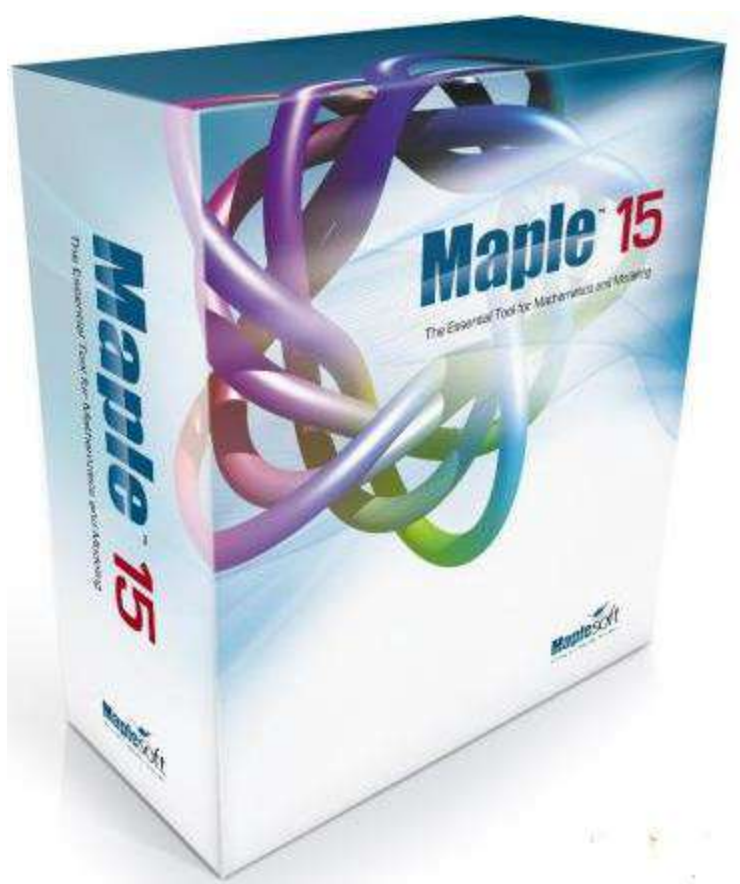
გელა ჭიკაძე, ვალიდა სესაძე

# მათემატიკა კომპიუტერზე




„სტუ-ს IT კონსალტინგის ცენტრი“

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

გელა ჭიკაძე , ვალიდა სესაძე

# მათემატიკა კომპიუტერზე

**დამტკიცებულია :**
სტუ-ს „IT კონსალტინგის
სამეცნიერო ცენტრის" სა-
რედაქციო კოლეგიის მიერ
ოქმი N

**თბილისი**

**2021**

დამხმარე სახელმძღვანელო ეძღვნება ფართოდ გავრცელებული პროგრამული პროდუქტის Maple-ს ათვისებას. აღნიშნული სახელმძღვანელო განკუთვნილია უმაღლესი მათემატიკის ტრადიციული კურსის კომპიუტერზე გადაწყვეტის გზების და საშუალებების შესწავლისათვის. იგი ფასდაუდებელ დახმარებას გაუწევს ყველა იმ მომხმარებელს, რომელიც საჭიროებს მათემატიკური გამოთვლების კომპიუტერული მოდელირების მეთოდების შესწავლას, რეალური მათემატიკური ამოცანების გადაწყვეტასა და სხვა გამოთვლითი სამუშაოების შესრულებას. პროგრამა Maple საკმარისად კარგად გამოიყენება განათლების სფეროშიც, არა მარტო მათემატიკური საგნების არამედ სხვა ნებისმიერი ტექნიკური თუ საბუნებისმეტყველო და ჰუმანიტარული მიმართულებების კვლევისა და შესწავლის პროცესშიც.

წინამდებარე სახელმძღვანელო წარმოადგენს სახელმძღვანელოს პირველ ნაწილს(გადამუშავებული ვარიანტი), სადაც განხილულია პროგრამა Maple-ს გარემოში მათემატიკური გამოთვლების ტრადიციული საკითხები, მოყვანილია უამრავი

მაგალითები. წიგნის მეორე ნაწილი მიეძღვნება კომპიუტერულ-მათემატიკურ გრაფიკას და ოპტიმიზაციის მეთოდების კომპიუტერულ რეალიზებას, ხოლო მესამე ნაწილში მითითებული იქნება პროგრამირება Maple-ს გარემოში (M ენაზე).

**რეცენზენტები:** ტექნიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, პროფ. გ. სურგულაძე
ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, პროფ. გ. ბერიკელაშვილი



**სტუ-ის „IT -კონსალტინგის სამეცნიერო ცენტრი“, 2021**
**ISBN 978-9941-8-3533-9**

**Georgian Technical University**
**Valida Sesadze, Gela Chikadze**

# Mathematics on the computer

**“IT-Consulting scfientific centere” of GTU, 2021**
**ISBN 978-9941-8-3533-9**

Authors: Gela Chikadze, Valida Sesadze. Mathematics on computer.– Tbilisi 2021. 298 p.

The handbook provides a widely used software product program for Maple. This guide is intended to study the ways and means of solution of the traditional mathematical computer course. It will provide valuable assistance to all the customers who need to study mathematical computing methods, to solve real mathematical tasks and perform other computing jobs. The program Maple is well used in the field of education, not only in mathematical subjects but also in the study and study of other technical and natural and humanitarian directions.

This guide is the first part of the textbook discussing the traditional issues of mathematical calculations in the Maple environment, including numerous examples. Mathematics on computer

## სარჩევი

# შესავალი

თქვენ გნებავთ სწრაფად, ხარისხიანად და უშეცდომოთ გადაწყვიტოთ მათემატიკური ამოცანები (თუ ეს რაღა თქმა უნდა შესაძლებელია) და შეასრულოთ რთული მათემატიკური გამოთვლები. ამ მიზნით ამ წიგნის ავტორები გირჩევთ მიმართოთ, კომპიუტერულ პროგრამას Maple-ს. ეს პროგრამა თქვენ გაგიადვილებთ დასახული ამოცნის გადაწყვეტის საქმეს. თქვენ მიეჩვიეთ მონაცემების ანალიზს, ერთერთი ელექტრონული ცხრილის მათ შორის MS Excel-ის გამოყენებას, ეს პროგრამები კარგია, მაგრამ Maple-ს შეუძლია მოგცეთ ყველაფერი რაც დაკავშირებულია მათემატიკურ გამოთვლებთან და მოგცეთ საშუალება ისიამოვნოთ იმ სილამაზით, რასაც ჰქვია პროგრამა Maple და რისი მოცემაც მას შეუძლია.

ეს პროგრამა ანუ ანალიზური გამოთვლების სისტემა Maple , ანუ სხვა სიტყვებით კომპიუტერული ალგებრის სისტემა წარმოადგენს კანადის უნივერსიტეტის Waterloo–ს მიერ შემუშავებულ სისტემას. იგი გვაძლევს საშუალებას გავაკეთოთ არა მხოლოდ ის რაც მოცემულია ჩამონათვალში, არამედ სხვაც, რომელიც დაკავშირებულია მათემატიკასთან და ამის გაკეთებისათვის არაა აუცილებელი იყო მათემატიკოსი ანდა პროგრამისტი.

პროგრამა Maple-ს გამოყენება შეუძლია (თავისის ამოცანების ამოხსნისათვის) არა მხოლოდ მათემატიკოსებს არამედ ნებისმიერი სხვა გამოყენებითი სფეროს წარმომადგენლებსაც. ამ შემთხვევაში მთავარია მათ ესმოდეთ ის მათემატიკური მოდელები, რომლებსაც იყენებენ თავიანთ გამოკვლევებში.

პროგრამა Maple საკმარისად კარგად გამოიყენება განათლების სფეროშიც, არა მარტო მათემატიკური საგნების არამედ სხვა ნებისმიერი ტექნიკური თუ

საბუნებისმეტყველო და თქვენ წარმოიდგინეთ ჰუმანიტარული მიმართულებების კვლევისა და შესწავლის პროცესშიც. შეგვიძლია ჩამოვთვალოთ ის სფეროები, რომლებშიც წარმატებით გამოიყენება აღნიშნული პროგრამა. თუნდაც ერთ მექანიკის სფეროში ისეთებში, როგორებიცაა კლასიკური მაქანიკის თეორია, მასალათა გამძლეობა, სამშენებლო მექანიკა, კვანტური მექანიკა და სხვა.

პროგრამა Maple–ს ანიმაციური გრაფიკის სფეროში შესაძლებლობების გათვა-ლისწინებით სტუდენტებს შეიძლება თვალსაჩინოდ წარმოვუდგინოდ მოძრაობათა სხვადსხვა კანონები თუ სხეულების მოძრაობა და ურთიერთდამოკიდებულება სივრცეში.

პროგრამა Maple სტუდენტებისათვის არის ფასდაუდებელი დამხმარე სხვადასხვა მათემატიკური მეთოდებისა შესწავლის პროცესში. იგი მათ ათავისუფლებს მომქნცველი, თუ გინდათ რუტინული მათემატიკური გამოთვლებისაგან, გამოთავისუფლებულ დროს კი სტუდენტი უთმობს მეთოდების არსის ღრმა გააზრებასა და გაცნობიერებას. Maple–ს სტუდენტებისათვის განკუთვნილ პაკეტში შედის სპეციალური პაკეტი სახელწოდებით **student,** რომელიც შეიცავს ფუნქციათა დიდ სიმრავლეს, რომელთა საშუალებითაც სტუდენტებს შეუძლიათ შეასრულონ ნებისმიერი მათემატიკური გარდაქმნები, ნაირ–ნაირი განტოლებების და განტოლებათა სისტემების ამოხსნა. ინტეგრალების გამოთვლა, სხვადასხვა სოპტიმიზაციო ამოცანების გადაწყვეტა და სხვა.

პროგრამა Maple შექმნილია სხვადასხვა პროგრამული პლატფორმებისათვის ისეთები, როგორიცაა Windows, VMS, UNIX და Linux –თვის. ყველგან მომხმარებელს პროგრამის შემქმნელები სთავაზობენ იმ ინტერფეისს, რომელზედაც ისინი არიან მიჩვეულნი. ამ წიგნში ჩვენ გამოვიყენებთ პროგრამა Maple–ს Windows–ზე ორიენტირებულ ვარიანტს. გამოსაყენებელი გრაფიკული ინტერფეისი ძალიან მოხერხებული ტრადიციული და მოსახმარად ადვილია, რომელიც სტანდარტულ Windows–ისთვის დამახასიათებელ სტილშია შემუშავებული. მთელი სამუშაო ხორციელდება სამუშაო ფურცელზე, რომელიც შეიძლება განვიხილოთ, როგორც MS Office-ს ტრადიციული დოკუმენტი. მომხმარებელი ინტერაქტიულ რეჟიმში სამუშაო ფურცელზე Maple–ს მოწვევის სიმბოლოს (სიმბოლო“>“) შეყავს საჭირო ბრძანება და ბრძანების აკრეფის ( “ ; “ აკრეფისა და <Enter> ღილაკზე დაწკაპუნების) შემდეგ Maple–ს ინტერპრეტატორი იქვე

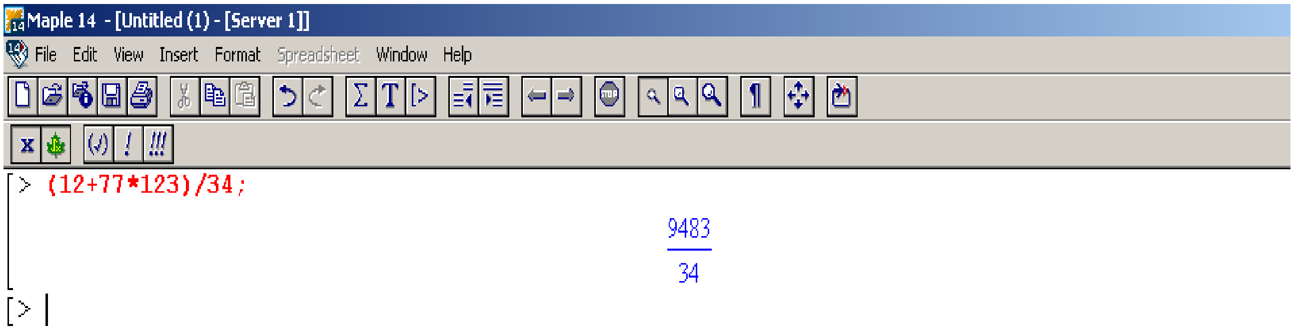
გამოგვიყვანს შესრულებული ბრძანების შედეგს. მაშასადამე მთელი სამუშაო სრულდება ინტერაქტიურ რეჟიმში იქვე.

თამამად შეიძლება ითქვას, რომ პროგრამა Maple წარმოადგენს ძალიან მოხერხებულ მარტივ და ეფექტურ საშუალება მათემატიკური გამოთვლების შესასრულებლად. აღნიშნული სახელმძღვანელო განკუთვნილია უმაღლესი მათემატიკის ტრადიციული კურსის კომპიუტერზე გადაწყვეტის გზების და საშუალებების შესწავლისათვის. იგი დარწმუნებული ვარ ფასდაუდებელ დახმარებას გაუწევს ყველა იმ მომხმარებელს, რომელიც საჭიროებს მათემატიკური გამოთველბის კომპიუტერული მოდელირების მეთოდების შესწავლას, რეალური მათემატიკური ამოცანების გადაწყვეტასა და სხვა მრავალი გამოთვლითი სამუშაოების შესრულებას.

# თავი 1. უბრალო გამოთვლები Maple–ში

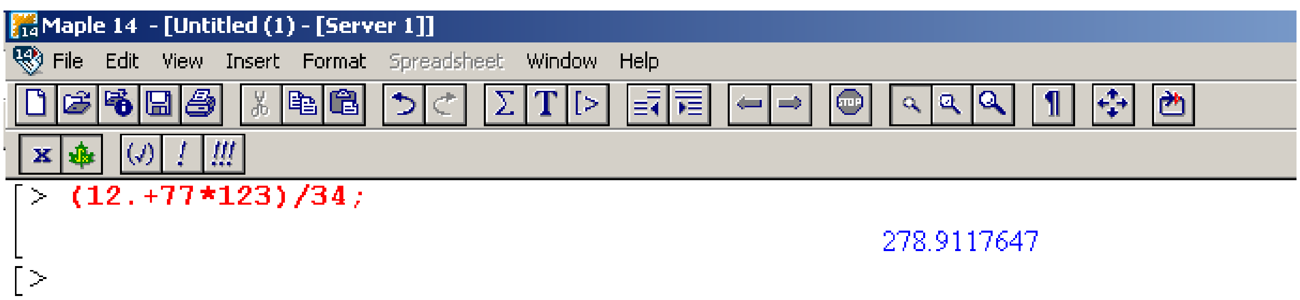
## 1.1 არითმეტიკული ოპერაციები Maple–ში, უბრალო არითმეტიკული გამოსახულება

როგორც ვიცით ნებისმიერი არითმეტიკული გამოსახულება შესდგება: არითმე-ტიკული ოპერანდების, არითმეტიკულ ოპერაციათა ნიშნებისა და ფრჩხილებისაგან. **არითმეტიკული ოპერანდებია:** რიცხვები, ცვლადები, ელემენტარული მათემატიკური ფუნქციები ან თავად არითმეტიკული გამოსახულებები. ძირითად **არითმეტიკულ ოპერაციათა ნიშნებია: + –** შეკრება, **–** გამოკლება, ***** (ვარსკვლავი)– გამრავლება, **/** – გაყოფა, **^** – ახარისხება. ფრჩხილები ჩვენ ვიცით, რომ არითმეტიკულ გამოსახულებაში ფრჩხილებს აქვს უდიდესი მნიშვნელობა, ფრჩხილები ცვლიან არითმეტიკულ ოპერაციათა შესრულების ჩვეულ თანმიმდევრობას, ჩვენთვის სასურველი თანმიმდევრობით. Maple–ში გამოიყენებიან ფრჩხილების ყველა ტრადიციული მათემატიკაში მიღებული სახე ესენია: () – მრგვალი ფრჩხილები, [ ] – კვადრატული ფრჩხილები და { } – ფიგურული ფრჩხილები. ყველა მათგანს აქვს თავისი დანიშნულება და ყოველ მათგანს თავის დროზე გავეცნობით. ახლა გავეცნოთ Maple–ში გამოთვლების შესრულების მაგალითებს: ვთქვათ გვინდა ასეთი უბრალო გამოსახულების გამოთვლა (12+77x123): 34 იგი Maple–ში ჩაიწერება შემდეგნაირად: **>**(12+77*123)/34; Enter Maple პროგრამის ფანჯარას შესრულებულ კლასიკურ ვარიანტში ექნება სახე:




ნახ. 1.1

ფანჯრიდან ჩანს, რომ შედეგი წარმოდგენილია წილადის სახით. თუ გვინდა შედეგი მივიღოთ ათწილადის სახით, მაშინ გამოსახულებაში ერთ–ერთ რიცხვს უნდა მივუწეროთ ბოლოში წერტილი, ანუ წარმოვადგინოთ, როგორც ნამდვილი რიცხვი ( გამოსახულებაში ყველა რიცხვი მთელია). ამის შედეგად მივიღებთ შემდეგ სურათს:

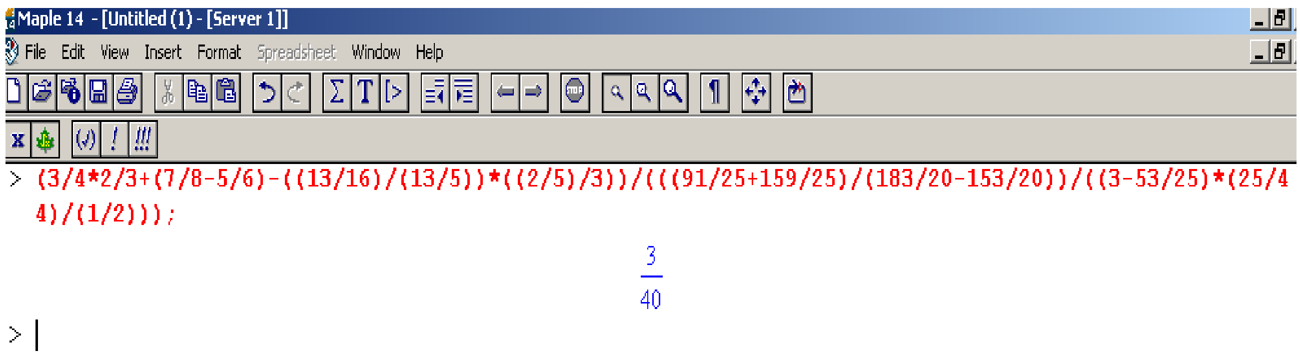



ნახ.1.2

ნახ. 1.2 დან ჩვენ ვხედავთ, რომ წერტილი დავუსვით პირველ შესაკრებს 12–ს ანუ Maple–ს შევახსენეთ, რომ რიცხვი 12 განიხილოს როგორც ნამდვილი რიცხვი12.0 სახით. შედეგმაც არ დააყოვნა პასუხი მივიღეთ ათწილადის სახით. აქედან შეგვიძლია გავაკეთოთ დასკვნა: თუ გამოსახულებაში ყველა რიცხვი მთელია, მაში გამოთვლის შედეგად მიღებული რიცხვი იქნება წარმოდგენილი წილადის სახით, ხოლო თუ გამოსახულებაში ერთი მაინც რიცხვი ნამდვილია (წარმოდგენილია ათწილადის სახით), მაშინ შედეგიც მოიცემა ათწილადის სახით. ახლა განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი უბრალო არითმეტიკული გამოსახულების გამოთვლაზე, მაგალითად გამოსათვლელია გამოსახულება :

$$\frac{\frac{3}{4}*\frac{2}{3}+(\frac{7}{8}-\frac{5}{6})-(\frac{13}{16}:2\frac{3}{5})*(\frac{2}{5}:3)}{[(3\frac{16}{25}+6\frac{9}{25}):(9\frac{3}{20}-7\frac{13}{20})]:[(3-2\frac{3}{25})*\frac{25}{44}:\frac{1}{2}};$$

ეს გამოსახულება Maple –ში ჩაიწერება შემდეგნაირად:



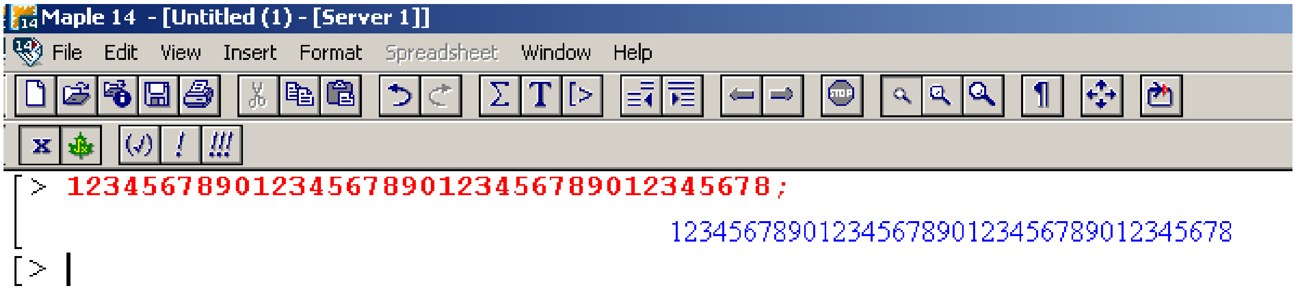

ნახ.1.3

აქ Maple–ში ყველა შერეული წილადი წარმოვადგინეთ არაწესიერი წილადის სახით შედეგი მივიღეთ წილადის სახით.

## 1.2 მთელი, ნამდვილი პერიოდული რიცხვები Maple–ში

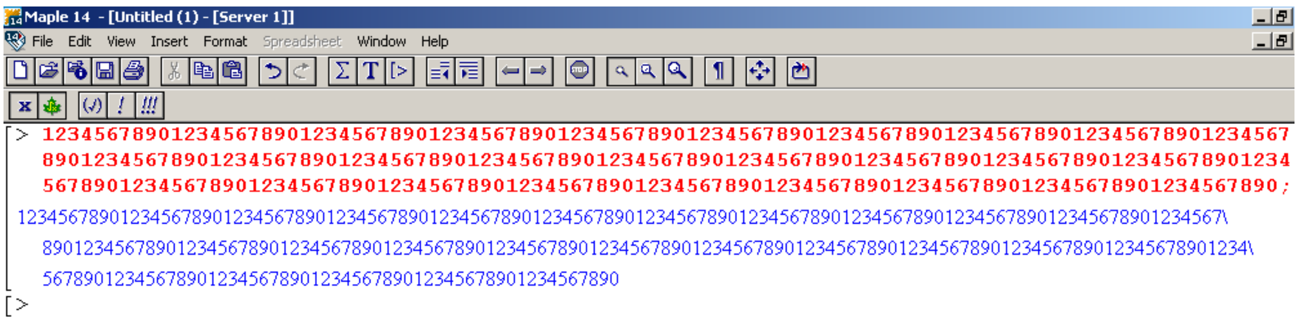
პროგრამა Maple–ს აქვს განუზომლად დიდი რიცხვების წარმოდგენისა და მათზე მანიპულირების საშუალება მაგალითად წარმოვადგინოთ რაიმე დიდი მთელი რიცხვი ვთქვათ 37 ნიშნა :1 234 567 890 123 456 789 012 345 678 901 234 567 კაცობრიობას ამ რიცხვისთვის სახელიც არ მოუგონია იგი საკმაოდ დიდი ასტრონომიული რიცხვია. მისი წარმოდგენა Maple–ში შეიძლება ჩვეულებრივად:

>1 234 567 890 123 456 789 012 345 678 901 234 567 ; Enter



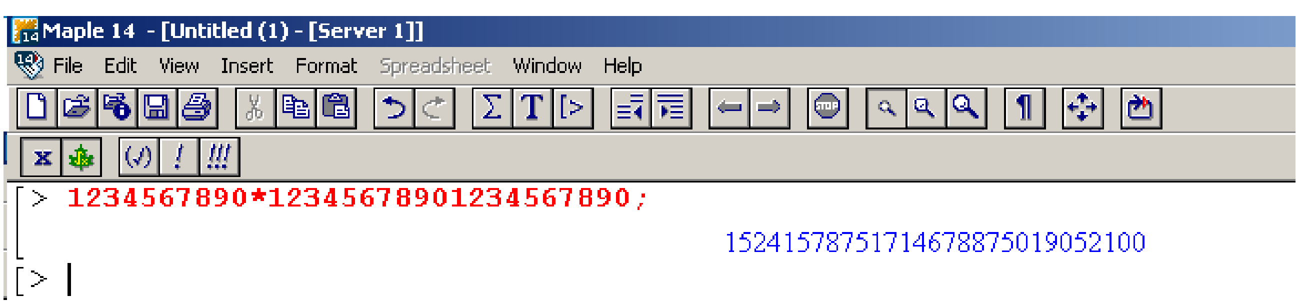

ნახ.1.4

ასეთივე წარმატებით შეიძლება ძალიან დიდი რიცხვების წარმოდგენა:



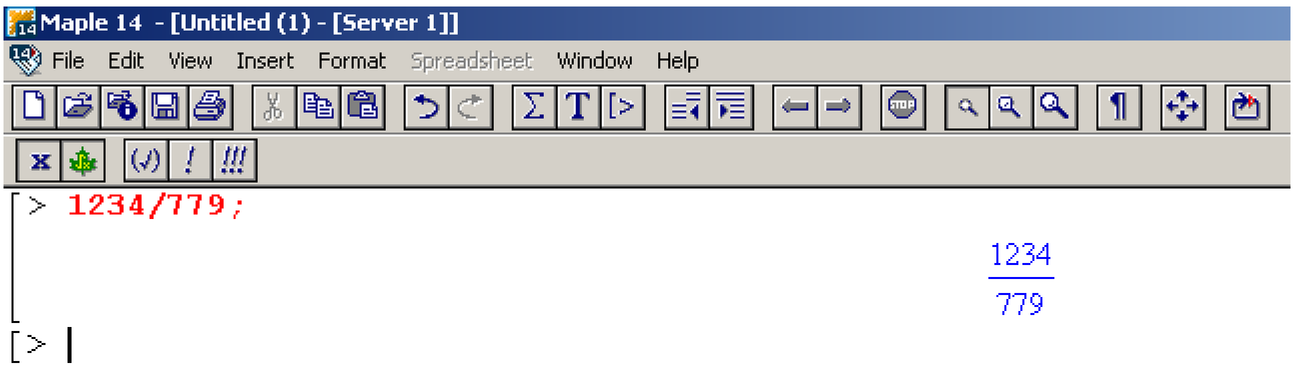

ნახ.1.5

ასეთივე წარმატებით შეიძლება ნებისმიერი დიდ  მთელ რიცხვებზე მოქმედება და არა გვაქვს იმის შიში რომ ან თანრიგი არ გვეყოფა ანდა სხვა გამოთვლებთან დაკავშირებული რაიმე პრობლემა გაგვიჩნდება. მაგალითად 15000 ციფრიანი მთელი რიცხვი შეგვიძლია გავამრავლოთ 45000 ციფრიან მთელ რიცხვზე და მიიღოთ შედეგი უპრობლემოდ (ერთი პრობლემაა მხოლოდ ჩვენ დავიღლებით ამხელა რიცხვების კომპიუტერზე აკრეფით) დროის სიმცირის გამო აქ მოვიყვან მაგალოთად 10 ნიშნა რიცხვის 20 ნიშნა რიცხვზე გამრავლებაზე.




ნახ.1.6

ასეთივე წარმატებით შეგვიძლია გამოვიყენოთ მთელ რიცხვებზე გამრავლების, შეკრების გამოკლებისა და ახარისხების ოპერაციები და შედეგიც იქნება მთელი რიცხვი გამონაკლისს წარმოადგენს გაყოფის ოპერაცია, რომელიც მთელი რიცხვების გაყოფის შედეგად უმეტესობა შემთხვევაში არ გვაძლევს მთელს რიცხვს თუმცაღა ამ გაყოფის შედეგს წარმოგვიდგენს წილადის სახით. მაგალითად: 1234:779




ნახ.1.7

როგორც ვიცით ახარისხების ოპერაცია შედეგად მიღებული რიცხვის სიდიდეს ძალიან სწრაფად ზრდის მაგალითად გამოვითვალოთ რიცხვი $2012^{2012}$ Maple–ში ამას გავაკეთებთ ასე:


```
> 2012^2012;
>
793393219137062013449185422535299787263842670011150329002477655290888344267512924193397195937010420304887068625876429\
  394545694904022216295355600037521010337359307814096351900626525184791837457960435609758652761037949130652596493540700\
  880665674833332242862673337419737848511929159985515679614517527970395436244178358207196762083114126730635214165367160\
  754982612239998595608030406057373395181871541269891561239758143088454479143155154936720448504914882008137909356758846\
  435691345843509292652895085423653460505819363899229075587424610470878125913455863186031229574292742842484952098358272\
  926672582801294061583443037130216313753526285155703112076090117976384237076915419816589292474140938513855585671888486\
  607967992527617281039841007114174034464300787310032348933639229394596221518479393806694200381851717929281767255365154\
  245758868545878326434782114798458787296907319635418687616203762155850544669228632312518016016393780054385138519950935\
  845500374691115673011121903451751464703439772081562263525672200510958648661621532658401113703441585362323327167445710\
  778131296677205983882079969701704170698392985985437210708470931316971719300090799230285250652299352914760892040179358\
  1811184338874879305092070085290163367155727713439334274706743444459594636865384601183317031393539910605683448880285722\
  084487635225100735606684867864295500728992394828217562342429735604953478961286744780121673693109552930563182840642804\
  302157110289893843103888361138827587141693575724523192951498416292705546250202623440764981641042569036331496300611118\
  701823072821380088585122114044151331569585715342553030816796088120737470155116922660964953804063801575540502230847984\
  160219928395557446980804217415632794030114489181607641235583436648475712875653307143360527880891684441460121430202267\
  745109324321137346364137599317676380287398037061366971068788347324243364605414106176308764114957408953168959130112236\
  661615461077539343755877718127310027277378893715092148736121307139826231583052399569284282987742539397885788539907191\
  484900964965625732511292343956110492954748883567255588951577412001143035490729712711724754852983457924736816048209155\
  058361022756290899392570811092909847111125219369639907737222427568217761166777738606675862256622480303022630162125062\

508432116309944950095946761810595284987091493079405676524415671289093527659619753492070701991534710269107756056889988\
103587322198822411431826042827124740490470432268281502045901349453284625574181000418522389545708081077840690110548474\
727535621688120352796314177114253705754824226767654804925146120592749104872912029424056346648788705148650400231998585\
902789135095953270661607089557739349300542038134909727723533132307534061093006960234941661198182067002038846019650100\
611462899920686306361723126319000118852281912116583355943633383992557818406746927279200299749009601884063450680412896\
119121137902453248937012001542165365957767628937488510799690551678596936922939410033594117490732608801312283076238719\
367984675838782917256720095244324615528886561071152338158937374592664184898924066457654942412162930800595702450877591\
816167784574035051633505333709759672228539577229176263079170277907559695752130165484623328424932714311379904389414325\
474710466815575611614473206569594786437234055586096994755614367776881132115900288234761614874236997783278205896748046\
302323497605668839770125577410812017672937730042611914626963735410294137585217619890466757561937554624916641617374610\
897864691793925598404016762537916101040905253590663207110041210243325617389869292056347209052907203995381571508071411\
566821058052599028885859533962755304083411606909975305717101556192483249645816830626435321506237464714066812225062450\
913275971527120925196896595039331357344084795457380733002803554727185271997414561683121112939972199120214571482492765\
209160008529220181471663862073198571190025922301229926802697840601021696302010556397946418221320355419757389720848212\
850230375234581876538228675566347875140822774067987154377968931205835597411453217880077564285268298204286161072501957\
671719441894355010302988269678407271349039879441380547711726829456345185550086065011223199343334862487228323773528321\
414373201182256630531187086378330319521132226121005470835241875806032219080900825894739059849288750949029042154587864\
294758793120691524237182288800466287649751936428450999872101875417836480383202186267998293905196379975566540872067642\
934654941084424909339807398495160744058401017447235716068909675505961454688711004272165485360835687208176716329181099\
079917758193829619606009098256136648343269003765452554068551963088681144782193263368403419539319876959386023690131553\
```

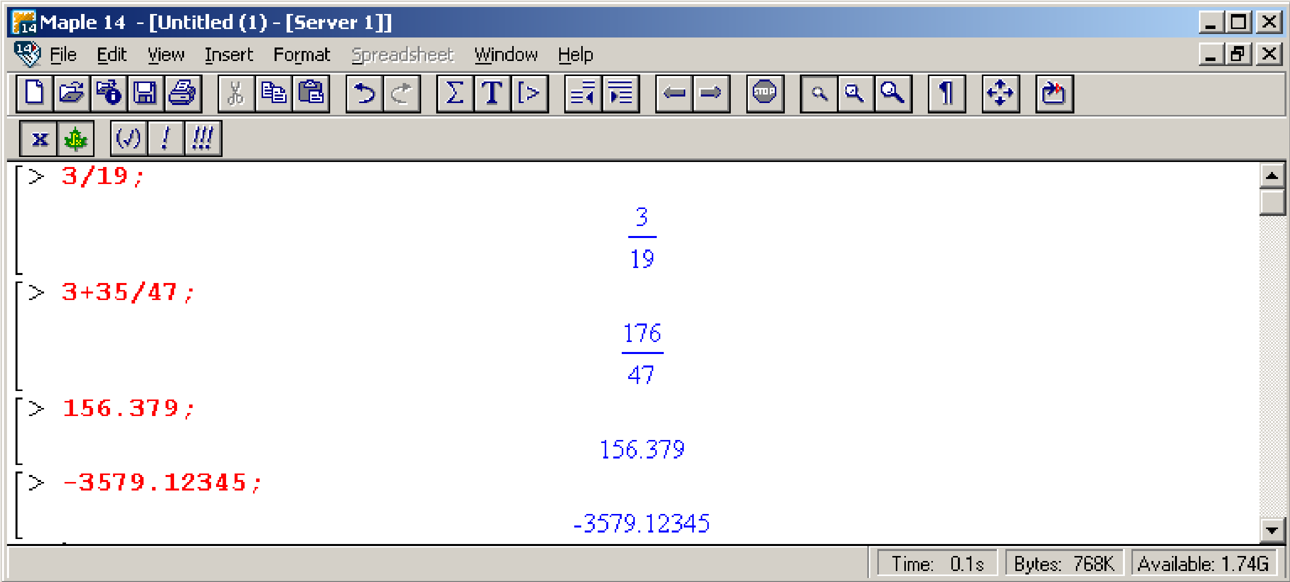
```
108236020904121095148957998618169241927499260899598355550172822019305126869399389028590720252893478627516198707485107\
234579821097440278603300487691664088206864883446145570778907270824468030923628554512982818972097208326635035347131943\
982291969969441677431432737392099189619892282246484301195092911833109760054448002169497815146495976196729568819362345\
218182109612840463597722871661664430367169840638958233604944506656972191158136177547174634265817012459945165516421177\
279203878070455539504430882763063563008965269870103705343847385345674180808845250838342658177411225505097622285708778\
839893761267813527979943901546360250247524102258005447846857452178439123031431908833423839944454249747084032088690288\
787932108175414253379534256853229191066957674218175674641479513276151518337262950545299290175302296120208839474364943\
444711598125961615068653867677733914064538847697296971106551757747846023708730241115198162612366698403298854182163242\
071561173788809850482798977628287259132142995582727113510958255991948080180311413900078371789981976990522083429970844\
793744864441492460557648657266360544136540125787182146367881149700026245403529699688443918078139369186826189709218612\
202985093166837203473403821897310928408341680679757696363562594570812342320272367105849226458101205694430398263437405\
604885780842642424065466390422821455878160743729498067724263734810414180523996532395772761642298291347178244973555094\
287473528371561184542236571249223505825580864023795357427038506465833324052902805483464121638458429664332002439498717\
116244091641603408446175025460209595505797765036736881171381616627906254783750410120223392599774600044192233596744842\
658069345219841159863972923286245321655053161378090131060931862864149484083468785471175621743651550777194075836962336\
782381650761170241836431840238695871232743665852111839560772489710894915860414811302950999831052008613478486294465172\
083296214230381412129132007015940724677756316149915560875316914310720017391207747386258704266842704705261020980263375\
08672897338046306805033012280164154278679125744836035283445105565613246283406795148933260640256
> |
```

ნახ.1.8

როგორც ვხედავთ ნახ.1.8–ზე მივიღეთ უზომოდ დიდი რიცხვი, რომელიც შესდგება დაახლოებით (უხეში დათვლით) 117 ციფრიანი 57 სტრიქონი ციფრებისაგან. ანუ ეს რიცხვი დაახლოებით 117x57= 6669 ციფრისაგან შედგენილი მთელი (ნატურალური) რიცხვია.

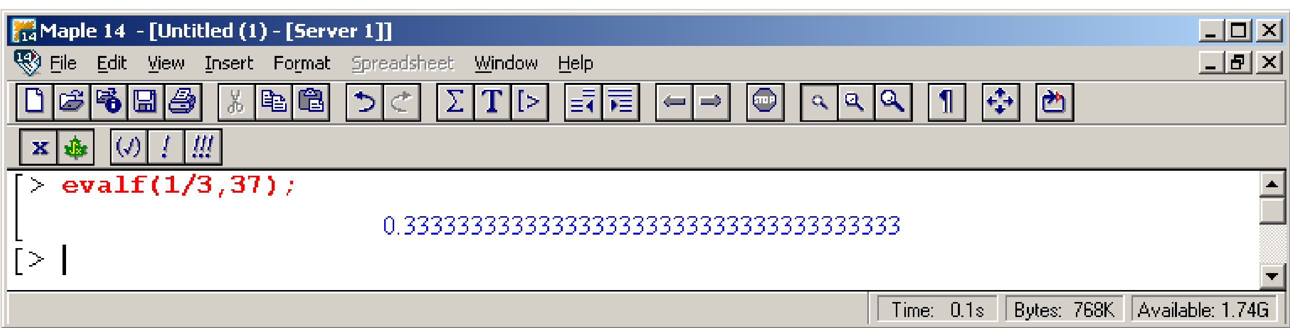
Maple–ში ნამდვილი რიცხვების წარმოდგენა ხორციელდება ჩვეულებრივად, შეგვიძლია რიცხვი ჩავწეროთ წილადის სახით და შეგვიძლია რიცხვი ჩავწეროთ ათწილადის სახით. მაგალითად ჩავწეროთ რიცხვები : $\frac{3}{19}, 3\frac{35}{47}, 156.379, -3579.12345$

Maple–ში ისინის წარმოიდგინებიან შემდეგნაირად:



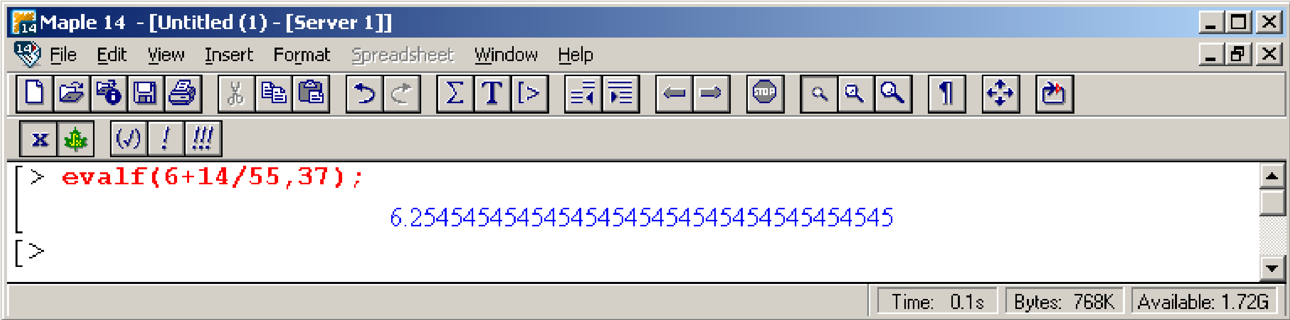

ნახ.1.9

პერიოდული რიცხვების წარმოდგენისას (ცოტათი მოვლენებს გავასწროთ წინ და გამოვიყენოთ ფუნქცია Evalf-ი) შეგვიძლია მივუთითოთ მძიმის შემდეგ რამდენი ციფრიც გვინდა. მაგალითად რიცხვი $\frac{1}{3}$ მძიმის შემდეგ მივუთითოთ 37 თანრიგი ამისათვის ვიქცევით ასე :




ნახ.1.10

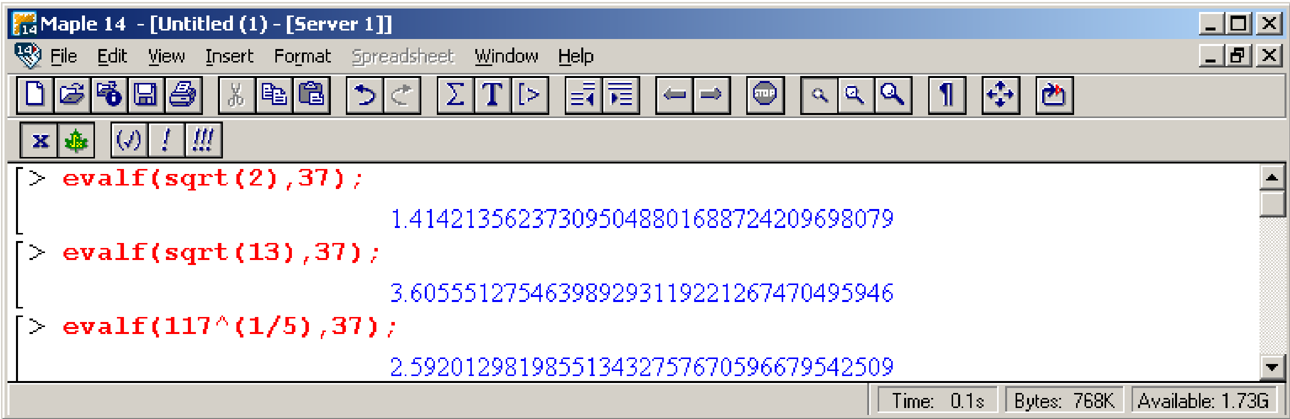
ასეთივე წარმატებით შეგვიძლია წარმოვადგინოთ მძიმის შემდეგ მაგალითად 777777 თანრიგი, მაგრამ დამეთანხმებით ამის გაკეთებას აქ არ ვაპირებთ, რადგანაც იგი წიგნში დიდ ადგილს დაიკავებს. მკითხველს შეუძლია თავად დარწმუნდეს ამაში. მაგალითად გვინდა წარმოვადგინოთ პერიოდული რიცხვი 6,2(54). ამისათვის იგი ჩვეულებრივი არითმეტიკული გარდაქმნებით დავიყვანოთ წილად რიცხვამდე და შემდეგ ჩავწეროთ Maple–ში. ანუ $6,2(54) = 6\frac{254-2}{990} = 6\frac{252}{990} = 6\frac{14}{55}$




ნახ.1.11

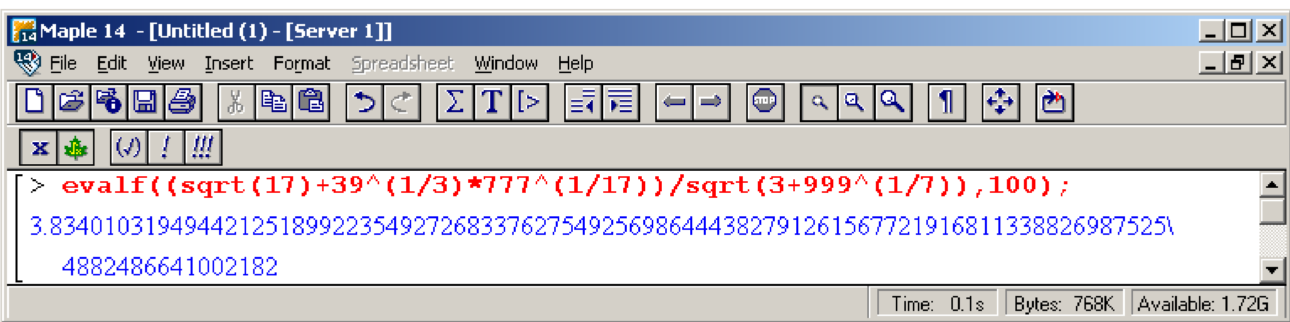
## 1.3. უსასრულო არაპერიოდული რიცხვები და ათწილადების გამოთვლა გამოსახულებაში.

