E$ სიმრავლის ზომადი ბირთვები, მაშინ $C_1 \cup C_2 \subset A$. ამიტომ გვაქვს

$$(C_1 \cup C_2) \setminus C_1 \subset A \setminus C_1,$$

$$\mu((C_1 \cup C_2) \setminus C_1) = 0,$$

$$\mu((C_1 \cup C_2) \setminus C_2) = 0.$$

მივიღებთ

$$\mu(C_1 \triangle C_2) \leq \mu[(C_1 \cup C_2) \setminus C_1] + \mu[(C_1 \cup C_2) \setminus C_2] = 0,$$

ე. ი. $\mu(C_1 \triangle C_2) = 0$.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5. ვთქვათ, მოცემულია E საბაზისო სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაიმე $\mathbb{R}$ რგოლზე განსაზღვრული μ ზომა. თუ X და Y საბაზისო სიმრავლის თანაუკვეთი ქვესიმრავლეებია, მაშინ

$$\mu_*(X \cup Y) \leq \mu_*(X) + \mu^*(Y) \leq \mu^*(X \cup Y).$$

დამტკიცება. ვთქვათ, B არის Y სიმრავლის ზომადი გარსი, ხოლო C კი - $X \cup Y$ სიმრავლის ზომადი ბირთვი. ცხადია, რომ $C \setminus B \subset X$. ამიტომ

$$\mu_*(X \cup Y) = \mu(C) \leq \mu(C \setminus B) + \mu(B) \leq \mu_*(X) + \mu^*(Y).$$

ახლა ვთქვათ, D არის X სიმრავლის ზომადი ბირთვი, ხოლო F არის $X \cup Y$ სიმრავლის ზომადი გარსი. მაშინ $Y \subset F \setminus D$ და ამიტომ

$$\mu^*(X \cup Y) = \mu(F) = \mu(D) + \mu(D \setminus F) \geq \mu_*(X) + \mu^*(Y).$$

ამით თეორემა 5 დამტკიცებულია.

§20. ლეგების ზომა, როგორც ბორელის ზომის ბასრულება. ლეგების აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა კლასი

როგორც უკვე წინა პარაგრაფში ვნახეთ, საბაზისო E სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაიმე $\mathbb{R}$ რგოლზე მოცემული μ ზომით წარმოქმნილი μ^* გარე ზომა განსაზღვრულია ნებისმიერი $Y \in P(E)$ სიმრავლისათვის და შესაძლებელია ზოგიერთი ასეთი სიმრავლის გარე ზომა იყოს $+\infty$ -ის ტოლი. ამიტომ განვიხილოთ საბაზისო E სიმრავლის ყველა ისეთი ქვესიმრავლეთა H კლასი, რომელთა გარე ზომა სასრულია. H სიმრავლეთა კლასზე განვსაზღვროთ ფსევდომეტრიკა შემდეგი პირობით:

$$(\forall Y)(\forall Z) \left(Y \in H \ \& \ Z \in H \Rightarrow \rho'(Y, Z) = \mu^*(Y \Delta Z) \right).$$

უმუშალოდ, მოწმდება, რომ ρ' არის ფსევდომეტრიკა. მართლაც, ρ' ფუნქციისათვის სრულდება შემდეგი პირობები:

1. $\rho'(Y, Z) \geq 0$;
2. $\rho'(Y, Z) = \rho'(Z, Y)$;
3. $\rho'(Y, Z) \leq \rho'(Y, T) + \rho'(T, Z)$.

მაგრამ ამ პირობების შესრულება საზოგადოდ არ არის საკმარისი იმისათვის, რომ ρ' იყოს მეტრიკა. მართლაც, თუ მაგალითად $\overline{\mu}$ არის ნამდვილ რიცხვთა ღერძის $[a, b[$ სახის ნახევრად ღია შუალედებზე შემდეგი ტოლობით მოცემული

$$\mu([a, b[) = b - a$$

ფუნქციის გაგრძელება იმავე შუალედებით წარმოქმნილ რგოლზე, მაშინ ნებისმიერი ერთწერტილიანი სიმრავლის გარე ზომა $\overline{\mu}^*$ ნულის ტოლია. ამიტომ თუ Y არის ერთწერტილიანი სიმრავლე, მაშინ $\rho'(Y, \emptyset) = 0$, მაგრამ $Y \neq \emptyset$.

თუ მოვახდენთ E საბაზისო სიმრავლის ყველა იმ ქვესიმრავლეების გაიგივებას, რომელთათვისაც $\rho' = 0$ და განვიხილავთ შესაბამის ფაქტორ-სიმრავლეს, მაშინ მივიღებთ მეტრიკულ სივრცეს, რომელსაც μ^* გარე ზომასთან ასოცირებული მეტრიკული სივრცე ეწოდება. თუ შესაბამის მეტრიკას ავღნიშნავთ ρ ასოთი, მაშინ მივიღებთ (H, ρ) მეტრიკულ სივრცეს, რომელსაც შემდგომში მოკლედ H -ით ავღნიშნავთ.

ცხადია, რომ $\mathbb{R}$ რგოლი მასზე განსაზღვრული μ ზომით წარმოქმნილი ანალოგიური მეტრიკით წარმოადგენს H მეტრიკული სივრცის ქვესივრცეს, რომელიც საზოგადოდ არ არის ჩაკეტილი. მტკიცდება, რომ H მეტრიკული სივრცე სრულია, ამიტომ $\overline{\mathbb{R}}$ ჩაკეტვა იქნება H სივრცის სრული ქვესივრცე. მაგრამ, საზოგადოდ, $\overline{\mathbb{R}}$ არ არის σ -რგოლი, თუმცა არის სიმრავლეთა რგოლი. μ^* გარე ზომის შევიწროება $\overline{\mathbb{R}}$ -ზე წარმოადგენს ზომას, რომელიც არის μ ზომის გაგრძელება და ასეთ შევიწროებას ვუწოდოთ ღებების სასრული ზომა, ხოლო $\overline{\mathbb{R}}$ სიმრავლეთა კლასს ვუწოდოთ

ლებების აზრით ზომადი სასრული ზომიანი სიმრავლების კლასი და ავლნიშნოთ ის L^* სიმბოლოთი.

თუ განვიხილავთ საბაზისო E სიმრავლის ისეთ ქვესიმრავლებს, რომელთა წარმოდგენაც შეიძლება L^* კლასის ელემენტთა მიმდევრობების გაერთიანებების სახით და მიღებულ კლასს ავლნიშნავთ L ასოთი, მაშინ მტკიცდება, რომ L სიმრავლეთა კლასი არის σ -რგოლი, ხოლო μ^* გარე ზომის შევიწროება L კლასზე წარმოადგენს ზომას, რომელიც არის L^* კლასზე მიღებული ზომის გაგრძელება და მას ეწოდება ლებეგის ზომა, ხოლო L სიმრავლეთა კლასს კი – ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეების კლასი.

ცხადია, რომ ადგილი აქვს ჩართვას

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L.$$

ეს ჩართვა ზოგიერთ შემთხვევაში მკაცრია. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ სიმრავლეთა σ -რგოლს ხშირად უწოდებენ ბორელის კლასს, ხოლო მის ელემენტებს კი – ბორელის სიმრავლეებს. ცხადია, რომ μ^* გარე ზომის შევიწროება $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ -ზე აგრეთვე იქნება ზომა, რომელსაც ბორელის ზომას უწოდებენ. საზოგადოდ, ლებეგის ზომა არის ბორელის ზომის მკაცრი გაგრძელება. ლებეგის ზომა სრული ზომაა, ხოლო ბორელის ზომა სრული არ არის.

შევნიშნოთ, რომ L კლასი შეიძლება მიღებულ იქნას $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ კლასიდან შემდეგი წესით: L კლასი დაემთხვევა $A \cup B$ სახის სიმრავლეთა კლასს, სადაც $A \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ხოლო B არის ისეთი $C \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ელემენტის ქვესიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს $\mu^*(C) = 0$ პირობას. ამიტომ ამბობენ, რომ ლებეგის ზომა შეიძლება მიღებულ იქნას ბორელის ზომის გასრულებით.

§19-ის თეორემა 2-დან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. თუ $\{C_k\}$ სიმრავლეთა მიმდევრობა კრებადია C სიმრავლისაკენ ρ მეტრიკით, მაშინ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(C_k) = \mu^*(C).$$

თეორემა 2. თუ $A \in L$ და $\mu^*(A) < +\infty$, მაშინ $A \in L^*$.

დამტკიცება. რადგან $A \in L$, ამიტომ $A = \bigcup_{k \in N} A_k$, სადაც

$$(\forall k)(k \in N \Rightarrow A_k \in L^*).$$

ავაგოთ L^* -ში სიმრავლეთა მიმდევრობა შემდეგი წესით:

$$A'_0 = A_0 \quad \text{და} \quad A'_k = A_k \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} A'_i \quad (k \geq 1). \quad \text{ასეთი აგების}$$

პროცესით მივიღეთ $\{A'_i : i \in N\}$ დიზიუნქტიური სიმრავლეთა

ოჯახი. ყოველი $m \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის $\bigcup_{k=0}^{m-1} A'_k \subset A$, ამიტომ

$$\mu^*(A) \geq \mu^*\left(\bigcup_{k=0}^{m-1} A'_k\right) = \sum_{k=0}^{m-1} \mu^*(A'_k).$$

თუ ბოლო უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $m \rightarrow \infty$, მივიღებთ, რომ

$$\sum_{k \in N} \mu^*(A'_k) \leq \mu^*(A) < +\infty.$$

ქ. ი. $\sum_{k \in N} \mu^*(A'_k)$ მწკრივი კრებადია. ამიტომ ნებისმიერი

$\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $p > 0$ ნატურალური რიცხვი, რომ

$$\sum_{k \geq p} \mu^*(A'_k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

დავუშვათ, რომ $B_p = \bigcup_{k=0}^{p-1} A_k'$. ცხადია, რომ $B_p \in L^*$.

რადგან L^* ჩაკეტილი სიმრავლეა და $B_p \in L^*$ სიმრავლე არის შეხების წერტილი, ამიტომ არსებობს $\mathbb{R}$ -ის ელემენტთა მიმდევრობა, რომელიც ρ მეტრიკით კრებადია B_p -საკენ. ეს ნიშნავს, რომ არსებობს ისეთი $B \in \mathbb{R}$ სიმრავლე, რომ

$$\mu^*(B_p \Delta B) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

რადგან ადგილი აქვს შემდეგ ჩართვას

$$A \Delta B \subset (A \Delta B_p) \cup (B_p \Delta B) \subset \left(\bigcup_{k \geq p+1} A_k' \right) \cup (B_p \Delta B),$$

ამიტომ

$$\mu^*(A \Delta B) \leq \sum_{k \geq p+1} \mu^*(A_k') + \mu^*(B_p \Delta B) < \varepsilon.$$

ე. ი. $A \in \overline{\mathbb{R}} = L^*$.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3. ლებევის ზომა სრული ზომაა.

დამტკიცება. თუ $A \in L$ და $\mu(A) = 0$ (შემდგომში μ^* გარე ზომის შევიწროებას L კლასსზე კვლავ μ ასოთი ავლნიშნავთ), მაშინ $\mu^*(A) = 0$. თუ $B \subset A$, მაშინ

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(A)$$

და ე. ი. $\mu^*(B) = 0$. რადგან ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის

$$\mu^*(B \Delta \emptyset) = \mu^*(B) = 0 < \varepsilon,$$

ამიტომ თეორემა 2-ის თანახმად $B \in L^*$ და $B \in L$.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4. თუ $A \in L$, მაშინ $\mu^*(A) = \inf_{\substack{A \subset B \\ B \in \mathcal{S}(\mathbb{R})}} \{\mu(B)\}.$

დამტკიცება. რადგან $A \subset B$, ამიტომ $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ და ამიტომ

$$\mu^*(A) \leq \inf_{\substack{A \subset B \\ B \in \mathcal{S}(\mathbb{R})}} \{\mu(B)\}.$$

μ^* გარე ზომის განსაზღვრების თანახმად

$$\mu^*(A) = \inf_{\substack{A \subset \bigcup_{\substack{k \in N \\ A_k \in \mathbb{R}}} A_k}} \left\{ \sum_{k \in N} \mu(A_k) \right\},$$

თანაც შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ $\{A_k : k \in N\}$ სიმრავლეთა დიზიუნქტიური მიმდევრობაა $\mathbb{R}$ -დან. ამიტომ გვექნება

$$\sum_{k \in N} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k \in N} A_k\right) \text{ და } \bigcup_{k \in N} A_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

ვინაიდან $\mu(B)$ რიცხვთა სიმრავლე უფრო ფართოა, ვიდრე

$\mu\left(\bigcup_{k \in N} A_k\right)$ რიცხვთა სიმრავლე, ამიტომ

$$\mu^*(A) \geq \inf_{\substack{A \subset B \\ B \in \mathcal{S}(\mathbb{R})}} \{\mu(B)\},$$

რაც ნიშნავს თეორემის დამტკიცებას.

თეორემა 5. საბაზისო E სიმრავლის ნებისმიერი A ქვესიმრავლისათვის არსებობს ზომადი გარსი. თუ B არის A სიმრავლის ზომადი გარსი, მაშინ $\mu^*(A) = \mu(B)$, ხოლო თუ B_1 და B_2 არიან A სიმრავლის ზომადი გარსები, მაშინ $\mu(B_1 \triangle B_2) = 0$.

დამტკიცება. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

$$1) \mu^*(A) < +\infty.$$

თეორემა 4-ის თანახმად, $n \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის არსებობს $\{B_n : n \in N\}$ ბორელის სიმრავლეთა ოჯახი, რომ

$$(\forall n) \left(n \in N \Rightarrow A \subset B_n \text{ \& } \mu(B_n) \leq \mu^*(A) + \frac{1}{n} \right).$$

განვიხილოთ $B = \bigcap_{n \in N} B_n$ სიმრავლე. აშკარაა, რომ $A \subset B$

და B ბორელის სიმრავლეა. გვაქვს

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) = \mu(B) \leq \mu(B_n) < \mu^*(A) + \frac{1}{n},$$

საიდანაც n -ის ნებისმიერობის გამო მივიღებთ, რომ $\mu^*(A) = \mu(B)$.

თუ $D \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ და $D \subset B \setminus A$, მაშინ $A \subset B \setminus D$ და გვაქვს $\mu(B) = \mu^*(A) \leq \mu^*(B \setminus D) = \mu(B \setminus D) = \mu(B) - \mu(D) \leq \mu(B)$

რაც ნიშნავს, რომ $\mu(D) = 0$.

$$2) \mu^*(A) = +\infty.$$

გარე ზომის განსაზღვრებიდან შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$A = \bigcup_{k \in N} A_k,$$

სადაც $(\forall k) \left(k \in N \Rightarrow A_k \in \mathbb{R} \text{ \& } \mu^*(A_k) < +\infty \right)$.