უსასრულო არაპერიოდული ათწილადების გამოთვლისას ფუნქცია Evalf-ის გამოყენებით შეგვიძლია მივიღოთ მძიმის შემდეგ თანრიგთა რაგინდ დიდი რიცხვი და მართლაც შეგვიძლია დავრწმუნდეთ ექსპერიმენტალურად, რომ ესა თუ ის რიცხვი არის თუ არა უსასრულო არაპერიოდული რიცხვი მაგალითად გამოვთვალოთ და მძიმის მერე მივუთითოდ 37 თანრიგი (თანრიგების უფრო მეტი რაოდენობა თქვენთვის მომინდვია) რიცხვები: $\sqrt{2}$ , $\sqrt{13}$ და $\sqrt[5]{117}$ ამ რიცხვების Maple–ში გამოთვლის ნიმუში მოცემულია ნახ.1.12–ზე. როგორც ნახატიდან ჩანს რიცხვი $\sqrt[5]{117}$ წარმოვადგინეთ წილადხარისხიანი გამოსახულების სახით კერძოდ 117^(1/5) ასეთი წარმატებით შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ნებისმიერი ხარისხის ფესვი ნებისმიერი რიცხვიდან, რაც ძალიან ეფექტურია ნებისმიერი რთული გამოთვლების განხორციელების დროს.




ნახ.1.12

ახლა მაგალითად გვინდა გამოვთვალოთ გამოსახულება $\dfrac{\sqrt{17}+\sqrt[3]{39}*\sqrt[17]{777}}{\sqrt{3+\sqrt[7]{999}}}$ და მძიმის შემდეგ შევინარჩუნოთ 100 თანრიგი. Maple–ში ეს გამოსახულება წარმოიდგინება და გამოითვლება შემდეგნაირად იხ. ნახ 1.13:

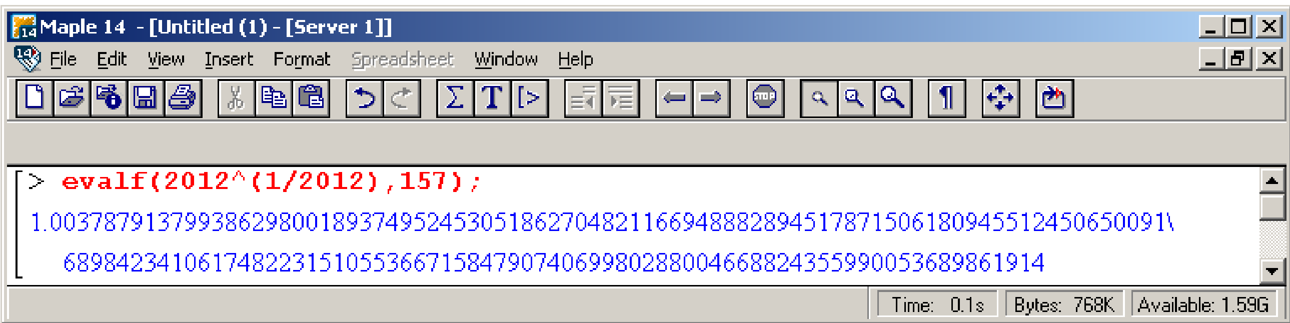



ნახ.1.13

# თავი 2
## 2. სპეციალური გამოთვლები Maple-ში.

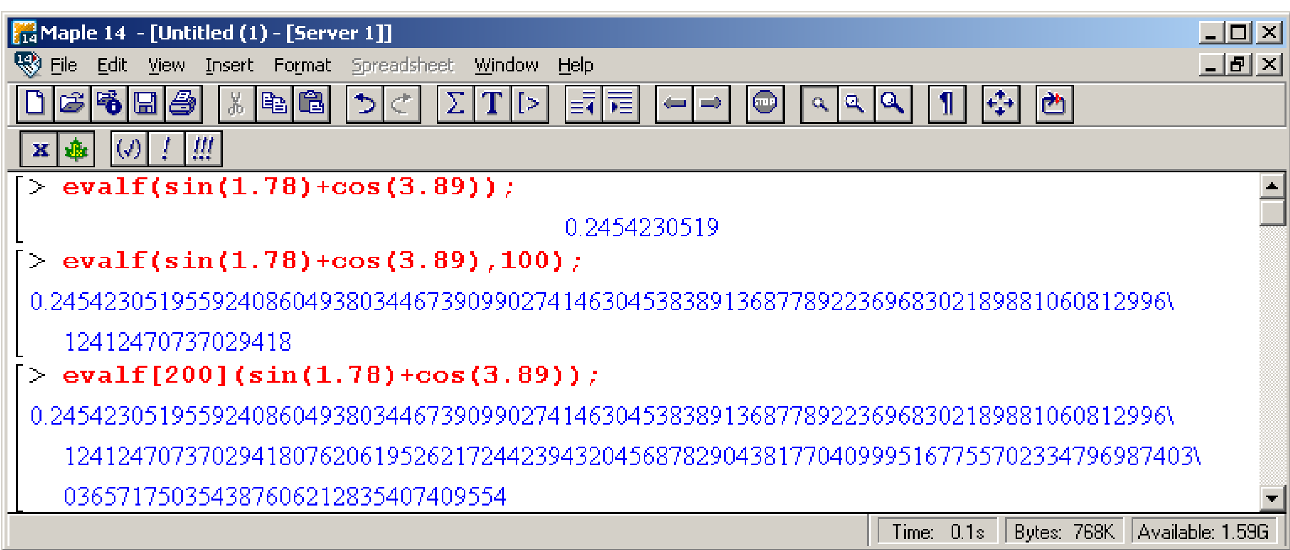
### 2.1 ფუნქცია Evalf და მისი გამოყენება ათწილადებში თანრიგების მისათითებლად.

როგორც უკვე ზემოთ ვნახეთ, ფუნქცია Evalf - ი გვაძლევს საშუალებას განვახორციელოთ სხვადასხვა ფუნქციებისა თუ გამოსახულებების გამოთვლა და თანაც, რაც ყველაზე მნიშვნელოვანია , შედეგში მივიღოთ იმდენი თანრიგი რამდენიც ჩვენ მოგვესურვება. მაგალითად გვინდა გამოვთვალოთ რიცხვი $\sqrt[2012]{2012}$ ამისათვის გამოვიყენოთ ფუნქცია Evalf და მძიმის შემდეგ მივუთითოთ 157 თანრიგი. ამის ნიმუში მოცემულია ნახ. 2.1–ზე




ნახ. 2.1

ვთქვათ გვინდა გამოვთვალოთ გამოსახულების $\sin(1.78)+\cos(3.89)$ მნიშვნელობა ფუნქცია Evalf –ის საშუალებით ეს შეიძლება განვახორციელოთ შემდეგნაირად (იხ. ნახ.2.2 ):

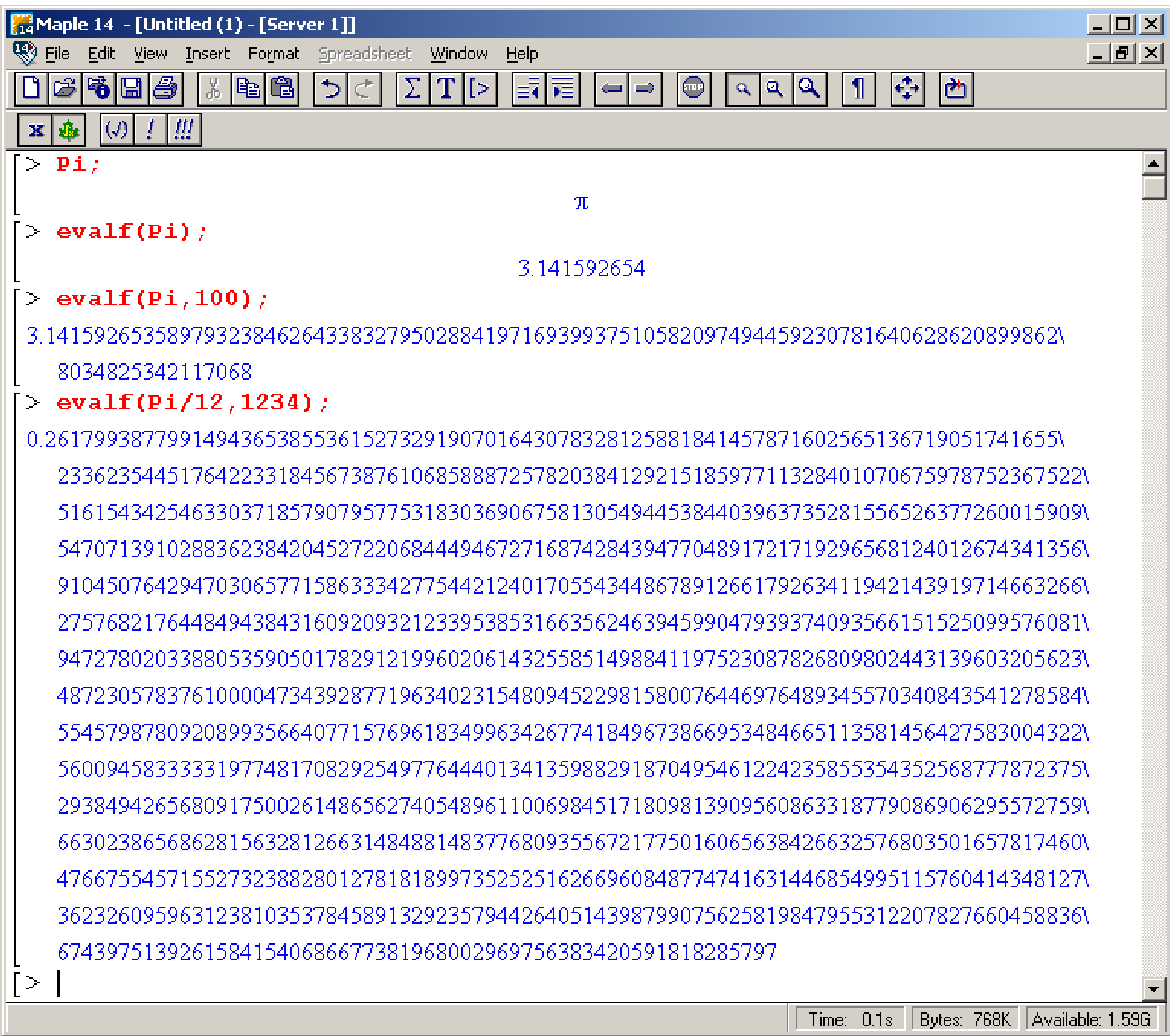


ნახ. 2.2

როგორც ნახ.2.2 –დან ჩანს ჩვენ ეს გამოსახულება გამოვთვალეთ ჯერ თანრიგების მიუთითებლად, მეორედ კი მძიმის შემდეგ მივუთითეთ 100 თანრიგი, მესამედ კი გამოვიტანეთ 200 თანრიგი მძიმის შემდეგ, ოღონდ ჩაწერის ფორმა აქ განსხვავებულია.

## 2.2 რიცხვი "პი" ($\pi$) და მისი გამოანგარიშება

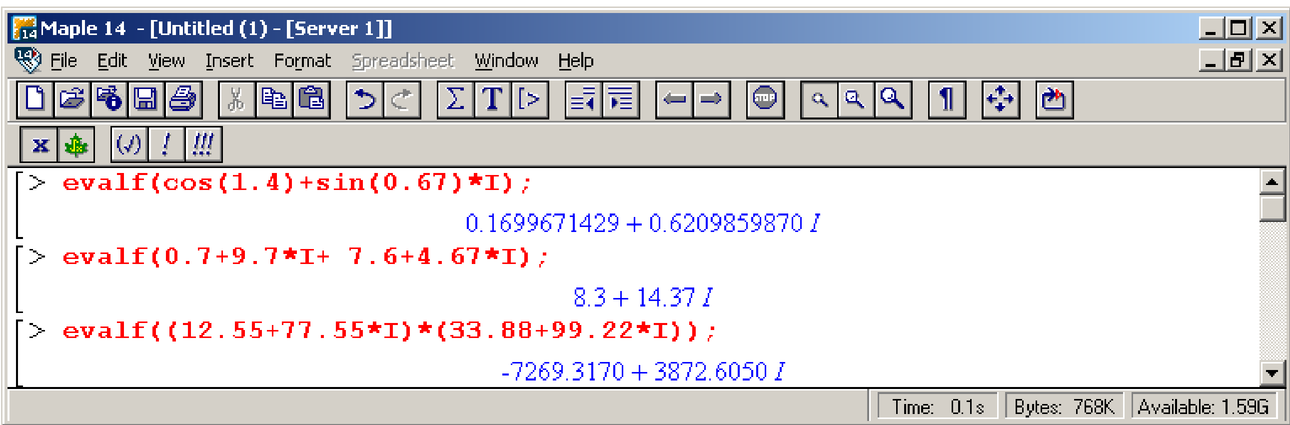
როგორც ვიცით რიცხვი $\pi$ უმნიშვნელოვანესი რიცხვია (იგი მუდმივი რიცხვია და წარმოადგენს წრეწირის სიგრძის შეფარდებას მის დიამეტრთან).




ნახ.2.3

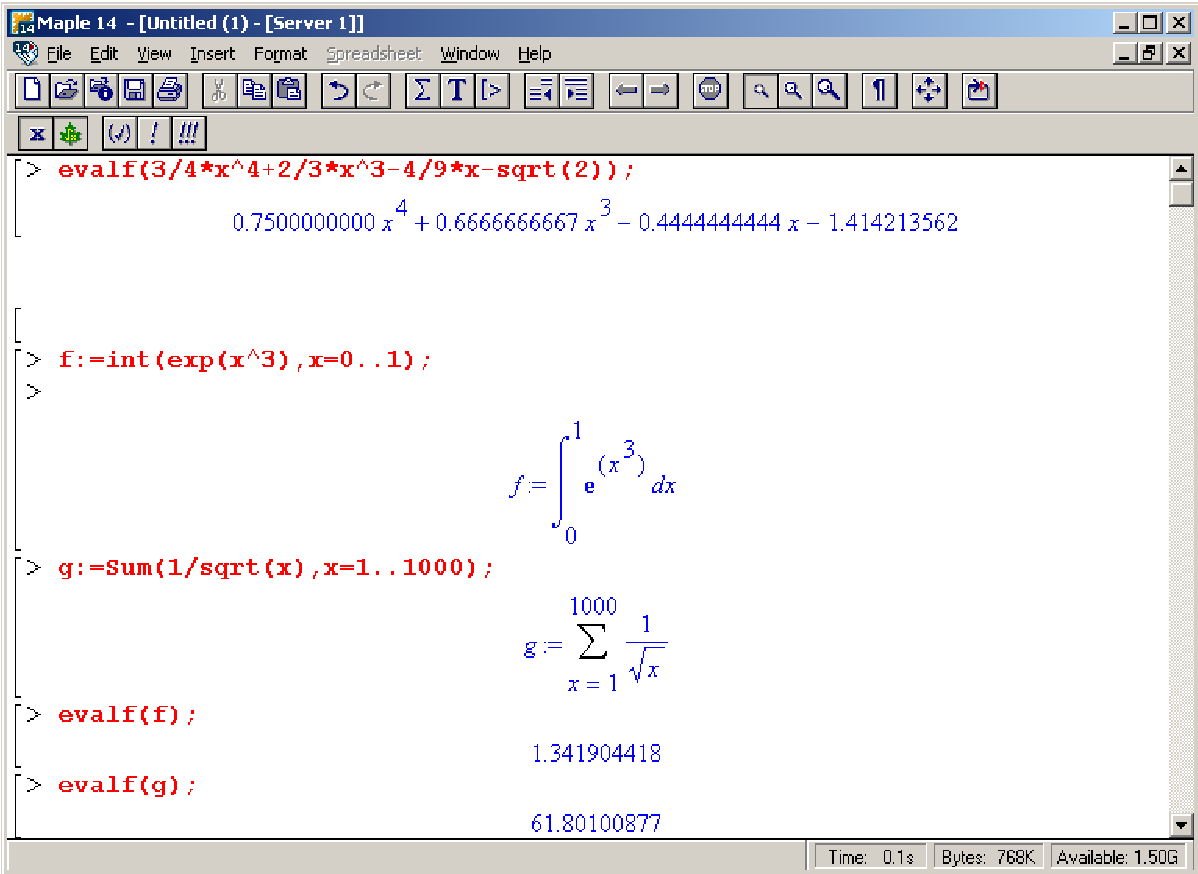
ჩვენ, როგორც წესი ვიყენებთ მძიმის შემდეგ, მხოლოდ რამოდენიმე თანრიგს, მაგრამ ფუნქცია Evalf –ის საშუალებით შეგვიძლია მივიღოთ ამ რიცხვის ძალიან დიდი სიზუსტის მნიშვნელობა. ერთი რამ გვახსოვდეს რიცხვი $\pi$ Maple–ში ჩაიწერება Pi სახით ანუ ასო P არის დიდი, ხოლო ასო i პატარა (იხ. ნახ2.3.)

მეოთხე ჩანაწერში ჩვენ გამოვიანგარიშეთ რიცხვი $\frac{\pi}{12}$ და მძიმის შემდეგ შევინარჩუნეთ 1234 თანრიგი, ამით კიდევ ერთხელ დავადასტურეთ, რომ $\frac{\pi}{12}$ არის უსასრულო არაპერიოდული ათწილადი. ფუნქცია Evalf –ის საშუალებით შეიძლება კომპლექსურ რიცხვებზეც მოქმედება მაგალითად (იხ. ნახ.2.4)




ნახ.2.4

ნახ.2.4–ში წარმოვადგინეთ პირველ შემთხვევაში კომპლექსური რიცხვი, მეორე შემთხვევაში კომპლექსური რიცხვების ჯამი, ხოლო მესამეში ორი კომპლექსური რიცხვის ნამრავლი. ასეთივე წარმატებით შეგვიძლია განვახორციელოთ სხვა ნებისმიერი გამოთვლები კომპლექსურ რიცხვებზე. წარმოვადგინოთ ფუნქცია Evalf –ის კიდევ სხვა შესაძლებლობები (იხ. ნახ 2.5)




ნახ.2.5

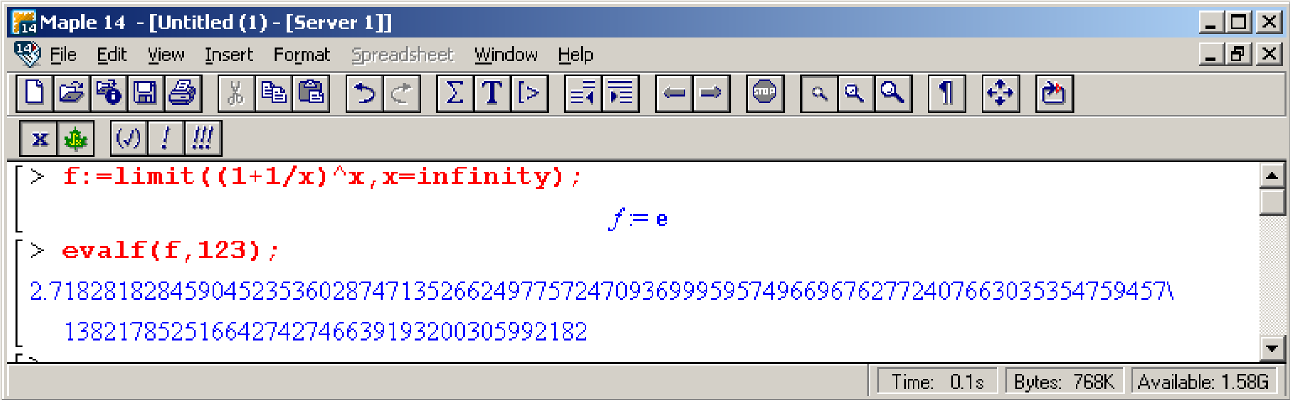
როგორც ნახ.2.5–დან ჩანს პირველ შემთხვევაში ფუნქცია Evalf –ის საშუალებით წარმოვადგინეთ მეოთხე რიგის ალგებრული მრავალწევრი, მეორე შემთხვევაში გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი, ხოლო მესამე შემთხვევაში ჯამის მნიშვნელობა.

## 2.3 ნეპერის რიცხვის ანგარიში

უმაღლესი მათემატიკის კურსიდან ვიცით, რომ ნეპერის რიცხვი ეს არის ერთერთი განსაკუთრებული ზღვრის მნიშვნელობა

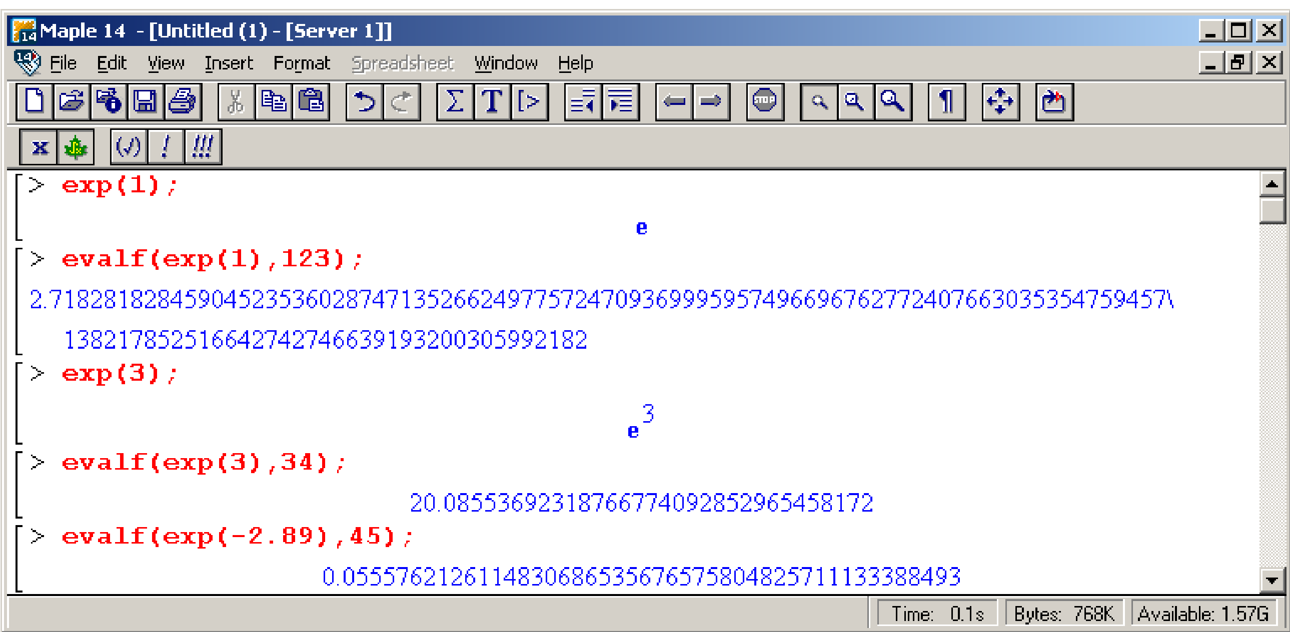
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ ეს რიცხვი აღინიშნება e ასოთი და მისი მნიშვნელობა არის 2,71828... .

პროგრამა Maple-ში ფუნქცია Evalf –ის საშუალებით. შეგვიძლია მივიღოთ ნეპერის რიცხვის დიდი სიზუსტის მნიშვნელობა. მაგალითად (იხ. ნახ 2.6.)




ნახ. 2.6

ნახ.2.6–დან ჩანს, რომ ჯერ ჩვენ მოვახდინეთ ამ განსაკუთრებული ზღვრის მნიშვნელობის გამოთვლა, ხოლო შემდგომ გამოთვლილი ზღვრის მნიშვნელობა მივანიჭეთ ცვლადს f-ს ანუ f- უკვე არის ნეპერის რიცხვი (იგი აგრეთვე უსასრულო არაპერიოდული რიცხვია) მეორე ბრძანებით, კი Evalf –ის საშუალებით გამოვიტანეთ ნეპერის რიცხვის მნიშვნელობა მძიმის შემდგომ 123 თანრიგის მითითებით. ახლა განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი (იხ. ნახ. 2.7)




ნახ. 2.7

ნახ. 2.7– დან ჩანს, რომ პროგრამა Maple-ში პირდაპირ ნეპერის რიცხვის მისათითებლად ვიყენებთ ელემანტარული მათემატიკური ფუნქციის მიმთითებელს exp, ანუ exp(1) ეს არის ნეპერის რიცხვი e , exp(3) ეს არის ფუნქცია $e^3$ და ა.შ. ნახ.2.7–ზე წარმოდგენილია

ნეპერის რიცხვის სხვადასხვა მნიშვნელობები და ფუნქცია Evalf-ის საშუალებით, სხვადასხვა სიზუსტით გამოთვლილი მისი მნიშვნელობები.

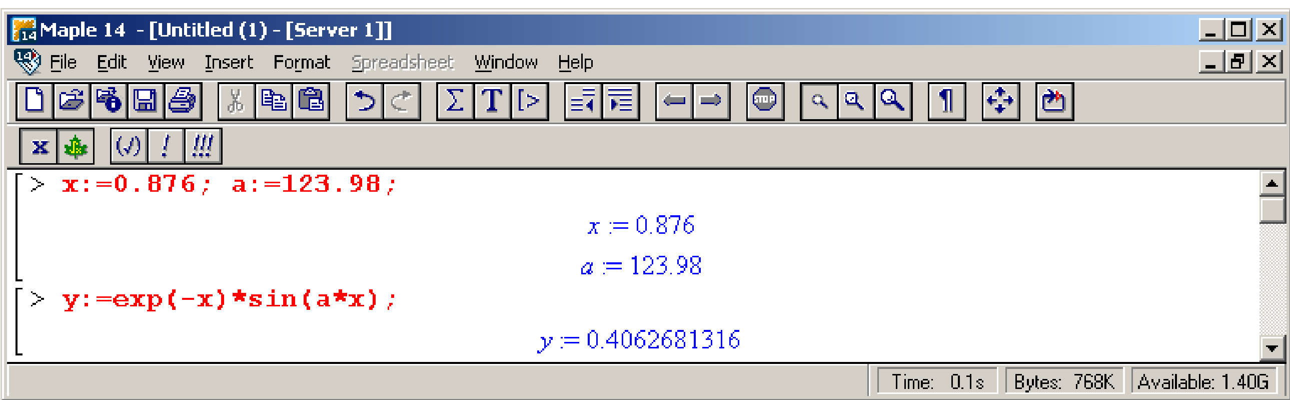
### 2.4. ნეპერის რიცხვის გამოყენება გამოსახულებებში

მათემატიკურ გამოსახულებებში ძალიან ხშირად გვხვდება ნეპერის რიცხვი სხვადსხვა სახით. ზემოთ მიღებული გამოცდილება გამოვიყენოთ ნეპერის რიცხვის შემცველი გამოსახულების Maple-ში გამოთვლის დროს. განვიხილოთ სხვადასხვა მაგალითები:

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ გამოსახულება

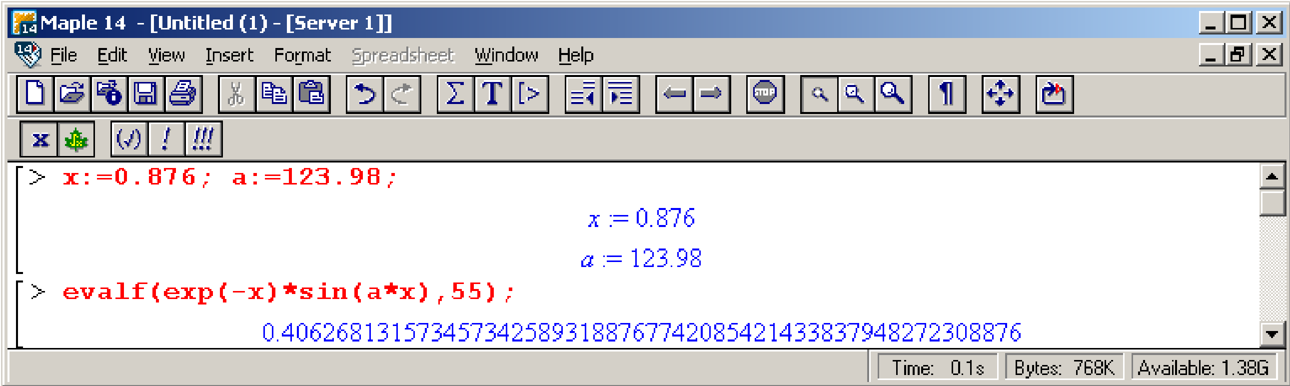
$$y = e^{-x}\sin(ax)$$

თუ x=0,876 და a=123,98 ამ გამოსახულების Maple-ში გამოთვლას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე (ნახ. 2.8)




ნახ.2.8

იგივე გამოსახულების Maple-ში გამოთვლას evalf ფუნქციის გამოყენებით შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე (ნახ. 2.9)

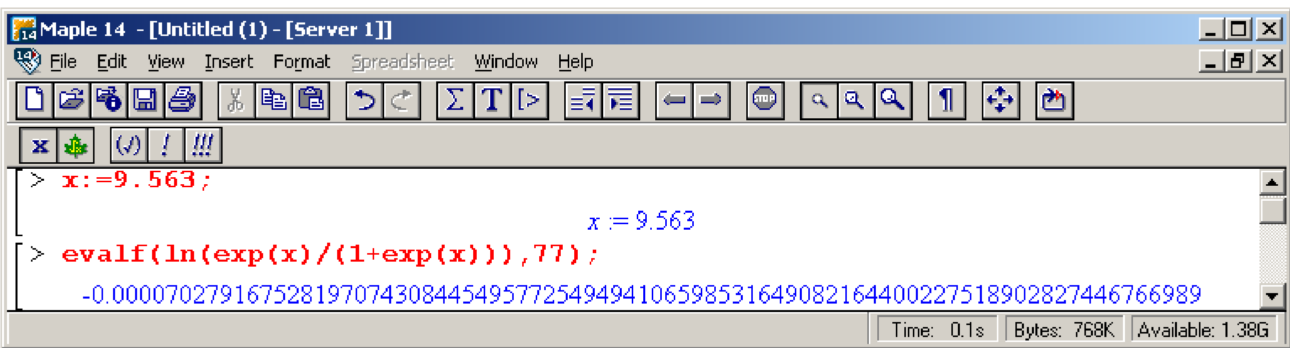



ნახ. 2.9

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ გამოსახულება

$$y = \ln\frac{e^x}{1+e^x}$$

თუ x=9,563 ამ გამოსახულების Maple-ში გამოთვლას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე (ნახ. 2.10):

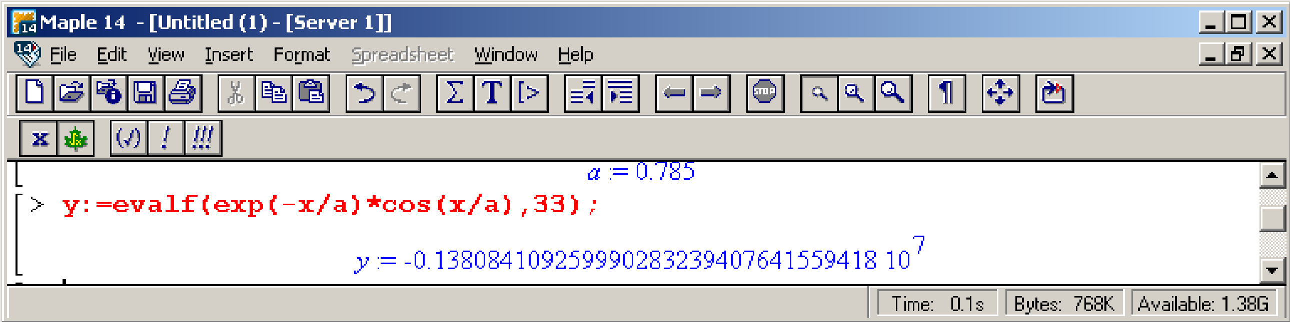



ნახ. 2.10

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ გამოსახულება

$$y = e^{-\frac{x}{a}}\cos\frac{x}{a}$$

თუ x=-11,56 და a=0,785 ამ გამოსახულების Maple-ში გამოთვლას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე (ნახ. 2.11):

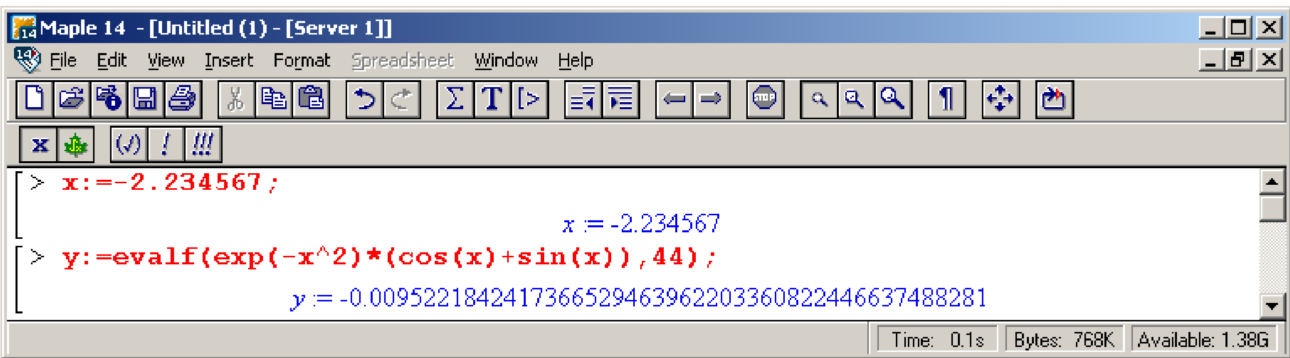



ნახ. 2.11

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ გამოსახულება

$$y = e^{-x^2}(\cos(x) + \sin(x))$$

თუ $x$ =–2,234567 ამ გამოსახულების Maple-ში გამოთვლას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე (ნახ. 2.12):

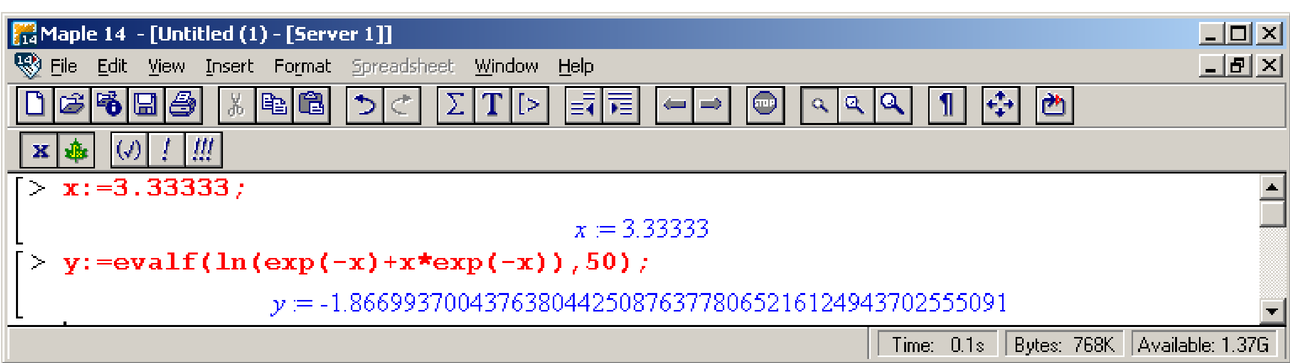



ნახ. 2.12

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ გამოსახულება

$$y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$$

თუ x=–3,33333 ამ გამოსახულების Maple-ში გამოთვლას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე (ნახ. 2.13):

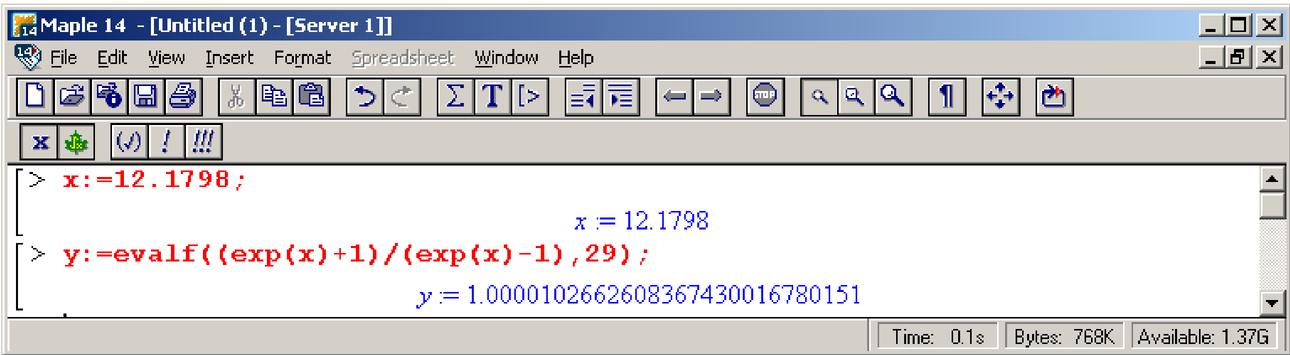



ნახ. 2.13

მაგალითი 6. გამოვთვალოთ გამოსახულება

$$y = \frac{e^{x} + 1}{e^{x} - 1}$$

თუ $x$ =12,1798 ამ გამოსახულების Maple-ში გამოთვლას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე (ნახ.2.14)



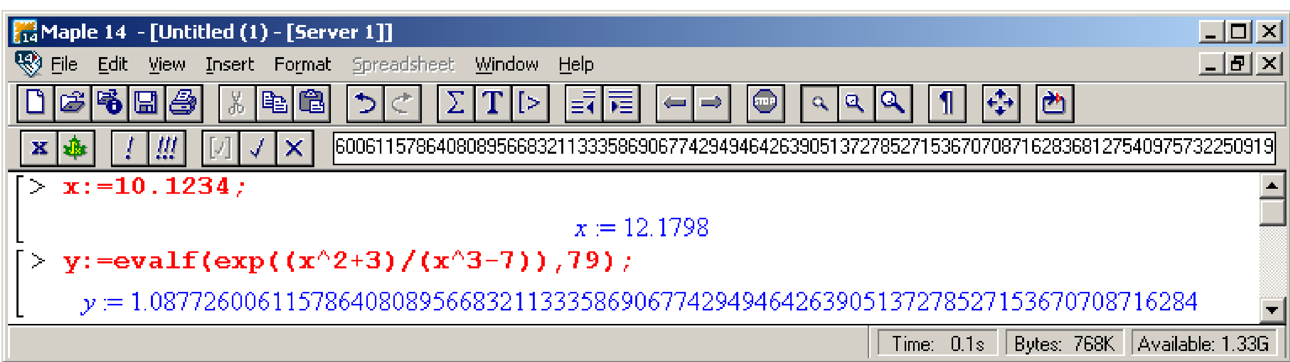

ნახ. 2.14

ამ გამოსახულების Maple-ში გამოთვლას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე (ნახ. 2.14):

მაგალითი 7. გამოვთვალოთ გამოსახულება

$$y = e^{\frac{x^2+3}{x^3-7}} \qquad x = 10{,}1234$$

ამ გამოსახულების Maple-ში გამოთვლას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე (ნახ. 2.15):

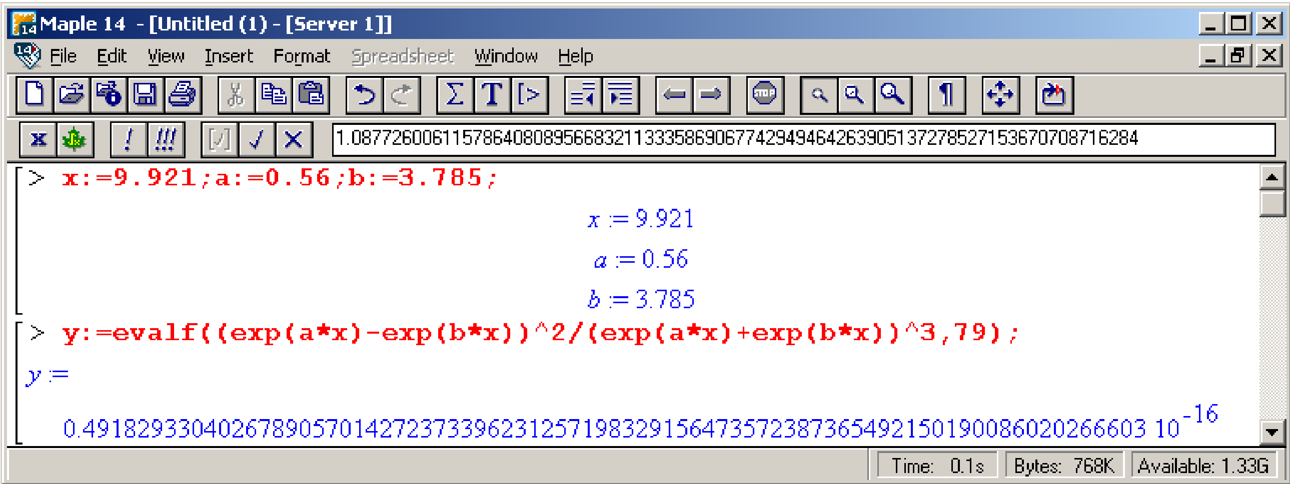



ნახ. 2.15

მაგალითი 8. გამოვთვალოთ გამოსახულება

$$y = \frac{(e^{ax} - e^{bx})^2}{(e^{ax} + e^{bx})^3} \quad x = 9{,}921\,,\, a = 0{,}56\,,\, \mathrm{b} = 3{,}785$$

ამ გამოსახულების Maple-ში გამოთვლას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე (ნახ. 2.16):

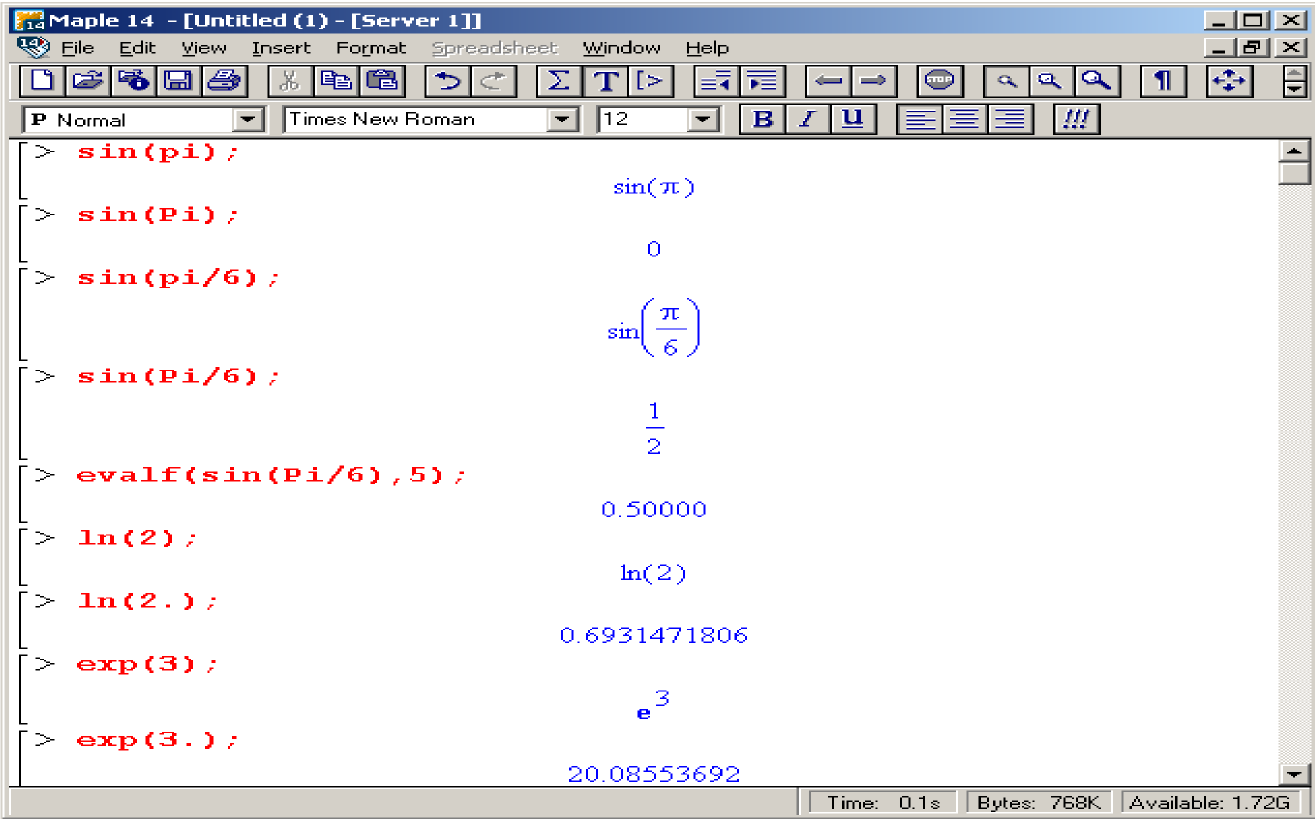



ნახ. 2.16

# თავი 3. რთული გამოთვლები Maple-ში.

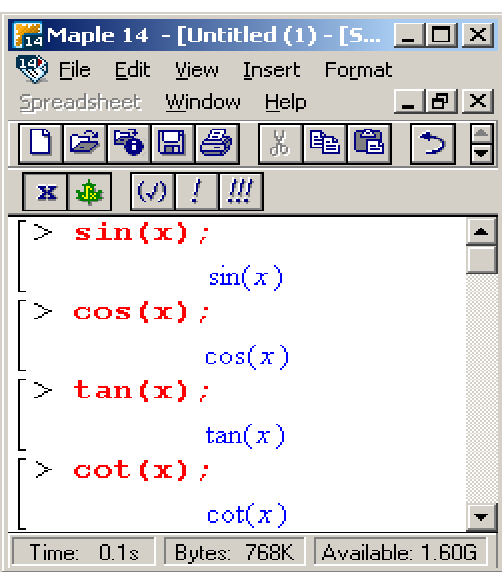
## 3.1 ელემენტარული მათემატიკური ფუნქციების გამოთვლა Maple-ში.

ელემენტარული მათემატიკური ფუნქციები Maple-ში შეგვიძლია გამოვიყვანოთ, როგორც ფუნქციის ასევე, გამოთვლილი ( რიცხვითი ) მნიშვნელობების სახით. მაგალითად გვინდა გამოვთვალოთ $\sin(\pi), \sin(\frac{\pi}{6}), \ln(2), \ell^3$ ფუნქციათა მნიშვნელობები. Maple-ში მათი მნიშვნელობების გამოთვლა შეიძლება შემდეგნაირად ( ნახ. 3.1) , როგორც Maple-ის პროგრამული ფანჯრიდან ჩანს ფუნქცია „სინუსი“ თუ მას არგუმენტად აქვს „პი“ რიცხვი დაწყებული პატარა ლათინური ასოთი p ანუ (pi) , ამ ფუნქციას იგი წარმოდგენს სიმბოლური სახით $\sin(\pi)$ ხოლო თუ, „პი“ რიცხვი დაწყებული დიდი ლათინური ასოთი მაშინ P ანუ (Pi), მაშინ , შედეგად მიიღება რიცხვი 0, რადგან $\sin(\pi)=0$. ასევეა ნატურალური ლოგარითმისა და ნეპერის რიცხვის გამოთვლის დროსაც.

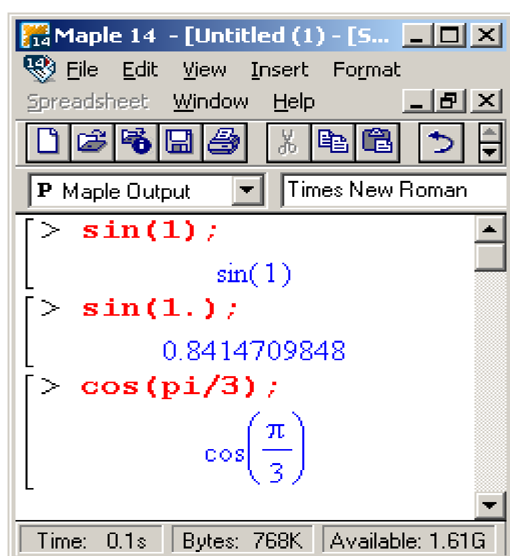



ნახ. 3.1

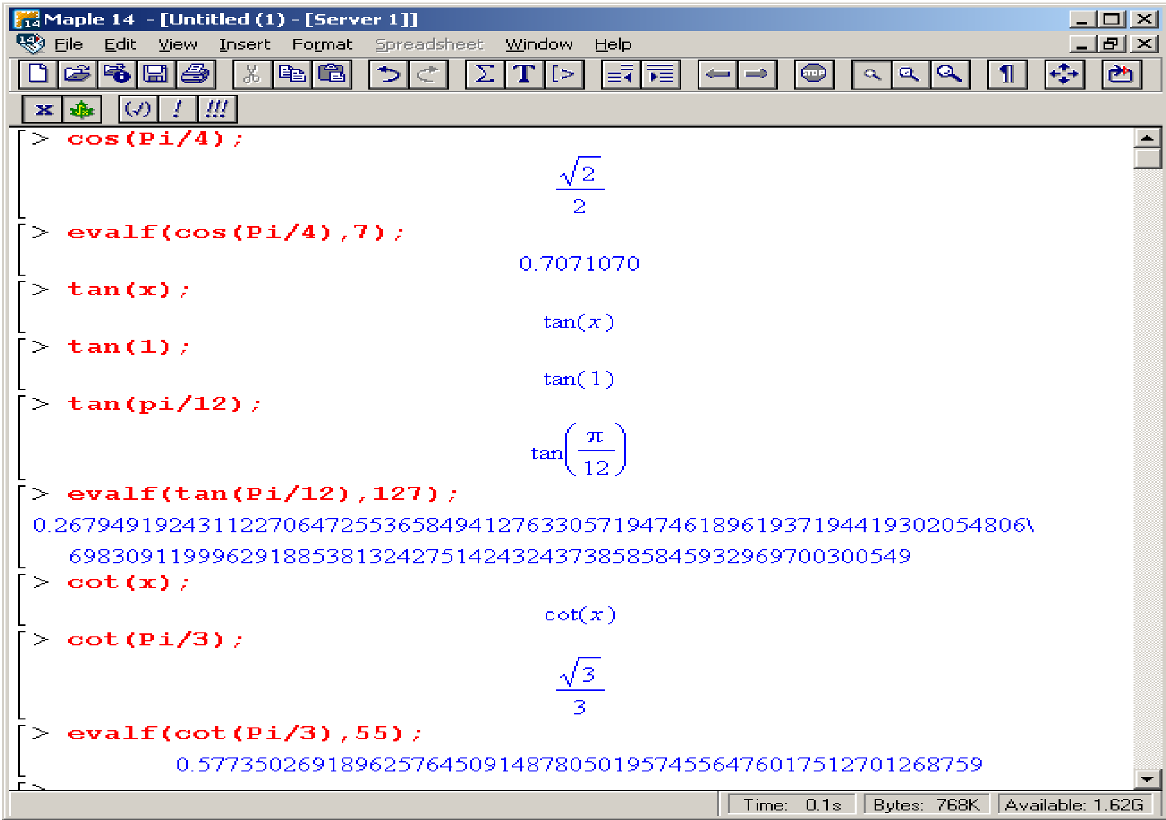
ჩვეულებრივი (არაჰიპერბოლური) ტრიგონომეტრიული ფუნქციები, როგორც უკვე ვთქვით Maple-ში შეგვიძლია გამოვიყვანოთ, როგორც ფუნქციის ასევე, გამოთვლილი ( რიცხვითი ) მნიშვნელობების სახითაც. (ნახ. 3.2, 3.3, 3.4)




ნახ 3.2




ნახ. 3.3




ნახ. 3.4

ახლა განვიხილოთ ზოგიერთი მთელრიცხვა ფუნქციები (იხილეთ ნახ.3.5) ეს ფუნქციებია

`factorial(n)`, n! – n რიცხვის ფაქტორიალი;

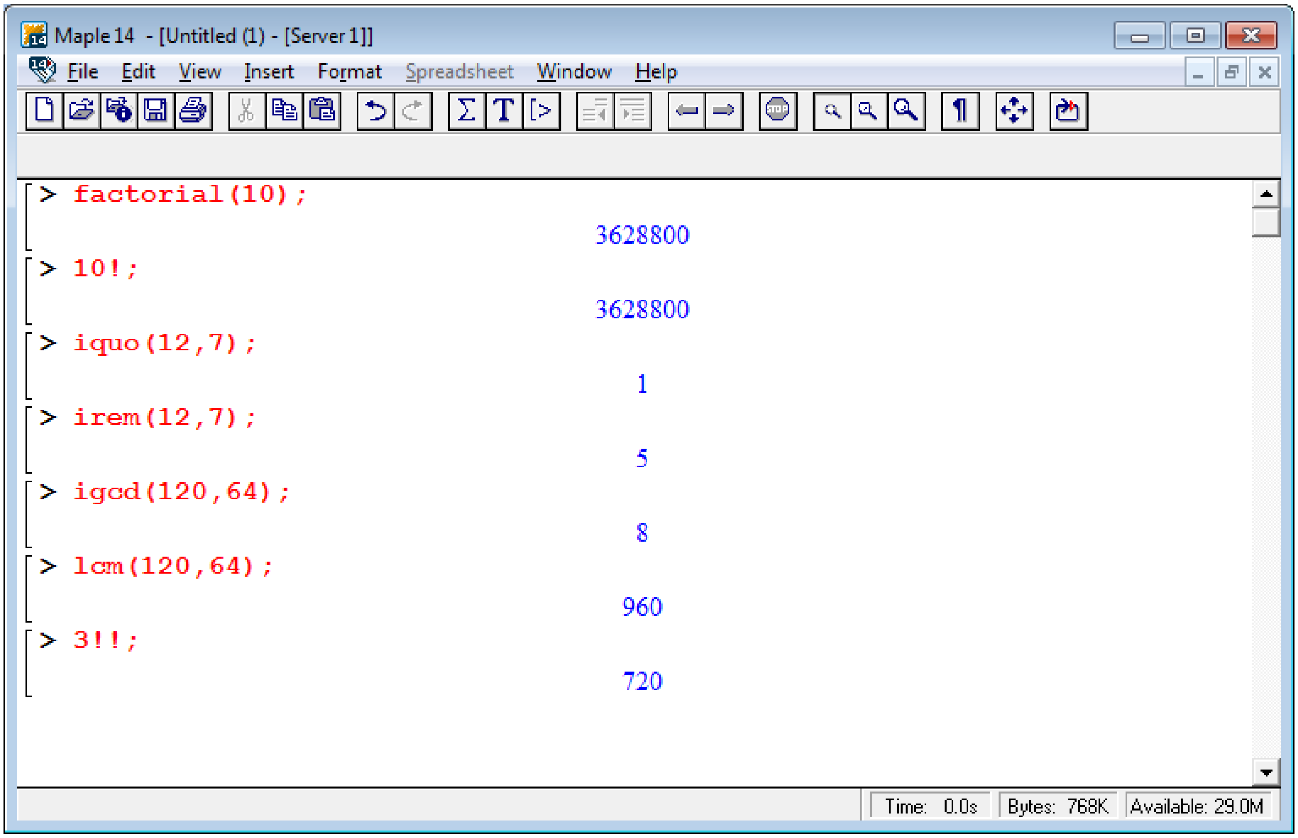
`iquo(a,b)` – `a/b` გაყოფის მთელი;

`irem(a,b)` – `a/b` გაყოფის ნაშთი;

`igcd(m,n)` – m და n რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი;

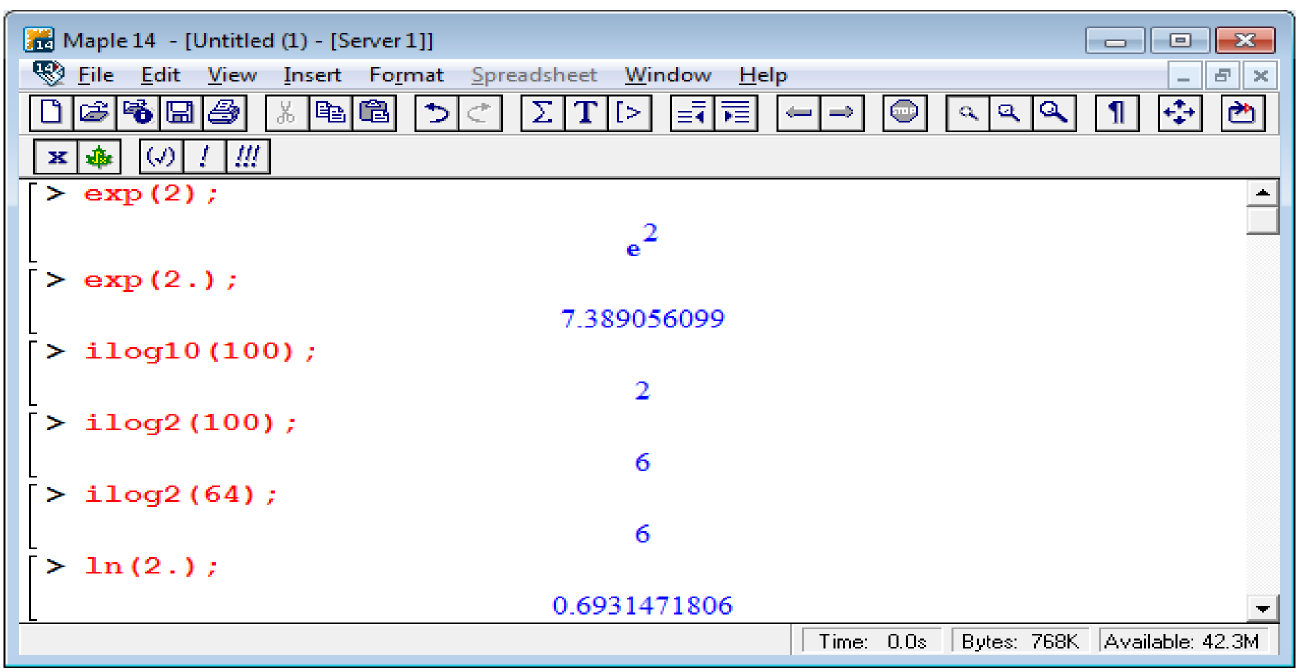
`lcm(m,n)` – m და n რიცხვების უცირესი საერთო ჯერადი;

n!! – n-ის ფაქტორიალის ფაქტორიალი.

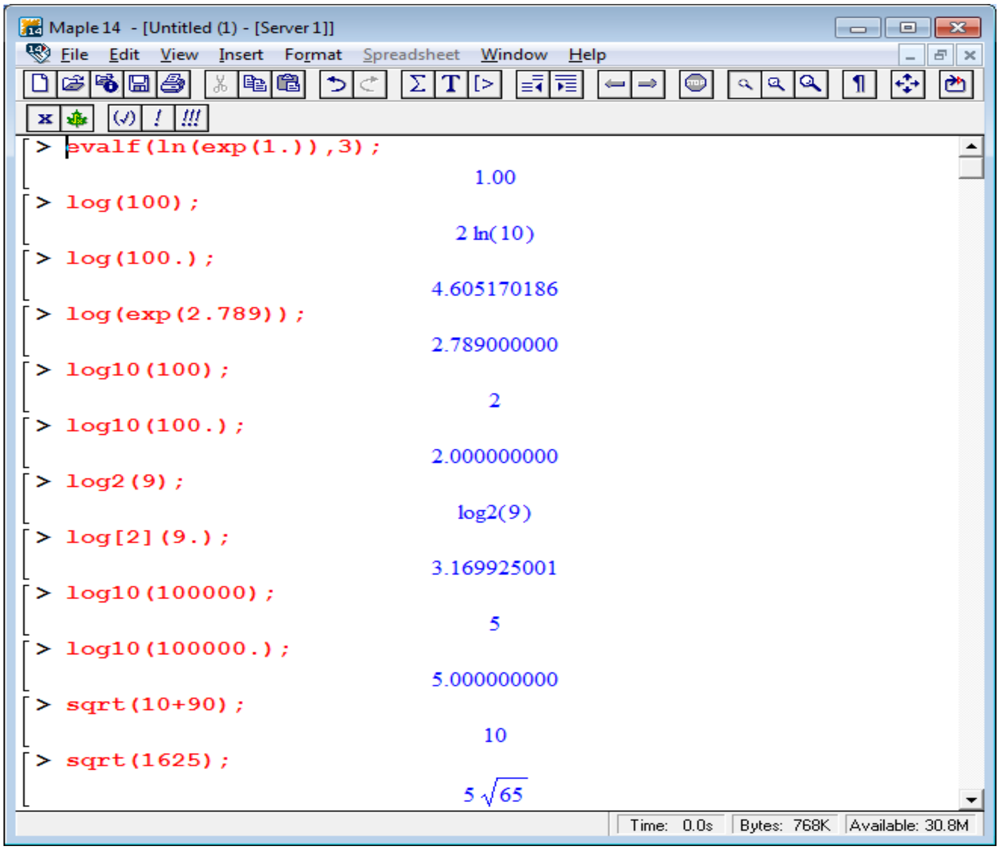



ნახ. 3.5

ახლა განვიხილოთ ალგებრული ფუნქციები (იხ. ნახ.3.6.ა და ნახ. 3.6.ბ)



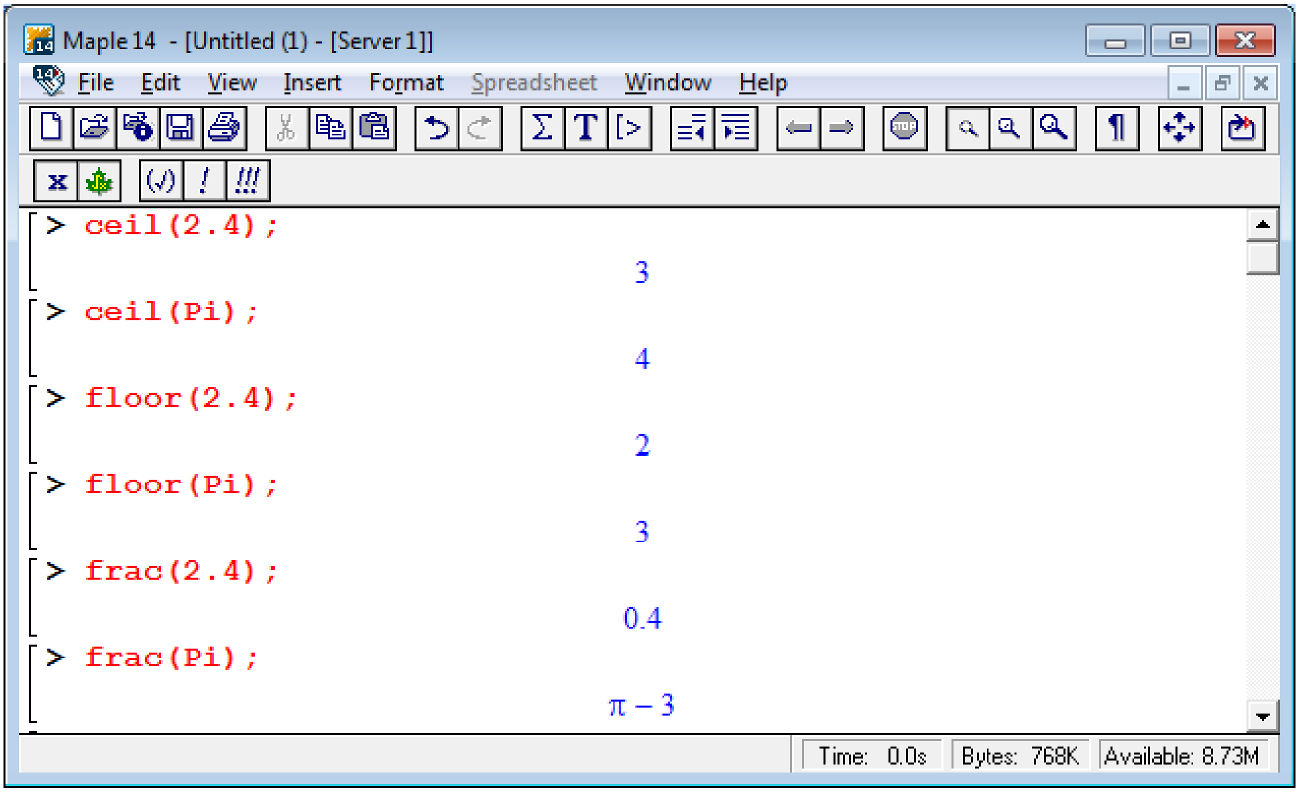

ნახ. 3.6.ა



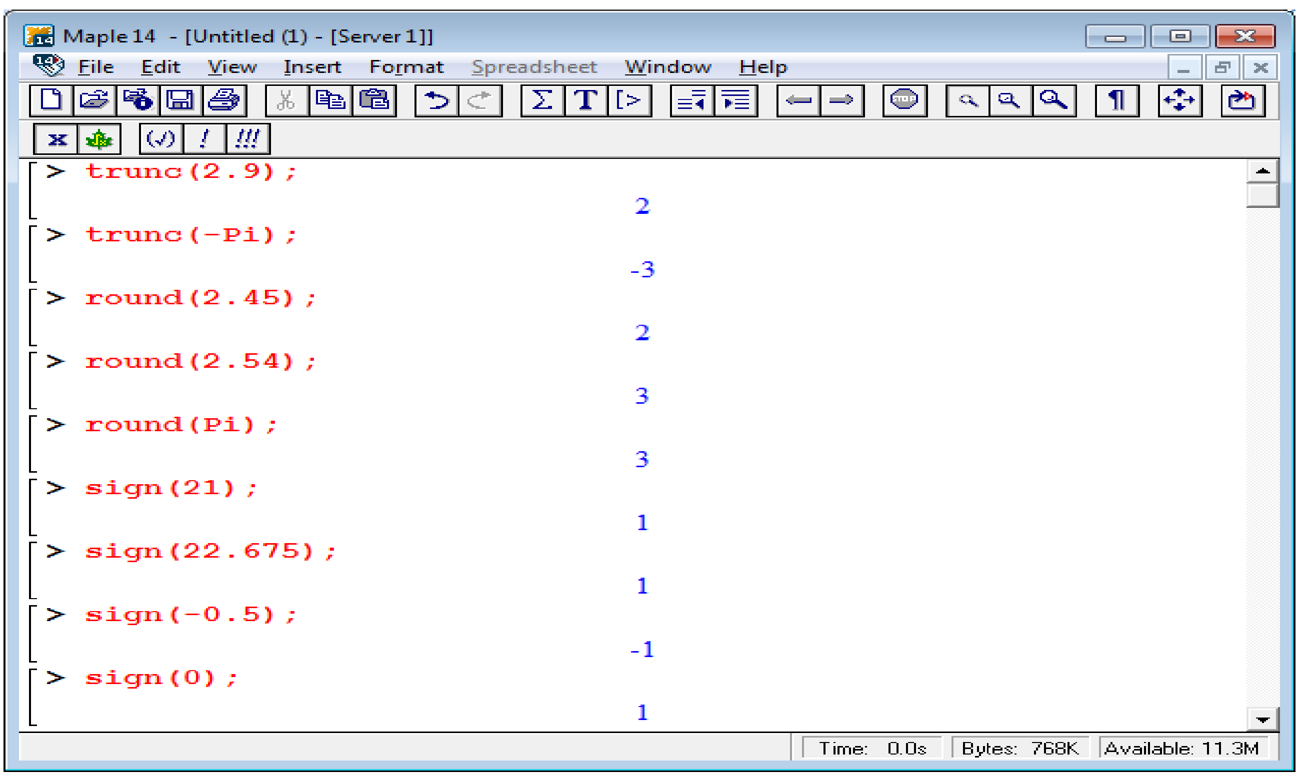

ნახ. 3.6.ბ

## 3.2. ფუნქციები შედარების ელემენტებით

ახლა განვიხილოთ ფუნქციები შედარების ელემენტებით, განვიხილოთ პირდაპირ მაგალითები (იხილეთ ნახ. 3.7.ა და ნახ. 3.7.ბ ) აქ არის განხილული შემდეგი ფუნქციები: უახლოესი მთელი მეტობით (ciel), უახლოესი მთელი ნაკლებობით(floor), რიცხვის წილადი ნაწილი (frac), დამრგვალება ნაკლებობით (trunc), ჩვეულებრივი დამრგვალება (round), რიცხვის ნიშანი (sign).

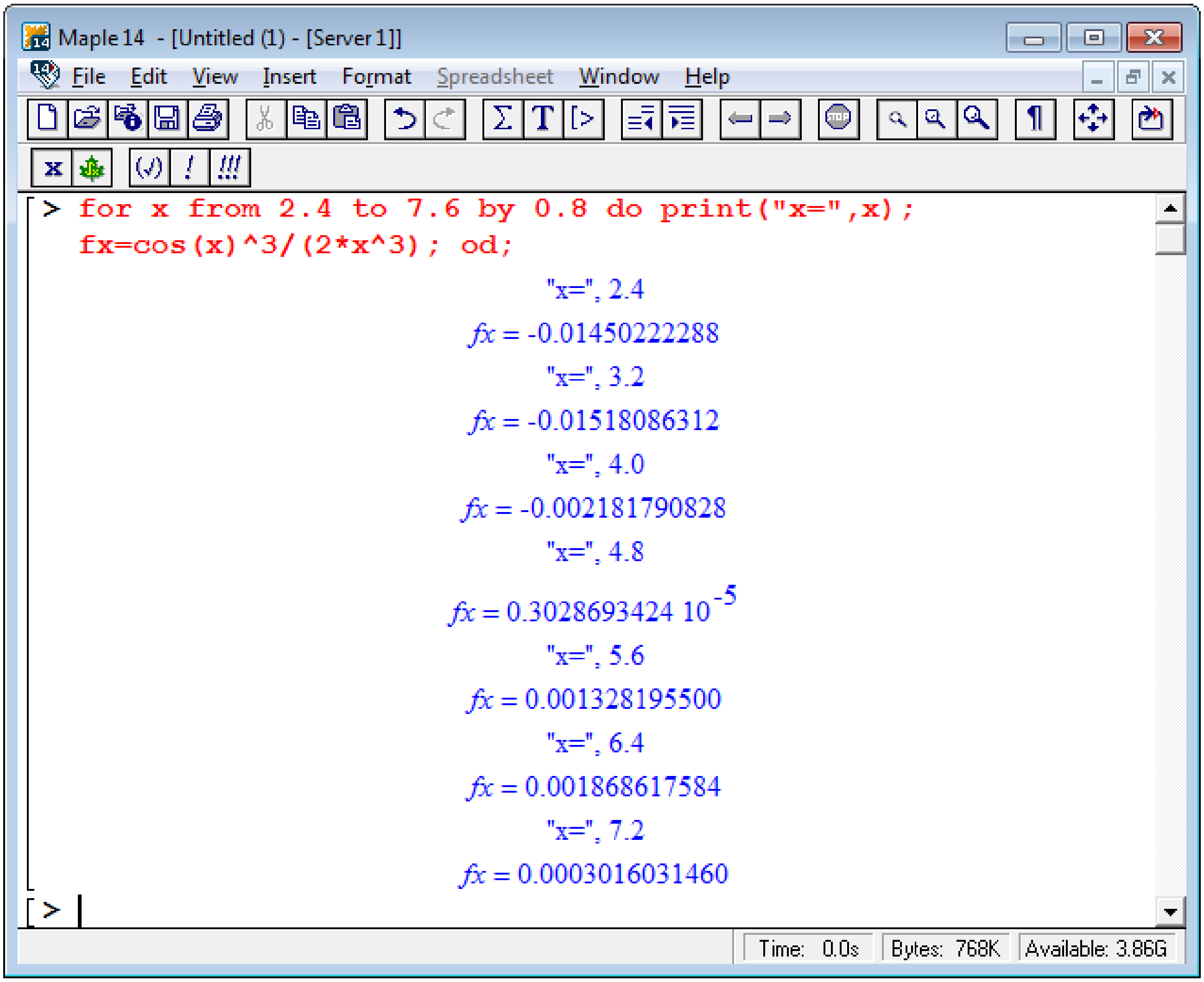



ნახ. 3.7.ა



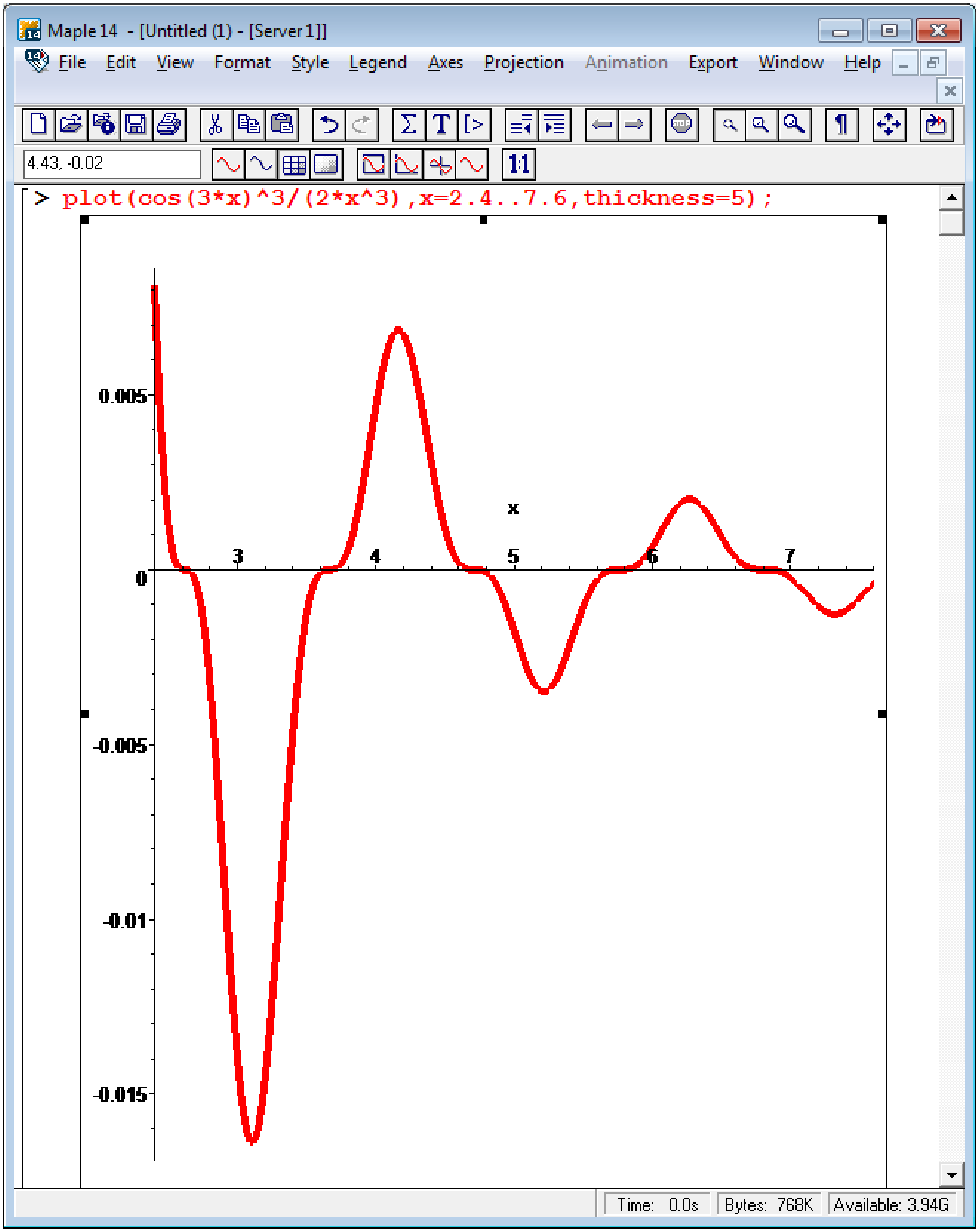

ნახ. 3.7.ბ

ახლა მოვახდინოთ მოცემულ შუალედზე რთული მათემატიკური ფუნქციის დატაბულება და გრაფიკის აგება (იხილეთ ნახ. 3.8 და ნახ.3.9) ვთქვათ გვინდა დავატაბულოთ ფუნქცია $\frac{\cos^3 x}{2x^3}$ [2.4 ; 7.6] შუალედზე ბიჯით 0.8 და გამოვბეჭდოთ მისი ყველა შვიდივე მნიშვნელობა.




ნახ. 3.8

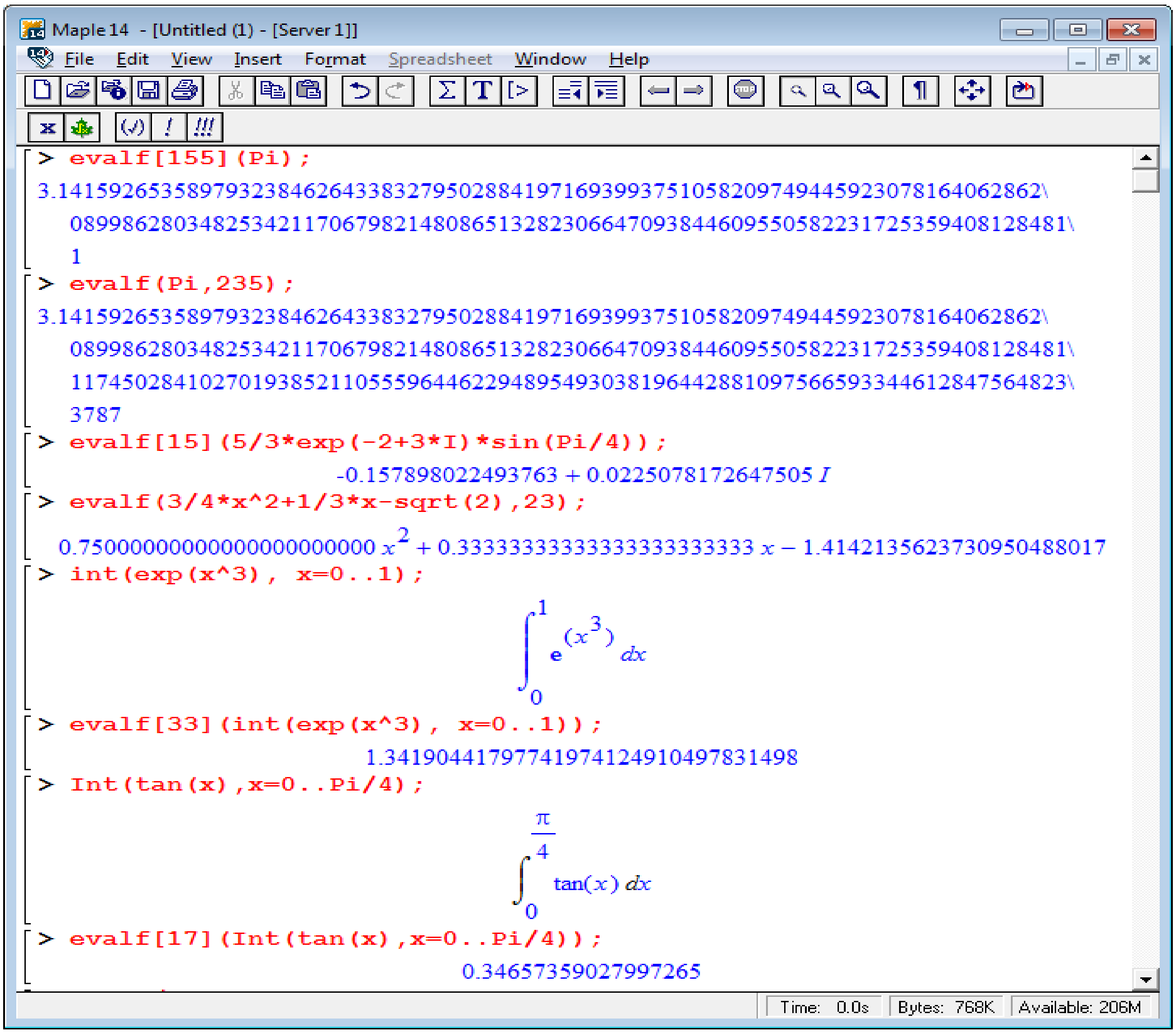
ნახ-ზე 3.9 მოცემულია ამ ფუნქციის გრაფიკი.