ვთქვათ, ყოველი $k \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის B_k იყოს A_k სიმრავლის ზომადი გარსი. მაშინ $B = \bigcup_{k \in N} B_k$ სიმრავლე ბორელის სიმრავლეა და $A \subset B$.

ახლა ვთქვათ, $D \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ და $D \subset B \setminus A$. თუ $D_k = D \cap (B_k \setminus A_k)$, მაშინ $D \subset \bigcup_{k \in N} D_k$. ცხადია, რომ $D_k \subset B_k \setminus A_k$, ამიტომ $\mu(D_k) = 0$ და $\mu(D) \leq \sum_{k \in N} \mu(D_k) = 0$.

2) შემთხვევაში $\mu^*(A) = \mu(B)$ ტოლობა სრულდება, რადგან $\mu^*(A) = +\infty$ და $A \subset B$.

და ბოლოს, თუ B_1 და B_2 არიან A სიმრავლის ზომადი გარსები, მაშინ $A \subset B_1 \cap B_2$ და ამიტომ

$$B_1 \setminus (B_1 \cap B_2) \subset B_1 \setminus A, \\ \mu(B_1 \setminus (B_1 \cap B_2)) = 0.$$

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

$$\mu(B_2 \setminus (B_1 \cap B_2)) = 0.$$

ვინაიდან მართებულია ტოლობა

$$\mu(B_1 \triangle B_2) = \mu(B_1 \setminus (B_1 \cap B_2)) + \mu(B_2 \setminus (B_1 \cap B_2)),$$

ამიტომ

$$\mu(B_1 \triangle B_2) = 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 6. $A \in L$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A = D \cup H$, სადაც $D \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ხოლო H არის ბორელის ნული ზომის სიმრავლის ქვესიმრავლე.

დამტკიცება. თუ $A = D \cup H$, სადაც $D \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ხოლო H არის ბორელის ნული ზომის სიმრავლის ქვესიმრავლე, მაშინ ლებევის ზომის სისრულის გამო $H \in L$. ე. ი. $D \cup H \in L$ და $A \in L$. ამით საკმარისობა დამტკიცებულია.

აუცილებლობა. ვთქვათ, $A \in L$ და $\mu(A) < +\infty$. განვიხილოთ A სიმრავლის B ზომადი გარსი და C ზომადი ბირთვი. ცხადია, რომ $C \subset A \subset B$. თუ $H = (B \setminus C) \cap A$, მაშინ

ცხადია, რომ $A = C \cup H$ და $H \subset B \setminus C$, თანაც $\mu(B \setminus C) = \mu(B) - \mu(C) = 0$.

თუ $\mu(A) = +\infty$, მაშინ $A = \bigcup_{k \in N} A_k$ და $\mu(A) < +\infty$.

ყოველი $k \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის $A_k = C_k \cup H_k$, სადაც $D_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ და ყოველი H_k არის ბორელის ნული ზომის სიმრავლის ქვესიმრავლე. ამიტომ

$$A = \left(\bigcup_{k \in N} C_k \right) \cup \left(\bigcup_{k \in N} H_k \right) = C \cup H.$$

ცხადია, რომ $C \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ და $\bigcup_{k \in N} H_k$ არის ბორელის ნული

ზომის სიმრავლის ქვესიმრავლე.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 1. აუცილებლობის დამტკიცების დროს არ გამოგვიყენებია $A \in L$ პირობა, ამიტომ ფაქტიურად დამტკიცდა $A = D \cup H$ წარმოდგენა ნებისმიერი $A \in P(E)$ სიმრავლისათვის რადგან:

$$\mu^*(H) \leq \mu^*(B \setminus C) = \mu(B \setminus C) = 0;$$

$$(\forall A) \left(A \subset E \Rightarrow (\exists Y)(\exists Z) \left(Y \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \& \mu^*(Z) = 0 \& A = Y \cup Z \right) \right).$$

თეორემა 7. ერთადერთი ზომა, რომელიც განსაზღვრულია L კლასზე და არის $\mathbb{R}$ სიმრავლეთა რგოლზე მოცემული μ ზომის გაგრძელება, არის ლებეგის ზომა.

დამტკიცება. ბოლო შენიშვნის თანახმად, საკმარისია ერთადერთობა ვაჩვენოთ $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ კლასზე.

ვთქვათ, $A \in \mathbb{R}$ და σ -რგოლის სტრუქტურიდან გამომდინარეობს (იხილეთ, §9, თეორემა 6, თეორემა 8), რომ

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \cap A = \mathcal{S}(\mathbb{R} \cap A);$$

$$\mathcal{S}(\mathbb{R} \cap A) = \mathcal{M}(\mathbb{R} \cap A).$$

აღვნიშნოთ E_A სიმბოლოთი ყველა იმ ელემენტების სიმრავლე $(\mathbb{R} \cap A)$ -დან, რომელთათვისაც $\mu_1 = \mu_2$, სადაც μ_1 და μ_2 ზომები არიან μ ზომის გაგრძელებები. თუ $\{A_n : n \in N\}$ არის E_A სიმრავლეთა კლასის ელემენტთა მონოტონური მიმდევრობა, მაშინ

$$\mu_i \left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_i(A_n) \quad (i = 1, 2).$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in E_A$.

ამრიგად, E_A არის მონოტონური კლასი, რომელიც შეიცავს $(\mathbb{R} \cap A)$ სიმრავლეს, ამავე დროს $S(\mathbb{R} \cap A) = M(\mathbb{R} \cap A)$ და $M(\mathbb{R} \cap A) \subset E_A$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $S(\mathbb{R} \cap A)$ -ზე $\mu_1 = \mu_2$.

ვინაიდან ყოველი ელემენტი $S(\mathbb{R})$ -დან შეიძლება წარმოვიდგინოთ $\mathbb{R}$ -ის ელემენტთა დიზიუნქტიური მიმდევრობის გაერთიანების სახით, ამიტომ $S(\mathbb{R})$ -ზე $\mu_1 = \mu_2$.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 2. თუ μ^* გარე ზომის შევიწროებას ბორელის კლასზე ავღნიშნავთ μ ასოთი, ხოლო ღებეგის ზომას λ -ით, მაშინ λ ზომა შეიძლება ასეც განისაზღვროს:

$$\lambda(A) = \lambda(C \cup H) = \mu(C),$$

$C \in S(\mathbb{R})$, ხოლო H არის ბორელის ნული ზომის სიმრავლის ქვესიმრავლე.

ეს განსაზღვრა კორექტულია. მართლაც, თუ

$$A = C \cup H = C_1 \cup H_1,$$

მაშინ $C \Delta C_1 \subset H \cup H_1$ და $\mu(C \Delta C_1) = 0$.

თეორემა 8 (კარათეოდორი). $A \in L$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა E საბაზისო სიმრავლის ნებისმიერი Y ქვესიმრავლისათვის მართებულია ტოლობა

$$\mu^*(Y) = \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap (E \setminus A)).$$

დამტკიცება. აუცილებლობა. ვთქვათ $A \in L$ და $Y \subset E$ ნებისმიერი სიმრავლეა. B -თი ავლნიშნოთ Y სიმრავლის ზომადი გარსი, ე. ი. $Y \subset B$. ცხადია, რომ $B = (B \cap A) \cup (B \setminus A)$ და

$$\begin{aligned} \mu^*(Y) &= \mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) \geq \\ &\geq \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap (E \setminus A)). \end{aligned}$$

საიდანაც გამოდის, რომ

$$\mu^*(Y) \geq \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap (E \setminus A)).$$

მეორეს მხრივ, $Y = (Y \cap A) \cup (Y \cap (E \setminus A))$ და ე. ი.

$$\mu^*(Y) \leq \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap (E \setminus A)).$$

ბოლო ორი უტოლობიდან მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას.

საკმარისობა. განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

$$1) \mu^*(A) < +\infty.$$

დავუშვათ, რომ B არის A სიმრავლის ზომადი გარსი და Y სიმრავლის როლში ავიღოთ B სიმრავლე. მაშინ გვექნება

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap (E \setminus A)) = \\ &= \mu^*(A) + \mu^*(B \cap (E \setminus A)). \end{aligned}$$

$$\text{ე. ი. } \mu^*(B \cap (E \setminus A)) = 0.$$

ამიტომ

$$B \cap (E \setminus A) \in L^*, \quad B \cap (E \setminus A) = B \setminus A \in L^*$$

და შესაბამისად, $A = B \setminus (B \setminus A) \in L^*$. თეორემა 9-ის თანახმად $A \in L$.

$$2) \mu^*(A) = +\infty.$$

გარე ზომის განსაზღვრებიდან შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$A = \bigcup_{k \in N} A_k,$$

სადაც

$$(\forall k) (k \in N \Rightarrow A_k \in \mathbb{R} \text{ \& } \mu^*(A_k) < +\infty).$$

დავუშვათ, რომ ყოველი $k \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის B_k არის A_k სიმრავლის ზომადი გარსი. აუცილებლობის დამტკიცებისას მოყვანილი ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ:

$$\mu^*(A_k) = \mu^*(B_k) = \mu^*(B_k \cap A) + \mu^*(B_k \cap (E \setminus A));$$

$$\mu^*(B_k) = \mu^*(B_k \cap A);$$

$$\mu^*(B_k \cap (E \setminus A)) = 0 \Rightarrow B_k \cap (E \setminus A) = B_k \setminus A \in L.$$

$$\text{ვთქვათ, } B = \bigcup_{k \in N} B_k, \text{ მაშინ } A \subset B \text{ და } B \setminus A = \bigcup_{k \in N} (B_k \setminus A).$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$\mu^*(B \setminus A) \leq \sum_{k \in N} \mu^*(B_k \setminus A) = 0.$$

ე. ი. $B \setminus A \in L$ და $A = B \setminus (B \setminus A)$ ტოლობის თანახმად, $A \in L$.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 9. თუ $A \in L$, მაშინ E საბაზისო სიმრავლის ნებისმიერი Y ქვესიმრავლისათვის მართებულია ტოლობა

$$\mu_*(A \cap Y) + \mu^*(A \cap (E \setminus Y)) = \mu(A).$$

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ თუ $A \in L$, მაშინ $\mu_*(A) = \mu(A)$. მართლაც, ცხადია, რომ $\mu_*(A) \leq \mu(A)$. თეორემა 6-ის თანახმად, $A = B \cup C$, სადაც $\mu(C) = 0$.

მაშასადამე, $\mu(A) = \mu(B)$. მეორეს მხრივ, $B \subset A$ და შესაბამისად, $\mu(B) \leq \mu_*(A)$. ე. ი. $\mu_*(A) \geq \mu(A)$. რაც ნიშნავს $\mu_*(A) = \mu(A)$ ტოლობის შესრულებას.

მიღებული ტოლობის გათვალისწინებით გვექნება

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu_*(A) = \mu_*[(A \cap Y) \cup (A \cap (E \setminus Y))] \leq \\ &\leq \mu_*(A \cap Y) + \mu^*[A \cap (E \setminus Y)] \leq \\ &\leq \mu^*[(A \cap Y) \cup (A \cap (E \setminus Y))] = \mu^*(A) = \mu(A),\end{aligned}$$

საიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ტოლობა.

თეორემა 10. ვთქვათ, მოცემულია E საბაზისო სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაიმე $\mathbb{R}$ რგოლზე განსაზღვრული μ ზომა. თუ $Y \subset E$ ქვესიმრავლისათვის არსებობს ისეთი $A \in \mathbb{R}$ სიმრავლე, რომ $Y \subset A$, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\mu^*(A \setminus Y) - \mu_*(A \setminus Y) = \mu^*(Y) - \mu_*(Y).$$

დამტკიცება. თეორემა 16-ის თანახმად გვექნება

$$\mu(A) = \mu_*(Y \cap A) + \mu^*[(E \setminus Y) \cap A] = \mu_*(Y) + \mu^*(A \setminus Y).$$

თუ Y სიმრავლეს შევცვლით $E \setminus Y$ სიმრავლით, მაშინ მივიღებთ

$$\mu(A) = \mu_*((E \setminus Y) \cap A) + \mu^*[Y \cap A] = \mu_*(A \setminus Y) + \mu^*(Y).$$

ე. ი.

$$\mu_*(Y) + \mu^*(A \setminus Y) = \mu_*(A \setminus Y) + \mu^*(Y),$$

საიდანაც $(\mu(A))$ სასრულობის გამო) უშუალოდ მიიღება დასამტკიცებელი ტოლობა.

შენიშვნა 3. თეორემა 8-დან გამომდინარეობს, რომ $Y \subset E$ ქვესიმრავლის შიგა ზომა, რომლისთვისაც არსებობს ისეთი $A \in \mathbb{R}$ სიმრავლე, რომ $Y \subset A$, შეიძლება განისაზღვროს შემდეგი ფორმულით:

$$\mu_*(Y) = \mu(A) - \mu^*(A \setminus Y).$$

თეორემა 9 მიუთითებს, რომ ეს განსაზღვრა არ არის დამოკიდებული A სიმრავლეზე.

თეორემა 11. ვთქვათ, Y არის E საბაზისო სიმრავლის ნებისმიერი ქვესიმრავლე და $\mathbb{R}$ არის E -ს ქვესიმრავლეთა რაიმე რგოლი. თუ არსებობს ისეთი $A \in \mathbb{R}$ სიმრავლე, რომ $Y \subset A$, მაშინ Y ზომადია ლებეგის აზრით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\mu_*(Y) = \mu^*(Y).$$

დამტკიცება. აუცილებლობა. ვთქვათ, $Y \in L$. რადგან ამ შემთხვევაში სრულდება $\mu_*(Y) = \mu(Y)$ და $\mu^*(Y) = \mu(Y)$ ტოლობები, ამიტომ $\mu_*(Y) = \mu^*(Y)$.

საკმარისობა. ვთქვათ, $\mu_*(Y) = \mu^*(Y)$. ცხადია, რომ $\mu_*(Y)$ და $\mu^*(Y)$ რიცხვები სასრულია. დავუშვათ, რომ C არის Y სიმრავლის ზომადი ბირთვი, ხოლო B კი - Y -ის ზომადი გარსი. ე. ი. გვაქვს $\mu_*(Y) = \mu(C)$ და $\mu(B) = \mu^*(Y)$ ტოლობები, ამასთან $Y \Delta C = Y \setminus C \subset B \setminus C$ და

$$\mu^*(Y \Delta C) \leq \mu^*(B \setminus C) = \mu(B \setminus C) = \mu(B) - \mu(C) = 0.$$

რადგან $C \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ამიტომ $C \in L$ და შესაბამისად, $C \in L^*$. ე. ი. ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $D \in \mathbb{R}$ სიმრავლე, რომ $\mu^*(C \Delta D) < \varepsilon$, მაშინ გვაქვს

$$Y \Delta D \subset (Y \Delta C) \cup (C \Delta D),$$

და შესაბამისად,

$$\mu^*(Y \Delta D) \leq \mu^*(Y \Delta C) + \mu^*(C \Delta D) < \varepsilon.$$

ე. ი. $Y \in L^*$.

თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 4. მართებულია უფრო ზოგადი დებულება, ვიდრე თეორემა 10, მაგრამ ეს თეორემა მიეყვანილი იყო იმის გამო, რომ იგი საშუალებას იძლევა ლებეგის ზომის აგების კიდევ ერთ გზას.

ავლნიშნით L^{**} სიმბოლოთი E საბაზისო სიმრავლის იმ Y ქვესიმრავლეთა კლასი, რომელთათვისაც არსებობს ისეთი $A \in \mathbb{R}$ ელემენტი, რომ $Y \subset A$ და $\mu_*(Y) = \mu^*(Y)$.

საზოგადოდ, $L^{**} \neq L^*$.

L^{**} სიმრავლეთა კლასის ელემენტთა თვალაზრით არაუმეტესი გაერთიანებები კი კვლავ გვაძლევს L კლასს.

თეორემა 12. ვთქვათ, Y არის E საბაზისო სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლე. $Y \in L^*$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mu_*(Y) = \mu^*(Y)$ და $\mu_*(Y) < +\infty$, $\mu^*(Y) < +\infty$.

თეორემა 11 მტკიცდება თეორემა 10-ის ანალოგიურად.

შენიშვნა 5. თეორემა 11-ის ანალოგი L კლასის ელემენტებისათვის საზოგადოდ არ არის მართებული.

თეორემა 13. E საბაზისო სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ჩართვის თვალსაზრისით უდიდესი ალგებრა, რომელზედაც ადიტიურია გარე ზომის შევიწროება, ემთხვევა ლებეგის კლასს.

დამტკიცება. L_1 -ით ავლნიშნით E საბაზისო სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ჩართვის თვალსაზრისით უდიდესი ალგებრა, რომელზედაც ადიტიურია გარე ზომის შევიწროება. ვინაიდან μ^* გარე ზომის შევიწროება L კლასზე ადიტიურია, ამიტომ $L \subset L_1$. დაუშვათ, რომ $L \not\subset L_1$. ე. ი. არსებობს $Y \subset E$ ისეთი სიმრავლე, რომ $Y \in L_1$ და $Y \notin L$. ვთქვათ, $A \in \mathbb{R}$ და $A \cap Y \notin L$. ამიტომ თეორემა 8-ის თანახმად გვაქვს

$$\mu^*(A \cap Y) > \mu_*(A \cap Y) = \mu(A) - \mu^*[A \setminus (A \cap Y)],$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\mu^*(A \cap Y) + \mu^*[A \setminus (A \cap Y)] > \mu^*(A).$$

რადგან $A \cap Y$ და $A \setminus (A \cap Y)$ სიმრავლეები თანაუკვეთი სიმრავლეებია და $A = (A \cap Y) \cup [A \setminus (A \cap Y)]$, ამიტომ მივიღეთ წინააღმდეგობა $A \in L_1$ პირობასთან.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

§21. ზომის გაზომვადობა ამ ზომის განსაზღვრის არით წარმოქმნილ σ -რბოლზე

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. საბაზისო E სიმრავლის ქვესიმრავლეთა L^* კლასი წარმოადგენს რგოლს და μ^* გარე ზომის შევიწროება ამ კლასზე არის $\mathbb{R}$ რგოლზე განსაზღვრული μ ზომის გაგრძელება.

დამტკიცება. ვთქვათ, $A \in L^*$ და $B \in L^*$. მაშინ არსებობს $\mathbb{R}$ რგოლის ელემენტთა ორი ისეთი $\{A_k : k \in N\}$ და $\{B_k : k \in N\}$ მიმდევრობა, რომ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu^*(A \Delta A_k) = 0 \quad \text{და} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu^*(B \Delta B_k) = 0.$$

სიმრავლეებს შორის მარტივი დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\mu^*[(A \cup B) \Delta (A_k \Delta B_k)] \leq \mu^*(A \Delta A_k) + \mu^*(B \Delta B_k),$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu^*[(A \cup B) \Delta (A_k \Delta B_k)] = 0.$$

ეს ნიშნავს, რომ $(A_k \cup B_k : k \in N)$ სიმრავლეთა მიმდევრობა

ρ მეტრიკით (იხილეთ, §20) კრებადია $(A \cup B)$

სიმრავლისაკენ, ე. ი. $A \cup B \in L^*$.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $A \cap B \in L^*$ და $A \setminus B \in L^*$. საიდანაც მივიღებთ, რომ $A \Delta B \in L^*$. ყოველივე ეს ნიშნავს, რომ L^* არის E საბაზისო სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რგოლი.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ μ^* გარე ზომის შევიწროება L^* კლასზე არის სასრულად ადიტიური.

ვთქვათ, $\{A_k : k \in N\}$ და $\{B_k : k \in N\}$ არიან ზემოთ განხილული სიმრავლეთა მიმდევრობები. ცხადია, რომ

$$A_k = (A_k \setminus B_k) \cup (A_k \cap B_k);$$

$$B_k = (B_k \setminus A_k) \cup (B_k \cap A_k).$$

μ ზომის ადიტიურობიდან და ბოლო გაერთიანებებში შემაკვალი სიმრავლეების დიზიუნქტიურობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\mu(A_k) = \mu(A_k \setminus B_k) + \mu(A_k \cap B_k);$$

$$\mu(B_k) = \mu(B_k \setminus A_k) + \mu(B_k \cap A_k).$$

ადვილი დასანახია, რომ $A_k \cup B_k$ გაერთიანება წარმოიდგინება თანაუკვეთი სიმრავლეების გაერთიანების სახით შემდეგნაირად

$$A_k \cup B_k = (A_k \setminus B_k) \cup (B_k \setminus A_k) \cup (A_k \cap B_k),$$

ამიტომ კვლავ μ ზომის ადიტიურობის გამო გვექნება

$$\begin{aligned} \mu(A_k \cup B_k) &= \mu(A_k \setminus B_k) + \mu(B_k \setminus A_k) + \mu(A_k \cap B_k) = \\ &= \mu(A_k) + \mu(B_k) - \mu(A_k \cap B_k). \end{aligned}$$

თუ ბოლო ტოლობაში გადავაღოთ ზღვარზე, როცა $k \rightarrow +\infty$ და მიღებულ ტოლობაში ყველგან μ -ს მაგივრად დავწერთ μ^* , მაშინ მივიღებთ

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B) - \mu^*(A \cap B).$$

კერძოდ, თუ $A \cap B = \emptyset$, მაშინ გვექნება

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

ეს ნიშნავს, რომ μ^* არის სასრულად ადიტიური L^* კლასზე.

ახლა ვთქვათ, $A \in L^*$ და $A = \bigcup_{k \in N} A_k$, სადაც $\{A_k : k \in N\}$

არის სიმრავლეთა დიზიუნქტიური მიმდევრობა L^* სიმრავლეთა კლასიდან.

გარე μ^* ზომის თვლად ნახევრად-ადიტიურობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\mu^*(A) \leq \sum_{k \in N} \mu^*(A_k).$$

მეორეს მხრივ, ყოველი $m \in N$ ნატურალური რიცხვისთვის $\bigcup_{k=0}^{m-1} A_k \subset A$, ამიტომ გვექნება

$$\mu^*(A) \geq \mu^*\left(\bigcup_{k=0}^{m-1} A_k\right) = \sum_{k=0}^{m-1} \mu^*(A_k).$$

თუ ბოლო ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $m \rightarrow \infty$, მივიღებთ

$$\mu^*(A) \geq \sum_{k \in N} \mu^*(A_k).$$

ე. ი.

$$\mu^*(A) = \sum_{k \in N} \mu^*(A_k).$$

რადგან μ^* გარე ზომის შევიწროება L^* კლასზე ზომაა L^* -ზე და μ^* არის μ ზომის გაგრძელება $\mathbb{R}$ -დან $P(E)$ -ზე.

ეს ნიშნავს, რომ μ^* გარე ზომის შევიწროება L^* კლასზე იქნება $\mathbb{R}$ რგოლზე მოცემული μ ზომის გაგრძელება.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2. სიმრავლეთა L კლასი წარმოადგენს σ -
ალგებრას და μ^* გარე ზომის შევიწროება L -ზე არის ზომა,
რომელიც L^* სიმრავლეთა კლასზე განსაზღვრული ზომის
გაგრძელებაა.

დამტკიცება. ლეზგის აზრით ზომად L ქვესიმრავლეთა
კლასის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ის
ჩაკეტილია გაერთიანების ოპერაციის მიმართ. ამიტომ თუ
დავამტკიცეთ, რომ L არის რგოლი, მაშინ გამოვა, რომ ის
ამავე დროს არის σ -რგოლიც. ასევე ავლნიშნოთ, რომ რადგან
 E საბაზისო სიმრავლე იფარება $\mathbb{R}$ რგოლის ელემენტთა
მიმდევრობით, ამიტომ მივიღებთ, რომ $E \in L$. რაც იმას
ნიშნავს, რომ L იქნება σ -ალგებრა.

ვთქვათ, $A \in L$ და $B \in L$. მაშინ ადგილი აქვს
წარმოდგენებს:

$$A = \bigcup_{k \in N} A_k \text{ და } B = \bigcup_{k \in N} B_k,$$

სადაც $\{A_k : k \in N\}$ და $\{B_k : k \in N\}$ არიან L^* -ის ელემენტთა
დიზიუნქტიური მიმდევრობები.

რადგან მართებულია ტოლობები

$$A \cap B = A \cap \left(\bigcup_{i \in N} B_i \right) = \bigcup_{i \in N} (A \cap B_i),$$

$$A \cap B_i = \bigcup_{k \in N} (A_k \cap B_i) \quad (\forall i \in N),$$

ამიტომ

$$A \cap B = \bigcup_{i \in N} \bigcup_{k \in N} (A_k \cap B_i).$$

რადგან $A_k \cap B_i \in L^*$, ამიტომ $A \cap B \in L$.

ცხადია, რომ $A_k \cap B \in L^*$ და $A_k \setminus B = A_k \setminus (A_k \cap B)$,

ამიტომ $A_k \setminus B \in L^*$. გარდა ამისა, $A \setminus B = \bigcup_{k \in N} (A_k \setminus B)$ და

შესაბამისად, $A \setminus B \in L$. ე. ი. დამტკიცდა, რომ L რგოლია.

ახლა ვთქვათ, $A \in L$ და $A = \bigcup_{k \in N} A_k$, სადაც

$$(\forall k)(k \in N \Rightarrow A_k \in L).$$

ცხადია, რომ თუ ერთი მაინც A_k სიმრავლისათვის სრულდება $\mu^*(A_k) < +\infty$ პირობა, მაშინ μ^* გარე ზომა თვლად აღიჭურვილია.

დავუშვათ, რომ $(\forall k)(k \in N \Rightarrow \mu^*(A_k) < +\infty)$. მაშინ §20-ის თეორემა 2-ის თანახმად $(\forall k)(k \in N \Rightarrow A_k \in L^*)$. ყოველი

$m \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის $\bigcup_{k=0}^{m-1} A_k \subset A$, ამიტომ

$$\mu^*(A) \geq \mu^*\left(\bigcup_{k=0}^{m-1} A_k\right) = \sum_{k=0}^{m-1} \mu^*(A_k).$$

თუ ბოლო უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $m \rightarrow \infty$, მივიღებთ, რომ

$$\sum_{k \in N} \mu^*(A_k) \leq \mu^*(A).$$

$\sum_{k \in N} \mu^*(A_k) \geq \mu^*(A)$ უტოლობა გამომდინარეობა μ^* გარე ზომის თვლად აღიჭურვილობისაგან. საბოლოოდ მივიღეთ

$$\sum_{k \in N} \mu^*(A_k) = \mu^*(A).$$

ცხადია, რომ გარე μ^* ზომის შევიწროება L -ზე არის μ^* -ს L^* -ზე შევიწროების გაგრძელება.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3. ერთადერთი ზომა, რომელიც განსაზღვრულია L კლასზე და არის $\mathbb{R}$ სიმრავლეთა რგოლზე მოცემული μ ზომის გაგრძელება, არის ღებეგის ზომა.

დამტკიცება. §20-ის შენიშვნა 2-ის თანახმად, საკმარისია ერთადერთობა ვაჩვენოთ $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ კლასზე.

ვთქვათ, $A \in \mathbb{R}$ და σ -რგოლების სტრუქტურიდან გამომდინარეობს (იხილეთ, §9, თეორემა 6, თეორემა 8), რომ

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \cap A = \mathcal{S}(\mathbb{R} \cap A);$$

$$\mathcal{S}(\mathbb{R} \cap A) = \mathcal{M}(\mathbb{R} \cap A).$$

აღვნიშნოთ E_A სიმბოლოთი ყველა იმ ელემენტების სიმრავლე $(\mathbb{R} \cap A)$ -დან, რომელთათვისაც $\mu_1 = \mu_2$, სადაც μ_1 და μ_2 ზომები არიან μ ზომის გაგრძელებებს. თუ $\{A_n : n \in N\}$ არის E_A სიმრავლეთა კლასის ელემენტთა მონოტონური მიმდევრობა, მაშინ

$$\mu_i \left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_i(A_n) \quad (i = 1, 2).$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in E_A$.

ამრიგად, E_A არის მონოტონური კლასი, რომელიც შეიცავს $(\mathbb{R} \cap A)$ სიმრავლეს, ამავე დროს $\mathcal{S}(\mathbb{R} \cap A) = \mathcal{M}(\mathbb{R} \cap A)$ და $\mathcal{M}(\mathbb{R} \cap A) \subset E_A$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $\mathcal{S}(\mathbb{R} \cap A)$ -ზე $\mu_1 = \mu_2$.

ვინაიდან ყოველი ელემენტი $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ -დან შეიძლება წარმოვიდგინოთ $\mathbb{R}$ -ის ელემენტთა დიზიუნქტიური მიმდევრობის გაერთიანების სახით, ამიტომ $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ -ზე $\mu_1 = \mu_2$.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

§22. ჟორდანის ზომა

წინა პარაგრაფებში განსაზღვრეთ ზომა აბსტრაქტული სიმრავლეთა გარკვეულ კლასზე და ლებეგის ზომა შემოვიტანეთ, როგორც ბორელის ზომის გასრულება. ახლა კი განსაზღვროთ ლებეგის ზომა კონკრეტული სივრცისათვის. კერძოდ, ევკლიდეს n -განზომილებიანი R^n სივრცისათვის, სადაც $(n \geq 1)$.

ძირითადი დებულებების ჩამოყალიბებისათვის დაგვჭირდება რამდენიმე დამხმარე ცნება.