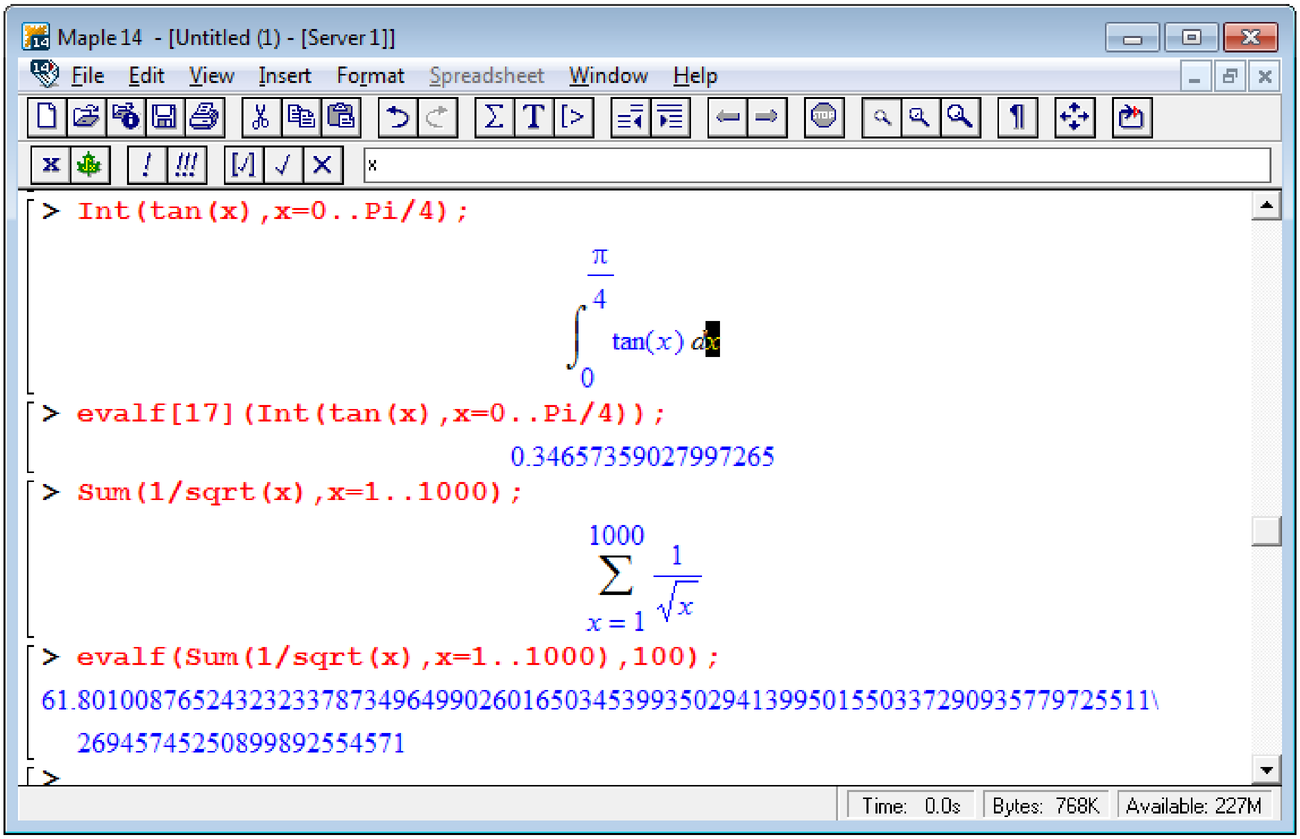
Maple 14 - [Untitled (1) - [Server 1]]
File Edit View Format Style Legend Axes Projection Animation Export Window Help
4.43, -0.02
> plot(cos(3*x)^3/(2*x^3),x=2.4..7.6,thickness=5);
0.005
0
-0.005
-0.01
-0.015
3
4
5
6
7
x
Time: 0.0s
Bytes: 768K
Available: 3.94G


ნახ. 3.9

რთული მათემატიკური გამოთვლების დროს სიზუსტის განსაზღვრას დიდი მნიშვნელობა აქვს. ამისათვის პროგრამა Maple-ში  გათვალისწინებულია მრავალი ეფექტური საშუალება. ამ საშუალებებს შორის განსაკუთრებული ადგილი შეიძლება მივაკუთვნოთ ისეთ მნიშვნელოვან ფუნქციას, როგორიც არის ფუნქცია  Evalf ეს ფუნქცია ჩვენ უკვე არაერთგზის გამოვიყენეთ და ამჯერად შევისწავლოთ დაწვრილებით. ნახ. 3.10(ა,ბ) მოცემულია Evalf ფუნქციის საშუალებით  სხვადსხვა გამოთვლებში სიზუსტის დადგენის მაგალითები.




ნახ.3.10.ა


Maple 14 - [Untitled (1) - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
> Int(tan(x),x=0..Pi/4);
> evalf[17](Int(tan(x),x=0..Pi/4));
0.34657359027997265
> Sum(1/sqrt(x),x=1..1000);
> evalf(Sum(1/sqrt(x),x=1..1000),100);
61.80100876524323233787349649902601650345399350294139950155033729093577972551\
26945745250899892554571
Time: 0.0s
Bytes: 768K
Available: 227M

ნახ.3.10.ბ

# თავი4.წრფივი ალგებრა I Maple –ში

## 4.1 მატრიცების შეტანის სხვადსხვა ხერხები Maple –ში

რიცხვთა ერთობლიობას, ჩაწერილს მართკუთხა ცხრილის სახით, **მატრიცა** ეწოდება. ამ ცხრილში შემავალ რიცხვებს **მატრიცის ელემენტები** ეწოდება. მატრიცის ელემენტებს მივუწერთ ორ ინდექსს. პირველი ინდეხსი მიუთითებს იმ სტრიქონის ნომერს, რომელსაც მიეკუთვნება ეს ელემენტი, ხოლო მეორე ინდექსი კი მიუთითებს ამავე ელემენტის სვეტის ნომერს. თუ მატრიცაში m სტრიქონი და n სვეტია , მაშინ მას m x n რიგის მატრიცა ეწოდება. ამ მატრიცაში არის m * n ელემენტი. მაგალითად:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (4.1)$$

(4.1) მართკუთხოვან ცხრილში მოცემულია m x n რიგის მატრიცა **A.** იგი შესდგება m * n ელემენტისგან. აქ $a_{ij}$ აღნიშნავს **A** მატრიცის იმ ელემენტს რომელიც მოთავსებულია i – ური სტრიქონისა და j – ური სვეტის გადაკვეთაზე. თუ **A** მატრიცის სტრიქონებს ჩავწერთ სვეტებად ხოლო სვეტებს სტრიქონებად, მაშინ მივიღებთ **A** მატრიცის **ტრანსპონირებულ მატრიცას** , რომელსაც ავღნიშნავთ $A^T$ სახით. მაშასადამე $A^T$ ექნება (4.2) სახე

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & .. & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & .. & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (4.2)$$

$A^T$ მატრიცის რიგიც იქნება იგივე რაც **A** მატრიცისა ანუ.

მაგალითად თუ

$$A= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$ მაშინ $A^T$ მატრიცას ექნება შემდეგი სახე: $$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 9 \\ 6 & 11 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

თუ $m \neq n$ მაშინ მატრიცას ეწოდება მართკუთხოვანი, ხოლო თუ $m = n$ მაშინ მატრიცას ეწოდება კვადრატული. n x n რიგის კვადრატულ მატრიცას ექნება სახე 4.3

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (4.3)$$

პროგრამა Maple –ში მატრიცების შესატანად (მატრიცების ელემენტებისათვის მნიშვნელობების მინიჭება) ძირითადად გამოიყენება ორი ოპერატორი ესენია, ოპერატორი

**array**და ოპერტორი **matrix** Maple გვაძლევს საშუალებას მატრიცის ელემენტებად გამოვიყენოთ რიცხვების მაგივრად ცვლადები რაც ძალიან მოსახერხებელია მატრიცებზე მოქმედებების ფორმულების გამოსაყვანად ამას ყველაფერს ვნახავთ ქვემოთ. მოვიყვანოთ ამ ოპერატორების სინტაქსი:

1. ოპერატორი **array** მას აქვს შემდეგი სინტაქსი:

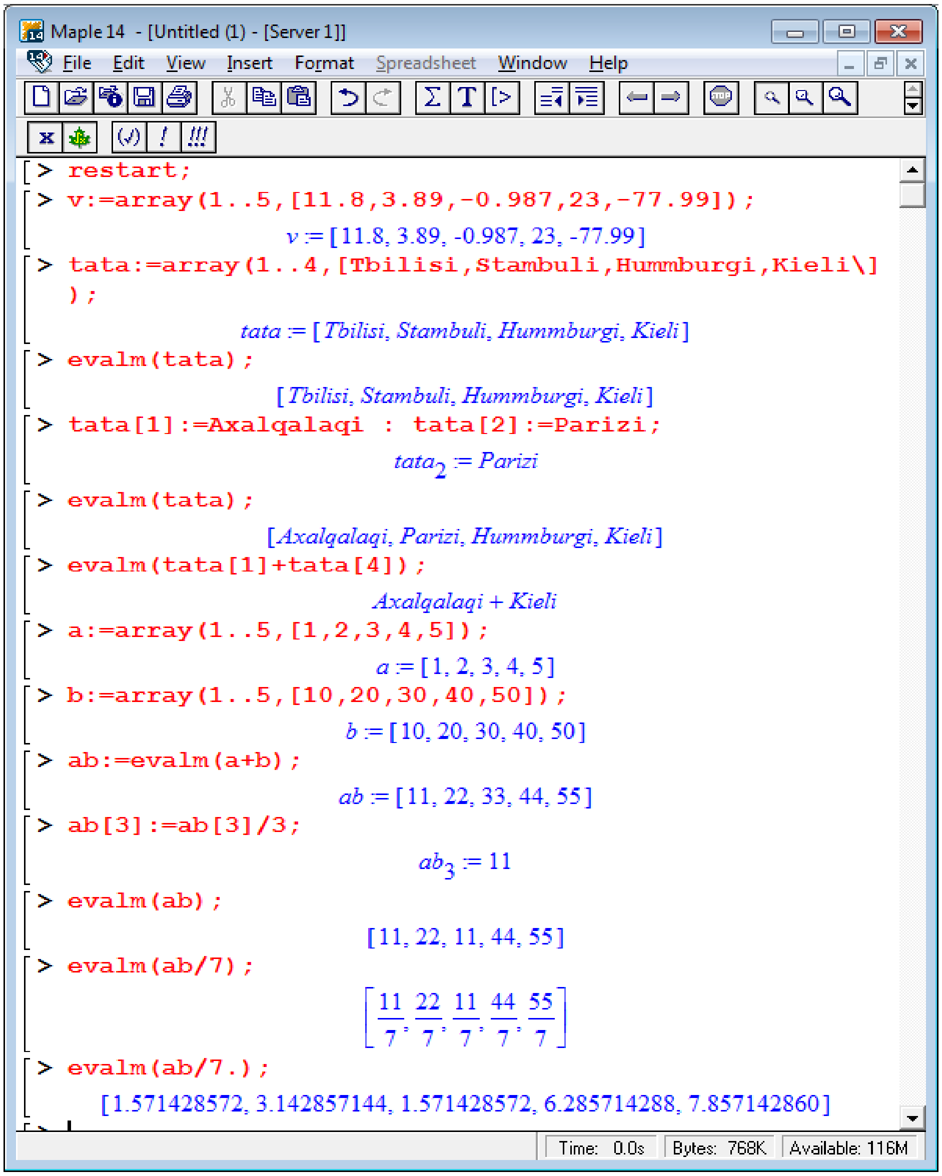
**>**მ.ს:=**array**(სტრიქონი,სვეტი,[[მ.სტ1],[მ.სტ2],...,[მ.ბ.სტ]]); **Enter**

სადაც მ.ს – მატრიცის სახელი, მ.სტ– მატრიცის სტრიქონი, მ.ბ.სტ – მატრიცის ბოლო სტრიქონი.

ოპერატორი **matrix** მას აქვს შემდეგი სინტაქსი:

**>**მ.ს:= **matrix** (სტრიქონი,სვეტი,[მ.პ.ე,...,მ.ბ.ე]); **Enter**

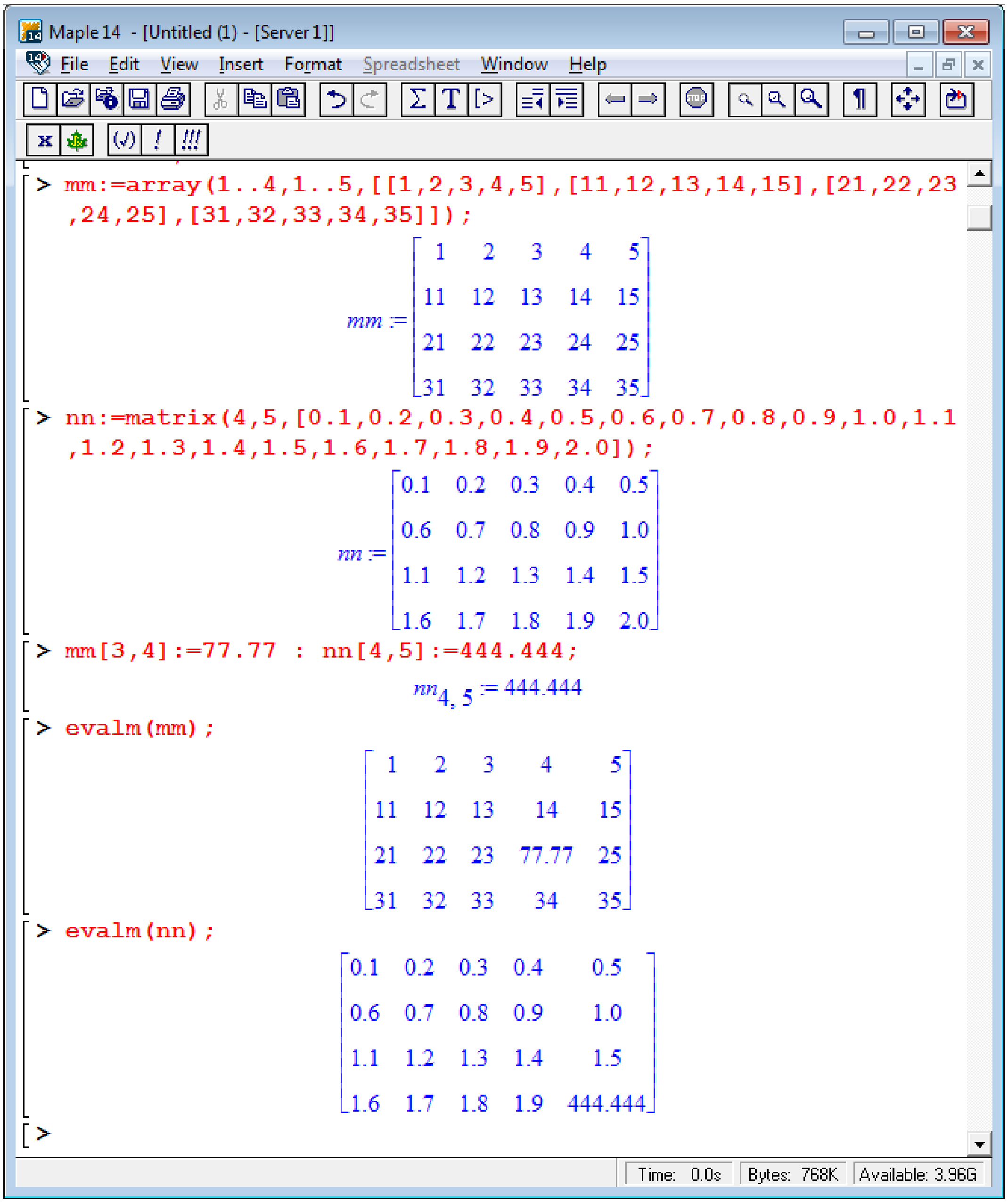
სადაც მ.ს – მატრიცის სახელი, მ.პ.ე– მატრიცის მატრიცის პირველი ელემენტი(რომელიც მოცემულია მატრიცის სულ ზედა მარცხენა კუთხეში), მ.ბ.სტ – მატრიცის ბოლო ელემენტი(რომელიც მოცემულია მატრიცის სულ ქვედა მარცხენა კუთხეში). ახლა განვიხილოთ ამ ოპერატორების მოქმედება უკვე კონკრეტულ მაგალითებზე:




ნახ.4.1

ნახ.4.1 ნაჩვენებია ერთგანზომილებიანი რიცხვითი და სიმბოლური ვექტორების შეტანა და მათზე სხვადასხვა მოქმედებები. ახლა განვიხილოთ მაგალითები მატრიცებზე სხვაგვარად (კომპიუტერული ტერმინოლოგიით) მას ორგანზომილებიანი მასივი ეწოდება.

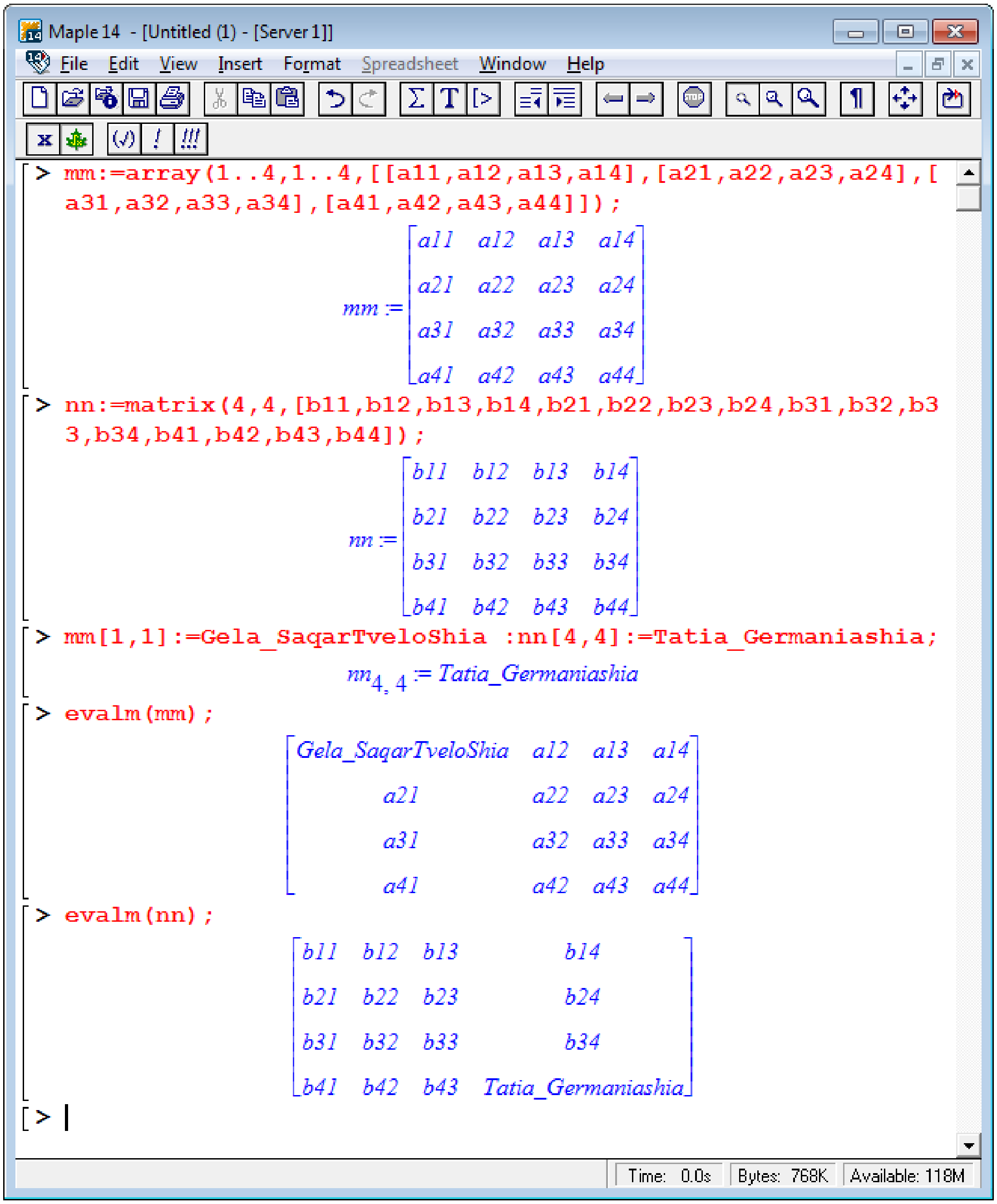
ახლა განვიხილოთ მატრიცების მონაცემებით შევსების პროცედურა( იხილე ნახ.4.2)




ნახ.4.2

ნახ. 4.2–ზე მოცემული იყო მართკუთხოვანი მატრიცების რიცხვებით შევსების მაგალითები. ანალოგიურადვე განხორციელდება კვადრატული და ნებისმიერი სხვა ტიპის მატრიცების მონაცემებით შევსების ოპერაციები.

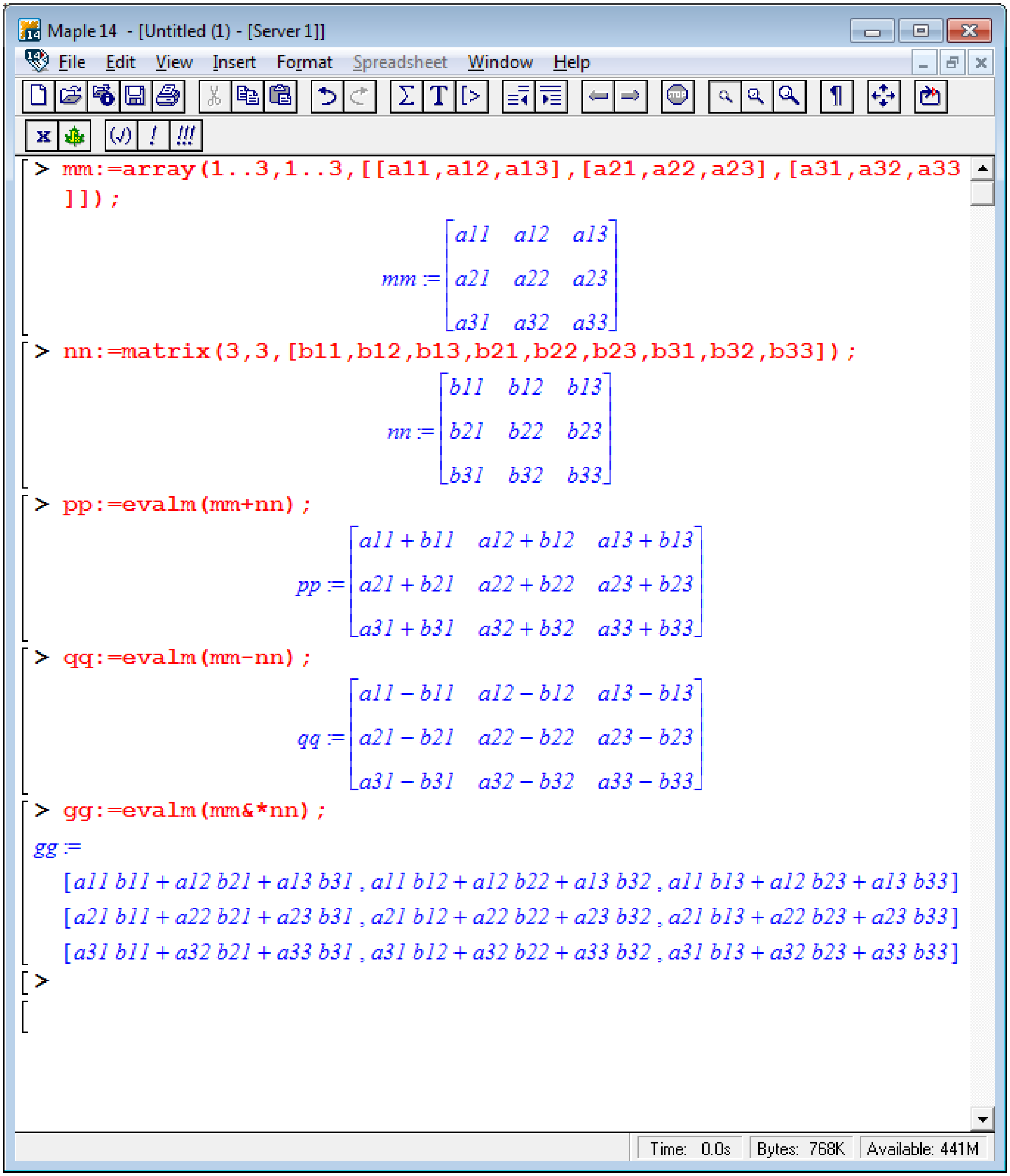
ახლა განვიხილოთ სიმბოლურ მატრიცებთან მუშაობის მაგალითები (იხ. ნახ.4.3 )




ნახ. 4.3

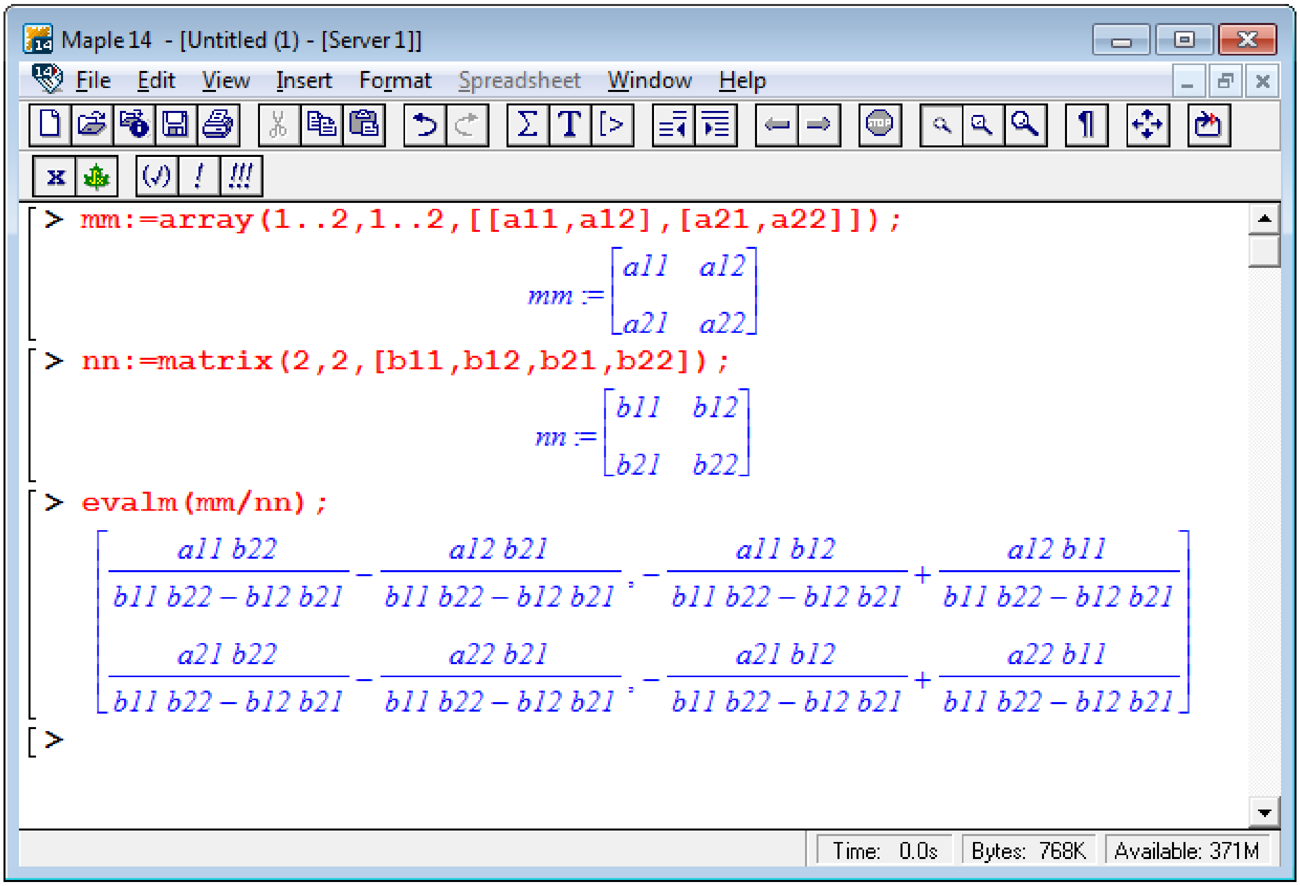
როგორც უკვე ვთქვით მატრიცაში სიმბოლური ელემენტების ჩასმის შესაძლებლობა გვეხმარება მატრიცებზე მოქმედებების ფორმალიზებულ წარმოდგენაში.განვიხილოთ მაგალითი კვადრატულ 3x3 რიგის სიმბოლურელემენტიანი მატრიცების მაგალითზე:

აქ მოცემულია მატრიცების შეკრების გამოკლებისა და გამრავლების მაგალითები ფორმალიზებული წარმოდგენით (იხ. ნახ. 4.4)




ნახ.4.4

ნახ.4.5 წარმოდგენილია მატრიცათა გაყოფის ფორმალიზებული გამოსახულება;




ნახ.4.5

გაყოფის დროს ავიღეთ 2x2 რიგის მატრიცები იმიტომ, რომ 3x3 რიგის მატრიცების გაყოფისას მიიღება იმდენად დიდი ფორმულა, რომ მისი გამოტანა პროგრამა Word–ის გვერდზე ძალიან მოუხერხებელია.

## 4.2 ელემენტარული მოქმედებები მატრიცებზე Maple –ში

მატრიცებზე მოქმედებისას ზოგჯერ საჭიროა მატრიცებზე მთლიანად ან მატრიცების ცალკეულ სვეტებსა და სტრიქონებზე სხვადსხვა მოქმედებების განხორციელება მაგალითად მატრიცა ან მისი რომელიმე სტრიქონი, ან სვეტი გვინდა გავამრავლოთ ან გავყოთ რაიმე რიცხვზე ან სხვადასხვანაირი გარდაქმნები განვახორციელოთ მათზე. პროგრამა **Maple** –ში მოცემულია ამ მოქმედებათა ფართე სპექტრი. განვიხილოთ სხვადასხვა მაგალითებზე ამ მოქმედებათა შესაძლებლობები. ვთქვათ მოცემული გვაქვს მატრიცა (ნებისმიერი კვადრატულიც და არაკვადრატულიც) და გვინდა ამ მატრიცის ყველა ელემენტის გაყოფა ან გამრავლება რაიმე მოცემულ რიცხვზე, მაგალითად გავყოთ **α** –ზე და გავამრავლოთ **β**–ზე. განვახორციელოთ ეს მოქმედებები პროგრამა **Maple** –ის საშუალებით. ვთქვათ მოცემული გვაქვს მატრიცები **A** და **B.**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$(4.4)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

შევიტანოთ A და B მატრიცები ოპერატორი Array–ს საშუალებით, როგორც ზემოთ მოცემულ მაგალითებში განვახორციელეთ. **Maple** –ში ამ მოქმედებებს ექნებათ შემდეგი სახე:

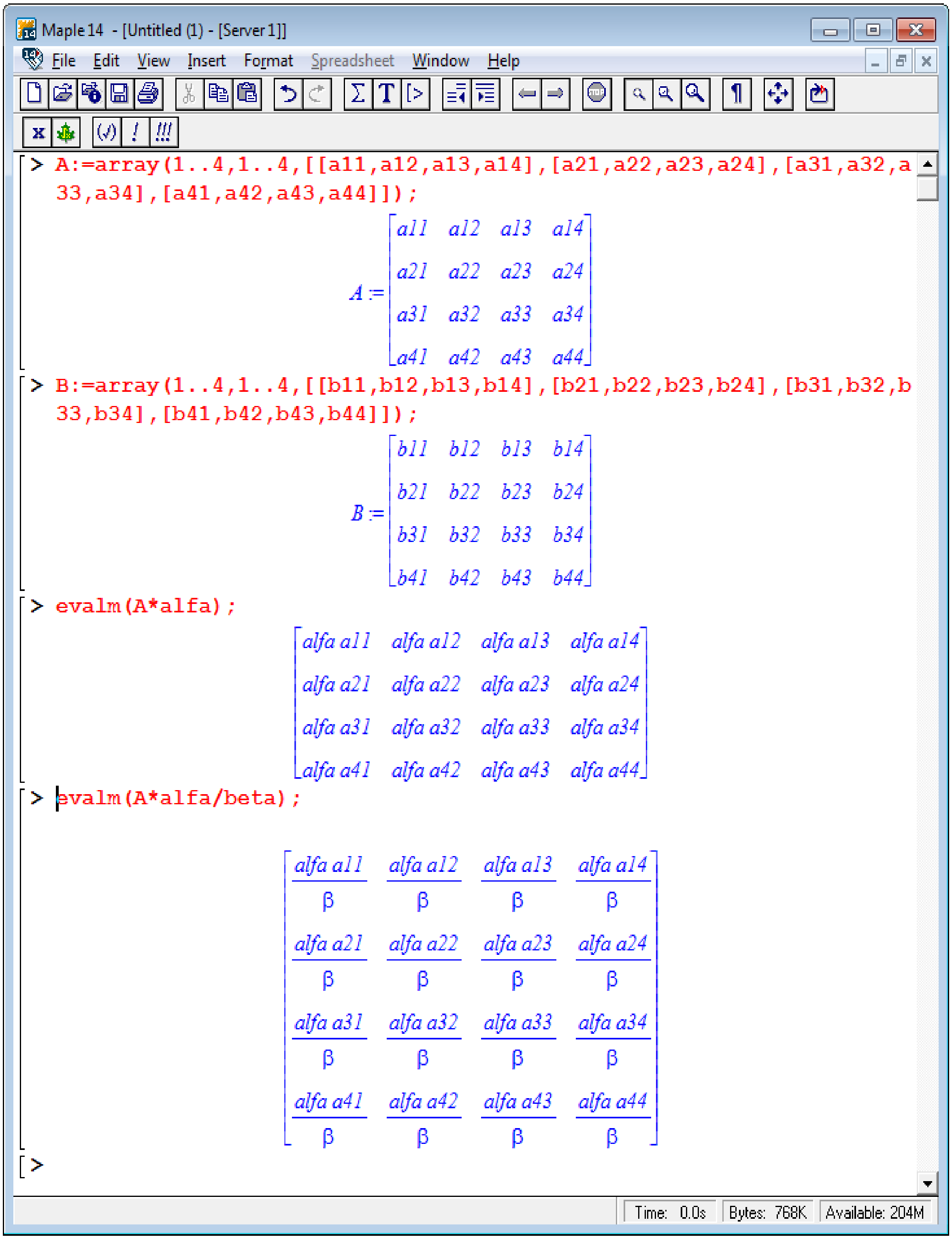
```
>A:=array(1..4,1..4,[[a11,a12,a13,a14],[a21,a22,a23,a24],
                     [a31,a32,a33,a34],[a41,a42,a43,a44]]);
```

```
> B:=array(1..4,1..4,[[b11,b12,b13,b14],[b21,b22,b23,b24],
                      [b31,b32,b33,b34],[b41,b42,b43,b44]]);
```

მატრიცის რაიმე რიცხვზე გამრავლებასა და გაყოფას ვახორციელებთ ოპერატორის **evalm** – ის საშუალებით, რომლის შიგნით (ფრჩხილებში მოცემულია მატრიცის რიცხვზე გამრავლების ან გაყოფის ან შეკრების ან გამოკლების ან სხვადასხვა ოპერაციების გამოსახულება) ასე მაგალითად

**გამრავლება** > **evalm(A*alfa)**;– ამ მაგალითში A მატრიცა ( მისი ყველა ელემენტი) გამრავლდება რიცხვზე **alfa**.

გამრავლება და გაყოფა ერთდროულად : > **evalm(A*alfa/beta)**;– ამ მაგალითში A მატრიცა ( მისი ყველა ელემენტი) გამრავლდება რიცხვზე **alfa** და გაიყოფა beta–ზე. განვახორციელეთ. **Maple** –ში ამ მოქმედებების შესრულება ნაჩვენებია ნახ.4.6–ზე:

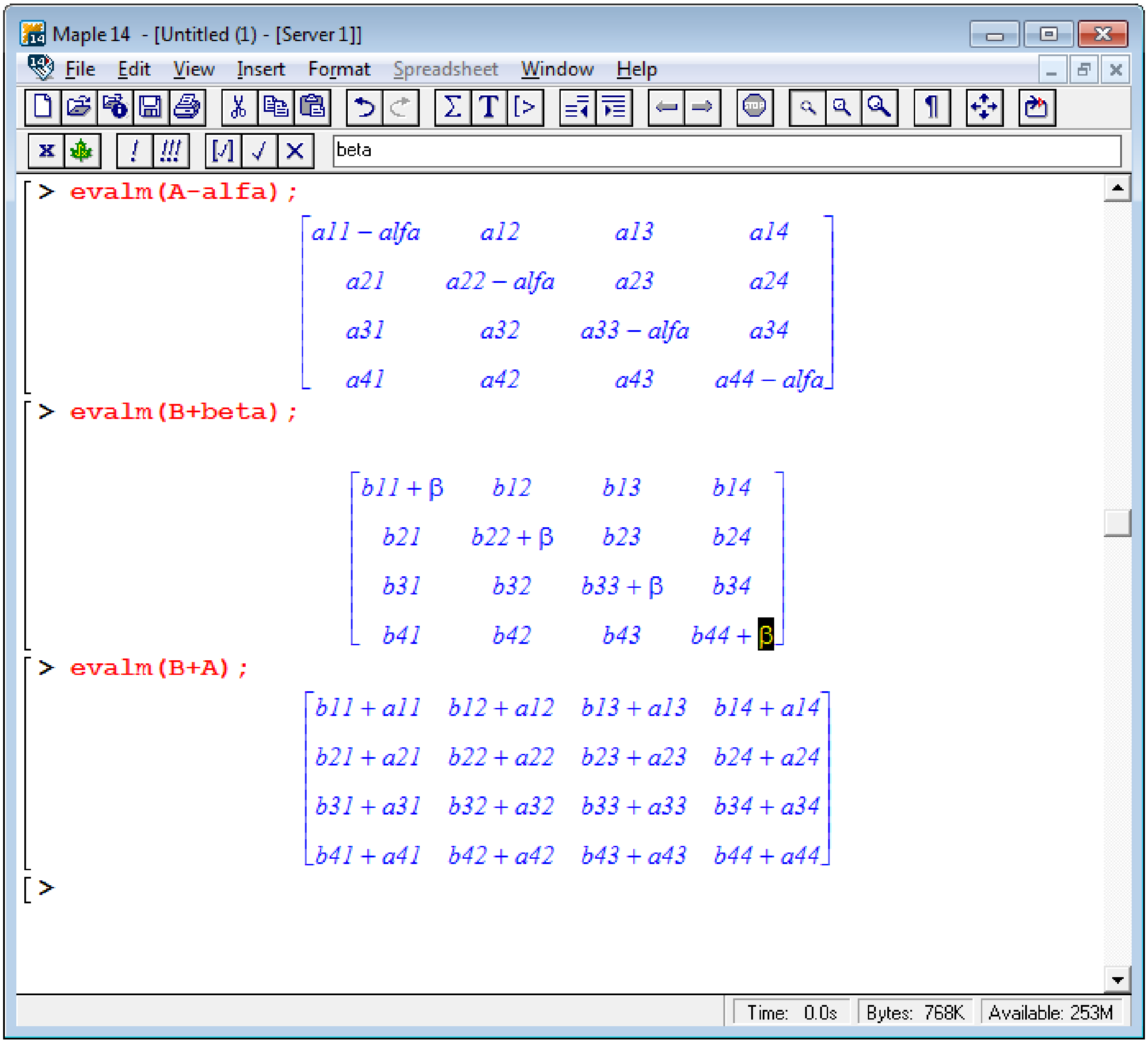

Maple 14 - [Untitled (1) - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
> A:=array(1..4,1..4,[[a11,a12,a13,a14],[a21,a22,a23,a24],[a31,a32,a33,a34],[a41,a42,a43,a44]]);
A := [a11 a12 a13 a14; a21 a22 a23 a24; a31 a32 a33 a34; a41 a42 a43 a44]
> B:=array(1..4,1..4,[[b11,b12,b13,b14],[b21,b22,b23,b24],[b31,b32,b33,b34],[b41,b42,b43,b44]]);
B := [b11 b12 b13 b14; b21 b22 b23 b24; b31 b32 b33 b34; b41 b42 b43 b44]
> evalm(A*alfa);
[alfa a11 alfa a12 alfa a13 alfa a14; alfa a21 alfa a22 alfa a23 alfa a24; alfa a31 alfa a32 alfa a33 alfa a34; alfa a41 alfa a42 alfa a43 alfa a44]
> evalm(A*alfa/beta);
[alfa a11/β alfa a12/β alfa a13/β alfa a14/β; alfa a21/β alfa a22/β alfa a23/β alfa a24/β; alfa a31/β alfa a32/β alfa a33/β alfa a34/β; alfa a41/β alfa a42/β alfa a43/β alfa a44/β]
Time: 0.0s
Bytes: 768K
Available: 204M

ნახ. 4.6

**გამოკლება** > **`evalm(A-alfa);`**– ამ მაგალითში A მატრიცის ( მის დიაგონალურ ელემენტებს ) გამოაკლდება **`alfa`** რიცხვი.

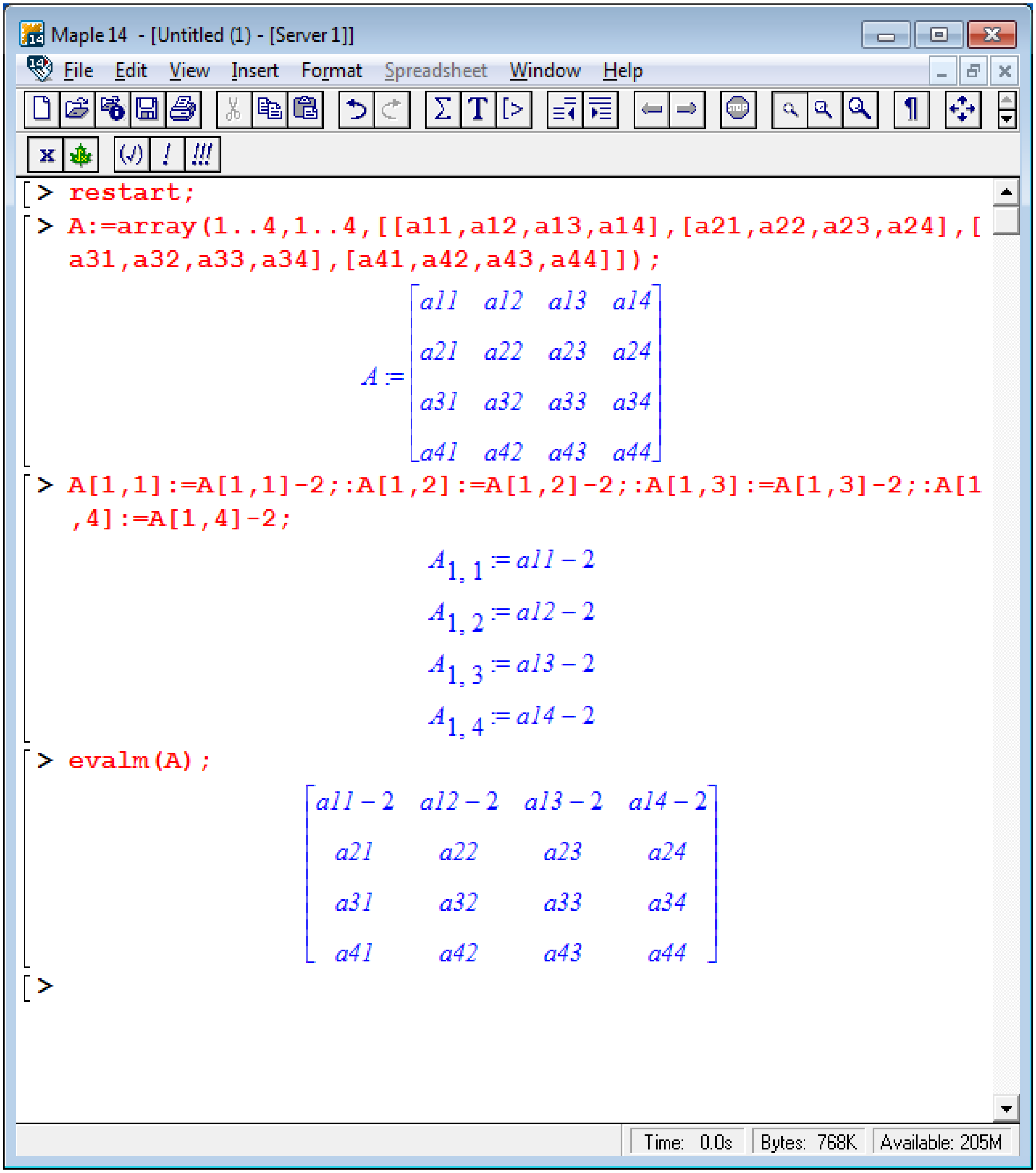
შეკრება : > **`evalm(B+beta);`**– ამ მაგალითში **B** მატრიცა ( მის დიაგონალურ ელემენტებს ) მიემატება `beta` რიცხვი.

**Maple** –ში ამ მოქმედებების შესრულება ნაჩვენებია ნახ.4.7–ზე:




ნახ. 4.7

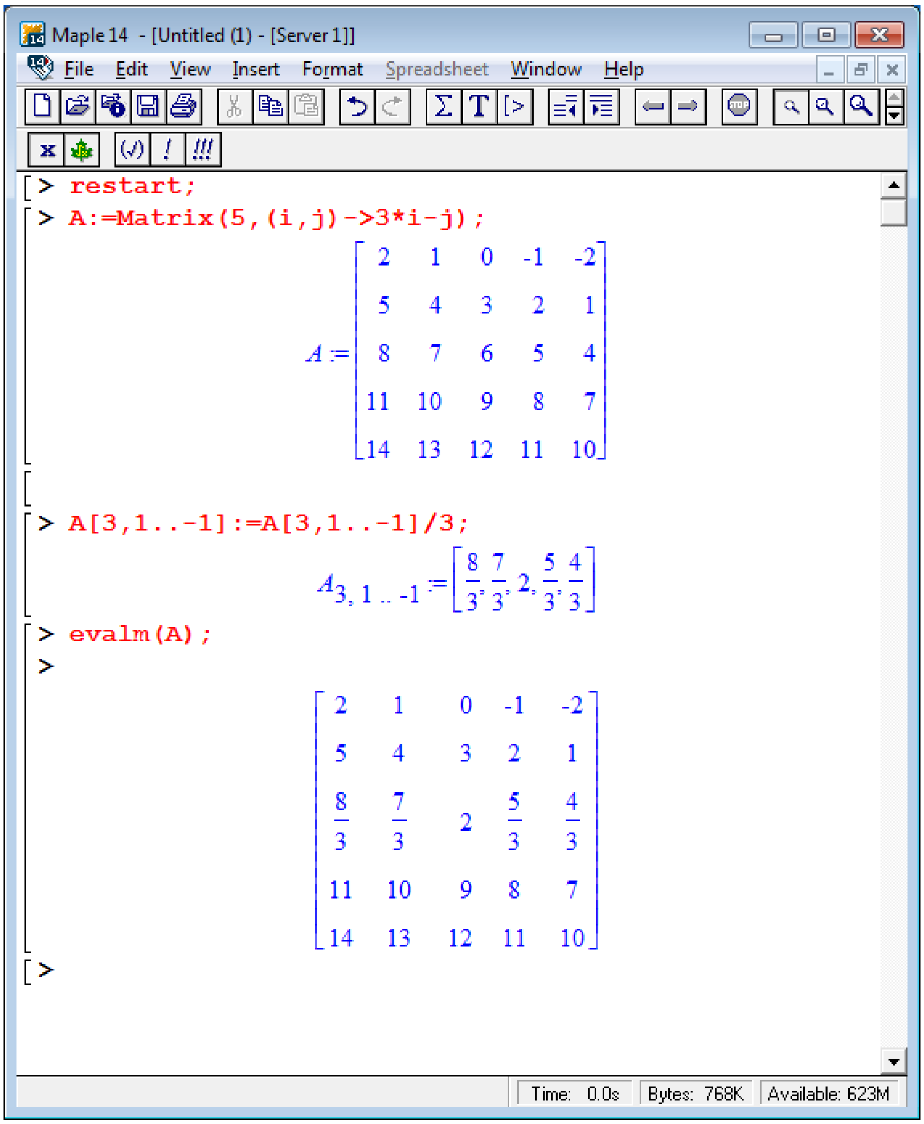
ნახ. 4.8–ზე ნაჩვენებია მატრიცის პირველი სტრიქონის ყველა ელემენტისთვის ერთიდაიგივე რიცხვის (2–ის) გამოკლება. ასეთივე ოპერაციები




ნახ. 4.8

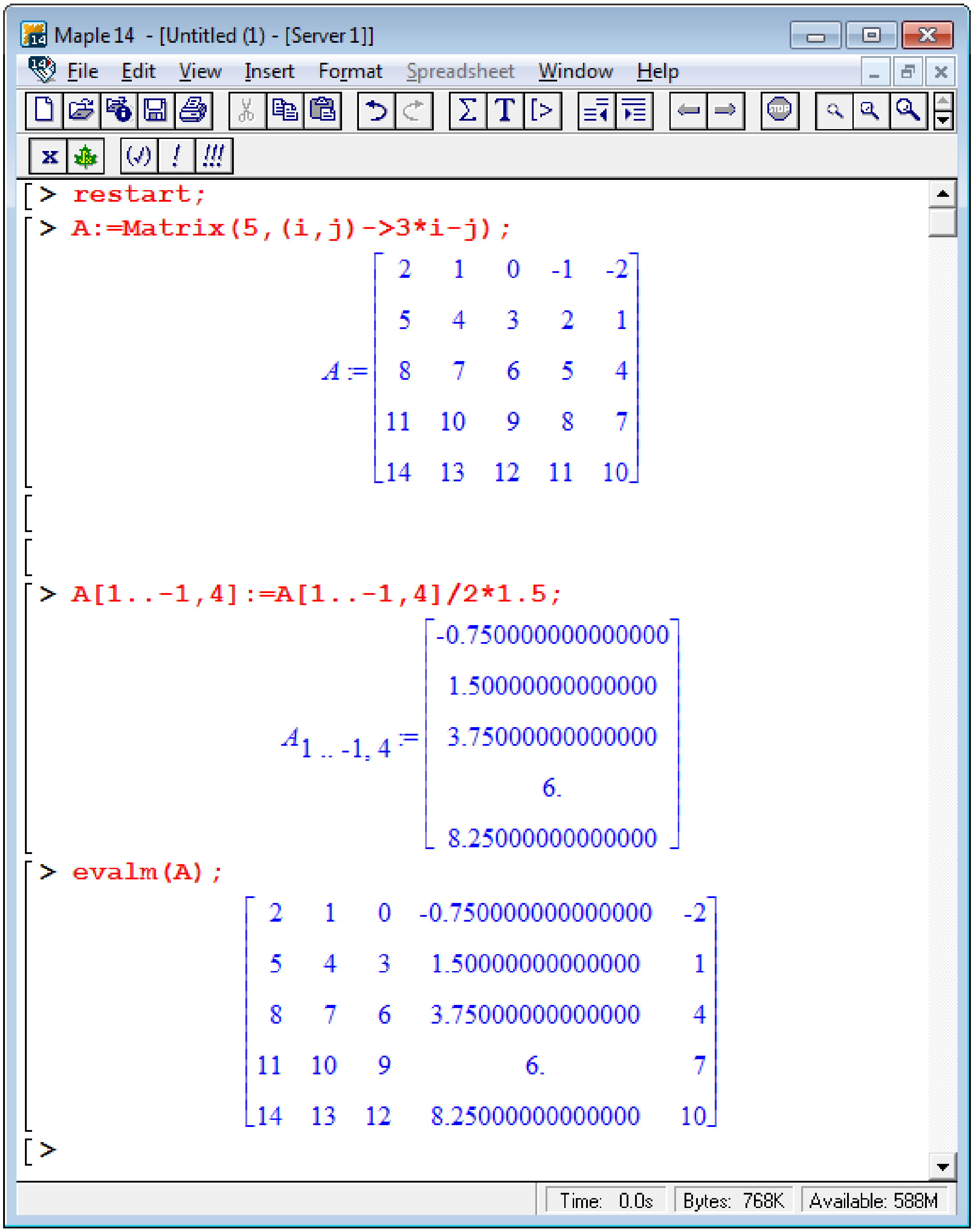
ნახ.4.8 . ჩვენ სათითაოდ (თითოეულ ელემენტს ცალკ–ცალკე) გამოვაკლეთ რიცხვი 2 მაგრამ **Maple** –ში შესაძლებელია ეს გავაკეთოთ ერთბაშად მთელი სტრიქონისათვის. მაგალითად შევიტანოთ რიცხვითი მატრიცა 5X5 ზე მატრიცის ელემენტები დაფორმირდეს ფორმულით 3*I-J და შემდეგ მიღებული მატრიცის მესამე სტრიქონის ყველა ელემენტი გავყოთ 3–ზე ერთბაშად. ეს პროცედურები შესრულებული **Maple** –ში მოცემულია ნახ.4.9

ბრძანება – > **`A[3,1..-1]:=A[3,1..-1]/3;`** **A** მატრიცის მესამე სტრიქონის ყველა ელემენტს მიანიჭებს თავისავე მნიშვნელობას გაყოფილს 3–ზე.



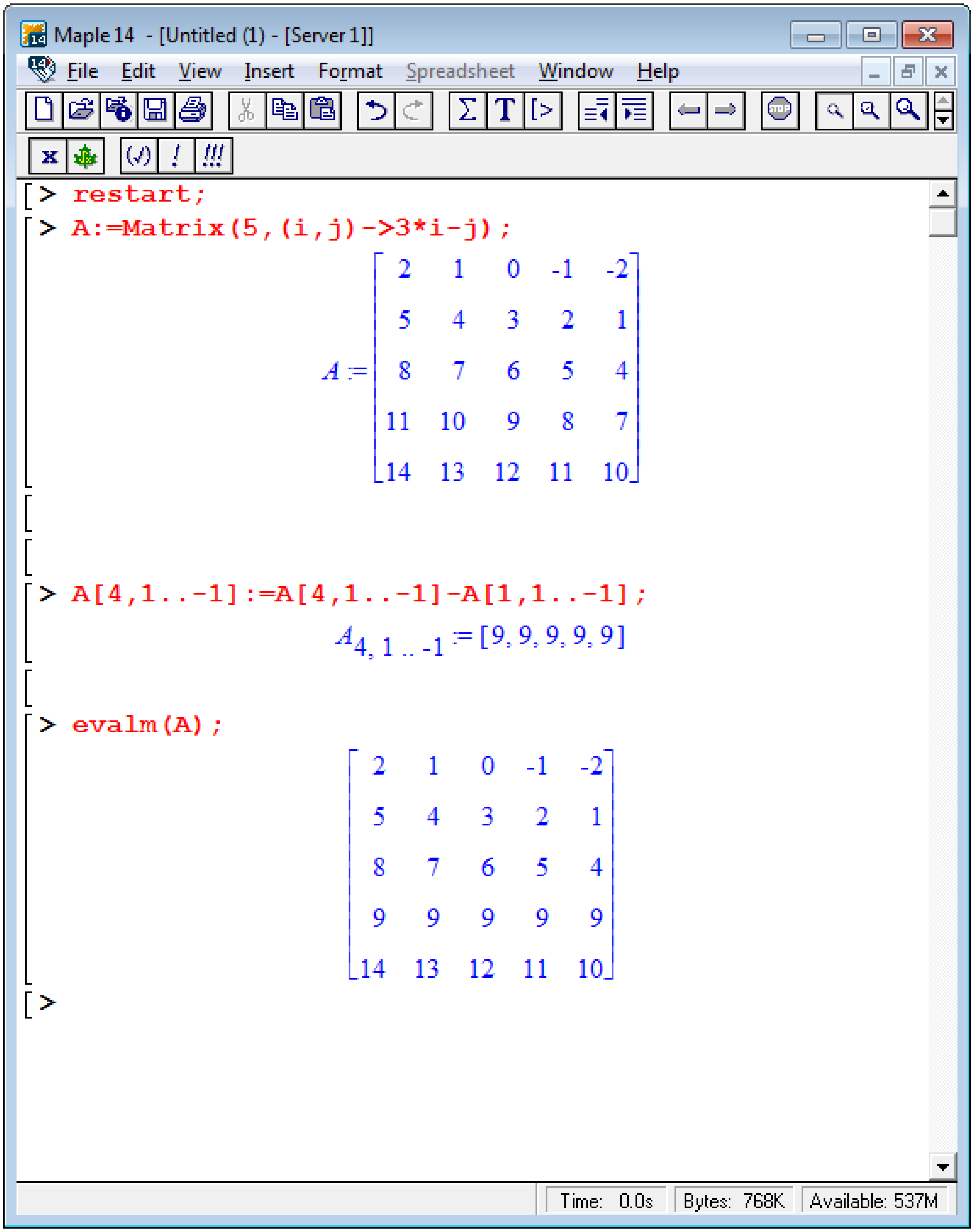

ნახ. 4.9

ასეთივე წარმატებით შეიძლება მატრიცის ნებისმიერი სვეტი გავყოთ ( გავამრავლოთ ან ნებისმიერი ოპერაცია განვახორციელოთ) რაიმე რიცხვზე მაგალითად გვინდა ჩვენი მოცემული A მატრიცის მე–4 –ე სვეტი გავყოთ 2 და გავამრავლოთ 1.5–ზე ამის შესაბამის ბრძანებაა > **A[1..-1,4]:=A[1..-1,4]/2*1.5;**



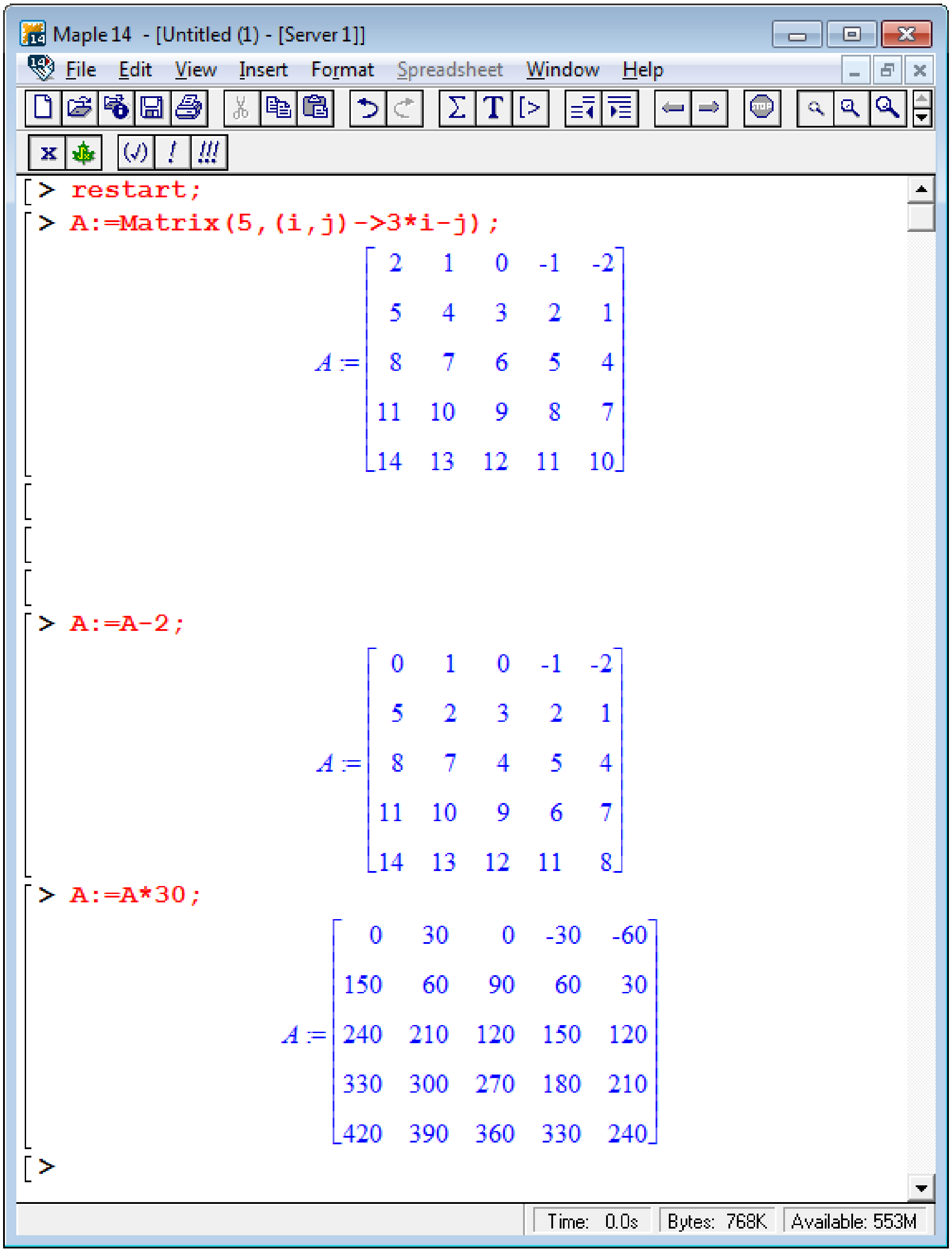

ნახ. 4.10

ასეთივე წარმატებით შეგვიძლია განვახორციელოთ მატრიცის ცტრიქონების ერთმანეთისათვის გამოკლება, დამატება და სხვა ასეთი ოპერაციები; ეს ყველაფერი მოცემულია ნახ.4.11–ზე.




ნახ.4.11

ნახ. 4.11 ნაჩვენებია, მოქმედება, როდესაც ამატრიცის მე–4 სტრიქონს მიენიჭა მე–4 სტრიქონის მნიშვნელობას (შესაბამისი ელემენტების მნიშვნელობებს) გამოკლებული პირველი სტრიქონი (შესაბამისი ელემენტები) და საბოლოოდ > **evalm(A);** – ოპერატორით გამოვიტანეთ A მატრიცა გარდაქმნილი მე–4–ე სტრიქონით(ნახ.4.11




ნახ.4.12

ნახ.4.12 –ზე მოცემულია A მატრიცის დიაგონალური ელემენტების შემცირება 2–ით ოპერატორი > `A:=A-2;` და შემდეგ მიღებული მატრიცის ყველა ელემენტი გავამრავლეთ 30–ზე.ოპერატორი > `A:=A*30;` (ნახ. 4.12).

## 4.3 მატრიცების აგრეგატული ნამრავლი Maple –ში

მატრიცების აგრეგატული ნამრავლის ცნების ქვეშ გვესმის ორი მატრიცის შესაბამისი ელემენტების ნამრავლთა ჯამი. ანუ ეს პროცედურა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი ფორმულით: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{ij}$ –სადაც მოცემულია ერთნაირ განზომილებიანი ორი მატრიცა A და B. ნახ.4.13–ზე ჩანს რომ ჩვენ ეს პროცედურა შევასრულეთ **Maple –ში** ჩაშენებული პროგრამირების M ენის ელემენტების გამოყენებით.

მატრიცების აგრეგატული ნამრავლი ძირითადად გამოიყენება ეკონომიკური ამოცანების გადაწყვეტის დროს. მაგალითად A მატრიცა ეს იყოს სხვადასხვა პროდუქციის კვირის (ან ნებისმიერი ვადის) განმავლობაში გაყიდული მოცულობის მაჩვენებელი. ხოლო B მატრიცა A მატრიცის შესაბამისი ელემენტების (გაყიდული მოცულობების) ის ფასია რა ფასადაც გაიყიდა ეს პროდუქცია. აქედან გამომდინარე ამ ორი მატრიცის აგრეგატული ნამრავლი ეს არის კვირის (მოცემული ვადის) განმავლობაში მარკეტის სრული ნავაჭრი.

ნახ. 4.13 მატრიცები წარმოდგენილია სიმბოლური სახით იმიტომ, რომ საბოლოოდ კარგად მოჩანს მატრიცათა აგრეგატული ნამრავლის ფორმულა გაშლილი სახით:

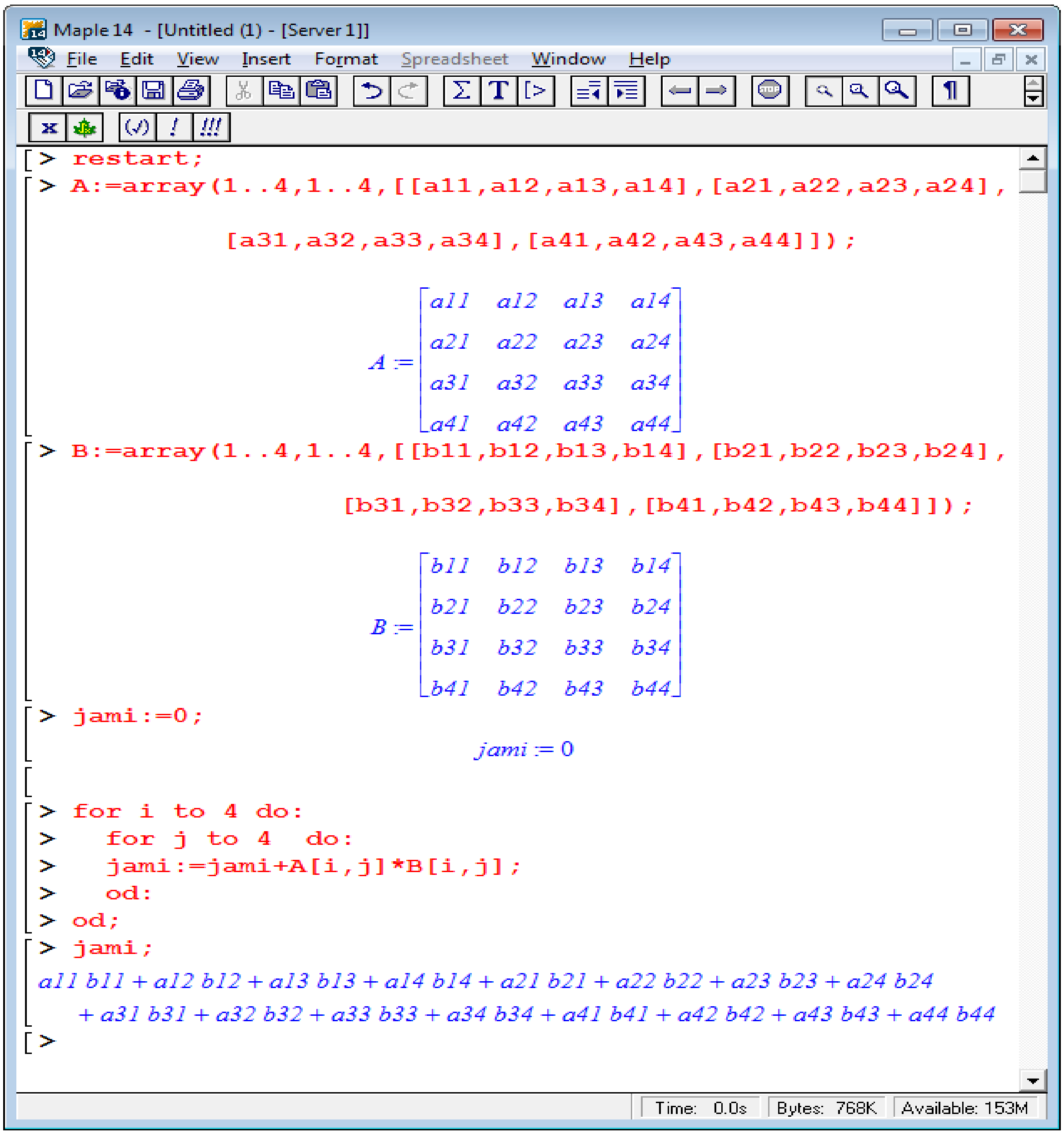
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{ij} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + \ldots + a_{14}b_{14} + \ldots + a_{44}b_{44} \qquad (4.4)$$

ნახ. 4.13 დან ჩანს რომ ჯერ მოვახდინეთ A და B მატრიცების შეტანა, შემდგომ გავანულეთ (ნოლი მივანიჭეთ) ცვლადს jami სადაც საბოლოოდ დავაგროვოთ ორმაგი ციკლური ოპერატორების გამოყენებით დაგროვილი (4.4) ფორმულით მოცემული ჯამის მნიშვნელობა. შემდეგ

გამოვიყენეთ **Maple –ში** ჩაშენებული პროგრამირების M ენის ციკლის ოპერატორებით შედგენილი ჯამური რეკურსია, რომელის ჯამს აგროვებს რეკურსიული ფორმულით:

```
> jami:=jami+A[i,j]*B[i,j];
```

ამის შემდგომ ოპეარორით **> jami;** გამოვიყვანეთ ჯამის (ანუ მატრიცათა აგრეგატული ნამრავლის ფორმულა). თუ A და B მატრიცების სიმბოლური მნიშვნელობების ნაცვლად შევიტანოთ რიცხვებს, აგრეგატული ნამრავლიც იქნება რიცხვი.




ნახ. 4.13

## 4.4 მატრიცების მათემატიკური ჯამი, სხვაობა, ნამრავლი

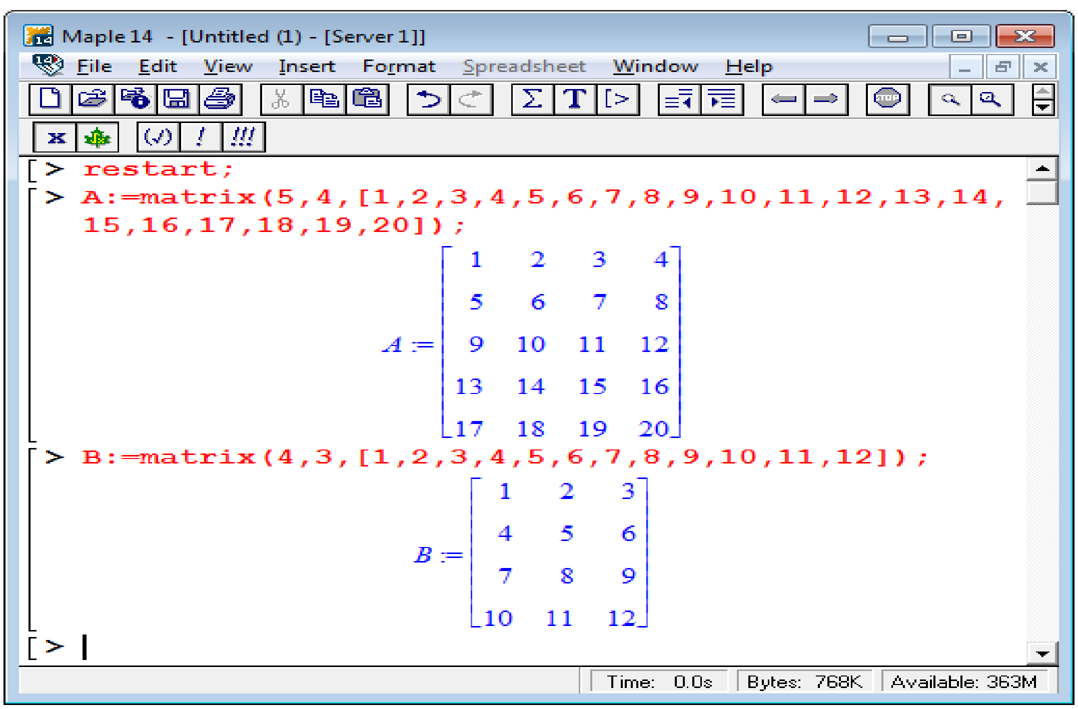
მატრიცების ჯამი და სხვაობა მარტივი ოპერაციებია და ისინი გამოითვლებიან შესაბამისი ელემენტების ჯამითა  და სხვაობით, მხოლოდ უნდა გავითვალისწინოთ, რომ ემ მატრიცები ერთნაირი განზომილებებისა უნდა იყვნენ.

მატრიცების გამრავლების შემთხვევაში უნდა გვახსოვდეს ერთი რამ სამრავლი მატრიცის სვეტების (სტრიქონების) რიცხვი უნდა ემთხვეოდეს მამრავლი მატრიცის სტრიქონების (სვეტების) რიცხვს. ეს გარემოება ფორმალიზებულად ჩაიწერება შემდეგნაირად:

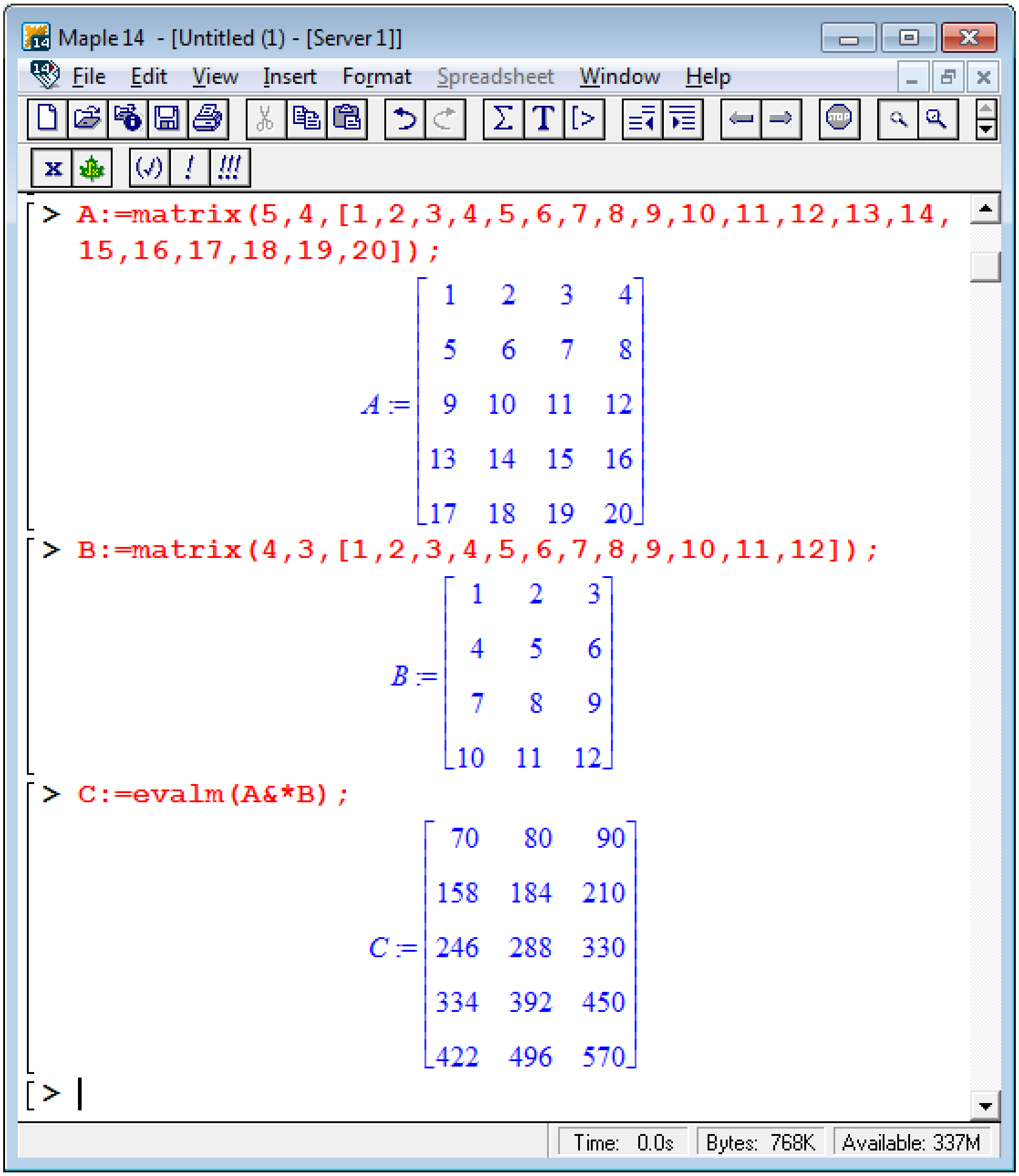
$C_{ij} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} \quad \overline{i=1,n}$ ეს გარემოება სხვა სიტყვებით შეიძლება ასე ავხსნათ

თუ მოცემულია ორი მატრიცა A და  B მაშინ მათი ნამრავლის შედეგად მიღებული C მატრიცის განზომილება განისაზღვრება მაგალითად ასე: A(n,m)xB(m,k)= C(n,k)

განვიხილოთ მაგალითი მოპცემულია A(5,4) და B(4,3) ორი რიცხვითი მატრიცა, მაშინ მათი ნამრავლის მატრიცა იქნება 5 სტრიქონისა და 3 სვეტისგან შედგენილი C(5,3) .




ნახ. 4.14




ნახ.4.15

მართლაც მივიღეთ მატრიცა C(5,3) სადაც მაგალითად C(1,1) და C(5,3) ელემენტები გამოითვლებიან შემდეგი გამოსახულებების საშუალებით:

C(1,1)=1*1+2*4+3*7+4*10=70

C(5,3)=17*3+18*6+19*9+20*12=570

# თავი 5. წრფივი ალგებრა II Maple –ში

## 5.1 მინორისა და დეტერმინანტის გამოთვლა

მინორისა და ალგებრული დამატების საკითხების უფრო საფუძვლიანი გაცნობისათვის ჯერ განვიხილოთ დეტემინანტის ცნება. დეტერმინანტის ცნება დაკავშირებულია წრფივ განტოლებათა სისტემების ამოხსნასთან. დეტერმინანტი გამოითვლება მხოლოდ კვადრატული მატრიცასათვის. კვადრატულია მატრიცა თუ მას აქვს ერთნაირი რაოდენობის სტრიქონები და სვეტები. კვადრატული მატრიცის დეტერმინანტი ეს არის რიცხვი, რომელიც მიიღება გარკვეული წესით მატრიცის ელემენტებისაგან. დეტერმინანტის გამოთვლა ხდება როგორც წესი, ორი მეთოდით გამორიცხვის (გაუსის) და კრამერის ფორმულებით (მინორების წესი). კრამერის ფორმულები განვიხილოთ შემდგომ. ახლა განვიხილოთ გამორიცხვის (გაუსის) მეთოდი. ვთქვათ გვინდა გამოვთვალოთ 5x5 კვადრატული A მატრიცის დეტერმინანტი:

$$\mathbf{A}= \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 8 & -1 & 4 \end{matrix}\right\} \quad (5.1)$$

გაუსის მიმდევრობითი გამორიცხვის მეთოდის არსი მდგომარეობს იმაში, რომ იგივური გარდაქმნების საშუალებით (5.1) მატრიცისაგან უნდა მივიღოთ სამკუთხოვანი მატრიცა. ანუ მატრიცა რომლის ქვედა მარცხენა ან ზედა მარჯვენა სამკუთხედში მოთავსებული ყველა ელემენტი იქნება ნოლის ტოლი. თუ ამას მივაღწიეთ, მაშინ **A** მატრიცის დეტერმინანტი ტოლო იქნება გარდაქმნების შედეგად მიღებული დიაგონალური ელემენტების ნამრავლისა. ეს პროცედურა მოცემული **A** მატრიცისთვის განვიხილოთ

დაწვრილებით. ეს პროცედურა დავყოთ იტერაციებად, როგორც წესი n რიგის კვადრატული მატრიცისათვის დაგვჭირდება n-1 იტერაცია. ანუ ჩვენს შემთხვევაში (გვაქვს მეხუთე რიგის მატრიცა) დაგვჭირდება 4 იტერაცია. ქვედა მარცხენა სამკუთხედისთვის.

**პირველ იტერაციაზე–** უნდა დავაფორმიროთ პირველი სვეტი რომლის ქვედა ოთხი ელემენტი ნოლის ტოლი უნდა მივიღოთ.

**მეორე იტერაციაზე–** უნდა დავაფორმიროთ მეორე სვეტი რომლის ქვედა სამი ელემენტი ნოლის ტოლი უნდა მივიღოთ.

**მესამე იტერაციაზე–** უნდა დავაფორმიროთ მესამე სვეტი რომლის ქვედა ორი ელემენტი ნოლის ტოლი უნდა მივიღოთ.

**მეოთხე იტერაციაზე–** უნდა დავაფორმიროთ მეთხე სვეტი რომლის ქვედა ერთი ელემენტი ნოლის ტოლი უნდა მივიღოთ.

ანუ ამ მოქმედებების შედეგად მივიღებთ მატრიცას(5x5), რომელშიც არც ერთი ნოლის შემცველი იქნება მხოლოდ მატრიცის პირველი სტრიქონი და ბოლო სვეტი.