როგორც ცნობილია, ევკლიდეს n -განზომილებიანი ევკლიდეს R^n სივრცის $(n \geq 1)$ შემთხვევაში $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ სახის საკოორდინატო

პარალელეპიპედის Π_n სიმრავლე ქმნის R^n სივრცის ქვესიმრავლეთა ნახევარგოლს და მასზე შეიძლება განსაზღვროთ სიმრავლის ფუნქცია V_n შემდეგი კანონიკური ფორმულით:

$$V_n([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

ლებეგის ზომის განსაზღვრას ისტორიულად წინ უსწრებდა ჟორდანის ზომის აგება, რომელიც აზოგადებდა საკოორდინატო პარალელეპიპედზე განსაზღვრულ V_n მოცულობის ცნებას.

R^n სივრცის X ქვესიმრავლეს ეწოდება ამოზნექილი, თუ X -ის ნებისმიერი ორი განსხვავებული წერტილისათვის მონაკვეთი, ბოლოებით ამ წერტილებში, მთლიანად ეკუთვნის X სიმრავლეს (უფრო ზოგადად ამოზნექილი სიმრავლეების შესახებ, იხილეთ, §12).

უშუალოდ მოწმდება, რომ თუ $\{X_i : i \in I\}$ არის R^n სივრცის ამოზნექილ ქვესიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახი, მაშინ

$\bigcap_{i \in I} X_i$ სიმრავლე აგრეთვე იქნება ამოზნექილი ქვესიმრავლე R^n -ში.

თუ X არის R^n სივრცის ნებისმიერი ქვესიმრავლე, მაშინ X -ის შემცველ R^n სივრცის ყველა ამოზნექილი სიმრავლის თანაკვეთას ეწოდება X სიმრავლის ამოზნექილი გარსი და აღინიშნება $\text{conv}(X)$ სიმბოლოთი. ცხადია, რომ $\text{conv}(X)$ წარმოადგენს ჩართვის თვალსაზრისით უმცირეს ამოზნექილ სიმრავლეს R^n -ში, რომელიც X სიმრავლეს შეიცავს. ცხადია, რომ $X \subset R^n$ სიმრავლე ამოზნექილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $X = \text{conv}(X)$.

$X \subset R^n$ ქვესიმრავლეს ეწოდება ამოზნექილად დამოუკიდებელი, თუ შესრულებულია პირობა:

$$(\forall x)(x \in X \Rightarrow x \notin \text{conv}(X \setminus \{x\})).$$

R^n სივრცეში ამოზნექილი მრავალწახნაგა ეწოდება R^n სივრცის წერტილთა სასრული ამოზნექილად დამოუკიდებელი ქვესიმრავლის ამოზნექილ გარსს. თვით ეს სასრული ქვესიმრავლე ქმნის ამოზნექილი მრავალწახნაგას წვეროების სიმრავლეს.

R^n სივრცეში მრავალწახნაგა ეწოდება წვეილ-წვეილად არაგადამფარავი ამოზნექილი მრავალწახნაგების ნებისმიერი სასრული ოჯახის გაერთიანებას.

R^n სივრცის იზომეტრიულ გარდაქმნა ეწოდება R^n სივრცის თავის თავზე f ბიექციას, რომელიც წერტილებს შორის მანძილს ინარჩუნებს (უფრო დაწვრილებით სივრცის გარდაქმნების შესახებ იხილეთ, §8).

R^n სივრცის იზომეტრიულ გარდაქმნათა სიმრავლე წარმოადგენს ჯგუფს, სადაც ჯგუფური ოპერაცია არის ორი იზომეტრიულ გარდაქმნის კომპოზიცია. ამ ჯგუფს ეწოდება

R^n სივრცის იზომეტრიულ გარდაქმნათა ჯგუფი და აღინიშნება D_n სიმბოლოთი.

იზომეტრიულ გარდაქმნათა D_n ჯგუფის ქვეჯგუფს წარმოადგენს R^n სივრცის პარალელურ გადატანათა ანუ ტრანსილაციების π_n ჯგუფი. იგი შეიძლება გავაიგიოთ თვით R^n სივრცესთან, შევეუსაბამებთ რა $y \rightarrow y + x \quad (y \in R^n)$

ფორმულით განსაზღვრულ R^n სივრცის პარალელურ გადატანას ანუ ძერას $x \in R^n$ ელემენტით.

ცხადია, რომ D_n ჯგუფის ერთეულს წარმოადგენს R^n სივრცის თავის თავზე იგივერი გადასახვა, ხოლო პარალელურ გადატანათა π_n ჯგუფის შემთხვევაში კი ჯგუფის ერთეულოვანი ელემენტი სივრცის ნულოვან ვექტორთან არის გაიგივებული.

n -განზომილებიანი მოცულობა, რომელსაც V_n სიმბოლოთი აღვნიშნავთ, ეწოდება R^n სივრცის ყველა მრავალწახნაგათა T_n კლასის გადასახვას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1. $(\forall T)(T \in T_n \Rightarrow V_n(T) \geq 0)$;

2. ნებისმიერი ორი არაგადამფარავი T_1 და T_2 მრავალწახნაგასთვის T_n კლასიდან სრულდება პირობა:

$$V_n(T_1 + T_2) = V_n(T_1) + V_n(T_2),$$

კერძოდ, V_n არის სიმრავლის ადიტიური ფუნქცია T_n კლასზე;

3. V_n ინვარიანტულია R^n სივრცის გადაადგილებათა D_n ჯგუფის მიმართ. ეს ნიშნავს შემდეგი პირობის შესრულებას:

$$(\forall T)(T \in T_n \& g \in D_n \Rightarrow g(T) \in T_n \& V_n(g(T)) = V_n(T));$$

4. თუ Δ_n არის R^n სივრცის ერთეულოვანი საკოორდინატო კუბი, ე. ი. $\Delta = [0, 1]^n$, მაშინ $V_n(\Delta) = 1$.

როგორც გეომეტრიიდან არის ცნობილი, მესერთა (ბადეთა) მეთოდით მტკიცდება, რომ T_n კლასზე მართლაც შეიძლება განისაზღვროს V_n ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს 1-4. თვისებებს. იგივე მეთოდი საშუალებას იძლევა R^n სივრცის ქვესიმრავლეთა გარკვეულ $\mathbb{R}_n$ რგოლზე განესაზღვროთ ზომა, რომელიც n -განზომილებიანი V_n მოცულობის გაგრძელებას წარმოადგენს. ამ ზომას ჟორდანის ზომა ეწოდება და იგი J_n სიმბოლოთი აღინიშნება. $\mathbb{R}_n$ რგოლს, რომელზეც განისაზღვრება ჟორდანის ზომა, R^n სივრცის ქვესიმრავლეთა ჟორდანის კლასი ეწოდება და აღინიშნება J_n სიმბოლოთი.

ვთქვათ, X არის R^n სივრცის შემოსაზღვრული ქვესიმრავლე. განვიხილოთ Ξ_n ნახევარრგოლის ელემენტების ნებისმიერი სასრული დიზიუნქტიური $\{M_i : 0 \leq i \leq k-1\}$ ($k \in N$) ოჯახი, რომელიც წარმოადგენს X სიმრავლის დაფარვას და შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma^* = V_n(M_0) + V_n(M_1) + \dots + V_n(M_{k-1}).$$

იგივე დაფარვისათვის σ_* სიმბოლოთი აღინიშნოთ $\{M_i : 0 \leq i \leq k-1\}$ ოჯახიდან ყველა იმ ელემენტების მოცულობების ჯამი, რომელთაგან თითოეული ეკუთვნის X სიმრავლეს.

ცხადია, რომ

$$\sigma_* \leq \sigma^*.$$

ახლა განვიხილოთ X სიმრავლის ყველა შესაძლო დაფარვა Ξ_n ნახევარრგოლის სასრული დიზიუნქტიური

ოჯახებით. ცხადია, რომ σ^* სახის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე შემოსაზღვრულია ქვემოდან ნებისმიერი σ_* სახის რიცხვით, ხოლო σ_* სახის რიცხვთა სიმრავლე შემოსაზღვრულია ზემოდან ნებისმიერი σ^* სახის რიცხვით. ამიტომ არსებობენ $\inf\{\sigma^*\}$ და $\sup\{\sigma_*\}$ რიცხვები. $\inf\{\sigma^*\}$ რიცხვს ეწოდება X სიმრავლის გარე ზომა ჟორდანის აზრით და იგი $V_n^*(X)$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ხოლო $\sup\{\sigma_*\}$ რიცხვს ეწოდება X სიმრავლის შიგა ზომა ჟორდანის აზრით ეწოდება და იგი $V_{n*}(X)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ცხადია, რომ შესრულებულია უტოლობა

$$V_{n*}(X) \leq V_n^*(X).$$

R^n სივრცის შემოსაზღვრულ X ქვესიმრავლეს ეწოდება ჟორდანის აზრით ზომადი, თუ

$$V_{n*}(X) = V_n^*(X).$$

ჟორდანის აზრით გარე და შიგა ზომების საერთო მნიშვნელობას X სიმრავლის ჟორდანის ზომა ეწოდება აღინიშნება $j_n(X)$ სიმბოლოთი.

ცხადია, რომ

$$j_n([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i);$$

$$j_n([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i);$$

$$j_n([a_1, b_1] \times]a_2, b_2] \times \cdots \times]a_n, b_n]) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i);$$

$$j_n([a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \cdots \times]a_n, b_n[) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ R^n სივრცის X ქვესიმრავლის ჟორდანის აზრით ზომადობისათვის

აუცილებელია X სიმრავლის შემოსაზღვრულობა. ცხადია, რომ ეს პირობა საკმარისი არ არის. მართლაც, თუ განვიხილავთ ერთეულოვან Δ_n კუბის რაციონალურ წერტილთა X სიმრავლეს, მაშინ ცხადია, რომ X შემოსაზღვრულია, მაგრამ $V_{n*}(X)=0$, ხოლო $V_n^*(X)=1$ და მაშასადამე, X არ არის ზომადი ჟორდანის აზრით.

Ξ_n ნახევარგოლით წარმოქმნილ $\mathbb{R}_n(\Xi_n)$ რგოლს ეწოდება R^n სივრცის ელემენტალურ ფიგურათა კლასი და მას მოკლედ $\mathbb{R}_n$ სიმბოლოთი ავლენიშნავთ.

თეორემა 1. ეკვლიდეს n -განზომილებიანი R^n სივრცის ყოველი ელემენტალური ფიგურა ზომადია ჟორდანის აზრით და მისი ჟორდანის ზომა ტოლია იმ საკოორდინატო პარალელეპიპედების n -განზომილებიანი მოცულობების ჯამისა, რომლებიც ელემენტალური ფიგურის შემადგენელი Ξ_n ნახევარგოლის ელემენტებია.

ეს დებულება აშკარაა, ვინაიდან ყოველი $A \in \mathbb{R}_n$ ელემენტალური ფიგურა შეიძლება წარმოვიდგინოთ Ξ_n ნახევარგოლის ელემენტთა სასრული დიზიუნქტიური ოჯახის გაერთიანების სახით. ე. ი. $A = \bigcup_{k=0}^{p-1} A_k$ და ჟორდანის ზომის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$j_n(A) = \sum_{k=0}^{p-1} V_n(A_k).$$

ცხადია აგრეთვე, რომ ეს ჯამი დამოკიდებული არ არის A სიმრავლის წარმოდგენაზე Ξ_n -ის ელემენტებით.

თეორემა 1-დან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2. R^n სივრცის ნებისმიერი A ელემენტალური ფიგურის ჩაკეტვა $\overline{A}$ და შიგა ნაწილი $Int(A)$ ზომადია ჟორდანის აზრით და

$$j_n(A) = j_n(\overline{A}) = j_n(Int(A)).$$

თეორემა 3. ვთქვათ, X არის R^n სივრცის შემოსაზღვრული ქვესიმრავლე. შემდეგი ოთხი თვისება ექვივალენტურია:

1) X ზომადია ჟორდანის აზრით;

2) მესერთა ნებისმიერი $\{M_n : n \in N\}$ მიმდევრობისათვის

$$j_n(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} j_n(\underline{\nabla}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} j_n(\overline{\nabla}_k),$$

სადაც $\underline{\nabla}_k$ არის M_k მესერთა ყველა იმ ჩართვის თვალსაზრისით უდიდესი ჩაკეტილი n -განზომილებიანი კუბების ოჯახის ელემენტების გაერთიანება, რომლებიც X სიმრავლეში შედიან, ხოლო $\overline{\nabla}_k$ არის M_k მესერთა ყველა იმ n -განზომილებიანი ღია კუბების გაერთიანება, რომლებიც X სიმრავლესთან თანაკვეთება;

3) ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობენ A და B ფიგურები ისეთი, რომ $A \subset X \subset B$ და

$$j_n(B) - j_n(A) < \varepsilon;$$

4) $X \subset R^n$ ქვესიმრავლის საზღვრის $Fr(X)$ სიმრავლის ჟორდანის ზომა ნულის ტოლია.

დამტკიცება. $1) \Rightarrow 2)$. ვთქვათ, $X \subset R^n$ ქვესიმრავლე არის ჟორდანის აზრით ზომადი. ე. ი. $V_{n*}(X) = V_n^*(X)$. თუ

$\{M_n : n \in N\}$ მესერთა ნებისმიერი მიმდევრობაა R^n სივრცეში, მაშინ ცხადია, რომ

$$\underline{\nabla}_0 \subset \underline{\nabla}_1 \subset \dots \subset \underline{\nabla}_k \subset \dots \quad \text{და} \quad \overline{\nabla}_0 \supset \overline{\nabla}_1 \supset \dots \supset \overline{\nabla}_k \supset \dots,$$

თანაც $\underline{\nabla}_k \subset X \subset \overline{\nabla}_k$.