ახლა გაუსის ალგორითმი **A** მატრიცისთვის გავწეროთ დაწვრილებით:

**პირველი იტერაცია :**

გარდავქმნით საწყის (5.1) მატრიცას:

**2*(1 1 2 –3 2)=(2 2 4 –6 4)**

$$
\begin{array}{r}
2\ 2\ 4\ -6\ \ 4 \\
-\quad \\
2\ 5\ 5\ \ 5\ \ 5 \\
\hline
0\ -3\ -1\ -11\ -1
\end{array}
$$

**3*(1 1 2 –3 2)=(3 3 6 –9 6)**

$$
\begin{array}{r}
3\ 3\ 6\ -9\ \ 6 \\
-\quad \\
3\ 2\ 5\ \ 5\ \ 1 \\
\hline
0\ 1\ 1\ -14\ 5
\end{array}
$$

**4*(1 1 2 –3 2)=(4 4 8 –12 8)**

$$\begin{array}{r} 4\ \ 4\ \ 8\ {-12}\ \ 8 \\ -\ \ 4\ {-1}\ \ 2\ \ \ 0\ \ 3 \\ \hline 0\ \ 5\ \ 6\ {-12}\ \ 5 \end{array}$$

**5*(1 1 2 –3 2)=(5 5 10 –15 10)**

$$\begin{array}{r} 5\ \ 5\ \ 10\ {-15}\ \ 10 \\ -\ \ 5\ \ 3\ \ 8\ {-1}\ \ 4 \\ \hline 0\ \ 2\ \ 2\ {-14}\ \ 6 \end{array}$$

ამით პირველი იტერაცია დასრულდა და ჩვენი საწყისი მატრიცა (5.1) გარდაიქმნა (5.2) სახემდე.

$$A^{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -11 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -14 & 5 \\ 0 & 5 & 6 & -12 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & -14 & 6 \end{pmatrix} \qquad (5.2)$$

**მეორე იტერაცია :**

გარდავქმნით $A^{I}$ (5.2) მატრიცას:

**–1/3*(–3 –1 –11 –1)=(1 1/3 11/3 1/3)**

$$\begin{array}{r} 1\ \ 1/3\ \ \ 11/3\ \ \ 1/3 \\ -\ \ 1\ \ 1\ \ \ {-14}\ \ \ 5 \\ \hline 0\ {-2/3}\ \ 53/3\ {-14/3} \end{array}$$

**–5/3*(–3 –1 –11 –1)=(5 5/3 55/3 5/3)**

$$\begin{array}{r} 5\ \ 5/3\ \ \ 55/3\ \ 5/3 \\ -\ \ 5\ \ 6\ \ \ {-12}\ \ \ 5 \\ \hline 0\ {-13/3}\ \ 91/3\ {-10/3} \end{array}$$

–2/3*(–3 –1 –11 –1)=(2 2/3 22/3 2/3)

$$
\begin{array}{r}
\phantom{-}2\ \ 2/3\ \ 22/3\ \ 2/3 \\
-\ \\
2\ \ 2\ \ -14\ \ 6 \\
\hline
0\ \ -4/3\ \ 64/3\ \ -16/3
\end{array}
$$

ამით მეორე იტერაცია დამთავრდა მივიღეთ ახალი მიახლოება საძიებელი მატრიცის $A^{II}$ მას ექნება სახე (5.3):

$$
A^{II} = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 2 & -3 & 2 \\
0 & -3 & -1 & -11 & -1 \\
0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{53}{3} & -\frac{14}{3} \\
0 & 0 & -\frac{13}{3} & \frac{91}{3} & -\frac{10}{3} \\
0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{64}{3} & -\frac{16}{3}
\end{pmatrix} \quad (5.3)
$$

**მესამე იტერაცია :**

გარდავქმნით $A^{II}$ (5.3) მატრიცას:

**13/2*(–2/3 53/3 –14/3)=(–13/3 689/6 –182/6)**

$$
\begin{array}{r}
-13/3\ \ 689/6\ \ -182/6 \\
-\ \\
-13/3\ \ \ 91/3\ \ -10/3 \\
\hline
0\ \ \ \ 169/2\ \ -27
\end{array}
$$

**2*(–2/3 53/3 –14/3)=(–4/3 106/3 –28/3)**

$$\begin{array}{r} -4/3 \quad 106/3 \quad -28/3 \\ - \\ -4/3 \quad 64/3 \quad -16/3 \\ \hline 0 \quad 14 \quad -4 \end{array}$$

ამით მესამე იტერაციაც დამთავრდა მივიღეთ ახალი მიახლოება საძიებელი მატრიცის მას ექნება სახე (5.4):

$$A^{III} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -11 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{53}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{169}{2} & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & -4 \end{pmatrix} \qquad (5.4)$$

**მეოთხე იტერაცია :**

გარდავქმნით $A^{III}$ (5.4) მატრიცას , მეოთხე იტერაციაზე ვახორციელებთ ბოლო ერთ გარდაქნას:

**28/169*(169/2 –27)= (14 –756/169)**

$$\begin{array}{r} 14 \quad -756/169 \\ - \\ 14 \quad -4 \\ \hline 0 \quad -80/169 \end{array}$$

ამით მეოთხე იტერაციაც დამთავრდა მივიღეთ საძიებელი მატრიცა მას ექნება სახე (5.5):

$$A^{IV} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -11 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{53}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{169}{2} & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{80}{169} \end{pmatrix} \qquad (5.5)$$

მაშასადამე, როგორც ვთქვით გაუსის ალგორითმით საწყისი **A** მატრიცის დეტერმინანტი იქნება $A^{IV}$ მატრიცის დიაგონალური ელემენტების ნამრავლი ანუ მიიღება გამოსახულება det(A)=1*(-3)*(-2/3)*(169/2)*(-80/169)=-80.

ახლა იგივე **A** მატრიცის დეტრმინანტი გამოვთვალოთ მინორებად დაშლის წესით. მინორებად დაშლის წესი გულისხმობს ერთ–ერთი სტრიქონისა ან სვეტის მიხედვით გაშლას, მოხერხებულობისათვის მატრიცა **A** გადმოვწეროთ თავიდან (5.6):

$$\mathbf{A}= \left( \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 8 & -1 & 4 \end{matrix} \right\} \qquad (5.6)$$

სიმარტივისთვის გაშლა მოვახდინოთ **A** მატრიცის პირველი სვეტის მიხედვით. პირველი სვეტის შესაბამისად ამ მატრიცას ექნება 5 მინორი $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ ამოვწეროთ თითოეული ცალკ–ცალკე:

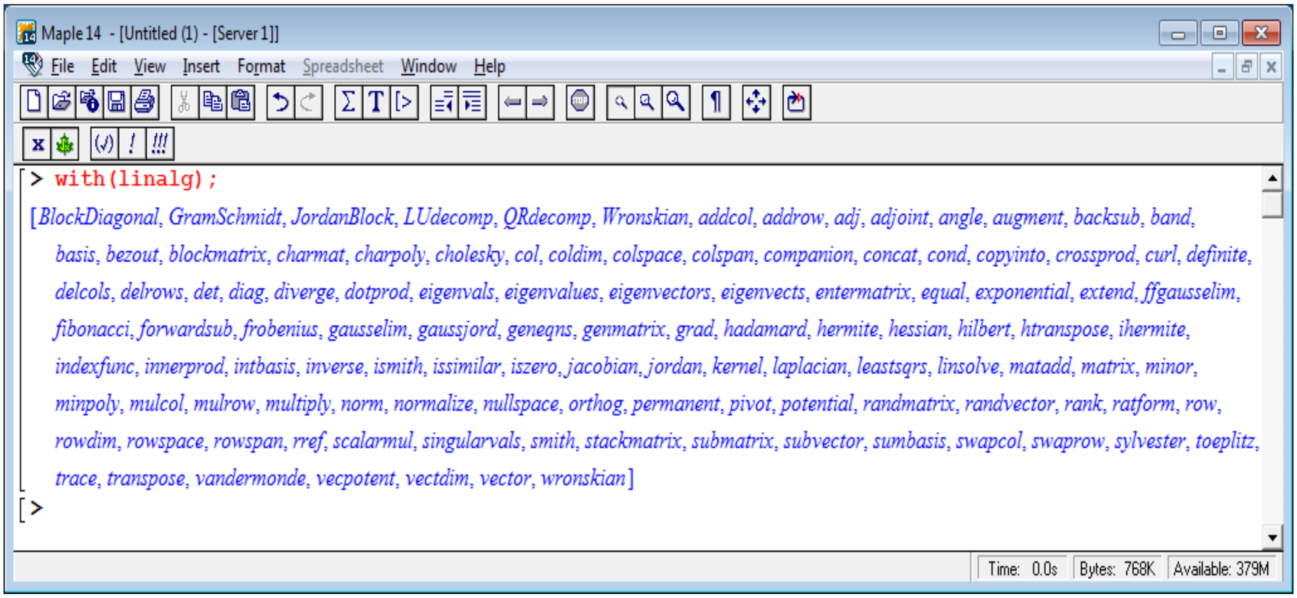
$$A_1 = \begin{array}{cccc} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 4 \end{array} \quad A_2 = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 4 \end{array} \quad A_3 = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 4 \end{array}$$

$$A_4 = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & -1 & 4 \end{array} \quad A_5 = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{array}$$

მინორების და მატრიცის პირველი სვეტის ელემენტების საშუალებით **A** მატრიცის დეტერმინანტის გამოსათვლელი ფორმულა იქნება (5.7) სახის

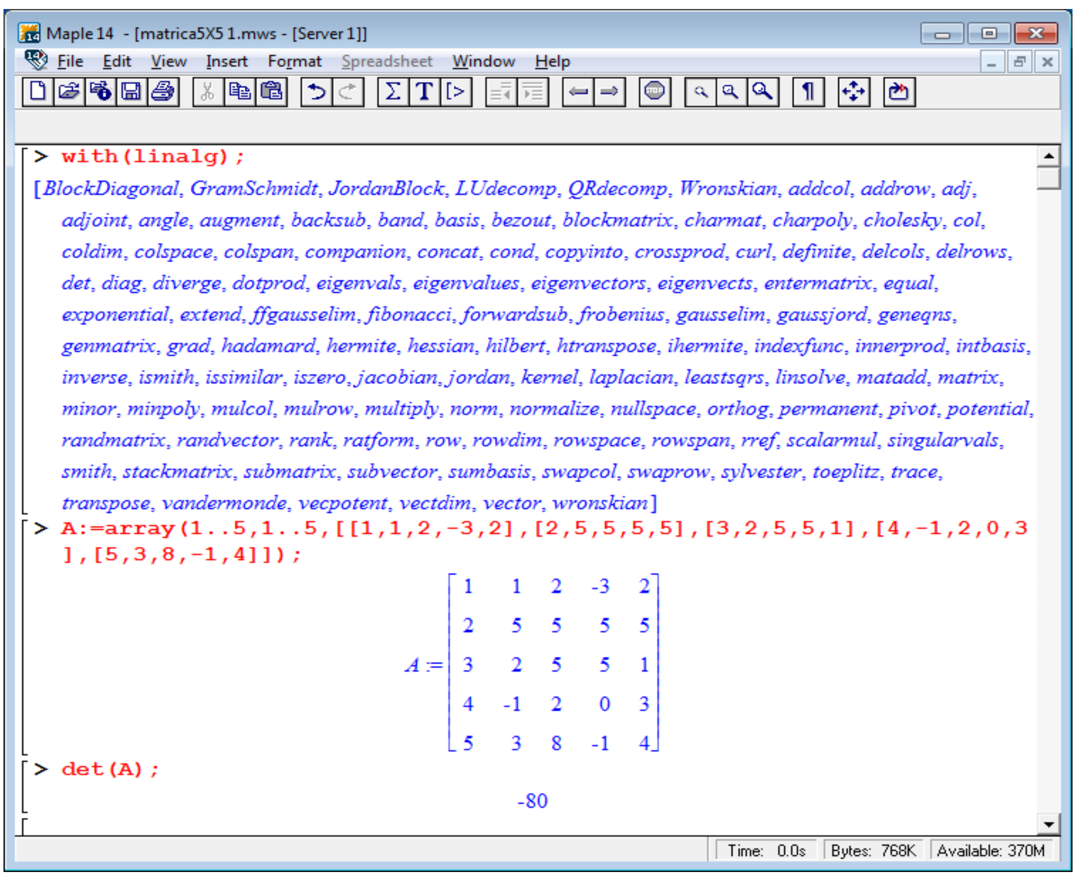
$$\det(A)=(-1)^{(1+1)}\, a_{11} \det(A_1)+ (-1)^{(2+1)}\, a_{21} \det(A_2)+ (-1)^{(3+1)}\, a_{31} \det(A_3)+(-1)^{(4+1)}\, a_{41} \det(A_4)+ (-1)^{(5+1)}\, a_{51} \det(A_5). \quad (5.7)$$

ახლა ეს ფორმულა გამოვთვალოთ პროგრამა **Maple**–ს საშუალებით. ჯერ შევიტანოთ მატრიცა და შემდეგ გამოვთვალოთ დეტერმინანტები. ამისათვის ჯერ გამოვიძახოთ **Maple**–ში წრფივი ალგებრის ბლოკი **linalg**-ი. სადაც მატრიცის დეტერმინანტის გამოსათვლელად გამოიყენება ფუნქცია **det** –ი.




ნახ. 5.1

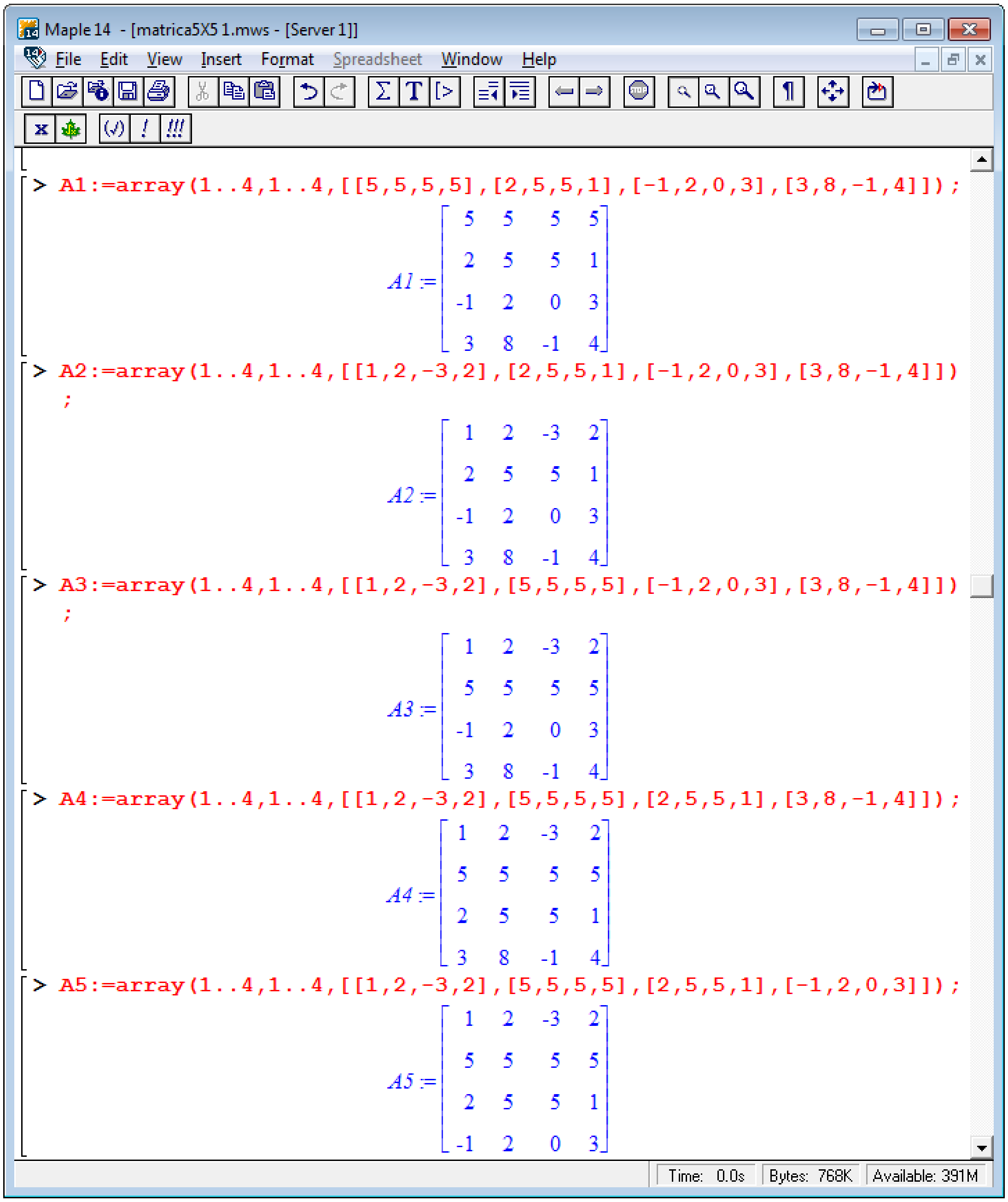
ნახ. 5.1–ზე ბაცი ცისფერით მოცემულია იმ წრფივი ალგებრის ფუნქციების ჩამონათვალი, რომელიც მოცემული არიან ბლოკ **linalg**-ში.




ნახ. 5.2

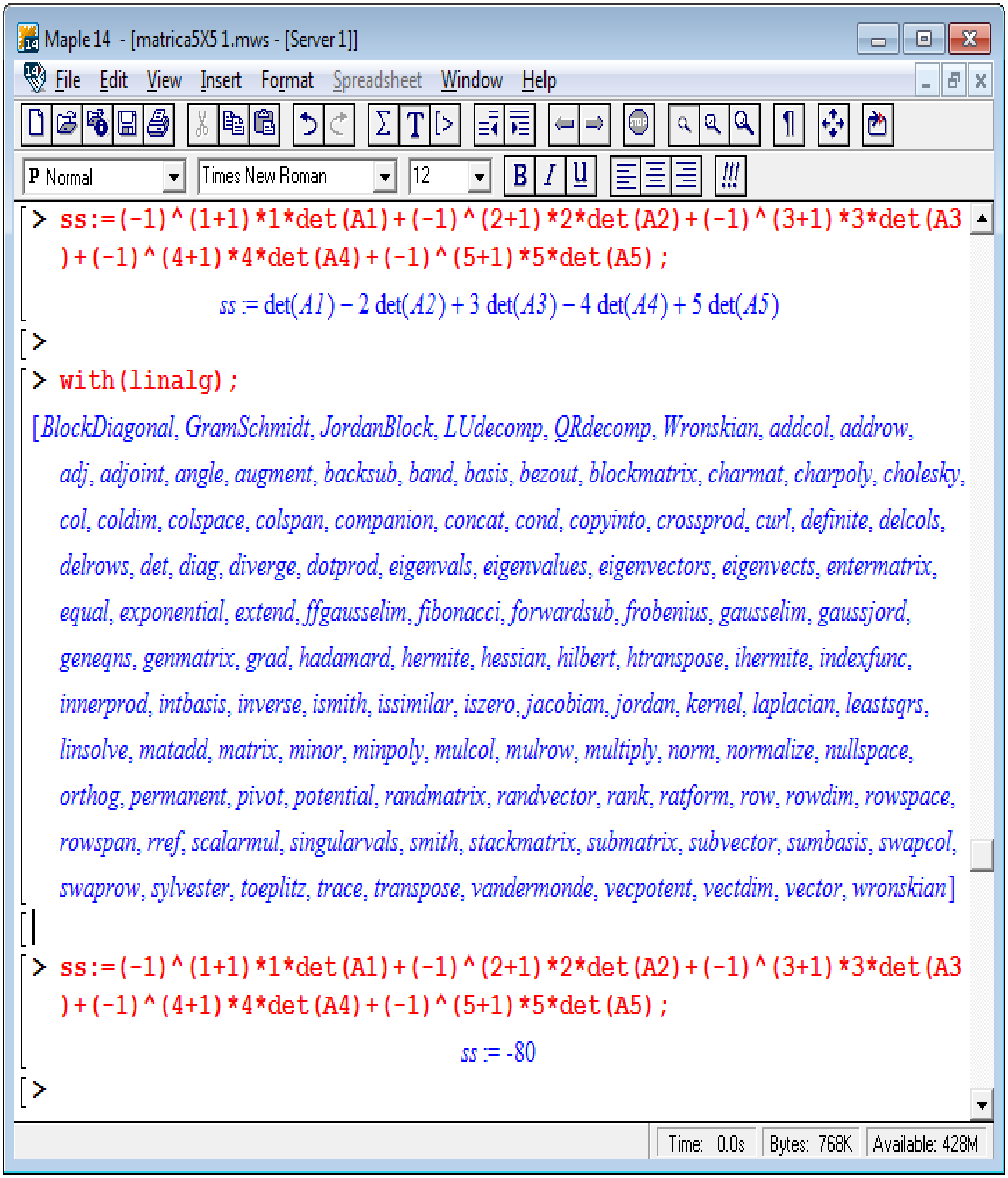
ნახ. 5.2–დან ჩანს, ,რომ პროგრამა **Maple**–ს არანაირი პრობლემა არა აქვს რაგინდ დიდი რიგის დეტერმინანტის გამოთვლისა, მაგრამ მიუხედავად ამისა ვნახოთ (5.7) ფორმულის გამოთვლის შედეგი.

ამისათვის შევიტანოთ ხუთივე მინორის მნიშვნელობები:




ნახ. 5.3

შევიტანეთ რა ხუთივე მინორის მნიშვნელობები შეგვიძლია (5.7) ფორმულა ავკრიფოთ და გამოვთვალოთ **Maple**–ს საშუალებით იხილე ნახ.5.4




ნახ. 5.4

როგორც ნახ.5.4 –დან ჩანს ფორმულა 5.7 მივანიჭეთ ცვლადს **ss**–ს და შემდეგ ღილაკზე ხელის დაჭერით გამოვიდა მოცემული **A** მატრიცის დეტერმინანტი.

## 5.2 მატრიცის შებრუნება, მატრიცის რანგი

**A** მოცემული **მატრიცის შებრუნებული** ეწოდება ისეთ $\mathbf{A}^{-1}$მატრიცას, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\mathbf{A}^{*}\,\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}{*}\mathbf{A}=\mathbf{I} \qquad (5.8)$$

სადაც **I** წარმოადგენს ერთეულოვან მატრიცას.

შებრუნებული $\mathbf{A}^{-1}$ მატრიცა, ნამდვილი **a** რიცხვის შებრუნებული რიცხვის ანალოგურია. გავიხსენოთ, რომ ყოველი არანულოვან ნამდვილ რიცხვს გააჩნია შებრუნებული და იგი $a^{-1}=\dfrac{1}{a}$ რიცხვის ტოლია. ამასთან $a*a^{-1}=1$ . როგორც ქვემოთ ვნახავთ, ყოველი არანულოვანი **A** მატრიცისათვის, საზოგადოდ არ არსებობს შებრუნებული

$\mathbf{A}^{-1}$ მატრიცა. თუ **A** მატრიცას გააჩნია შებრუნებული, მაშინ $\mathbf{A}^{-1}$ მატრიცის აგება ხდება გარკვეული ალგორითმით.

გავეცნოთ მატრიცის შებრუნებული მატრიცის არსებობის პირობებს და შევადგინოთ $\mathbf{A}^{-1}$ მატრიცის გამოსათვლელი ფორმულა.

კვადრატულ მატრიცას ეწოდება **არაგადაგვარებული** ანუ **გადაუგვარებელი** , თუ მისი დეტერმინანტი განსხვავებულია ნოლისგან და პირიქით ეწოდება გადაგვარებული თუ მისი დეტერმინანტი ნოლის ტოლია.

მოცემული მატრიცის შებრუნებული მატრიცის არსებობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ეს მატრიცა იყოს გადაუგვარებელი. ვთქვათ **A** მატრიცის შებრუნებული მატრიცა გამოითვლება ფორმულით:

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ სადაც |A| **A** მატრიცის დეტერმინანტი, ხოლო $\mathbf{A}^*$არის ალგებრული დამატებებისაგან შედგენილი მატრიცა, რომელსაც მიკავშირებული მატრიცა ეწოდება (5.1) მატრიცა მე –5 –ე რიგისაა და მისთვის მიკავშირებული მატრიცის შედგენას დაჭირდება 25 მე–4–ე რიგის ალგებრული დამატებების შედგენა და მათი დეტერმინანტების გამოთვლის ჩვენება, რაც ძალიან დიდ დროს წაგვართმევს. ამიტომ სიმარტივისთვის ავიღოთ მე–3–ე რიგის მატრიცა **M** შემდეგი სახით:

$\mathbf{M}= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ ჯერ მოვძებნოთ M მატრიცის დეტერმინანტი

ამ დეტერმინანტის გამოთვლა იოლია ამიტომ მის გამოთვლას აქ არ დავიწყებთ ანუ პირდაპირ მივუთითებთ დეტერმინანტის მნიშვნელობას.

$|\mathbf{M}|= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ = 5≠0. რადგან **M** მატრიცა გადაუგვარებელია, ამიტომ არსებობს $\mathbf{M}^{-1}$ მატრიცა. მის ასაგებად საჭიროა გამოვთვალოთ მიკავშირებული $\mathbf{M}^*$ მატრიცა. ამისათვის გამოვთვალოთ **M** მატრიცის ელემენტების შესაბამისი ალგებრული დამატებები. სულ 9 ცალი.

მიკავშირებული მატრიცის ელემენტები შესაბამისად აღვნიშნოთ $\mathbf{M}_{ij}$ სიმბოლოებით.

ანუ საბოლოოდ **მიკავშირებულ** $M^*$ მატრიცას ექნება სახე:

$$M^* = \begin{vmatrix} \boldsymbol{M_{11}} & \boldsymbol{M_{21}} & \boldsymbol{M_{31}} \\ \boldsymbol{M_{12}} & \boldsymbol{M_{22}} & \boldsymbol{M_{32}} \\ \boldsymbol{M_{13}} & \boldsymbol{M_{23}} & \boldsymbol{M_{33}} \end{vmatrix}$$

ამ მატრიცის ელემენტები გამოვთვალოთ ქვემოთ **M** მატრიცის მინორებით:

$$\mathbf{M}_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5,\ \mathbf{M}_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\mathbf{M}_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ \mathbf{M}_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10,$$

$$\mathbf{M}_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12,\ \mathbf{M}_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

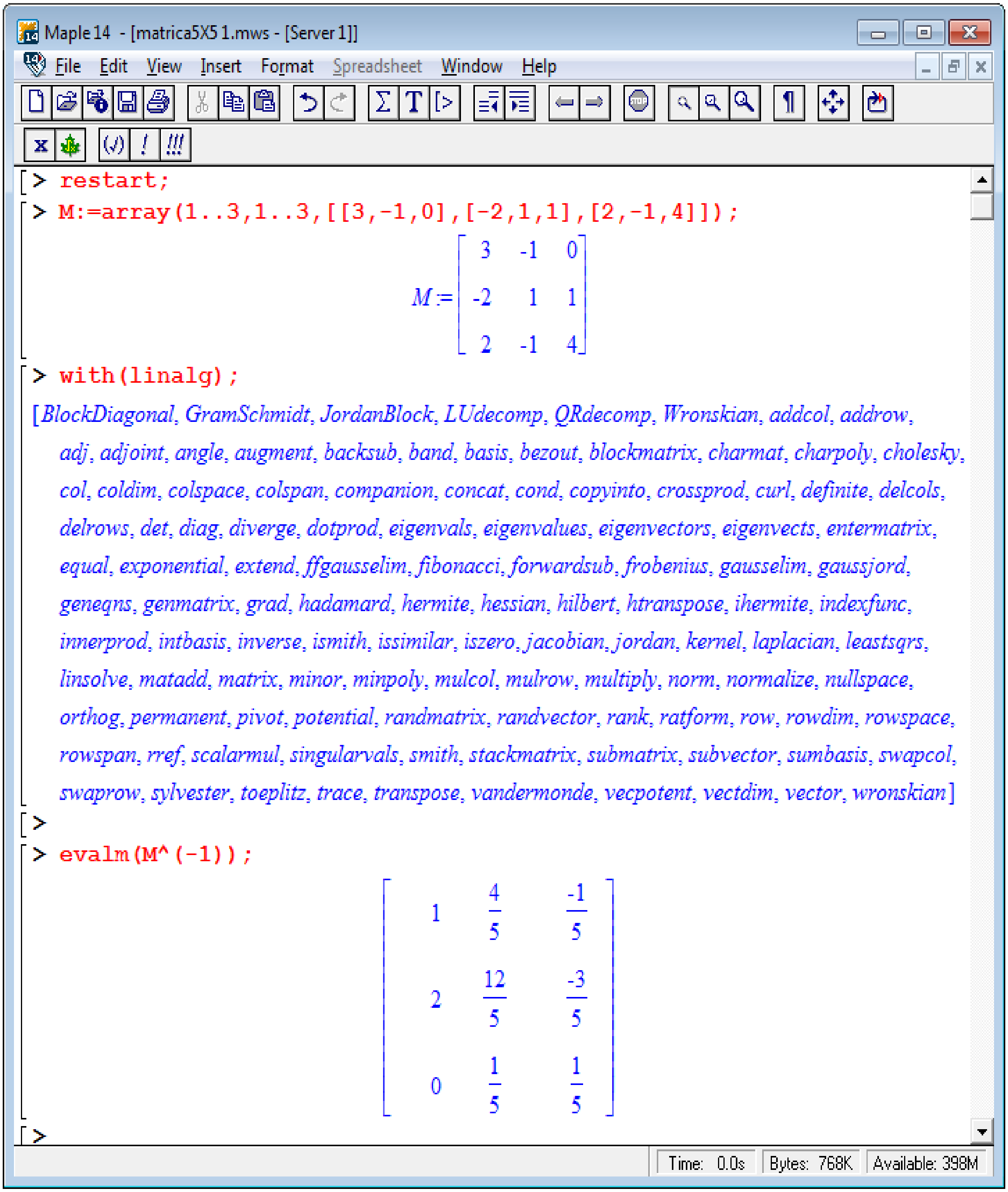
$$\mathbf{M}_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,\ \mathbf{M}_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\mathbf{M}_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\mathbf{M}^* = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ . ანუ **M** მატრიცის შებრუნებული მატრიცა $\mathbf{M}^{-1}$–ს ექნება სახე:

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} .$$

ახლა ეს ყველაფერი გავაკეთოთ პროგრამა **Maple**–ს საშუალებით. ჯერ გავაკეთოთ **M** მატრიცისთვის და შემდეგ თავიდან მოცემული მე–5–ე რიგის მატრიცა **A**–თვის. იხილე ნახ.5.5 და ნახ.5.6


Maple 14 - [matrica5X5 1.mws - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
> restart;
> M:=array(1..3,1..3,[[3,-1,0],[-2,1,1],[2,-1,4]]);
M := [3 -1 0; -2 1 1; 2 -1 4]
> with(linalg);
[BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol, addrow, adj, adjoint, angle, augment, backsub, band, basis, bezout, blockmatrix, charmat, charpoly, cholesky, col, coldim, colspace, colspan, companion, concat, cond, copyinto, crossprod, curl, definite, delcols, delrows, det, diag, diverge, dotprod, eigenvals, eigenvalues, eigenvectors, eigenvects, entermatrix, equal, exponential, extend, ffgausselim, fibonacci, forwardsub, frobenius, gausselim, gaussjord, geneqns, genmatrix, grad, hadamard, hermite, hessian, hilbert, htranspose, ihermite, indexfunc, innerprod, intbasis, inverse, ismith, issimilar, iszero, jacobian, jordan, kernel, laplacian, leastsqrs, linsolve, matadd, matrix, minor, minpoly, mulcol, mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace, orthog, permanent, pivot, potential, randmatrix, randvector, rank, ratform, row, rowdim, rowspace, rowspan, rref, scalarmul, singularvals, smith, stackmatrix, submatrix, subvector, sumbasis, swapcol, swaprow, sylvester, toeplitz, trace, transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim, vector, wronskian]
>
> evalm(M^(-1));
[1 4/5 -1/5; 2 12/5 -3/5; 0 1/5 1/5]
>
Time: 0.0s Bytes: 768K Available: 398M

ნახ.5.5

Maple 14 - [Shebrunebuli.mws - [Server 1]]

File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help

```
> restart;
> with(linalg);
```

[BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol, addrow, adj, adjoint, angle, augment, backsub, band, basis, bezout, blockmatrix, charmat, charpoly, cholesky, col, coldim, colspace, colspan, companion, concat, cond, copyinto, crossprod, curl, definite, delcols, delrows, det, diag, diverge, dotprod, eigenvals, eigenvalues, eigenvectors, eigenvects, entermatrix, equal, exponential, extend, ffgausselim, fibonacci, forwardsub, frobenius, gausselim, gaussjord, geneqns, genmatrix, grad, hadamard, hermite, hessian, hilbert, htranspose, ihermite, indexfunc, innerprod, intbasis, inverse, ismith, issimilar, iszero, jacobian, jordan, kernel, laplacian, leastsqrs, linsolve, matadd, matrix, minor, minpoly, mulcol, mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace, orthog, permanent, pivot, potential, randmatrix, randvector, rank, ratform, row, rowdim, rowspace, rowspan, rref, scalarmul, singularvals, smith, stackmatrix, submatrix, subvector, sumbasis, swapcol, swaprow, sylvester, toeplitz, trace, transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim, vector, wronskian]

```
> A:=array(1..5,1..5,[[1,1,2,-3,2],[2,5,5,5,5],[3,2,5,5,1],[4,-1,2,0,3],[5,3,8,-1,4]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 8 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(A^(-1));
```

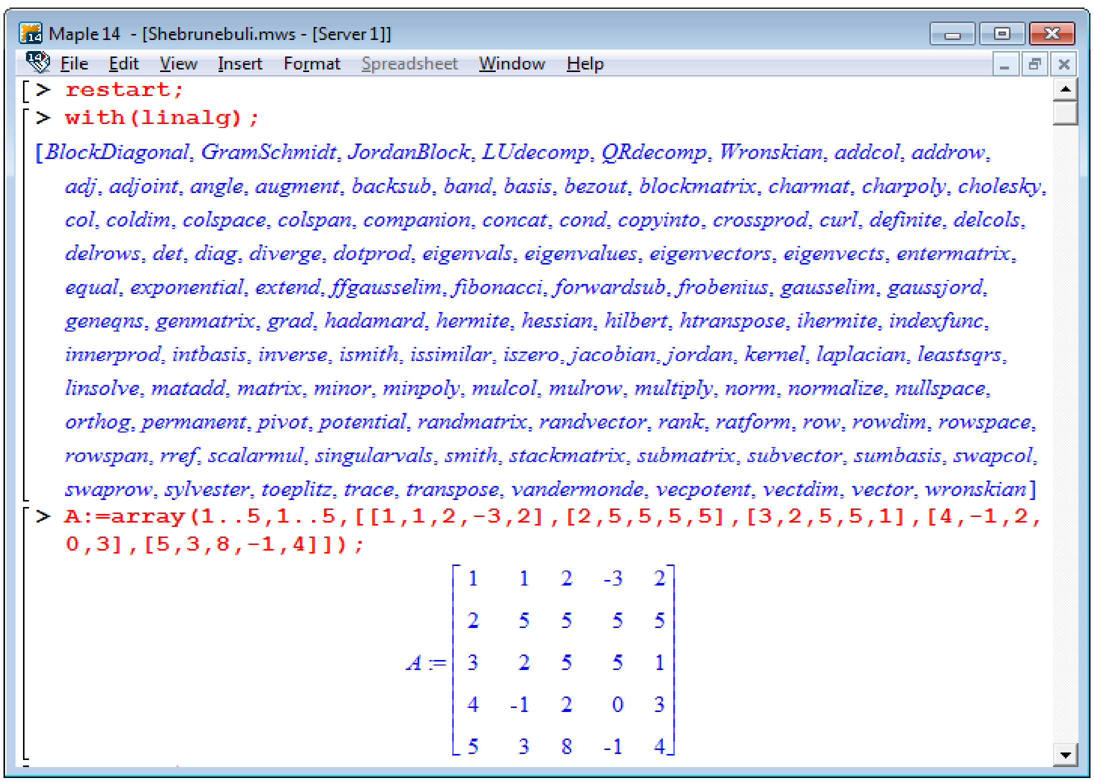
$$\begin{bmatrix} \frac{-119}{16} & \frac{5}{8} & \frac{-17}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{67}{16} \\ \frac{-589}{80} & \frac{31}{40} & \frac{-87}{20} & \frac{-11}{20} & \frac{337}{80} \\ \frac{57}{10} & \frac{-3}{5} & \frac{17}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-31}{10} \\ \frac{39}{40} & \frac{-1}{20} & \frac{7}{10} & \frac{1}{10} & \frac{-27}{40} \\ \frac{293}{80} & \frac{-7}{40} & \frac{39}{20} & \frac{7}{20} & \frac{-169}{80} \end{bmatrix}$$

```
> 
```

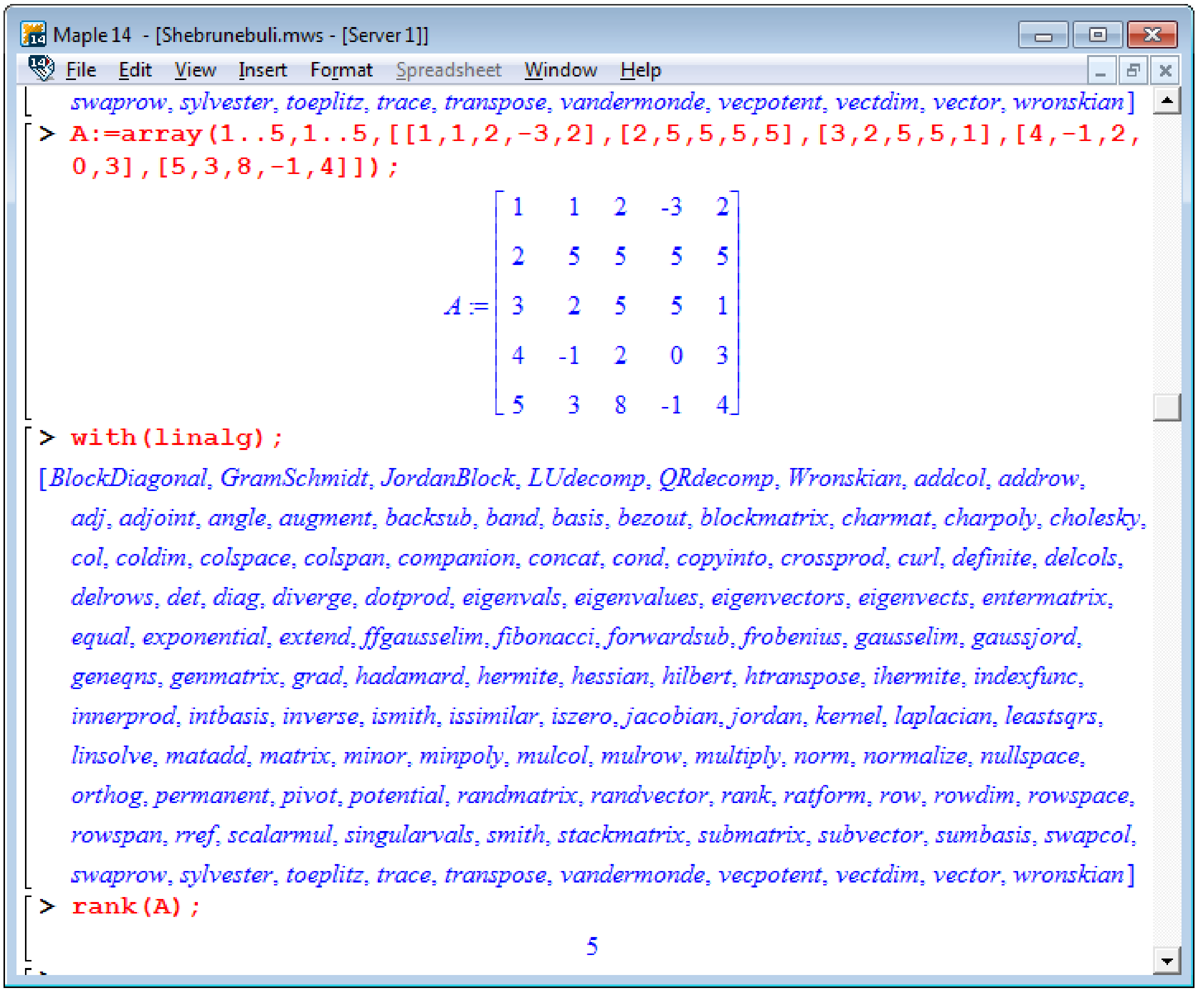
ნახ.5.6

ახლა განვიხილოთ მატრიცის რანგის ცნება და მისი ანგარიში. მატრიცის რანგი, როგორც ასეთი გამოიყენება სპეციალური ტიპის წრფივი ალგებრული განტოლებების სისტემის ამოხსნისას.

განვიხილოთ **m** x **n** რიგის მატრიცა. შევარჩიოთ ამ მატრიცაში ნებისმიერი **r** სტრიქონი და **r** სვეტი, სადაც **r≤min{m,n}.** არჩეული სტრიქონებისა და სვეტების გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტებისაგან შედგენილ დეტერმინანტს მატრიცის **r რიგის მინორი** ეწოდება. მატრიცის რანგი აღინიშნება **rang A** (A მატრიცის სახელია). ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ **r** რიგის მინორთა შორის ერთი მაინც განსხვავებულია ნოლისგან, ხოლო ყველა (**r**+1) რიგის მინორი( თუ ასეთი არსებობს) ნოლის ტოლია, მაშინ მატრიცის რანგი **r** რიცხვის ტოლია.




ნახ.5.7




ნახ.5.8

ნახ.5.8 არის ნახ5.7–ის გაგრძელება.

# თავი 6.წრფივი განტოლებებისა და წრფივ განტოლებათა სისტემების ამოხსნა Maple –ში

## 6.1 ფუნქცია SOLVE() და მისი გამოყენება განტოლებების ამოხსნისას Maple –ში

ოპერატორი **SOLVE()** გამოიყენება განტოლებების, უტოლობების, განტოლებათა და უტოლობათა სისტემების ამოსახსნელად. **Maple –ში** ამ ოპერატორს აქვს შემდეგი სინტაქსი:

SOLVE(განტოლება); ან

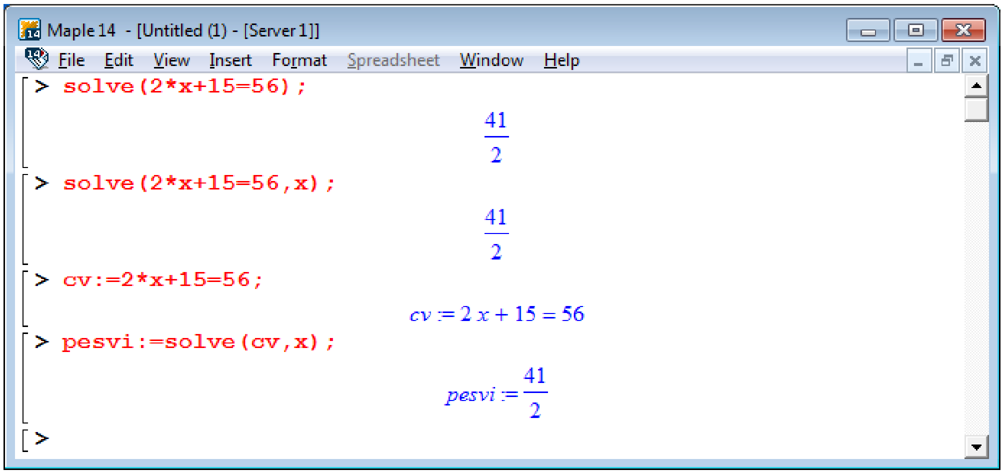
SOLVE(განტოლება, ცვლადი); ან

SOLVE({განტოლება1,განტოლება2,...,განტოლებაN},{ცვლადი1, ცვლადი2,...,ცვლადი N});

განტოლებების ამოხსნა **Maple–ში** შეიძლება, როგორც პირდაპირ **SOLVE()** ოპერატორის ტანში განტოლების მითითებით, ასევე შუალედური ცვლადის გამოყენებით, რომელსაც წინასწარ უნდა მივანიჭოთ ამ განტოლების სახე. მაგალითად ვთქვათ გვინდა ამოვხსნათ უმარტივესი წრფივი განტოლება $2x+15=56$ ის **Maple–ში** შეიძლება, ჩაიწეროს პირდაპირ ან სუალედური ცვლადის გამოყენებით:

1.> `solve(2*x+15=56);` 2. > `solve(2*x+15=56,x);`

**3.** > `cv:=2*x+15=56;` > `pesvi:=solve(cv,x);` ეს ყველაფერი **Maple–ში** ასე გამოიყურება:

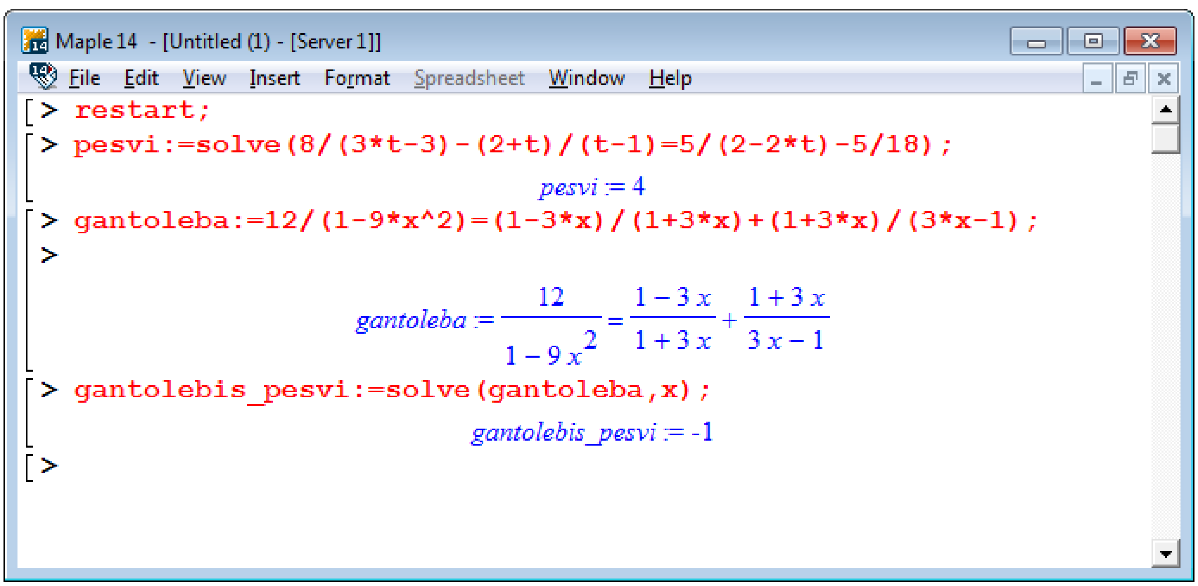



ნახ.6.1

ნახ.6.1 დან ჩანს, რომ ნებისმიერი წრფივი განტოლება შეიძლება ამოხსნილი იქნას **Maple–ში** ძალიან მოხერხებულად. ახლა ამოვხსნათ შემდეგი სტილის წრფივი ორი განტოლება:

$$\frac{8}{3t-3}-\frac{2+t}{t-1}=\frac{5}{2-2t}-\frac{5}{18} \quad \text{და} \quad \frac{12}{1-9x^2}=\frac{1-3x}{1+3x}+\frac{1+3x}{3x-1}$$

**Maple–ში** ამ განტოლების ამოხსნა შეიძლება ასე:

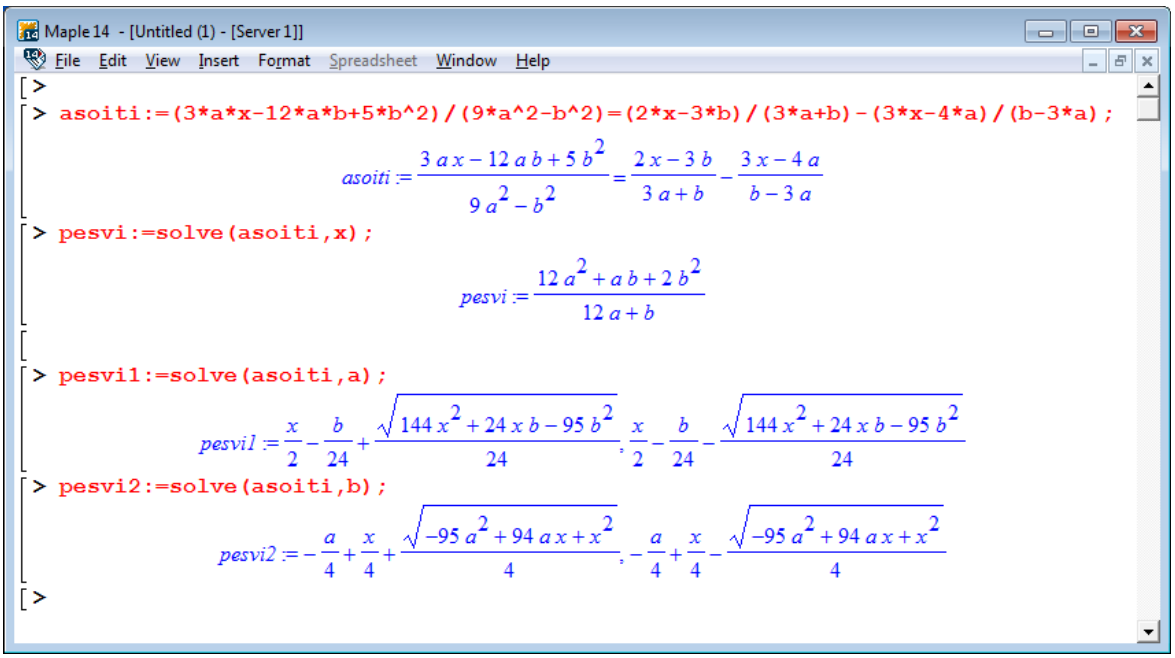



ნახ.6.2

ახლა განვიხილოთ ასოთკოეფიციენტიანი წრფივი განტოლებები და შევისწავლოთ მათი **Maple–ში** ამ განტოლების ამოხსნის შესაძლებლობები. ვთქვათ მოცემული გვაქვს წრფივი ასოთკოეფიციენტიანი შემდეგი განტოლება:

$$\frac{3ax-12ab+5b^2}{9a^2-b^2}=\frac{2x-3b}{3a+b}-\frac{3x-4a}{b-3a} \qquad (6.1)$$

ეს განტოლება შეიძლება ამოხსნილ იქნას, როგორც $x$ –ის ასევე $a$ –ს და $b$ –ს მიმართაც. **Maple–ში** ამ განტოლების ამოხსნის პროგრამული ფანჯარა მოცემულია ნახ.6.3–ზე, მაგრამ აქ ჩვენ მოვლენებს უკვე წინ გავასწარით, რადგან (6.1) $a$ –ს და $b$ –ს მიმართ უკვე არაწრფივია (ამ შემთხვევაში კვადრატული). თუმცაღა **Maple–ს** არც მაღალი რიგის განტოლებებთან აქვს რაიმე პრობლემა.




ნახ.6.3

## 6.2 ზუსტი და მიახლოებითი ამონახსნების მიღება Maple –ში

ზოგიერთ განტოლებებს არა აქვთ ზუსტი ამონასნები ამ შემთხვევაში პროგრამა გვთავაზობს მახლოებით ამონახსნებს, განსაკუთრებით ეს ხდება ტრანსცენდენტული განტოლებების ამოხსნის დროს. თუ გვინდა განტოლების ამონახსნები წარმოდგენილი

იქნან ათწილადების სახით, მაშინ საკმარისია **SOLVE()** ოპერატორში ჩაწერილი განტოლების ერთ–ერთ კოეფიციენტს ბოლოში დავუწეროთ წერტილი, რაც **Maple –თვის** იმის დამმესიჯებელია, რომ ამონახსნები წარმოადგინოს (თუ განტოლებას რაღათქმა უნდა აქვს ამონახსნი) ათწილადის სახით. მაგალითად განვიხილოთ რამოდენიმე ასეთი განტოლება:

1. $55x + 777 = 9999$
2. $55x + 777. = 9999$
3. $3\pi + 2.723 = 12.987$
4. $\dfrac{6\pi x + 3}{4\pi x - 7} = \dfrac{12x + 2}{6x + 5}$

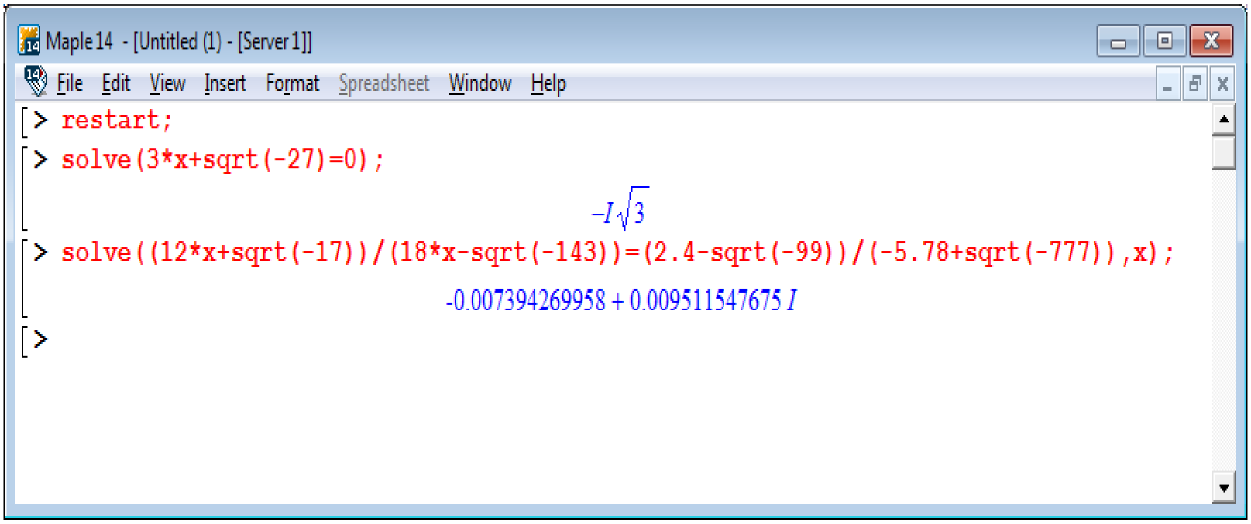
ამ 4 განტოლების ამოხსნის **Maple** ალგორითმი მოცემულია ნახ. 6.4–ზე


ნახ. 6.4

თუ წრფივ განტოლებას არა აქვს ნამდვილი ამონახსნები, მაშინ პროგრამა **Maple** განტოლებას ამოგვიხსნის კომპლექსურ რიხვთა სიმრავლეში. განვიხილოთ ორი მაგალითი:

1 . $3x + \sqrt{-27} = 0$ 2. $\dfrac{12x + \sqrt{-17}}{18x - \sqrt{-143}} = \dfrac{2.4 - \sqrt{-99}}{-5.78 + \sqrt{-777}}$

ამ განტოლებების კომპლექსურად ამოხსნის **Maple** ალგორითმი მოცემულია ნახ 6.5–ზე. (ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ამ განტოლებებს ამოხსნა არა აქვთ).

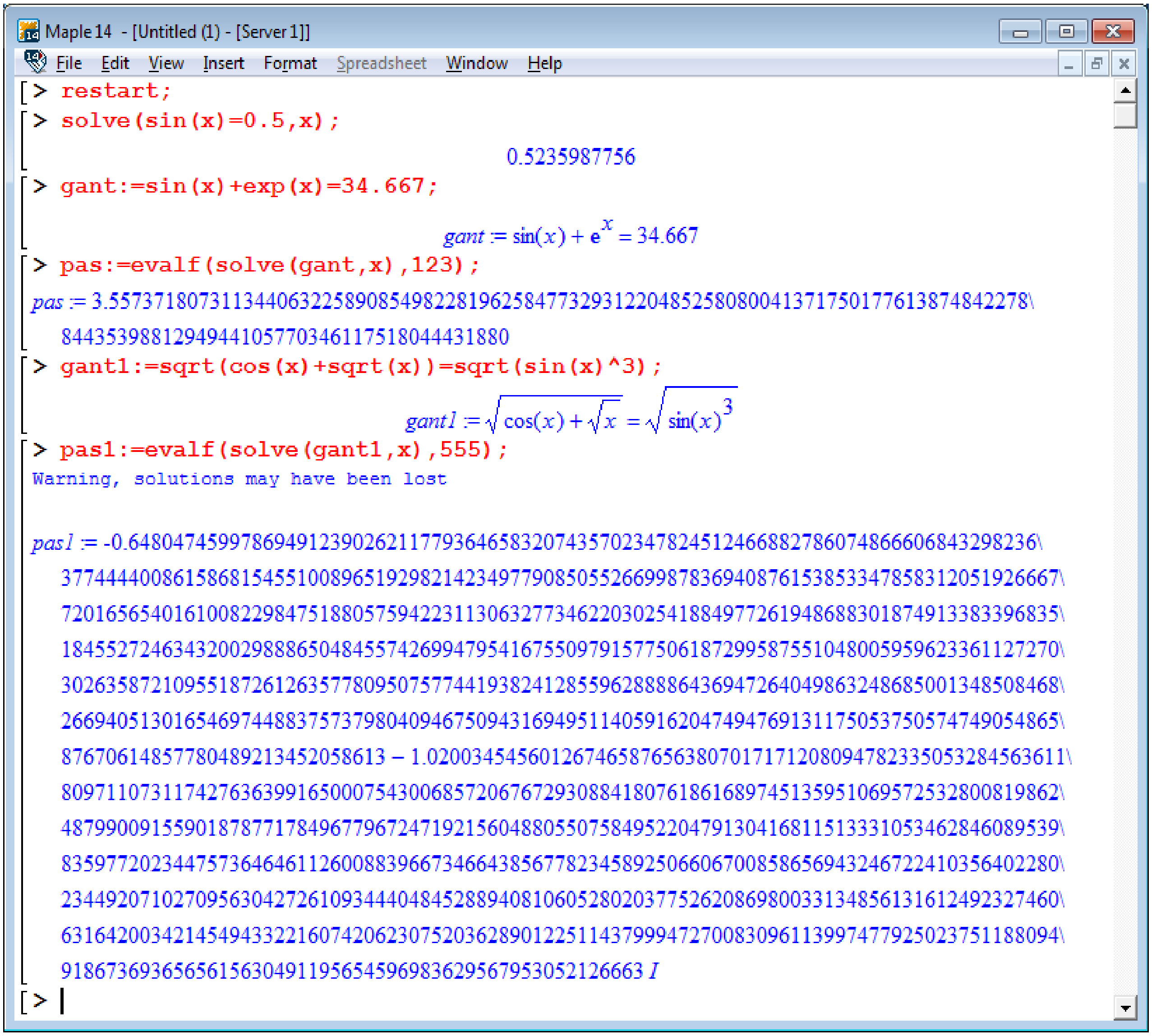



ნახ. 6.5

მიახლოებითი ამოხსნები განსაკუთრებით აქტუალურია ტრანსცენდენტული განტოლებების ამოხსნისას. გავასწროთ პროგრამას წინ და ამოვხსნათ ზოგიერთი ტრანსცენდენტული განტოლებები. მაგალითად განვიხილოთ განტოლებები

1. $\sin x = 0.5$
2. $\sin x + \ell^x = 34.667$
3. $\sqrt{\cos x + \sqrt{x}} = \sqrt{\sin^3 x}$

ამ განტოლებების ამოხსნის **Maple** ალგორითმები მოცემულია ნახ 6.6–ზე. (ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ამ განტოლებებს ამოხსნა არა აქვთ). ნახაზი 6.6–დან ჩანს რომ ყველა ამ განტოლებას აქვს ამონახსნის სახით უსასრულო არაპერიოდული რიცხვები, ხოლო ბოლო განტოლებას საერთოდ კომპლექსური ამონახსენი აქვს, ამიტომ ჩვენ გამოვიყენეთ ფუნქცია **evalf(),** რომელიც გვაძლევს საშუალებას ამონახსნში გამოვიტანოთ მძიმის შემდეგ რაგინდ დიდი რაოდენობა ზუსტი თანრიგებისა, რაც რაღათქმაუნდა ჩვენი გამოთვლების სიზუსტეს ძალიან ზრდის.



Maple 14 - [Untitled (1) - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
> restart;
> solve(sin(x)=0.5,x);
0.5235987756
> gant:=sin(x)+exp(x)=34.667;
gant := sin(x) + e^x = 34.667
> pas:=evalf(solve(gant,x),123);
pas := 3.557371807311344063225890854982281962584773293122048525808004137175017761387484227 8\
844353988129494410577034611751804443188 0
> gant1:=sqrt(cos(x)+sqrt(x))=sqrt(sin(x)^3);
gant1 := √(cos(x) + √x) = √(sin(x)^3)
> pas1:=evalf(solve(gant1,x),555);
Warning, solutions may have been lost
pas1 := -0.64804745997869491239026211779364658320743570234782451246688278607486660684329823 6\
377444400861586815455100896519298214234977908505526699878369408761538533478583120519266 67\
720165654016100822984751880575942231130632773462203025418849772619486883018749133833968 35\
184552724634320029888650484557426994795416755097915775061872995875510480059596233611272 70\
302635872109551872612635778095075774419382412855962888864369472640498632486850013485084 68\
266940513016546974488375737980409467509431694951140591620474947691311750537505747490548 65\
876706148577804892134520586 13 – 1.020034545601267465876563807017171208094782335053284563611\
809711073117427636399165000754300685720676729308841807618616897451359510695725328008198 62\
487990091559018787717849677967247192156048805507584952204791304168115133310534628460895 39\
835977202344757364646112600883966734664385677823458925066067008586569432467224103564022 80\
234492071027095630427261093444048452889408106052802037752620869800331348561316124923274 60\
631642003421454943322160742062307520362890122511437999472700830961139974779250237511880 94\
918673693656561563049119565459698362956795305212666 3 I
>

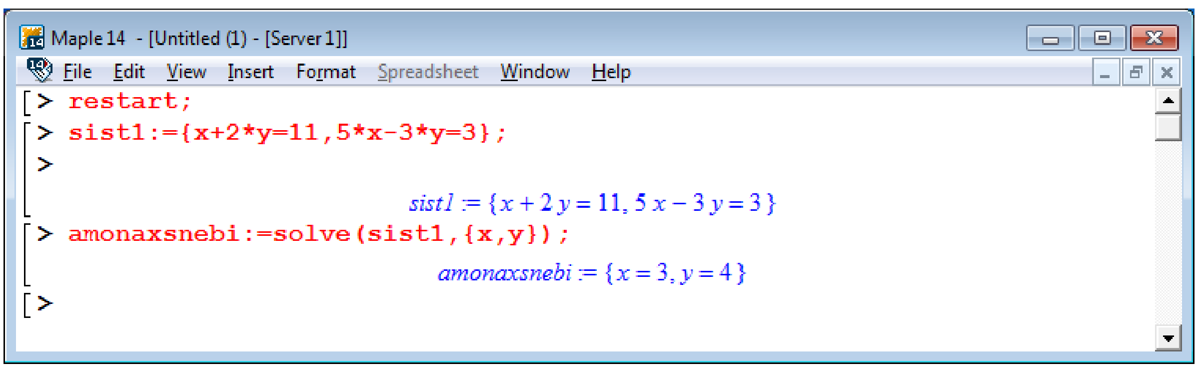
ნახ. 6.6

## 6.3. წრფივ განტოლებათა სისტემების ამოხსნა (კრამერის ფორმულებით და გაუსის მეთოდით ) Maple –ში

ოპერატორი **SOLVE()** , როგორც ვთქვით გამოიყებნება არა მხოლოდ ცალკეული განტოლებების, არამედ განტოლებათა სისტემებისა და უტოლობების ამოსახსნელად. ამ თავში განვიხილავთ განტოლებათა ( წრფივ განტოლებათა სისტემების) ამოხსნას. ჯერ განვიხილოთ ის მათემატიკური მეთოდები რა მეთოდებითაც კაცობრიობა ხსნიდა წრფივ განტოლებათა სისტემებს. დღემდე წრფივ განტოლებათა სისტემების ამოხსნის ყველაზე მიღებულ მეთოდებად მიიჩნევა **კრამერის** ანუ დეტერმინანტების და **გაუსის** ანუ მიმდევრობითი გამორიცხვის მეთოდები. არსებობს კიდევ სხვადასხვა ევრისტიკული მეთოდები თუ განტოლებათა მოცემული სისტემა გვაძლევს ამ ევრისტიკული მეთოდის გამოყენების საშუალებას. ჯერ სანამ დაწვრილებით განვიხილავდით კრამერისა და გაუსის მეთოდებს განვიხილოთ მარტივი მაგალითი წრფივი განტოლებების სისტემის ოპერატორი **SOLVE()** –ით ამოხსნაზე. მაგალითად მოცემულია განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} x+2y=11 \\ 5x-3y=3 \end{cases} \qquad (6.2)$$

**Maple –ში** ამ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ნიმუში მოცემულია ნახ. 6.7–ზე.




ნახ.6.7

ახლა განვიხილოთ n რიგის წრფივ განტოლებათა ზოგადი სისტემა ასეთი სახით (ფორმულა 6.3):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 + \ldots + & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 + \ldots + & a_{2n}x_n = & b_2 \\ a_{31}x_1 + & a_{32}x_2 + & a_{33}x_3 + \ldots + & a_{3n}x_n = & b_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & a_{n3}x_3 + \ldots + & a_{nn}x_n = & b_n \end{cases} \qquad (6.3)$$

ამ განტოლებათა სისტემის კრამერის წესით ამოხსნის მეთოდი მდგომარეობს მთავარი და დამხმარე დეტერმინანტების მოძებნისა და მათი საშუალებით სისტემის საძიებელი უცნობების მოძებნაში. კერძოდ

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}$$

ახლა წარმოვადგინოთ $\Delta$ და $\Delta x_i$ დეტერმინანტები გამოისახებიან შემდეგნაირად:

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (6.4)$$

$$\Delta x_1 = \det \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (6.5)$$

$$\Delta x_2 = \det \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (6.6)$$

$$\Delta x_3 = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & .. & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (6.7)$$

. . . . . . . . . . . . . .

$$\Delta x_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & b_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & b_n \end{vmatrix} \qquad (6.8)$$

ახლა განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი (6.9)

(6.9)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 + x_4 = 2{,}7 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 + 4x_3 - 8{,}5x_4 = 21{,}9 \\ 0{,}3x_1 - x_2 + x_3 + 5{,}2x_4 = -3{,}9 \\ x_1 + 0{,}2x_2 + 2{,}5x_3 - x_4 = 9{,}9 \end{cases}$$

ჯერ ამოვხსნათ (6.9) სისტემა **კრამერის** ფორმულებით, ანუ დეტერმინანტების ხერხით: დაგვჭირდება ხუთი დეტერმინანტი, ერთი ძირითადი $\Delta$ და ოთხი დამხმარე $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4$ ამ სიტემის ამონახსნები შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

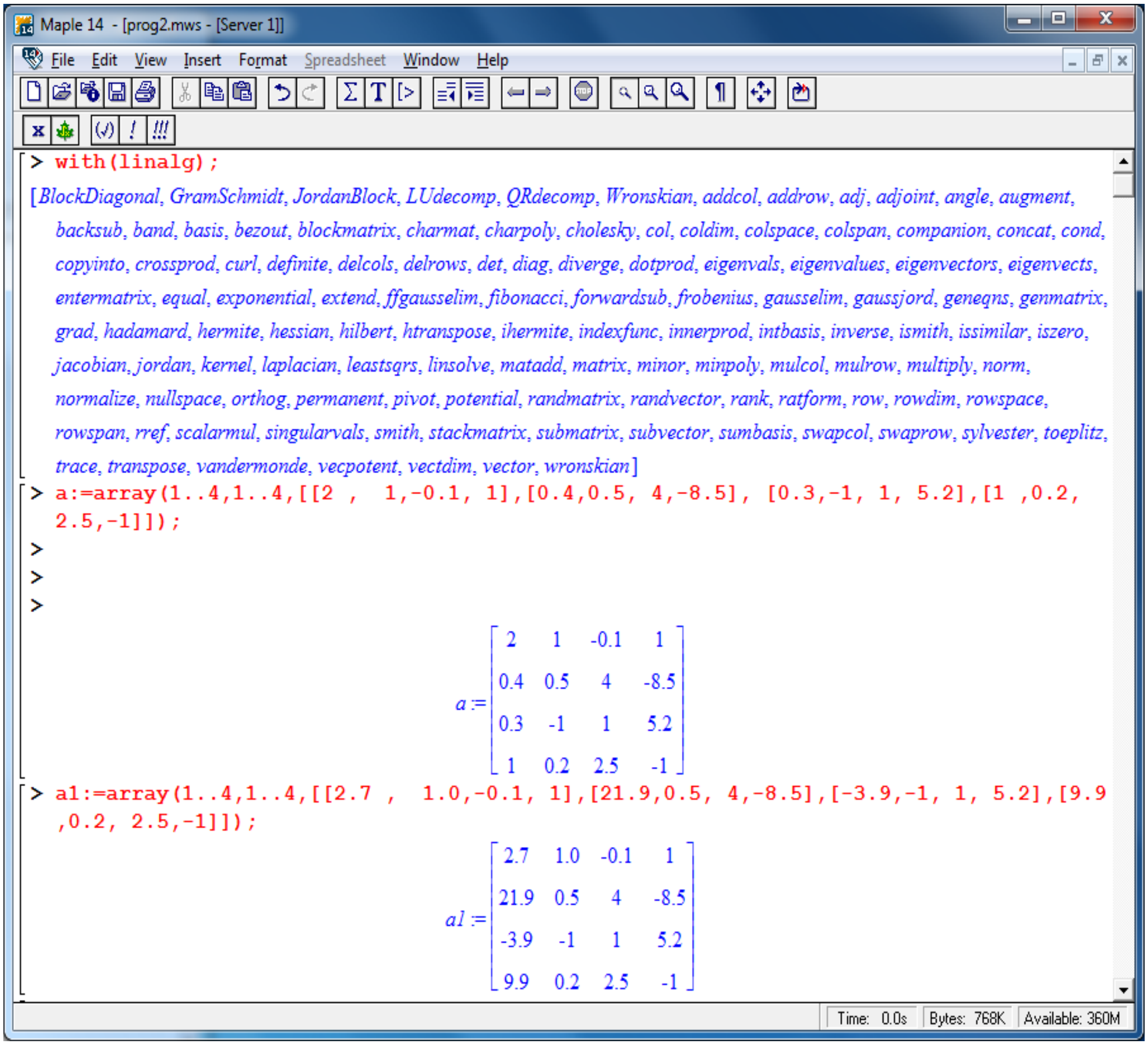
$x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta}$ $x_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta}$, $x_4 = \dfrac{\Delta x_4}{\Delta}$ სადაც,

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & -0{,}1 & 1 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 4 & -8{,}5 \\ 0{,}3 & -1 & 1 & 5{,}2 \\ 1 & 0{,}2 & 2{,}5 & -1 \end{vmatrix} \quad \Delta x_1 = \det \begin{vmatrix} 2{,}7 & 1 & -0{,}1 & 1 \\ 21{,}9 & 0{,}5 & 4 & -8{,}5 \\ -3{,}9 & -1 & 1 & 5{,}2 \\ 9{,}9 & 0{,}2 & 2{,}5 & -1 \end{vmatrix}$$

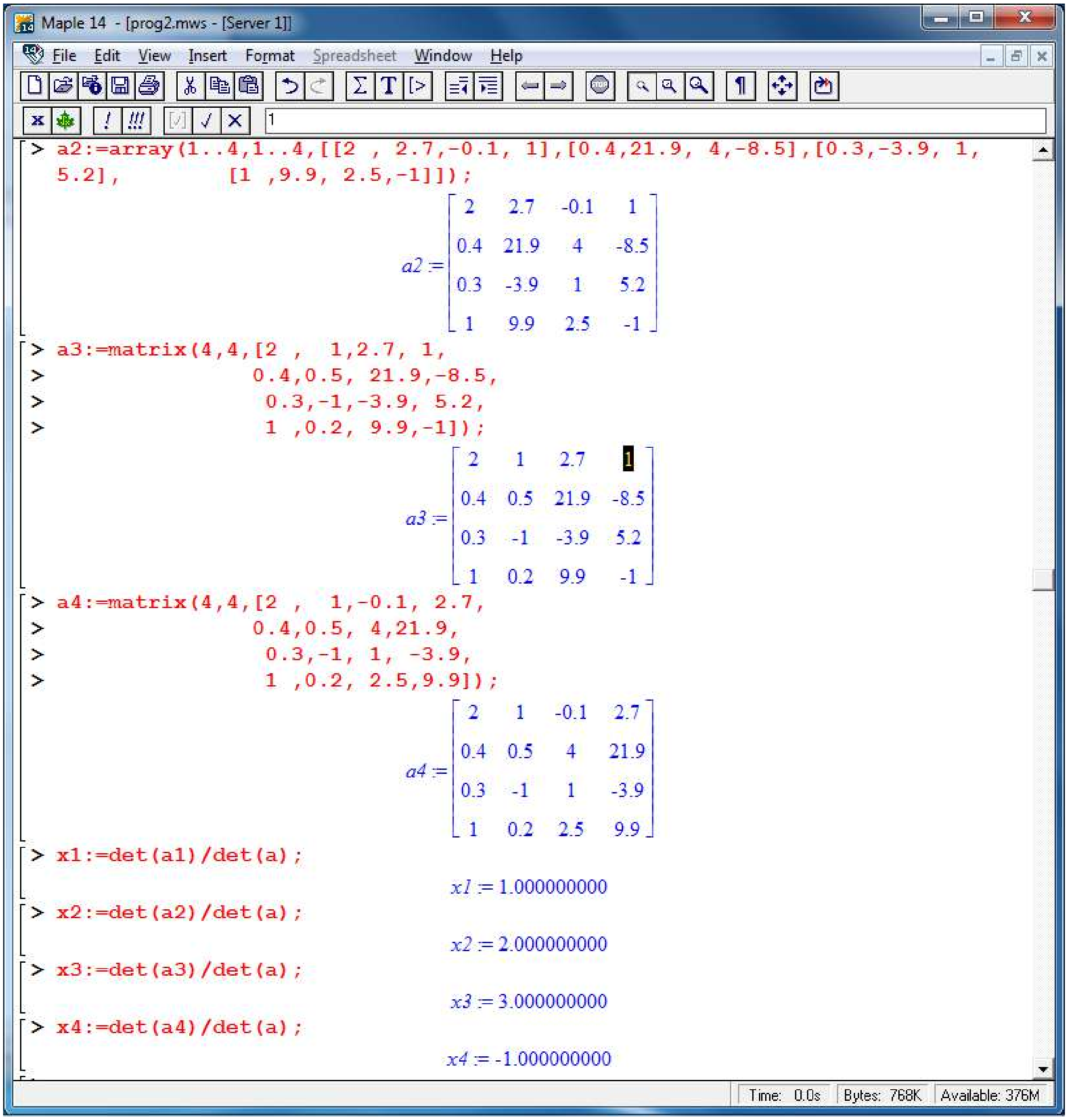
$$\Delta x_2 = \det \begin{vmatrix} 2 & 2{,}7 & -0{,}1 & 1 \\ 0{,}4 & 21{,}9 & 4 & -8{,}5 \\ 0{,}3 & -3{,}9 & 1 & 5{,}2 \\ 1 & 9{,}9 & 2{,}5 & -1 \end{vmatrix} \quad \Delta x_3 = \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2{,}7 & 1 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 21{,}9 & -8{,}5 \\ 0{,}3 & -1 & -3{,}9 & 5{,}2 \\ 1 & 0{,}2 & 9{,}9 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta x_3 = \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & -0{,}1 & 2{,}7 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 4 & 21{,}9 \\ 0{,}3 & -1 & 1 & -3{,}9 \\ 1 & 0{,}2 & 2{,}5 & 9{,}9 \end{vmatrix}$$

ახლა ეს გამოთვლები განვახორციელოთ პროგრამა **Maple –ში** ოპერატორი **SOLVE()** –ით შემდეგნაირად:


Maple 14 - [prog2.mws - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
> with(linalg);
[BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol, addrow, adj, adjoint, angle, augment, backsub, band, basis, bezout, blockmatrix, charmat, charpoly, cholesky, col, coldim, colspace, colspan, companion, concat, cond, copyinto, crossprod, curl, definite, delcols, delrows, det, diag, diverge, dotprod, eigenvals, eigenvalues, eigenvectors, eigenvects, entermatrix, equal, exponential, extend, ffgausselim, fibonacci, forwardsub, frobenius, gausselim, gaussjord, geneqns, genmatrix, grad, hadamard, hermite, hessian, hilbert, htranspose, ihermite, indexfunc, innerprod, intbasis, inverse, ismith, issimilar, iszero, jacobian, jordan, kernel, laplacian, leastsqrs, linsolve, matadd, matrix, minor, minpoly, mulcol, mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace, orthog, permanent, pivot, potential, randmatrix, randvector, rank, ratform, row, rowdim, rowspace, rowspan, rref, scalarmul, singularvals, smith, stackmatrix, submatrix, subvector, sumbasis, swapcol, swaprow, sylvester, toeplitz, trace, transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim, vector, wronskian]
> a:=array(1..4,1..4,[[2 ,  1,-0.1, 1],[0.4,0.5, 4,-8.5], [0.3,-1, 1, 5.2],[1 ,0.2, 2.5,-1]]);
>
>
>
a := [[2, 1, -0.1, 1], [0.4, 0.5, 4, -8.5], [0.3, -1, 1, 5.2], [1, 0.2, 2.5, -1]]
> a1:=array(1..4,1..4,[[2.7 ,  1.0,-0.1, 1],[21.9,0.5, 4,-8.5],[-3.9,-1, 1, 5.2],[9.9,0.2, 2.5,-1]]);
a1 := [[2.7, 1.0, -0.1, 1], [21.9, 0.5, 4, -8.5], [-3.9, -1, 1, 5.2], [9.9, 0.2, 2.5, -1]]
Time: 0.0s Bytes: 768K Available: 360M

ნახ. 6.8




ნახ. 6.9

ახლა იგივე განტოლება ამოვხსნათ **გაუსის** გამორიცხვის მეთოდით. ეს მეთოდი ჩვენ გამოვიყენეთ დეტერმინატების გამოთვლისას პარაგრაფ 5.1–ში.