ნამდვილ რიცხვთა $\{j_n(\underline{\nabla}_k) : k \in N\}$ მიმდევრობა ზრდადია

და ზემოდან შემოსაზღვრულია, ხოლო $\{j_n(\overline{\nabla}_k) : k \in N\}$

კლებადი და ქვემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობაა. იმის გამო, რომ

$$\sup_k \{j_n(\underline{\nabla}_k)\} = V_{n*}(X) \text{ და } \inf_k \{j_n(\overline{\nabla}_k)\} = V_n^*(X).$$

საბოლოოდ მივიღებთ, რომ

$$j_n(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} j_n(\underline{\nabla}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} j_n(\overline{\nabla}_k).$$

2) $\Rightarrow$ 3). თუ მესერთა ნებისმიერი $\{M_n : n \in N\}$ მიმდევრობისათვის სრულდება ტოლობები

$$j_n(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} j_n(\underline{\nabla}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} j_n(\overline{\nabla}_k),$$

მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $k_0 \in N$ ნატურალური რიცხვი, რომ როცა $k \geq k_0$, სრულდება უტოლობები

$$j_n(X) - j_n(\underline{\nabla}_k) < \frac{\varepsilon}{4} \text{ და } j_n(\underline{\nabla}_k) - j_n(X) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

ცხადია, რომ $\underline{\nabla}_k$ სიმრავლისათვის შეიძლება მივუთითოთ მასში შემავალი ელემენტალური ფიგურა A , რომლისთვისაც

$$j_n(\underline{\nabla}_k) - j_n(A) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

ასევე $\overline{\nabla}_k$ სიმრავლისათვის არსებობს მისი მომცველი ელემენტალური ფიგურა B , რომლისთვისაც

$$j_n(B) - j_n(\overline{\nabla}_k) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

მაშასადამე, საბოლოოდ მივიღებთ, რომ $A \subset X \subset B$ და

$$j_n(B) - j_n(A) < \varepsilon.$$

3) $\Rightarrow$ 4). თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობენ A და B ისეთი ელემენტალური ფიგურები, რომ $A \subset X \subset B$ და

$$j_n(B) - j_n(A) < \varepsilon,$$

თანაც $A = \bigcup_{k=1}^p A_k$ და $B = \bigcup_{i=1}^q B_i$ შესაბამისად არიან A და B

ელემენტალური ფიგურების წარმოდგენები Ξ_n -ის დიზიუნქტიური ელემენტებით. შევადგინოთ Ξ_n ნახევარგოლის ელემენტთა სასრული დიზიუნქტიური $\{A_k \cap B_i : 1 \leq k \leq p, 1 \leq i \leq q\}$ ოჯახი და განვიხილოთ ამ ოჯახის ისეთი $\{W_i : 1 \leq i \leq t\}$ ქვეოჯახი, რომლის ელემენტები შეიცავენ $Fr(X)$ სიმრავლის ერთ ელემენტს მაინც და მაშასადამე, $\{W_i : 1 \leq i \leq t\}$ სიმრავლეთა ოჯახი ფარავს $Fr(X)$ -ს.

ცხადია, რომ

$$V_n^*(Fr(X)) \leq V_n(W_1) + V_n(W_2) + \dots + V_n(W_t) < \varepsilon.$$

ε რიცხვის ნებისმიერობის გამო მივიღებთ, რომ $V_n^*(Fr(X)) = 0$. ამიტომ არსებობს $j_n(Fr(X))$ და $j_n(Fr(X)) = 0$.

4) $\Rightarrow$ 1). ვთქვათ, $j_n(Fr(X)) = 0$. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს X სიმრავლის დაფარვა Ξ_n ნახევარგოლის ელემენტთა სასრული დიზიუნქტიური $\{W_i : 1 \leq i \leq k\}$ ოჯახით, რომლისთვისაც $\sigma^* - \sigma_* < \varepsilon$. უფრო მეტიც, $V_n^*(X) - V_{n*}(X) < \varepsilon$ და ε რიცხვის ნებისმიერობის გამო მივიღებთ $V_n^*(X) = V_{n*}(X)$ ტოლობას. რაც ნიშნავს, რომ X სიმრავლე ზომადია ჟორდანის აზრით.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2-დან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3. ჟორდანის J_n ფუნქცია წარმოადგენს მრავალწახნაგების T_n კლასზე განსაზღვრული n -განზომილებიანი V_n მოცულობის გაგრძელებას.

თეორემა 4. ჟორდანის შიგა და გარე ზომები სიმრავლის მონოტონურ ფუნქციებს წარმოადგენენ R^n სივრცის შემოსაზღვრულ ქვესიმრავლეთა კლასზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, X და Y შემოსაზღვრული ქვესიმრავლეებია R^n სივრცეში და $Y \subset X$. ცხადია, რომ X სიმრავლის ნებისმიერი სასრული დიზიუნქტიური დაფარვა Ξ_n ნახევარგოლის ელემენტებით წარმოადგენს Y სიმრავლის დაფარვასაც, და ამ დაფარვის ყოველი ელემენტი, რომელიც ეკუთვნის Y -ს, ეკუთვნის აგრეთვე X სიმრავლესაც. ამიტომ ცხადია, რომ

$$V_{n*}(Y) \leq V_{n*}(X) \text{ და } V_n^*(Y) \leq V_n^*(X).$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5. R^n სივრცის ქვესიმრავლეთა ნებისმიერი $\{X_i : 1 \leq i \leq k\}$ სასრული ოჯახისათვის

$$V_n^*\left(\bigcup_{i=0}^{k-1} X_i\right) \leq \sum_{i=0}^{k-1} V_n^*(X_i).$$

დამტკიცება. თეორემა დავამტკიცოთ $k=2$ -სთვის. განვიხილოთ ორი X_0 და X_1 შემოსაზღვრული სიმრავლის სასრული დიზიუნქტიური დაფარვები Ξ_n ნახევარგოლის ელემენტებით. ცხადია, რომ ამ დაფარვებით მივიღებთ $X_0 \cup X_1$ ფიგურის Ξ_n -ის ელემენტებით სასრულ დიზიუნქტიურ დაფარვას. თუ σ_0 , σ_1 და σ შესაბამისად აღნიშნავენ X_0 , X_1 და $X_0 \cup X_1$ სიმრავლეების მითითებული დაფარვების ელემენტების მოცულობების ჯამებს, მაშინ ცხადია, რომ

$$\sigma \leq \sigma_0 + \sigma_1.$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$V_n^*(X_0 \cup X_1) \leq V_n^*(X_0) + V_n^*(X_1).$$

თეორემის სრულად დამტკიცება შესაძლებელია მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით.

თეორემა 6. R^n სივრცის ჟორდანის აზრით ზომადი ქვესიმრავლეების J_n კლასი წარმოადგენს რგოლს.

დამტკიცება. უშუალოდ მოწმდება, რომ R^n სივრცის ნებისმიერი X და Y ქვესიმრავლეებისათვის მართებული შემდეგი ჩართვები:

$$Fr(X \cup Y) \subset Fr(X) \cup Fr(Y);$$

$$Fr(X \setminus Y) \subset Fr(X) \cup Fr(Y).$$

თუ X და Y ჟორდანის აზრით ზომადი სიმრავლეებია, მაშინ

$$V_n^*(Fr(X)) = V_n^*(Fr(Y)) = 0.$$

ამიტომ თეორემა 5-დან გამომდინარეობს, რომ

$$V_n^*(Fr(X \cup Y)) = V_n^*(Fr(X \setminus Y)) = 0.$$

მაშასადამე, $X \cup Y$ და $X \setminus Y$ სიმრავლეები ზომადია ჟორდანის აზრით.

თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა დავრწმუნდეთ, რომ j_n ფუნქცია ინვარიანტულია იზომეტრიულ გარდაქმნათა D_n ჯგუფის მიმართ.

ვთქვათ, $X \in J_n$. ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობენ A და B ელემენტალური ფიგურები, რომ $A \subset X \subset B$ და

$$j_n(B) - j_n(A) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

თუ $g \in D_n$, მაშინ $g(A) \subset g(X) \subset g(B)$.

R^n სივრცის n -განზომილებიანი V_n მოცულობის D_n -ინვარიანტულობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$j_n(g(A)) = j_n(A) \text{ და } j_n(g(B)) = j_n(B),$$

ხოლო $g(A)$ და $g(B)$ ფიგურების ჟორდანის აზრით ზომადობიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობენ A_1 და B_1 ელემენტალური ფიგურები, რომელთათვისაც სრულდება პირობები:

$$A_1 \subset g(A), \quad B_1 \supset g(B),$$

$$j_n(g(A)) - j_n(A_1) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad j_n(B_1) - j_n(g(B)) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

ამგვარად, გვაქვს

$$A_1 \subset g(X) \subset B_1,$$

$$j_n(B_1) - j_n(A_1) < \varepsilon,$$

ამიტომ $g(X)$ ზომადია ჟორდანის აზრით და წინა უტოლობებიდან, ε რიცხვის ნებისმიერობის გამო, გამომდინარეობს, რომ

$$j_n(g(X)) = j_n(X).$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ j_n ადიტიური ფუნქციონალია. უფრო მეტიც, თუ X_1 და X_2 ჟორდანის აზრით ზომადი ურთიერთარაგადამფარავი სიმრავლეებია, მაშინ

$$j_n(X_1 \cup X_2) = j_n(X_1) + j_n(X_2).$$

მართლაც ვთქვათ, $\{A_i : 1 \leq i \leq k\}$ არის $X_1 \cup X_2$ სიმრავლის სასრული დიზიუნქტიური დაფარვა Ξ_n ნახევარგოლის ელემენტებით. განვიხილოთ σ^* და σ_* რიცხვები, რომლებიც შესაბამისად არიან $X_1 \cup X_2$ სიმრავლის ზემოთ განსაზღვრული მოცულობების ჯამები. თუ განვიხილავთ ამ დაფარვის X_1 და X_2 სიმრავლეების

ქვედაფარვების შესაბამის $\sigma_*^{(1)}, \sigma_*^{(1)*}, \sigma_*^{(2)}$ და $\sigma^{(2)*}$ რიცხვებს, მაშინ გვექნება

$$\sigma_*^{(1)} + \sigma_*^{(2)} \leq \sigma_* \leq V_{n*}(X_1 \cup X_2),$$

ამიტომ

$$V_{n*}(X_1) + V_{n*}(X_2) \leq V_{n*}(X_1 \cup X_2).$$

მეორეს მხრივ

$$V_n^*(X_1) + V_n^*(X_2) \geq V_n^*(X_1 \cup X_2).$$

ამგვარად, მივიღეთ

$$\begin{aligned} V_{n*}(X_1) + V_{n*}(X_2) &\leq V_{n*}(X_1 \cup X_2) \leq V_n^*(X_1 \cup X_2) \leq \\ &\leq V_n^*(X_1) + V_n^*(X_2) \end{aligned}$$

ვინაიდან,

$$V_{n*}(X_1) = V_n^*(X_1) = j_n(X_1),$$

$$V_{n*}(X_2) = V_n^*(X_2) = j_n(X_2),$$

ამიტომ

$$j_n(X_1 \cup X_2) = j_n(X_1) + j_n(X_2).$$

ამგვარად, J_n რგოლზე განსაზღვრული სიმრავლის j_n ფუნქცია, რომელიც წარმოადგენს V_n მოცულობის გაგრძელებას, აკმაყოფილებს 1-4. თვისებების ანალოგიებს n -განზომილებიანი V_n მოცულობისათვის.

დავამტკიცოთ j_n ფუნქციონალის თვლადად-ადიტიურობა J_n რგოლზე და ამით დავასაბუთოთ, რომ j_n მართლაც არის J_n რგოლზე განსაზღვრული ზომა.

თეორემა 7. J_n რგოლზე განსაზღვრული სიმრავლეთა j_n ფუნქცია თვლადად-ადიტიურია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $A \in J_n$, $A = \bigcup_{k \in N} A_k$ და

$$(\forall k)(k \in N \Rightarrow A_k \in J_n),$$

ამასთან მითითებული $\{A_k : k \in N\}$ სიმრავლეთა ოჯახი დიზიუნქტიურია. თეორემა 3-ის თანახმად, არსებობს ისეთი ელემენტალური ფიგურა B ისეთი, რომ

$$j_n(A) - \frac{\varepsilon}{2} < j_n(B),$$

ხოლო ყოველი $k \in N$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ელემენტალური ფიგურა B_k , რომ $A_k \subset \text{Int}(B_k)$ და

$$j_n(\text{Int}(B_k)) < j_n(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

ამგვარად, $B \subset \bigcup_{k \in N} \text{Int}(B_k)$ და $\{\text{Int}(B_k) : k \in N\}$

მიმდევრობა არის B კომპაქტური სიმრავლის ღია დაფარვა. ამიტომ არსებობს B სიმრავლის სასრული ქვედაფარვა $\{\text{Int}(B_{k_i}) : 0 \leq i \leq t\}$, ე. ი.

$$B \subset \bigcup_{i=0}^t \text{Int}(B_{k_i})$$

და თეორემა 5-ის თანახმად გვექნება

$$V_n^*(B) \leq \sum_{i=0}^{t-1} V_n^*(\text{Int}(B_{k_i})).$$

ვინაიდან B და $\text{Int}(B_{k_i})$ ($0 \leq i \leq t$) სიმრავლეები არიან ჯორდანის აზრით ზომადი, ამიტომ ვწერთ

$$j_n(B) \leq \sum_{i=0}^{t-1} j_n(\text{Int}(B_{k_i}))$$

და მით უმეტეს

$$j_n(A) - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k \in N} \left[j_n(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right] = \sum_{k \in N} j_n(A_k) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

ამრიგად, გვაქვს

$$j_n(A) < \sum_{k \in N} j_n(A_k) + \varepsilon,$$

ხოლო ε რიცხვის ნებისმიერობის გამო მივიღებთ

$$j_n(A) \leq \sum_{k \in N} j_n(A_k).$$

მეორეს მხრივ, ყოველი $p \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის $\bigcup_{k=0}^{p-1} A_k \subset A$ და ამიტომ

$$j_n(A) \geq j_n\left(\bigcup_{k=0}^{p-1} A_k\right) = \sum_{k=0}^{p-1} j_n(A_k).$$

აქედან კი მივიღებთ, რომ

$$j_n(A) \geq \sum_{k \in N} j_n(A_k).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 8. ჟორდანის ზომა სრული ზომაა.

დამტკიცება. ვთქვათ, $X \in R^n$ ქვესიმრავლე არის ჟორდანის აზრით ზომადი, $j_n(X) = 0$ და $Y \subset X$. თეორემა 4-ის თანახმად $V_n^*(Y) \leq V_n^*(X) = 0$ და შესაბამისად, $V_n^*(Y) = 0$. ამიტომ Y სიმრავლე არის ჟორდანის აზრით ზომადი და $j_n(Y) = 0$.

თეორემა დამტკიცებულია.

აქვე შევნიშნოთ, რომ ჟორდანის ზომის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ჟორდანის ზომა სასრული ზომაა.

დავრწმუნდეთ, რომ ერთადერთი ზომა, რომელიც შეიძლება განისაზღვროს J_n სიმრავლეთა კლასზე და არის V_n მოცულობის გაგრძელება, არის j_n ზომა.

მართლაც, ვთქვათ, μ არის J_n კლასზე განსაზღვრული ზომა, რომელიც არის V_n -ის გაგრძელება. ნებისმიერი $X \in J_n$ სიმრავლისათვის არსებობს ელემენტალური ფიგურების ზრდადი მიმდევრობა $\{A_k : k \in N\}$ ისეთი, რომ

$$(\forall k)(k \in N \Rightarrow A_k \subset X) \text{ და } j_n(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} V_n(A_k).$$

ზომის ქვემოდან უწყვეტობის გამო $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = X$ და შესაბამისად გვაქვს

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V_n(A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu(X).$$

მაშასადამე, $\mu(X) = j_n(X)$.

§23. ლეზების ზომის კლასიკური შემთხვევა

მიღებულია, რომ R^n სივრცის შემთხვევაში ლეზების ზომა აღენიშნოთ λ_n ($\lambda_1 = \lambda$) ასოთი, ბორელის ზომა - b_n -ით, ლეზების აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა კლასი L_n -ით, ბორელის კლასი - S_n -ით, მარცხნიდან ჩაკეტილი და მარჯვნიდან ღია საკოორდინატო პარალელეპიპედების ნახევარგოლი - Ξ_n -ით, $\mathbb{R}(\Xi_n)$ რგოლი - $\mathbb{R}_n$ -ით. თანაც, როგორც უკვე ვთქვით, $\mathbb{R}_n$ რგოლის ელემენტებს ეწოდებათ R^n სივრცის ელემენტალური ფიგურები. Ξ_n ნახევარგოლზე n -განზომილებიანი V_n მოცულობა მოიცემა კანონიკური ფორმულით:

$$V_n([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i),$$

თანაც Ξ_n სიმრავლეთა კლასზე V_n წარმოადგენს სიმრავლის თვლადად-ადიტიურ არაუარყოფით ფუნქციას. ამიტომ V_n ცალსახად გაგრძელება $\mathbb{R}_n$ რგოლზე თვლადად-ადიტიურობის შენარჩუნებით.

ლებების გარე ზომა, რომელსაც R^n სივრცის შემთხვევაში λ_n^* სიმბოლოთი აღნიშნავთ, შეიძლება განისაზღვროს შემდეგი ფორმით:

$$\lambda_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k \in N} V_n(A_k) \right\},$$

სადაც ქვედა საზღვარი აიღება A სიმრავლის Ξ_n ნახევარგოლის ელემენტებით არაუმეტეს თვლადი ოჯახებით დაფარების მიმართ.

ამ განსაზღვრის ექვივალენტურობა §19-ში მოყვანილ გარე ზომის განსაზღვრებასთან გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ ყოველი ელემენტალური ფიგურა R^n სივრცეში წარმოიდგინება Ξ_n ნახევარგოლის ელემენტების სასრული დიზიუნქტიური ოჯახის გაერთიანების სახით.

აქვე შევნიშნოთ, რომ წინა პარაგრაფებში (§19, §20, §21) დამტკიცებული ყველა თეორემა მართებული იქნება n -განზომილებიანი R^n სივრცის შემთხვევაშიც.

ახლა მოვიყვანოთ ლებეგის ზომის აგების კიდევ ერთი მეთოდი.

თეორემა 9. R^n სივრცის ყოველი არაცარიელი ღია G სიმრავლე წარმოიდგინება ჩაკეტილი საკოორდინატო კუბების თვლადი ოჯახის გაერთიანების სახით, რომელთაც წყვილ-წყვილად საერთო შიგა წერტილები არ გააჩნიათ.

დამტკიცება. განვიხილოთ R^n სივრცეში მესერთა მიმდევრობა, რომელთა ჰიპერსიბრტყეები საკოორდინატო ღერძების პარალელურია და ბიჯების მიმდევრობაა

$1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$. Q_0 იყოს იმ მესერის ერთბიჯიანი ყველა იმ

კუბის ოჯახი, რომელთაგანაც თითოეული ეკუთვნის G ღია

სიმრავლეს, და ა. შ. Q_{k-1} იყოს ამ პალეტის $\frac{1}{2^{k-1}}$ ბიჯიანი

ყველა იმ კუბის ოჯახი, რომელთაგან თითოეული ეკუთვნის

G -ს და არ გადაიფარება $Q_0, Q_1, \dots, Q_{k-2}$ ოჯახების არც ერთ კუბთან და ა. შ. დავუშვათ, რომ

$$Q_N = \bigcup_{k \in N} Q_k.$$

ცხადია, რომ Q_N არაუმეტეს თვლადია და ვთქვათ, $\{A_i : i \in N\}$ სიმრავლეთა ოჯახი მისი გადათვლადია.

დავრწმუნდეთ, რომ

$$G = \bigcup_{k \in N} A_k.$$

$\{Q_k : k \in N\}$ მიმდევრობის აგების კონსტრუქციიდან გამომდინარეობს, რომ $G \supset \bigcup_{k \in N} A_k$.

ახლა ვთქვათ, $x \in G$. ცხადია, რომ არსებობს ერთმანეთში $\Delta_0, \Delta_1, \dots$ ჩალაგებული კუბების მიმდევრობა პალეტიდან, რომელთაგანაც თითოეული შეიცავს თავისთავში x წერტილს. ვინაიდან ამ კუბების წიბოების სიგრძე ნულისაკენ მიისწრაფვის და G ღია სიმრავლეა, ამიტომ არსებობს ისეთი $k_0 \in N$ ნატურალური რიცხვი, რომ $\Delta_{k_0} \subset G$. თუ $p \in N$ არის ასეთ რიცხვებს შორის უმცირესი, მაშინ ცხადია, რომ $\Delta_p \in Q_p$ და ამიტომ

$$x \in \bigcup_{k \in N} A_k.$$

რადგან G ღია სიმრავლეა, ხოლო $\Delta_0, \Delta_1, \dots$ კუბები ჩაკეტილია ამიტომ Q_N სიმრავლე უსასრულოა.

თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემის გამოყენებით შესაძლებელია V_n -ის

გაგრძელება R^n სივრცის ღია ქვესიმრავლეებზე და ასეთი გაგრძელება დამოუკიდებელია ამ სიმრავლის ღებების ზომას.

მართლაც, თუ G არის R^n სივრცის არაცარიელი ღია სიმრავლე, მაშინ G წარმოიდგინება $\{A_i : i \in N\}$ ჩაკეტილი

საკოორდინატო წყვილ-წყვილად ურთიერთარაგადაძვარავი კუბების მიმდევრობის გაერთიანების სახით.

განსაზღვროთ ლეზების ზომა შემდეგი სახით:

$$\lambda_n(G) = \sum_{k \in N} V_n(A_k).$$

ეს განსაზღვრა კორექტულია.

მართლაც, ვთქვათ, $G = \bigcup_{i \in N} Q_i$ არის G ღია სიმრავლის

ანალოგიური განსხვავებული წარმოდგენაა. მაშინ ცხადია, რომ ყოველი $k \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის გვაქვს

$$A_k = \bigcup_{i \in N} (A_k \cap Q_i),$$

ღა

$$V_n(A_k) = \sum_{i \in N} V_n(A_k \cap Q_i).$$

რადგან ყოველი $i \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$Q_i = \bigcup_{k \in N} (A_k \cap Q_i),$$

ამიტომ გვექნება

$$\begin{aligned} \sum_{k \in N} V_n(A_k) &= \sum_{k \in N} \left[\sum_{i \in N} V_n(A_k \cap Q_i) \right] = \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} V_n(A_k \cap Q_i) = \\ &= \sum_{i \in N} V_n(Q_i). \end{aligned}$$

ამით დამტკიცდა განსაზღვრის კორექტულობა.

თეორემა 10. R^n სივრცის ნებისმიერი A ქვესიმრავლის ლაზების გარე ზომა შეიძლება განისაზღვროს

$$\lambda_n^*(A) = \inf_{A \subset G} \{ \lambda_n(G) \}$$

სახით, სადაც $\inf$ აიღება A სიმრავლის შემცველი ყველა

შესაძლო ღია ქვესიმრავლეთა კლასის მიმართ R^n სივრცეში.

დამტკიცება. თეორემა 9-ის თანახმად ცხადია, რომ

$$\lambda_n^*(A) \leq \inf_{A \subset G} \{\lambda_n(G)\}.$$

მეორეს მხვრივ, λ_n^* -ის განსაზღვრის თანახმად, ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს A სიმრავლის ისეთი დაფარვა Ξ_n ნახევარგოლის $\{A_k : k \in N\}$ ელემენტების მიმდევრობით, რომ

$$\sum_{k \in N} V_n(A_k) < \lambda_n^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

ცხადია, რომ არსებობს ღია A_k' საკოორდინატო პარალელეპიპედი ისეთი, რომ $A_k \subset A_k'$ და

$$\lambda_n(A_k') < V_n(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

ამგვარად, $G = \bigcup_{k \in N} A_k'$ ღია სიმრავლე შეიცავს თავის თავში A სიმრავლეს და

$$\begin{aligned} \lambda_n^*(A) + \frac{\varepsilon}{2} &> \sum_{k \in N} V_n(A_k) > \sum_{k \in N} \left(\lambda_n(A_k') - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right) = \\ &= \sum_{k \in N} \lambda_n(A_k') - \frac{\varepsilon}{2} \geq \lambda_n(G) - \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

ამგვარად,

$$\lambda_n(G) < \lambda_n^*(A) + \varepsilon,$$

მითუმეტეს

$$\inf_{A \subset G} \{\lambda_n(G)\} < \lambda_n^*(A) + \varepsilon.$$

მაშასადამე,

$$\inf_{A \subset G} \{\lambda_n(G)\} \leq \lambda_n^*(A).$$

ამით თეორემის დამტკიცება დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 11. ერთადერთი ზომა, რომელიც შეიძლება განისაზღვროს L_n კლასზე და იქნება Ξ_n ნახევარგოლზე მოცემული n -განზომილებიანი V_n მოცულობის გაგრძელება, არის ლებეგის ზომა.

მართლაც, ლებეგის გარე ზომა λ_n^* , წარმოქმნილი n -განზომილებიანი V_n მოცულობით, ცალსახად არის განსაზღვრული R^n სივრცის ყველა ქვესიმრავლეთა კლასზე. ვინაიდან λ_n არის λ_n^* -ის შევიწროება L_n კლასზე, ამიტომ თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 12. R^n სივრცის A ქვესიმრავლე ზომადაა ლებეგის აზრით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $G \subset R^n$ ღია სიმრავლე, რომ

$$\lambda_n^*(G \setminus A) < \varepsilon.$$

დამტკიცება. აუცილებლობა. ვთქვათ, $A \in L_n$. განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

1) $\lambda_n(A) < +\infty$.

იმის გამო, რომ $\lambda_n(A) = \inf_{A \subset G} \{\lambda_n(G)\}$, ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი G ღია სიმრავლე, რომ $A \subset G$ და $\lambda_n(A) + \varepsilon > \lambda_n(G)$. ცხადია, რომ $G = (G \setminus A) \cup A$ და

$$\lambda_n^*(G \setminus A) = \lambda_n(G \setminus A) = \lambda_n(G) - \lambda_n(A) < \varepsilon.$$

2) $\lambda_n(A) = +\infty$.

ამ შემთხვევაში მართებულია $A = \bigcup_{k \in N} A_k$ წარმოდგენა, სადაც

$$(\forall k)(k \in N \Rightarrow A_k \in L^*).$$

ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება G_k ღია სიმრავლე ისეთი, რომ $A_k \subset G_k$ და $\lambda_n^*(G_k \setminus A_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$.

რადგან $G = \bigcup_{k \in N} G_k$ ღია სიმრავლეა, $A \subset G$ და

$$G \setminus A = \bigcup_{k \in N} (G_k \setminus A_k), \text{ ამიტომ}$$

$$\lambda_n^*(G \setminus A) \leq \sum_{k \in N} \lambda_n^*(G_k \setminus A_k) < \varepsilon.$$

საკმარისობა. ვთქვათ, სრულდება პირობა $\lambda_n^*(G \setminus A) < \varepsilon$. ყოველი ნატურალური $k \in N$ რიცხვისათვის განვიხილოთ ისეთი G_k ღია სიმრავლე, რომ $A \subset G_k$ და $\lambda_n^*(G_k \setminus A) < \frac{1}{k}$.

ცხადია, რომ $B = \bigcap_{k \in N} G_k$ სიმრავლე შეიცავს A -ს და

$B \setminus A \subset G_k \setminus A$ ყოველი $k \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის. ამიტომ გვაქვს

$$\lambda_n^*(B \setminus A) \leq \lambda_n^*(G_k \setminus A) < \frac{1}{k}.$$

k რიცხვის ნებისმიერობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\lambda_n^*(B \setminus A) = 0.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $B \setminus A = C$, მაშინ $A = B \setminus C$, თანაც C არის ლებეგის ნული ზომის სიმრავლე, ხოლო ვინაიდან B ბორელის სიმრავლეა, გამოდის რომ $A \in L_n$.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 13. R^n სივრცის A ქვესიმრავლე ზომადია ლებეგის აზრით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი F ჩაკეტილი სიმრავლე, რომ $F \subset A$ და

$$\lambda_n^*(A \setminus F) < \varepsilon.$$

დამტკიცება. აუცილებლობა. ვთქვათ, $A \in L_n$. მაშინ $R^n \setminus A = A' \in L_n$ და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს G ღია სიმრავლე, რომლისთვისაც $A' \subset G$ და

$$\lambda_n^*(G \setminus A') < \varepsilon.$$

რადგან $A \setminus G' = G \setminus A'$, ამიტომ თუ დავუშვებთ, რომ $G' = F$, მაშინ მივიღებთ დასამტკიცებელ უტოლობას.

საკმარისობა. ვთქვათ, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი F ჩაკეტილი სიმრავლე, რომ $F \subset A$ და

$$\lambda_n^*(A \setminus F) < \varepsilon.$$

რადგან $A' \subset F'$ და $F' \setminus A' = A \setminus F$, ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი F ჩაკეტილი სიმრავლე, რომ $F \subset A$ და

$$\lambda_n^*(F' \setminus A') = \lambda_n^*(A \setminus F) < \varepsilon.$$

ვინაიდან F' ღია სიმრავლეა, ამიტომ $A' \in L_n$, ე. ი. $A \in L_n$. თეორემა დამტკიცებულია

თეორემა 14. ღებეგის ზომა ინვარიანტულია R^n სივრცის იზომეტრიულ გარდაქმნათა D_n ჯგუფის მიმართ.

დამტკიცება. თუ $G \subset R^n$ ნებისმიერი ღია სიმრავლეა, მაშინ ყოველი $g \in G$ ელემენტისათვის $g(G)$ აგრეთვე ღია სიმრავლეა R^n სივრცეში.

დავამტკიცოთ, რომ ღია სიმრავლეების ზომა არ იცვლება D_n ჯგუფის ნებისმიერი გარდაქმნისათვის. თუ $G = \emptyset$, მაშინ დამტკიცება ტრივიალურია.

ვთქვათ, $G \neq \emptyset$. მაშინ თეორემა 9-ის თანახმად $G = \bigcup_{k \in N} A_k$, სადაც $\{A_k : k \in N\}$ არის წყვილ-წყვილად

არაგადამფარავი საკოორდინატო ჩაკეტილი კუბების მიმდევრობა. ამიტომ

$$g(G) = \bigcup_{k \in N} g(A_k).$$

ვინაიდან n -განზომილებიანი V_n მოცულობა R^n სივრცის ყველა მრავალწახნაგათა T_n კლასზე D_n -ინვარიანტულია, ამიტომ გვექნება

$$\lambda_n(g(G)) = \sum_{k \in N} V_n(g(A_k)) = \sum_{k \in N} V_n(A_k) = \lambda_n(G).$$

ახლა ვთქვათ, $A \in P(R^n)$. მაშინ გვექნება

$$\lambda_n^*(g(A)) = \inf_{A \subset G} \{\lambda_n(g(G))\} = \inf_{A \subset G} \{\lambda_n(G)\} = \lambda_n^*(A).$$

ამრიგად, λ_n^* გარე ზომა არის D_n -ინვარიანტული.

ვთქვათ, $A \in L_n$ და $g \in D_n$. ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $G \subset R^n$ ღია სიმრავლე ისეთი, რომ $A \subset G$ და $\lambda_n^*(G \setminus A) < \varepsilon$. რადგან $g(A) \subset g(G)$ და $g(G)$ ღია სიმრავლეა, ამიტომ

$$\lambda_n^*(g(G) \setminus g(A)) = \lambda_n^*(g(G \setminus A)) = \lambda_n^*(G \setminus A) < \varepsilon,$$

მაშასადამე, $g(A) \in L_n$. ეს კი ნიშნავს, რომ L_n კლასი D_n -ინვარიანტულია.

ვინაიდან λ_n არის λ_n^* -ის შევიწროება L_n კლასზე, ხოლო L_n კლასი და λ_n^* ფუნქციონალი D_n -ინვარიანტულია, ამიტომ ვღებულობთ, რომ λ_n ზომა D_n -ინვარიანტულია.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 15. L_n სიმრავლეთა კლასი ჰიპერკონტინუუმის სიმძლავრისაა.

დამტკიცება. ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $n \geq 2$. თუ l არის ნებისმიერი წრფე R^n სივრცეში, მაშინ $\lambda_n(l) = 0$.

ცხადია, რომ წრფის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმძლავრეა 2^ω , ამიტომ ლებეგის ზომის სისრულის გამო

$$\text{card}(L_n) \geq 2^\omega.$$

ამასთან ცხადია, რომ

$$\text{card}(L_n) \leq \text{card}(P(R^n)) = 2^\omega.$$

ამრიგად,

$$\text{card}(L_n) = 2^\omega.$$

ახლა ვთქვათ, $n = 1$. დავამტკიცოთ, რომ კანტორის C სიმრავლე ზომადია ლებეგის აზრით და $\lambda_n(C) = 0$. მართლაც, როგორც ცნობილია

$$C = [0, 1] \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k,$$

სადაც

$$G_k = \left(\bigcup_{p=1}^{2^{k-2}} \left[\frac{3^p - 2}{3^k}, \frac{3^p - 1}{3^k} \right] \right) \cup \left(\bigcup_{p=1}^{2^{k-2}} \left[\frac{3^k - 3^p + 1}{3^k}, \frac{3^k - 3^p + 2}{3^k} \right] \right)$$

ამიტომ

$$\begin{aligned} \lambda(G_k) &= \sum_{p=1}^{2^{k-2}} \lambda \left(\left[\frac{3^p - 2}{3^k}, \frac{3^p - 1}{3^k} \right] \right) + \\ &\sum_{p=1}^{2^{k-2}} \lambda \left(\left[\frac{3^k - 3^p + 1}{3^k}, \frac{3^k - 3^p + 2}{3^k} \right] \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^k. \end{aligned}$$

შ. ი.

$$\lambda \left(\bigcup_{k \geq 1} G_k \right) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^k = 1,$$

ამიტომ $\lambda(C) = \lambda([0,1]) - \lambda\left(\bigcup_{k \geq 1} G_k\right) = 0$. ვინაიდან

$\text{card}(C) = \omega$ და λ ლეზგის ზომა სრული ზომაა, ამიტომ მივიღებთ

$$\text{card}(L_1) = 2^\omega.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 16. R^n სივრცის ყველა ღია სიმრავლის სიმძლავრეა ω .

დამტკიცება. ავლნიშნოთ G_n ($n \in N$) სიმბოლოთი R^n სივრცის ყველა ღია ქვესიმრავლეთა კლასი. ვინაიდან ყოველი $x \in R^n$ წერტილისათვის $R^n \setminus \{x\}$ სიმრავლე ღიაა, ამიტომ

$$\text{card}(G_n) \geq \omega.$$

თეორემა 9-ის თანახმად, ყოველი არაცარიელი ღია სიმრავლე შეიძლება წარმოვიდგინოთ ჩაკეტილი, წყვილ-წყვილად არაგადამფარავი საკოორდინატო კუბების მიმდევრობის გაერთიანების სახით, ამიტომ ყოველ ღია G სიმრავლეს შეიძლება ინიექციურად შევუსაბამოთ ჩაკეტილი საკოორდინატო კუბების ყველა მიმდევრობების სიმრავლის სიმძლავრე, რომელიც ω -ს ტოლია. ამრიგად,

$$\text{card}(G_n) = \omega.$$

თეორემა 15-დან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი:

თეორემა 17. R^n სივრცის ყველა ჩაკეტილი სიმრავლეთა F_n კლასის სიმძლავრეა ω .

თეორემა 18. $S_n = S(G_n) = S(F_n) = S(K_n) = S(B_n)$, სადაც S_n არის R^n სივრცის ბორელის კლასი, K_n არის ყველა კომპაქტური ქვესიმრავლეთა კლასი R^n -ში, ხოლო B_n კი - R^n სივრცის ყველა n -განზომილებიანი როგორც ჩაკეტილი, ასევე ღია ბირთვების კლასია.

დამტკიცება. იმის გამო, რომ ყოველი არაცარიელი ღია სიმრავლე წარმოადგენს ჩაკეტილი საკოორდინატო კუბების წყვილ-წყვილად არაფუდამფარავი თვლადი ოჯახის გაერთიანებას, ამიტომ გამოდის, რომ $G_n \subset S_n$, ე. ი. $\mathcal{S}(G_n) \subset S_n$. შებრუნებული ჩართვა გამომდინარეობს იქიდან, რომ Ξ_n სიმრავლეთა კლასის ყოველი ელემენტი შეიძლება წარმოვიდგინოთ ღია საკოორდინატო პარალელეპიპედების თვლადი ოჯახის გაერთიანების სახით. ამიტომ $\Xi_n \subset \mathcal{S}(G_n)$ და ე. ი. $S_n = \mathcal{S}(\Xi_n) \subset \mathcal{S}(G_n)$.

ყოველი ჩაკეტილი სიმრავლე ღია სიმრავლის დამატებაა R^n -ში. ამიტომ ცხადია, რომ $F_n \subset S_n$. მაშასადამე, $\mathcal{S}(F_n) \subset S_n$. შებრუნებული ჩართვა იქიდან გამომდინარეობს, რომ Ξ_n სიმრავლეთა კლასის ყოველი ელემენტი შეიძლება წარმოვიდგინოთ ჩაკეტილი საკოორდინატო პარალელეპიპედების თვლადი ოჯახის თანაკვეთის სახით და მაშასადამე, $\Xi_n \subset \mathcal{S}(F_n)$. მაშინ $\mathcal{S}(\Xi_n) = S_n \subset \mathcal{S}(F_n)$.

ცხადია, რომ $K_n \subset F_n$. ამიტომ $\mathcal{S}(K_n) \subset \mathcal{S}(F_n) = S_n$. შებრუნებული ჩართვა გამომდინარეობს იქიდან, რომ $\Xi_n \subset \mathcal{S}(K_n)$ და მაშასადამე, $\mathcal{S}(\Xi_n) = S_n \subset \mathcal{S}(K_n)$.

ცხადია, რომ $B_n \subset G_n \cup F_n \subset S_n$, ამიტომ $\mathcal{S}(B_n) \subset S_n$. მეორეს მხრივ, R^n სივრცეში არსებობს ღია ბირთვების თვლადი ბაზა და ამიტომ $G_n \subset \mathcal{S}(B_n)$ და მაშასადამე, $\mathcal{S}(G_n) = S_n \subset \mathcal{S}(B_n)$.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 19. $\text{card}(S_n) = \omega$.

მართლაც, რადგან $S_n = \mathcal{S}(F_n)$ და $\text{card}(F_n) = \omega$, ამიტომ $\text{card}(S_n) \geq \omega$. მეორეს მხრივ, $S_n = \bigcup_{\xi < \omega_1} S_\xi$, სადაც $S_0 = F_n$

და σ -რგოლის სტრუქტურებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$(\forall \xi) (\xi < \omega_1 \Rightarrow \text{card}(S_\xi) = \omega).$$

ამიტომ გვაქვს,

$$\text{card}(S_n) \leq \omega.$$

მაშასადამე,

$$\text{card}(S_n) = \omega.$$

ზემოთ დამტკიცებული თეორემებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი თეორემები:

თეორემა 20. ნებისმიერი $n \geq 1$ ნატურალური რიცხვისათვის R^n სივრცეში არსებობს ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლე, რომელიც არ არის ბორელის სიმრავლე.

თეორემა 21. ბორელის ზომა არ არის სრული ზომა.

მართლაც, C კანტორის სიმრავლე არის ბორელის სიმრავლე, თანაც $b_1(C) = 0$. რადგან $\text{card}(P(C)) = 2^\omega$, ამიტომ არსებობს C -ს ისეთი ქვესიმრავლე, რომელიც არაზომადია ბორელის აზრით.

თეორემა 22. R^n სივრცის ნებისმიერი A ქვესიმრავლის შიგა ზომა შეიძლება განისაზღვროს, როგორც

$$\sup_{F \subset A} \{\lambda_n(F)\}$$

რიცხვი, სადაც ზედა საზღვარი განიხილება A ქვესიმრავლეში შემავალი ყველა ჩაკეტილი სიმრავლის მიმართ.

დამტკიცება. ვინაიდან $F_n \subset S_n$, სადაც, ისევე როგორც ზევით, F_n -ით აღნიშნულია R^n სივრცის ყველა ჩაკეტილ სიმრავლეთა კლასი, ამიტომ გვაქვს

$$\sup_{F \subset A} \{\lambda_n(F)\} \leq \lambda_n^*(A).$$

შებრუნებული უტოლობის დასამტკიცებლად განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\lambda_{n*}(A) < +\infty$.

შიგა ზომის განსაზღვრის თანახმად, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რისხვისათვის არსებობს ისეთი ბორელის სიმრავლე B , რომ $B \subset A$ და

$$\lambda_{n*}(A) - \frac{\varepsilon}{2} < \lambda_n(B).$$

თავის მხვრივ, წინა თეორემის თანახმად, არსებობს ისეთი ჩაკეტილი F სიმრავლე, რომ $F \subset B$ და $\lambda_n^*(B \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$ და

$$\lambda_n(B \setminus F) = \lambda_n(B) - \lambda_n(F) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ამგვარად, გვაქვს

$$\lambda_{n*}(A) - \frac{\varepsilon}{2} < \lambda_n(F) + \frac{\varepsilon}{2},$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\lambda_{n*}(A) - \varepsilon < \lambda_n(F)$$

და მითუმეტეს

$$\lambda_{n*}(A) - \varepsilon < \sup_{F \subset A} \{\lambda_n(F)\}.$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\lambda_{n*}(A) \leq \sup_{F \subset A} \{\lambda_n(F)\},$$

და მაშასადამე,

$$\lambda_{n*}(A) = \sup_{F \subset A} \{\lambda_n(F)\}.$$

§20-ში დამტკიცებული დებულება L^{**} სიმრავლეთა კლასის შემთხვევაში (იხილეთ, შენიშვნა) R^n სივრცისათვის შეიძლება ასე დაზუსტდეს: საკმარისია, განვიხილოთ R^n სივრცის შემოსაზღვრული ქვესიმრავლეების კლასი და შემოსაზღვრული

X ქვესიმრავლისათვის შიგა ზომა განესაზღვროთ, როგორც სხვაობა

$$V_n(A) - \lambda_n^*(A \setminus X),$$

სადაც A არის X სიმრავლის შემცველი ნებისმიერი საკოორდინატო პარალელეპიპედი. X სიმრავლეს ეწოდება L_n^{**} სიმრავლეთა კლასის ელემენტი, თუ $\lambda_{n*}(X) = \lambda_n^*(X)$, ხოლო L_n კლასი დამთხვევა R^n სივრცის ისეთი ქვესიმრავლეების კლასს, რომლებიც შეიძლება წარმოვიდგინოთ L_n^{**} სიმრავლეთა კლასის ელემენტების არაუმეტეს თვლადი ოჯახების გაერთიანებით.

§24. ლეზების აზრით არაზომადი სიმრავლეები

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ ლეზების აზრით არაზომადი სიმრავლეების კლასიკური მაგალითების კონსტრუქციებს. კერძოდ, შევეხებით ვიტალისა და ბერნშტეინის სიმრავლეებს და მათი არსებობის საკითხებს.

ისტორიულად ლეზების აზრით არაზომადი სიმრავლის პირველ მაგალითს წარმოადგენს ვიტალის სიმრავლე ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე. არსებობს ამ სიმრავლის აგების სხვადასხვა მეთოდები. ჩვენ მოვიყვანთ ერთ-ერთ მეთოდს, რომელიც უკავშირდება შტეინჰაუზის თვისებას.

ვიტყვიით, რომ $X \subset R$ სიმრავლე ფლობს შტეინჰაუზის თვისებას, თუ არსებობს ნამდვილი $\varepsilon > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ

$$(\forall h \in R)(|h| < \varepsilon \Rightarrow (X + h) \cap X \neq \emptyset).$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, $X \subset R$ სიმრავლე ფლობს შტეინჰაუზის თვისებას, თუ

$$X - X = \{x' - x'' : x' \in X, x'' \in X\}$$

სიმრავლე წარმოადგენს 0 წერტილის მიდამოს.

შევნიშნოთ, რომ შტეინჰაუზის თვისებას გარკვეული თვალსაზრისით შეგვიძლია მივცეთ სიმრავლის მდგრადობის ინტერპრეტაცია რაიმე გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ (ამ შემთხვევაში პარალელურ გადატანათა ჯგუფის მიმართ).

მართებულია შემდეგი დებულება:

თეორემა 1. ვთქვათ, $X \subset R$ სიმრავლე აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$X \in \text{dom}(\lambda), \quad \lambda(X) > 0.$$

მაშინ X სიმრავლე ფლობს შტეინჰაუზის თვისებას.

თეორემა 1-ის ერთ-ერთი დამტკიცება უკავშირდება ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლის სიმკვრივის წერტილის ცნებას და მისი გააზრება მიგვინდია მკითხველთათვის.

§4-ის მაგალით 3-ში განვიხილეთ ექვივალენტურობის R_ν მიმართება R ღერძზე განსაზღვრული შემდეგი დამოკიდებულებით

$$\{(x, y) \in R^2 \Leftrightarrow x \in R \wedge y \in R \wedge x - y \in Q\}.$$

გეომეტრიულად მოყვანილი დამოკიდებულება R^2 -ში შეიძლება განვიხილოთ, როგორც იმ წრფეების თვლადი ოჯახის გაერთიანება, რომლებიც პარალელური არიან $\{(x, y) \in R^2 : x - y = 0\}$ წრფის.

ნამდვილ რიცხვთა R ღერძის დაშლას, რომელიც მიიღება R_{ν} ექვივალენტურობის დამოკიდებულებით, ვუწოდოთ R სიმრავლის ვიტალის დაშლა და აღვნიშნოთ R/Q სიმბოლოთი.

R სიმრავლის ვიტალის დაშლის ყოველ სელექტორს ეწოდება ვიტალის ქვესიმრავლე R -ში.

მართებულია შემდეგი დებულება, რომელსაც დავამტკიცებთ შტეინჰაუზის თვისებაზე დაყრდნობით.

თეორემა 2. R -ზე არსებობს ვიტალის სიმრავლე. თუ X ვიტალის სიმრავლეა R -ზე, მაშინ X ლებეგის აზრით არაზომადია სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვიტალის სიმრავლის არსებობის დამტკიცებისათვის მისი განსაზღვრიდან გამომდინარე გამოვიყენოთ ამორჩევის აქსიომა ვიტალის დაშლის მიმართ.

ლემის მეორე ნაწილის დასამტკიცებლად მსჯელობა ჩავატაროთ საწინააღმდეგოს დაშვებით.

ვთქვათ, $X \subset R$ არის ვიტალის სიმრავლე და დაგუშვათ, რომ X არის ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლე. თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ

$$R = \bigcup_{q \in Q} (X + q),$$

მაშინ X -ს უნდა ჰქონდეს მკაცრად დადებითი ზომა λ -ს მიმართ. რადგან X არის R/Q სიმრავლის სელექტორი, ამიტომ ყოველი რაციონალური $q \neq 0$ რიცხვისათვის გვაქვს

$$(X + q) \cap X = \emptyset.$$

მაგრამ ეს ტოლობა მართებულია ნებისმიერი მცირე რაციონალური $q \in Q$ რიცხვისთვისაც. სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ X არ ფლობს შტეინჰაუზის თვისებას. ეს კი ეწინააღმდეგება თეორემა 1-ს.

ამით თეორემა 2 დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ მართებულია უფრო ზოგადი დებულება, ვიდრე თეორემა 2.

კერძოდ, თუ ავიღებთ R ადიტიური ჯგუფის ნებისმიერ H ქვეჯგუფს და ექვივალენტურობის მიმართებას განვსაზღვრავთ შემდეგი დამოკიდებულებით

$$\{(x, y) \in R^2 \Leftrightarrow x \in R \wedge y \in R \wedge x - y \in H\},$$

მაშინ ამ დაშლის ყოველ X სელექტორს ვუწოდოთ ვიტალის ტიპის სიმრავლე H ჯგუფის მიმართ.

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3. ვთქვათ, H არის ადიტიური R ჯგუფის თვლადი მკერივი ქვეჯგუფი და μ არის R ქვესიმრავლეთა რაიმე σ -ალგებრაზე განსაზღვრული ზომა. დაეუშვათ, რომ სრულდება შემდეგი პირობები:

1) μ ზომა H -ინვარიანტულია. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ სრულდება შემდეგი პირობა:

$$(\forall h)(\forall Z)(h \in H \wedge Z \in \text{dom}(\mu) \Rightarrow \mu(Z + h) = \mu(Z));$$

2) $[0, 1] \in \text{dom}(\mu);$

$$3) \quad 0 < \mu([0,1]) < +\infty.$$

მაშინ ყოველი ვიტალის ტიპის სიმრავლე H ჯგუფის მიმართ არაზომადია μ ზომის მიმართ.

ახლა კი გადავიდეთ ბერნშტეინის სიმრავლის განხილვაზე.

$X \subset R$ სიმრავლეს ეწოდება ბერნშტეინის სიმრავლე, თუ X და $R \setminus X$ სიმრავლეები თანაიკვეთება ყოველ არათვლად ჩაკეტილ სიმრავლესთან R -დან.

თეორემა 4. R -ზე არსებობს ბერნშტეინის სიმრავლე. ბერნშტეინის სიმრავლე არაზომადია ლებეგის აზრით.

შევნიშნოთ, რომ ბერნშტეინის სიმრავლე არ არის ლებეგის აზრით ზომადი. მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო, თუ $X \subset R$ ბერნშტეინის სიმრავლე ზომადია ლებეგის აზრით, მაშინ $R \setminus X$ სიმრავლეს ზომადია ლებეგის აზრით. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$\lambda(X) > 0,$$

ამიტომ არსებობს $F \subset X$ ჩაკეტილი სიმრავლე ისეთი, რომ

$$\lambda(F) > 0.$$

რადგან λ დიფუზიური ზომაა, ამიტომ $\text{card}(F) > \omega$ და მაშასადამე

$$\text{card}(F) = c.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ჩაკეტილი სიმრავლე არ თანაიკვეთება $R \setminus X$ სიმრავლესთან, რომელიც ასევე

ბერნშტეინის სიმრავლეა. მივიღეთ წინააღმდეგობა, რაც მიანიშნებს იმაზე, რომ ბერნშტეინის სიმრავლე არაზომადია ლებეგის აზრით.

ახლა ვაჩვენოთ თეორემის პირველი ნაწილი, რომელიც ემყარება ტრანსფინიტული ინდუქციის პრინციპს.

დავუშვათ, რომ α არის უმცირესი ორდინალური რიცხვი რომლისთვისაც $\text{card}(\alpha) = c$, სადაც როგორც ყოველთვის c აღნიშნავს კონტინუუმის სიმძლავრეს. როგორც ცნობილია, R -ზე არაცარიელი ჩაკეტილ სიმრავლეთა ოჯახი კონტინუალურია, ამიტომ ის შეიძლება წარმოვიდგინოთ $\{F_\xi : \xi < \alpha\}$ ოჯახის სახით. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვივულისხმოთ, რომ შემდეგი ნაწილობრივი ოჯახები

$$\{F_\xi : \xi < \alpha, \xi \text{ არის ლუწი ორდინალი},$$

$$\{F_\xi : \xi < \alpha, \xi \text{ არის კენტი ორდინალი}\}$$

ასევე შედიან R -ის ყველა არაცარიელი ჩაკეტილ სიმრავლეთა ოჯახში.

ტრანსფინიტული ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით განვსაზღვროთ წერტილთა α -მიმდევრობა

$$\{x_\xi : \xi < \alpha\} \subset R,$$

რომლისთვისაც სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

1. თუ $\xi < \zeta < \alpha$, მაშინ $x_\xi \neq x_\zeta$;
2. ყოველი $\xi < \alpha$ ორდინალისათვის $x_\xi \in F_\xi$.

დავუშვათ, რომ $\beta < \alpha$ ორდინალისათვის $\{x_\xi : \xi < \beta\}$

β -მიმდევრობა უკვე აგებულია და აღვნიშნოთ ის F_β -თი.

რადგან შესრულებულია პირობები

$$\text{card}(F_\beta) = c;$$

$$\text{card}(\{x_\xi : \xi < \beta\}) \leq \text{card}(\beta) < c,$$

ამიტომ გვექნება

$$F_\beta \setminus \{x_\xi : \xi < \beta\} \neq \emptyset.$$

ვთქვათ, $x \in F_\beta \setminus \{x_\xi : \xi < \beta\}$ და $x_\beta = x$. თუ

გავაგრძელებთ ამ პროცესს მივიღებთ α -მიმდევრობას

$\{x_\xi : \xi < \alpha\} \subset R$, რომელიც აკმაყოფილებს 1. და 2. პირობებს.

ზემოთ მოყვანილი კონსტრუქციიდან გამომდინარეობს, რომ სიმრავლე

$$X = \{F_\xi : \xi < \alpha, \xi \text{ არის ლუწი ორდინალი}\}$$

არის ბერნშტეინის სიმრავლე.

ამით თეორემა 4 დამტკიცებულია.

თეორემა 2 და თეორემა 4-ში მოცემულ სიმრავლეთა აგების კონსტრუქციების შერწყმით მტკიცდება შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5. R -ზე არსებობს X სიმრავლე, რომელიც არის ვიტალისა და ბერნშტეინის სიმრავლე.

მოვიყვანოთ ასეთი სიმრავლის აგება სქემატურად. ისევე, როგორც წინა თეორემის დამტკიცებაში დავუშვათ, რომ α არის უმცირესი ორდინალური რიცხვი რომლისთვისაც

$card(\alpha) = c$ და განვიხილოთ R -ის ყველა ჩაკეტილ სიმრავლეთა ოჯახი $\{F_\xi : \xi < \alpha\}$ ინიექციური მიმდევრობის სახით.

ბერნშტეინის სიმრავლის კონსტრუქციის მსგავსად ტრანსფინიტული ინდუქციის მეთოდით ავაგოთ $\{x_\xi : \xi < \alpha\} \subset R$ წერტილთა ინიექციური ოჯახი. დაუშვათ, რომ $\beta < \alpha$ ორდინალისათვის უკვე აგებულია $\{x_\xi : \xi < \beta\}$ მიმდევრობა.

განესაზღვროთ შემდეგი სიმრავლე

$$Z_\beta = \cup \{x_\xi + Q : \xi < \beta\}.$$

ცხადია, რომ

$$card(Z_\beta) \leq card(\beta) \cdot \omega < c.$$

რადგან $card(F_\beta) = c$, ამიტომ

$$F_\beta \setminus Z_\beta \neq \emptyset.$$

ავიღოთ ნებისმიერი $z \in F_\beta \setminus Z_\beta$ ელემენტი და დაუშვათ, რომ $x_\beta = z$. ამით $\{x_\xi : \xi < \alpha\}$ წერტილთა მიმდევრობა აგებულია.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$X' = \{x_\xi : \xi < \alpha\}.$$

X' სიმრავლის აგებიდან გამომდინარეობა, რომ ვიტალის
 დაყოფის ყოველი ექვივალენტურობის კლასი $\{x+Q: x \in R\}$
 შეიცავს ერთ წერტილს მაინც X' სიმრავლიდან. ასევე
 აგებიდან გამოდის, რომ $R \setminus X'$ სიმრავლეს აქვს არაცარიელი
 თანაკვეთა არაცარიელ ჩაკეტილ სიმრავლესთან. სხვა
 სიტყვებით რომ ვთქვათ, X' სიმრავლე არის ვიტალის
 დაყოფის ისეთი სელექტორი, რომლის დამატებასაც აქვს
 არაცარიელი თანაკვეთა ჩაკეტილ სიმრავლესთან. თუ X -ით
 აღვნიშნავთ ასეთი გზით მიღებულ სელექტორს, მივიღებთ რომ
 X არის ვიტალის სიმრავლე და ამავე დროს ბერნშტეინის
 სიმრავლეც.

ლიტერატურა:

1. П. С. Александров, Введение в теорию множеств и общую топологию, М. 1977.
2. N. Bourbaki. Set theory. Moscow: Izd. Mir, 1965 (in Russian, translated from French).
3. N. Bourbaki. Integration. Moscow: Izd. Mir, 1977 (in Russian, translation from French).
4. Н. Бурбаки. Топологические векторные пространства, М. 1959.
5. Caratheodory. Über das lineare Mass von Punktmengeneine Varallgemeinerung des Längenbegriffs, Göttingen Nachr., 1914.
6. J. Cichon, A. Kharazishvili, B. Weglorz. Subsets of the real line. Wydawnictwo Uniwersytetu Lodzkiego, Lodz, 1995.
7. K. Ciesielski. How good is Lebesgue measure? Math. Intelligencer, 11, 1989.
8. P. Cohen. Set theory and the continuum hypothesis, Amsterdam, 1966.
9. В. И. Соболев, Лекции по дополнительным главам математического анализа, М. 1968.
10. Н. Данфорд, Дж. Шварц. Линейные операторы (Общая теория), М. 1962 (пер. с англ.).
11. R. Edwards. Functional Analysis. Helt, Rinehart and Winston, 1985.
12. A. Fraenkel. Abstract set theory. North-Holland, Amsterdam, 1953.
13. D. Fremlin. Consequences of Martin's Axiom. Cambridge University Press, 1984.
14. B. Gelbaum and J. Olmsted. Counterexamples in analysis. Amsterdam, 1964.

15. K. Gödel. The consistency of the Axiom of Choice and the generalized Continuum Hypothesis with the axioms of set theory. *Annals of Math. Studies*, Princeton, 1940.
16. DR. H. Hadwiger, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer-Verlag, Berlin, 1957.
17. P. Halmos. *Measure theory*. Princeton, Van Nostrand, 1950.
18. P. Halmos. *Lecture notes in ergodic theory*. Moskow, 1959 (in Russian).
19. *Handbook of Mathematical Logic* (Edited by J. Barwise). Amsterdam: North-Holland Publishing Comp., 1977.
20. *Handbook of Mathematical Logic. Part 2*. Izd. Nauka, Moskva, 1982 (in Russian, translation from English with comments).
21. E. Hewitt and K. Ross. *Abstract Harmonic Analysis. Vol. 1*, Springer, Berlin, 1963.
22. I. Jech. *The Axiom of Choice*. North-Holland, Amsterdam, 1973.
23. I. Jech. *Lectures in set theory*. Berlin, Springer, 1973.
24. I. Jech. *Lectures in set theory with particular emphasis on the method of Forcing*. Springer-Verlag, 1971.
25. A.B. Kharazishvili. *Strange functions in real analysis*. Marcel Dekker, INC, 2000.
26. A.B. Kharazishvili. *Topological aspects of measure theory*. Naukova Dumka, Kiev, 1984 (in Russian).
27. A.B. Kharazishvili, *Transformation groups and invariant measures*. World Scientific, 1998.
28. A.B. Kharazishvili, *Nonmeasurable Sets and Functions*, Elsevier, 2004.
29. A.B. Kharazishvili, *Topics in Measure Theory and Real Analysis*,

Atlantic Press/World Scientific, 2009.

30. ა. ხარაზიშვილი, სიმრავლეთა თეორიის საწყისები, ილია ჭავჭავაძის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, ნაწილი I, თბილისი 2008.
31. ა. ხარაზიშვილი, სიმრავლეთა თეორიის საწყისები, საქართველოს ეროვნული აკადემიის გამომცემლობა, ნაწილი II, თბილისი 2012.
32. ა. ხარაზიშვილი, მათემატიკური ესკიზები, ილია ჭავჭავაძის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, ნაწილი I, თბილისი 2007.
33. ა. ხარაზიშვილი, მათემატიკური ესკიზები, ილია ჭავჭავაძის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, ნაწილი II, თბილისი 2010.
34. ა. კირთაძე, დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების ზოგიერთი ასპექტი, გამომცემლობა „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, თბილისი, 2006.
35. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, М. 1976.
36. K. Kuratowski and A. Mostowski. Set theory. North-Holland Publishing Company, 1967.
37. K. Kuratowski. Topology. I, 1966.
38. A.G. Kurosh. The theory of groups. Izd. Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
39. И. П. Макаров, Дополнительные главы математического анализа, М. 1968.
40. J.C. Oxtoby. Measure and Category. Berlin, Springer, 1970.

41. W. Rudin, Functional Analysis, McGraw-Hill Book Company, 1973.
42. Г. П. Толстов, Мера и интеграл, М. 1976.