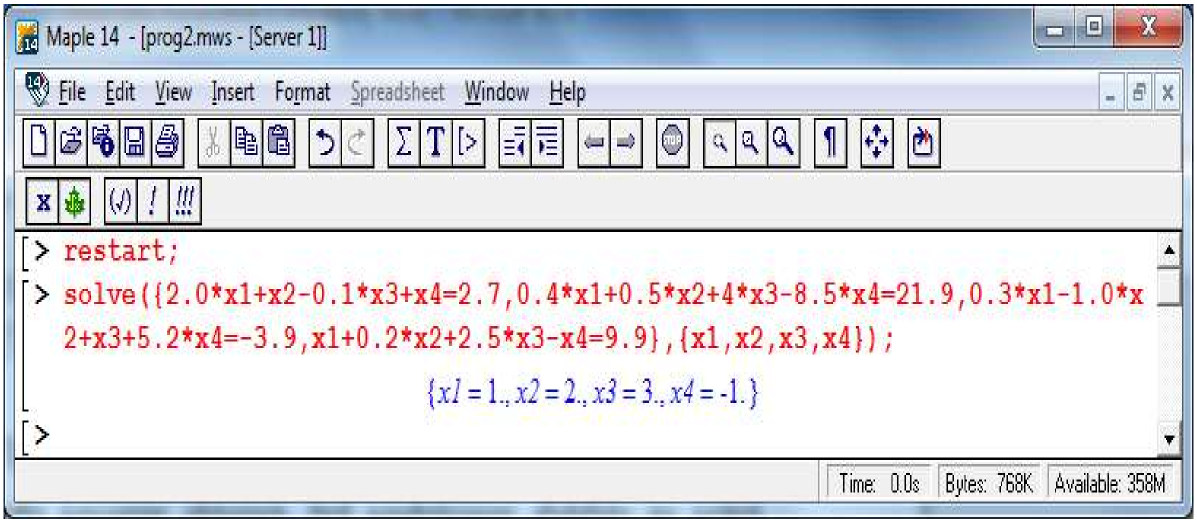
**გაუსის გარდაქმნის** შემდეგ წრფივ განტოლებათა სისტემა (6.9) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 0{,}5x_2 - 0{,}05x_3 + 0.5x_4 &= 1{,}35 \\ x_2 + 13{,}40x_3 - 29{,}0x_4 &= 71{,}2 \\ x_3 - 1{,}72298\,x_4 &= 4{,}72298 \\ 1{,}11998\,x_4 &= -1{,}11998 \end{aligned}\right\} \qquad (6.10)$$

აქედან $x_4$ =–1,000; $x_3$ =4,722998–1,72298=3,000;

$x_2$ =71,2–13,4*3+29,0=2,000; $x_1$ =1,35-0,5*2+0,05*3+0.5=1;

ეს ყველაფერი გავაკეთეთ იმისათვის, რომ გავცნობოდით კრამერისა და გაუსის მეთოდებს წრფივი განტოლებების ამოხსნისას. პროგრამა **Maple** –შიოპერატორი **SOLVE()** –ით შეიძლება ამოვხნათ პირდაპირ შემდეგნაირად:



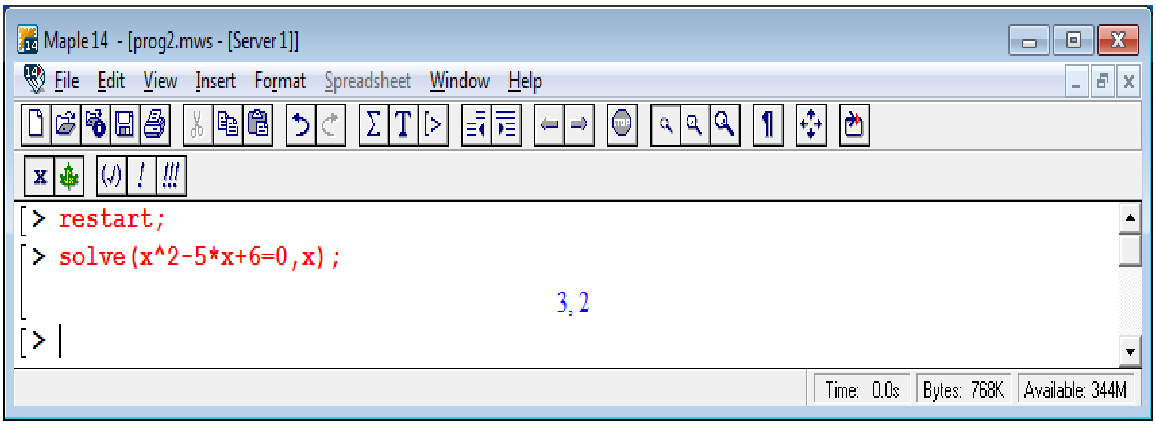

ნახ. 6.10

# თავი 7. არაწრფივი განტოლებებისა და განტოლებათა სისტემების ამოხსნა Maple –ში

## 7.1 ფუნქცია SOLVE() და მისი გამოყენება არაწრფივი განტოლებების ამოხსნისას Maple –ში

პ როგრამა **Maple –ში** , როგორც ზემოთ უკვე ვნახეთ ნებისმიერი წრფივი განტოლებების სისტემების ამოხსნაა შესაძლებელი ძალიან მოხერხებულად და სწრაფად. მაღალი რიგის დეტერმინანტების გამოთვლაა შესაძლებელი უპრობლემოდ, რამაც მოგვცა საშუალება წრფივი განტოლებათა სისტემების კრამერის ფორმულებით ამოხსნისა.
ასეთივე წარმატებით პროგრამა **Maple –ი** გვაძლევს საშუალებას ამოვხსნათ არაწრფივი , ტრანსცენდენტული ან მათი კომბინირებული ვარიანტები. გვაძლევს საშუალებას ჩავატაროთ ექსპერიმენტები განტოლებათა ამოხსნის დროს და სხვა. ახლა ვნახოთ არაწრფივი განტოლებების ამოხსნის მეთოდები პროგრამა **Maple –ში**. გამოთვლითი მათემატიკის ზოგადი კურსიდან ალბათ გვახსოვს (ვისაც არ ახსოვს გავახსენებთ), რომ ნებისმიერი არაწრფივი განტოლების მიახლოებითი ამოხსნისათვის ( თუ მას ზუსტი ამონახსენი არა აქვს), ვიყენებთ სხვადასხვა მეთოდებს ისეთებს როგორიცაა ბისექციის (შუაზე გაყოფის), მხებთა , ქორდათა ან მათი კომბინირებული მეთოდები და კიდევ ბევრი სხვა. ამ მეთოდებით ჩვენი წინაპრები ხსნიდნენ მაღალი რიგის ალგებრულ ან ტრანსცენდენტულ განტოლებებს, მაგრამ მე–20 და მითუმეტეს 21–ე საუკუნეში განტოლებების ამოხსნა „ადამისდროინდელი“ მიდგომით მსუბუქად, რომ ვთქვათ ჩამორჩენილობაა. დღეს მათემატიკოსები, ეკონომისტები, ფიზიკოსები, ინჟინრები და სხვა თითქმის ყველა სამცნიერო სფეროების სპეციალისტები , აღარ ცდებიან ( ბევრ დროს აღარ უთმობენ) მათემატიკური მოდელების რეალიზების საკითხებს, ანუ სხვადასხვა განტოლებებისა თუ სისტენების ამოხსნის საკითხებს. ძირითადად ყურადღებას უთმობენ პროცესების მათემატიკური მოდელირების საკითხებს. ხოლოა უკვე შემუშავებული მათემატიკური მოდელების რეალიზებისას გამოიყენებენ კომპიუტერულ პროგრამებს . მათ შორის რაღათქმა უნდა **Maple –ს.**

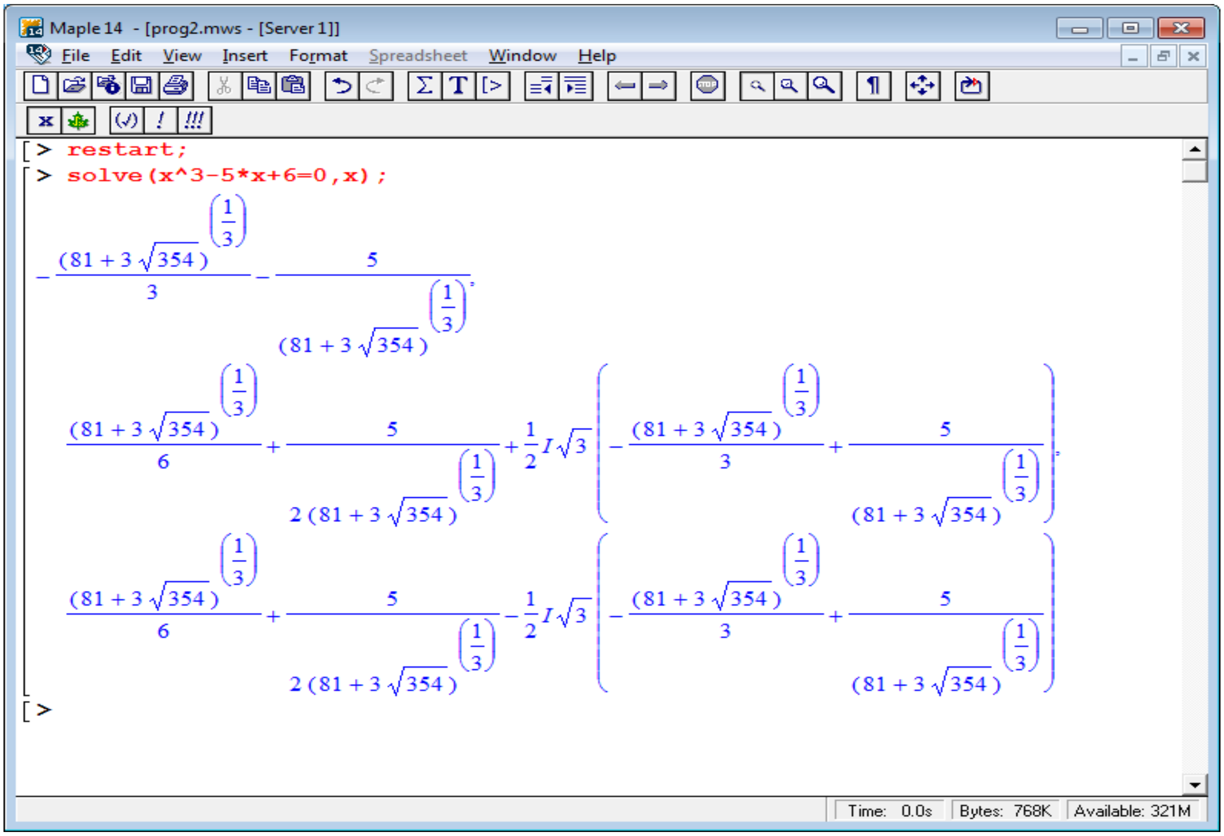
ამ პარაგრაფში ჩვენ გავეცნოთ **Maple –ში** სხვადასხვა არაწრფივი განტოლებების ამოხსნის სხვასახვა ხერხებს. დავიწყოთ უმარტივესი კვადრატული განტოლების ამოხსნით, რომლის ფესვებიც ზეპირად ადვილად მოიძებნება. ეს განტოლებაა $x^2-5x+6=0$ ზეპირად ადვი;ლად მივხვდებით ამ განტოლების ფესვებს $x_1=2$ $x_2=3$ პროგრამა **Maple –ში** ამ განტოლების ამოხსნის ვარიანტი ასე გამოიყურება ნახ.7.1




ნახ.7.1

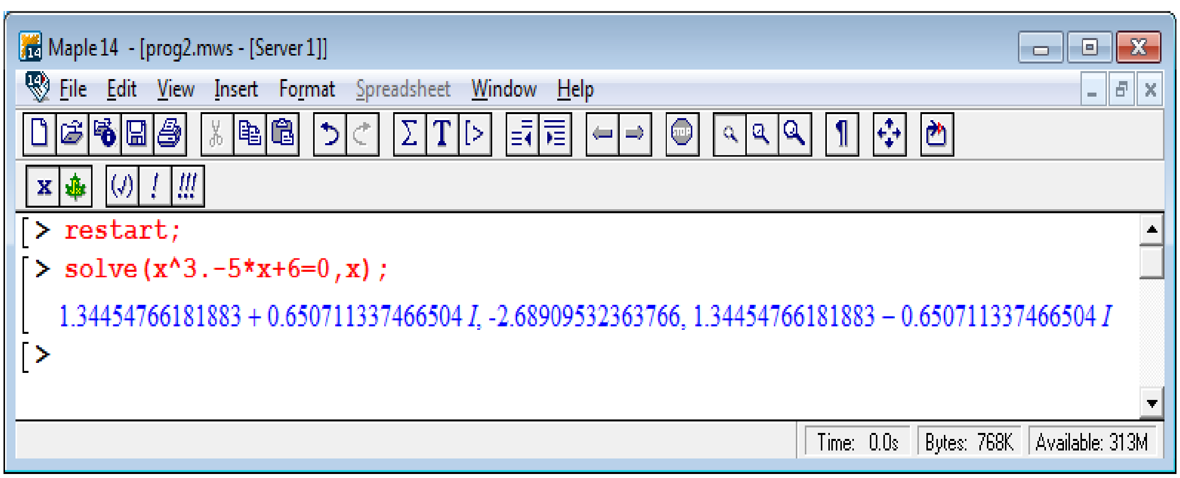
ახლა გვინდა ამოვხსნათ რაიმე მაღალი რიგის ალგებრული განტოლება ვთქვათ ასეთი $x^3-5x+6=0$. როგორც ვხვდებით ამ განტოლებას ვერ ამოვხსნით ვერც ზეპირად და არც რაიმე სტანდარტული მეთოდი არ არსებობს ასეთი ტიპის განტოლებების ამოხსნისა. აქ, როგორც ზემოთ უკვე ვთქვით საჭიროა გამოთვლითი მათემატიკის ერთ–ერთი მეთოდის საშუალებით ამოვხსნათ ეს განტოლება, მაგრამ ამ განტოლების ზუსტი ამონახსნების მიღება ძნელია, თუმცა არსებობს. **Maple –ში** კი ზუსტი ამონახსნები თუ არსებობს მისი მოძებნა ძალიან იოლია.

ამ განტოლების ამოხსნა ნაჩვენებია ნახ. 7.2–ზე.



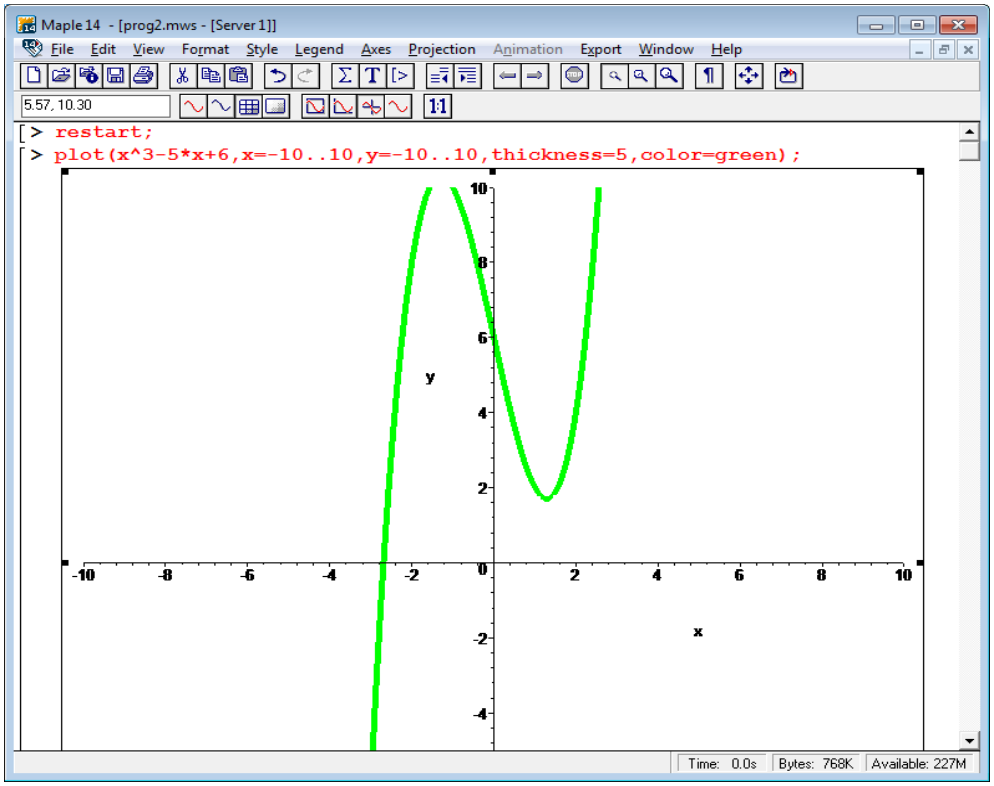

ნახ. 7.2

ნახ. 7.2 დან ჩანს, რომ ამ მოცემულ კუბურ განტოლებას აქვს სამი ამონახსნი მათგან ერთი ნამდვილი და ორი კომპლექსური. თუ გვინდა ამ განტოლების მიახლოებითი ამონახსნები მივიღოთ ათწილადებში, მაშინ განტოლების ერთ–ერთ კოეფიციენტს ბოლოში დავუსვათ წერტილი. იხილე ნახ.7.3



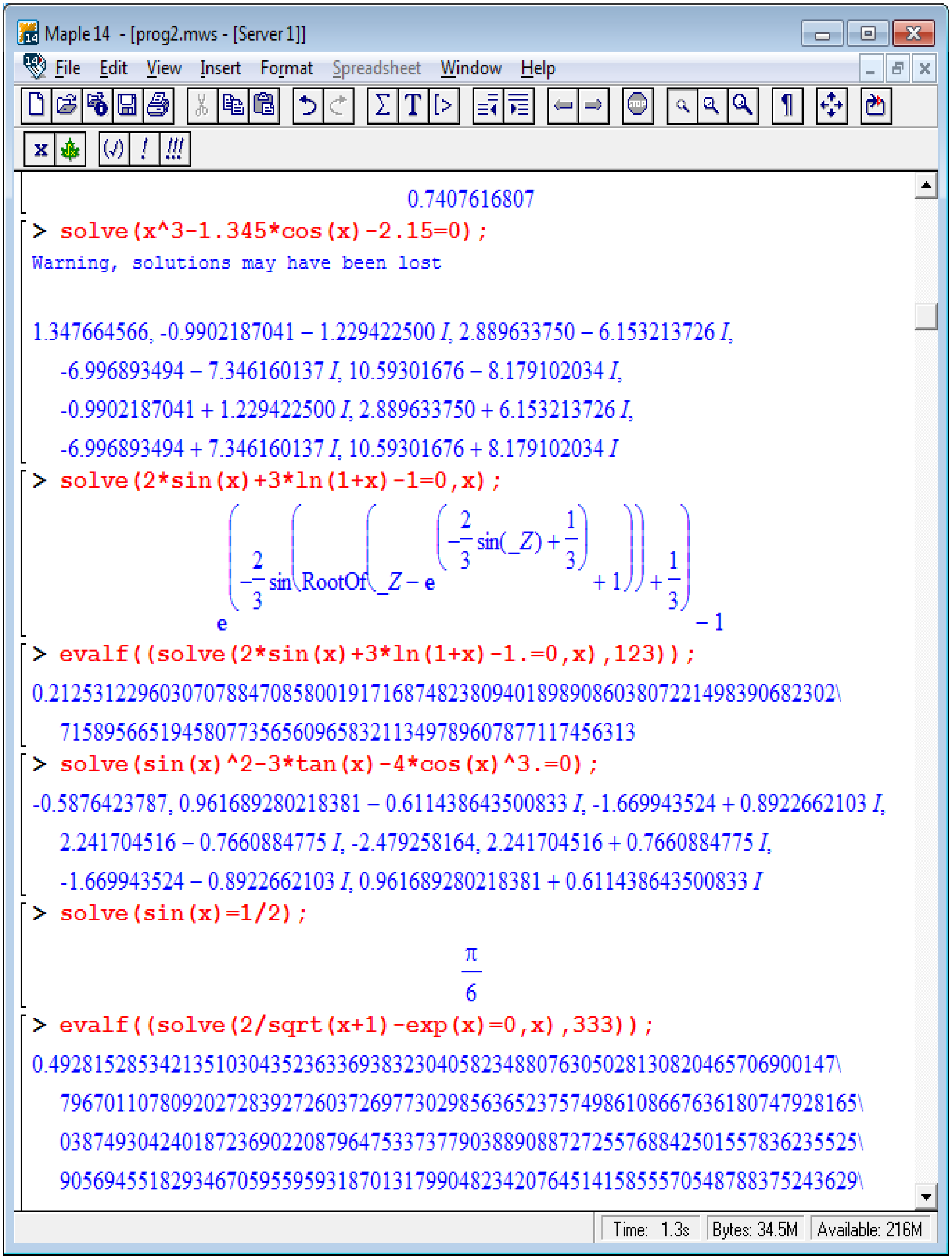

ნახ.7.3

ისე ყოველი შემთხვევისათვის ამ კუბური განტოლების მარცხენა ნაწილში მოცემული ფუნქციის გრაფიკი ავაგოთ და ვნახოთ კვეთავს თუ არა გრაფიკი აბსცისათა ღერძს შესაბამის წერტილში. იხილე ნახ. 7.4




ნახ. 7.4

ახლა ამოვხსნათ სხვადასხვა ალგებრული და ტრანსცენდენტული განტოლებები იხილე ნახ. 7.5 და ნახ. 7.6

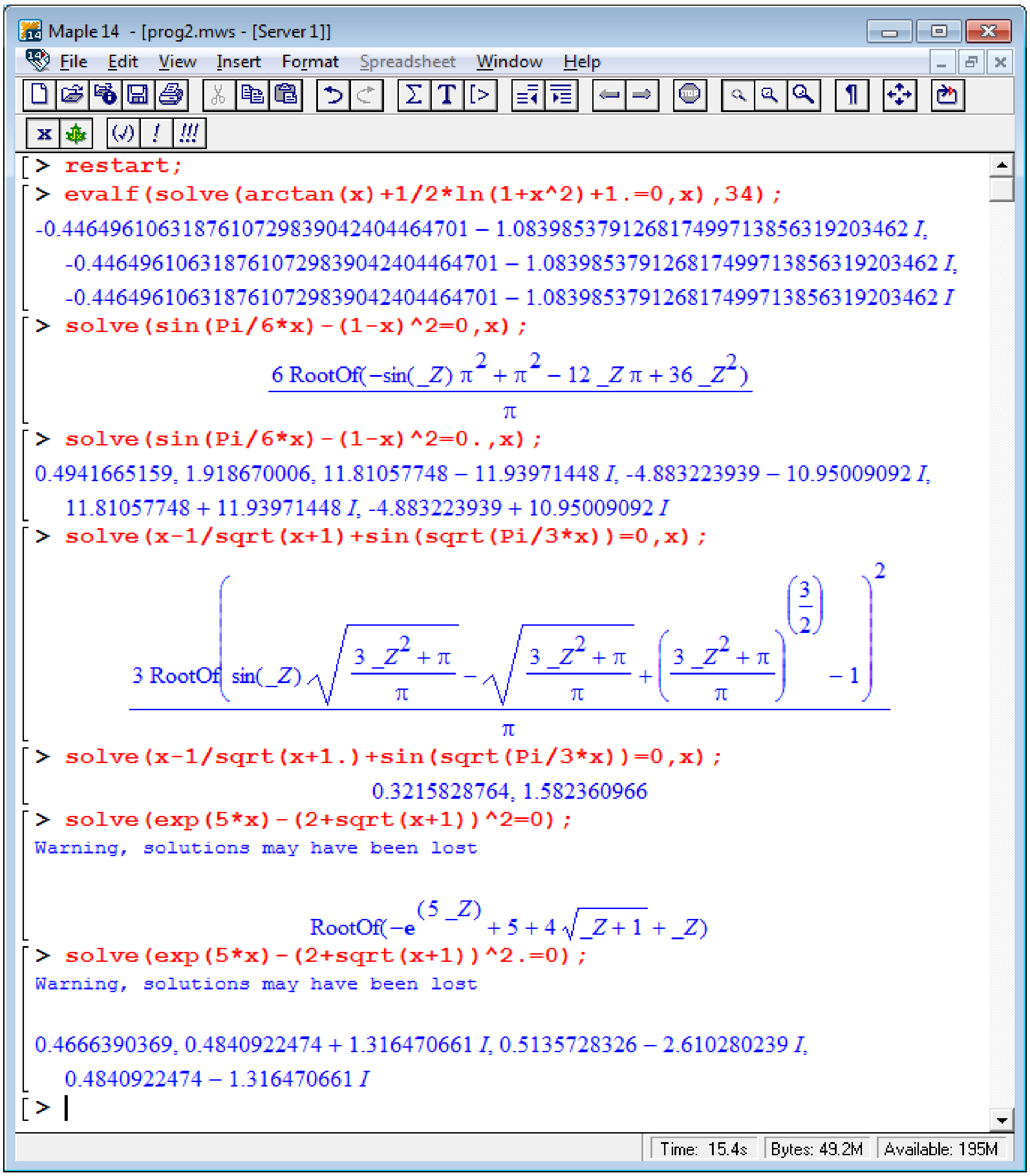



ნახ. 7.5

ერთ–ერთ განტოლებაში გამოვიდა ასეთი პასუხი

$$e^{(-2/3\ \sin(\mathrm{RootOf}(\_Z - e^{(-2/3\ \sin(\_Z) + 1/3)} + 1)) + 1/3)}$$

ასეთი პასუხი ნიშნავს, რომ ამ განტოლებას არა აქვს ზუსტი პასუხი. ამ გამოსახულების ქვეშ ეს განტოლება ამოვხსენით მიახლოებით (ერთ–ერთ კოეფიციენტს დავუსვით წერტილი) და მივიღეთ შედეგი მძიმის შემდეგ 123 თანრიგის სიზუსტით იხილე ნახ.7.5



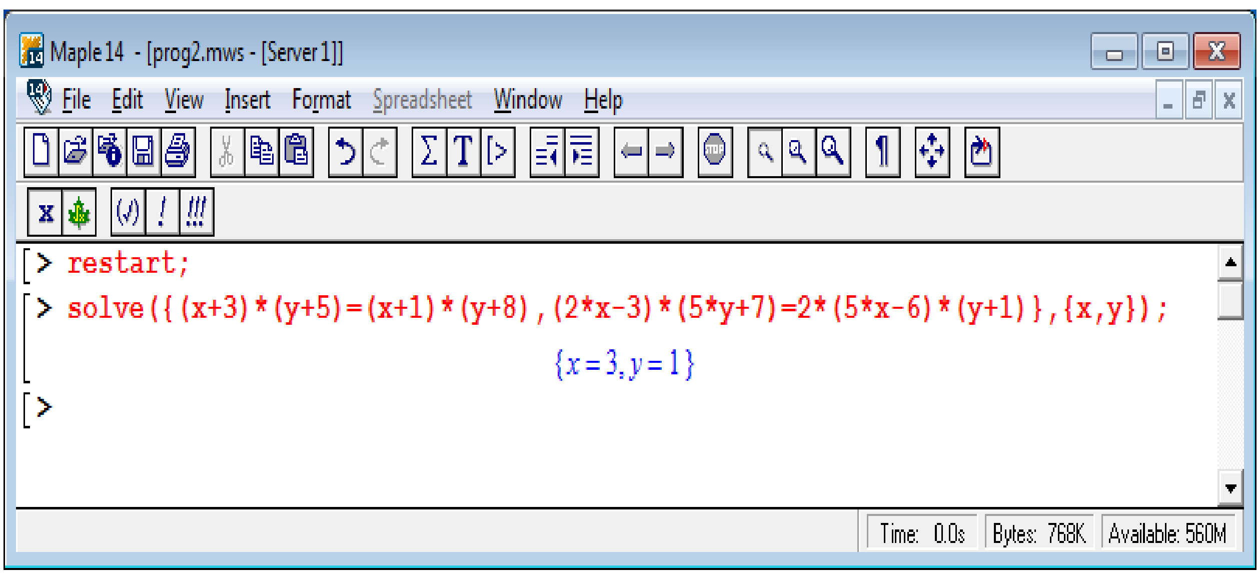

ნახ.7.6

## 7.2 არაწრფივ განტოლებთა სისტემების ამოხსნა Maple –ში

წინა თავში ჩვენ ვნახეთ და იმედია კარგად შევისწავლეთ წრფივ განტოლებათა სისტემების ამოხსნის სხვადსხვა მეთოდები. ამ პარაგრაფში შევეცადოთ შევისწავლოთ არაწრფივ განტოლებათა სისტემების კომპიუტერზე ამოხსნის საკითხები. ვინც ამ წიგნში განვლილი მასალა გაიაზრა ალბათ უკვე მიხვდება, რომ არაწრფივ განტოლებათა სისტემების ამოხსნა კომპიუტერული პროგრამა **Maple –ში** ისეთივე იოლია, როგორც სხვა დანარჩენი საკითხები. მიუხედავად იმისა რომ არაწრფივ განტოლებათა სისტემების ამოხსნის ისეთი მწყობრი მეთოდები , როგორიც ჩვენ უკვე ვნახეთ წრფივი განტოლებების სისტემების ამოხსნისას(კრამერის, გაუსის და სხვა) , ნაკლებად მოიპოვება (ძირითადად ვეყრდნობით კონკრეტული სისტემის ამოხსნის ევრისტიკულ მეთოდებს). კომპიუტერული პროგრამა **Maple –ში** მათი ამოხსნა ადვილია და არავითარ სირთულეს არ წარმოადგენს. განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითები: განვიხილოთ უმარტივესი არაწრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases}(x+3)(y+5)=(x+1)(y+8)\\(2x-3)(5y+7)=2(5x-6)(y+1)\end{cases}\qquad(7.1)$$

(7.1) სისტემის ამოხსანის **Maple** მოდელს ექნება სახე ნახ.7.7

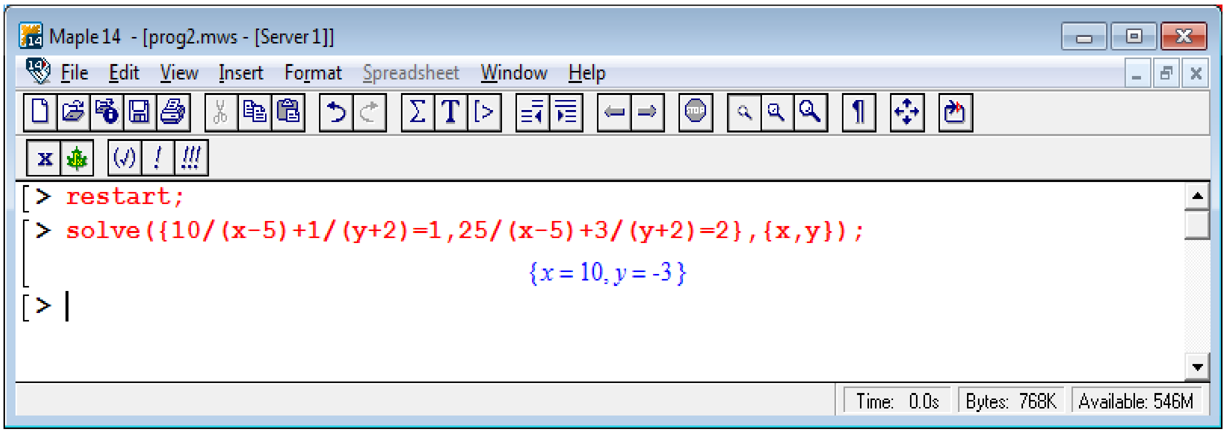



ნახ.7.7

ახლა ამოვხსნათ სხვა არაწრფივ განტოლებათა სისტემა (7.2):

$$\begin{cases} \dfrac{10}{x-5} + \dfrac{1}{y+2} = 1 \\ \dfrac{25}{x-5} + \dfrac{3}{y+2} = 2 \end{cases} \qquad (7.2)$$

(7.2) სისტემის **Maple** მოდელს ექნება სახე ნახ.7.8

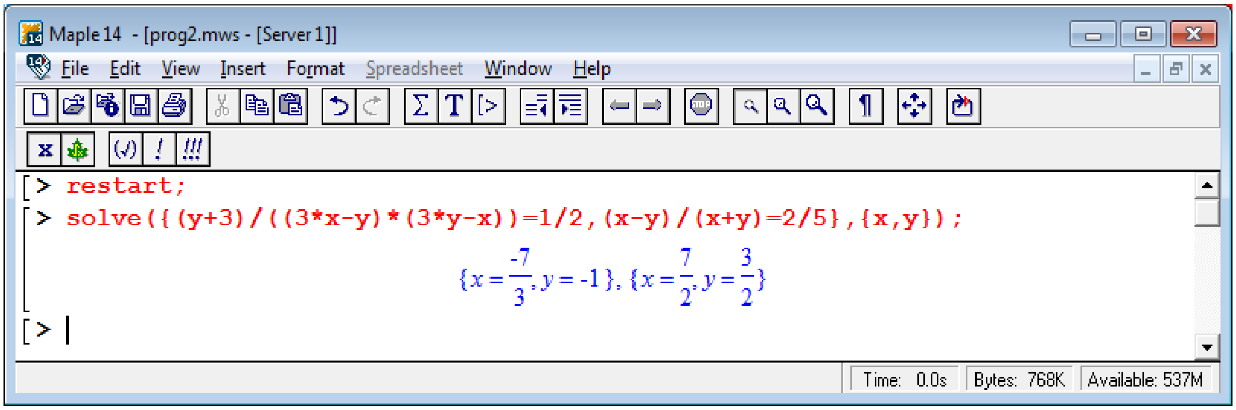



ნახ.7.8

ამოვხსნათ სისტემა (7.3)

$$\begin{cases} \dfrac{y+3}{(3x-y)(3y-x)} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{2}{5} \end{cases} \qquad (7.3)$$

(7.3) სისტემის **Maple** მოდელს ექნება სახე ნახ.7.9

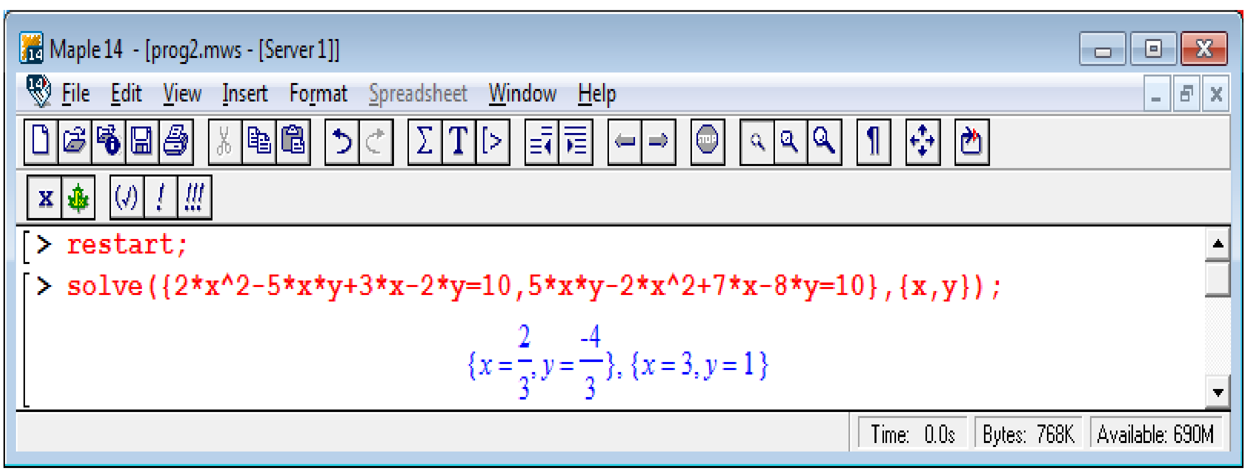



ნახ.7.9

ამოვხსნათ სისტემა (7.4)

$$\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 3x - 2y = 10 \\ 5xy - 2x^2 + 7x - 8y = 10 \end{cases} \qquad (7.4)$$

(7.4) სისტემის **Maple** მოდელს ექნება სახე ნახ.7.10



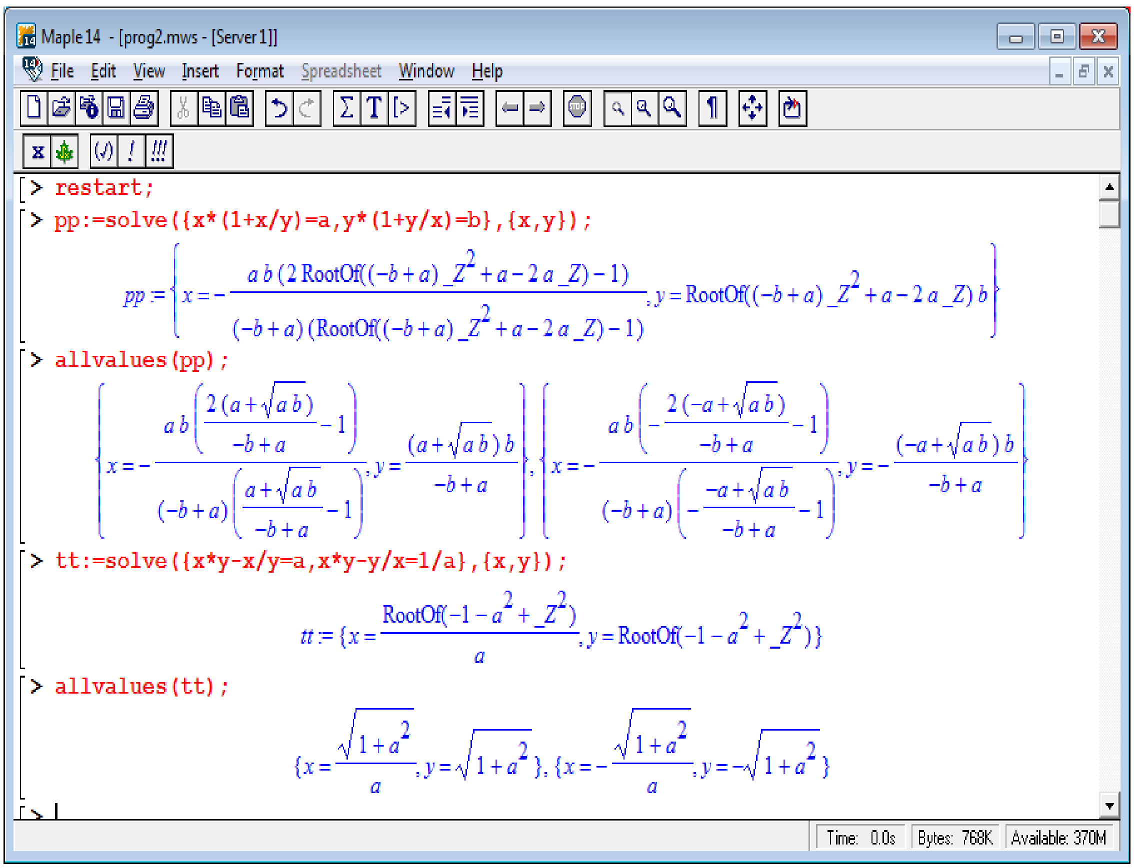

ნახ.7.10

ახლა ამოვხსნათ ასოთკოეფიციენტებიანი  არაწრფივი განტოლებების სისტემა (7.5)

$$\begin{cases} x(1+\dfrac{x}{y}) = a \\ y(1+\dfrac{y}{x}) = b \end{cases} \qquad (7.5) \qquad \begin{cases} xy - \dfrac{x}{y} = a \\ xy - \dfrac{y}{x} = 1/a \end{cases} \qquad (7.6)$$

(7.5) და (7.6) სისტემების **Maple** მოდელს ექნება სახე ნახ.7.11

ნახ.7.11 – დან ჩანს, რომ ასეთი ტიპის ასოთკოეფიციანტიანი განტოლებების სისტემების ამოხსნა **Maple** – ში ხორციელდება ზუსტი ამონახსენის მოძებნის ფუნქცია RootOf-ის და სპეციალური ფუნქცია **allvalues** –ს გამოყენებით.

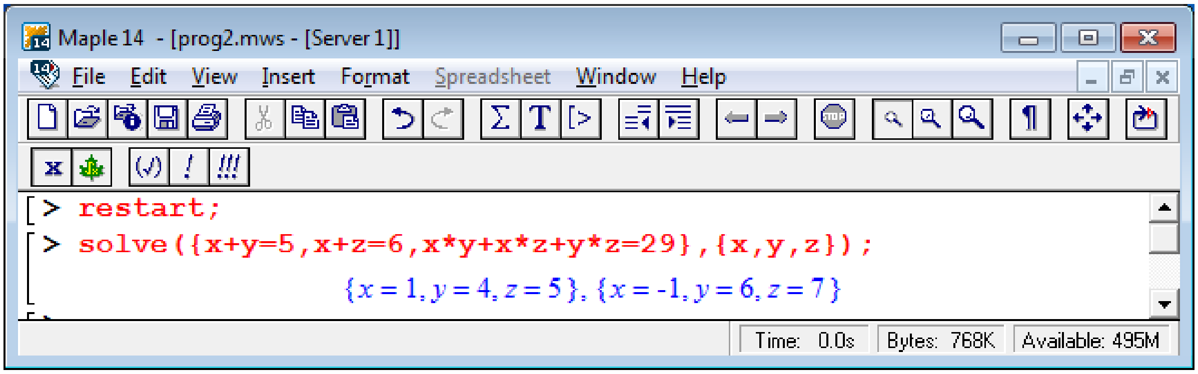



ნახ.7.11

ახლა ამოვხსნათ სისტემა 7.7

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + z = 6 \\ xy + xz + yz = 29 \end{cases} \qquad (7.7)$$

(7.7) სისტემების **Maple** მოდელს ექნება სახე ნახ.7.12



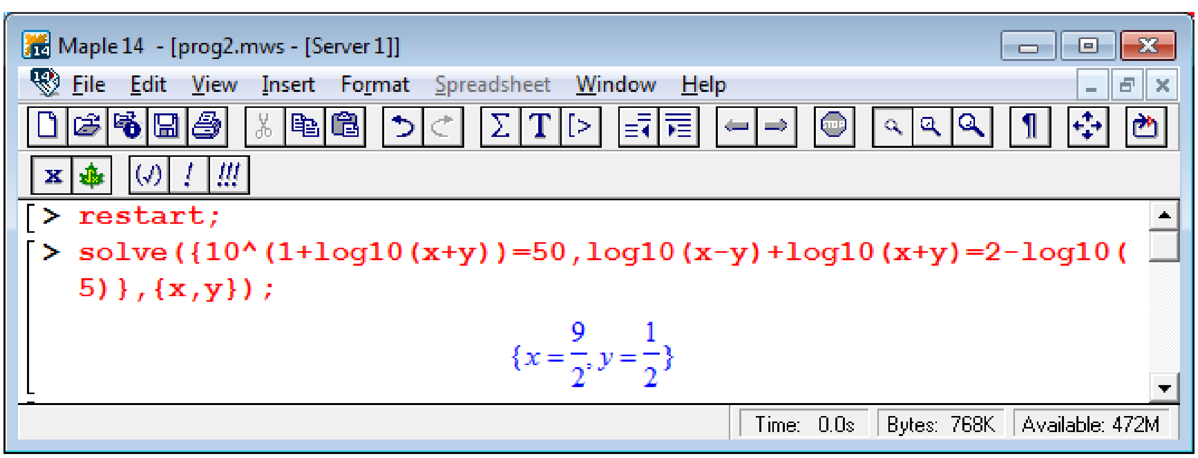

ნახ. 7.12

ახლა ამოვხსნათ არაწრფივ განტოლებათა სისტემები, რომლებიც შეიცავენ ელემენტარულ მათემატიკურ ფუნქციებს.

განვიხილოთ სისტემა:

$$\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 50 \\ \lg(x-y)+\lg(x+y) = 2-\lg 5 \end{cases} \qquad (7.8)$$

(7.8) სისტემების **Maple** მოდელს ექნება სახე ნახ.7.13

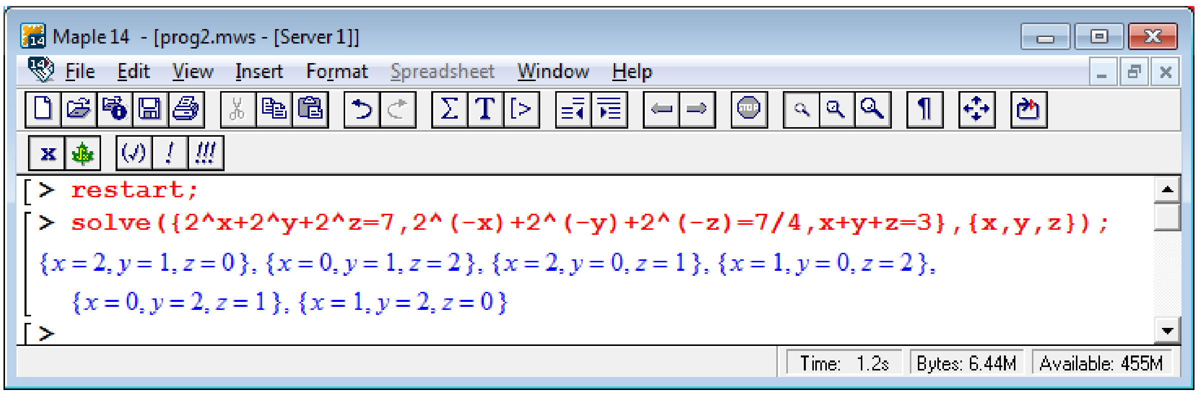



ნახ.7.13

ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{cases} 2^{x}+2^{y}+2^{z}=7 \\ 2^{-x}+2^{-y}+2^{-z}=7/4 \\ x+y+z=3 \end{cases} \qquad (7.9)$$

(7.9) სისტემების **Maple** მოდელს ექნება სახე ნახ.7.14

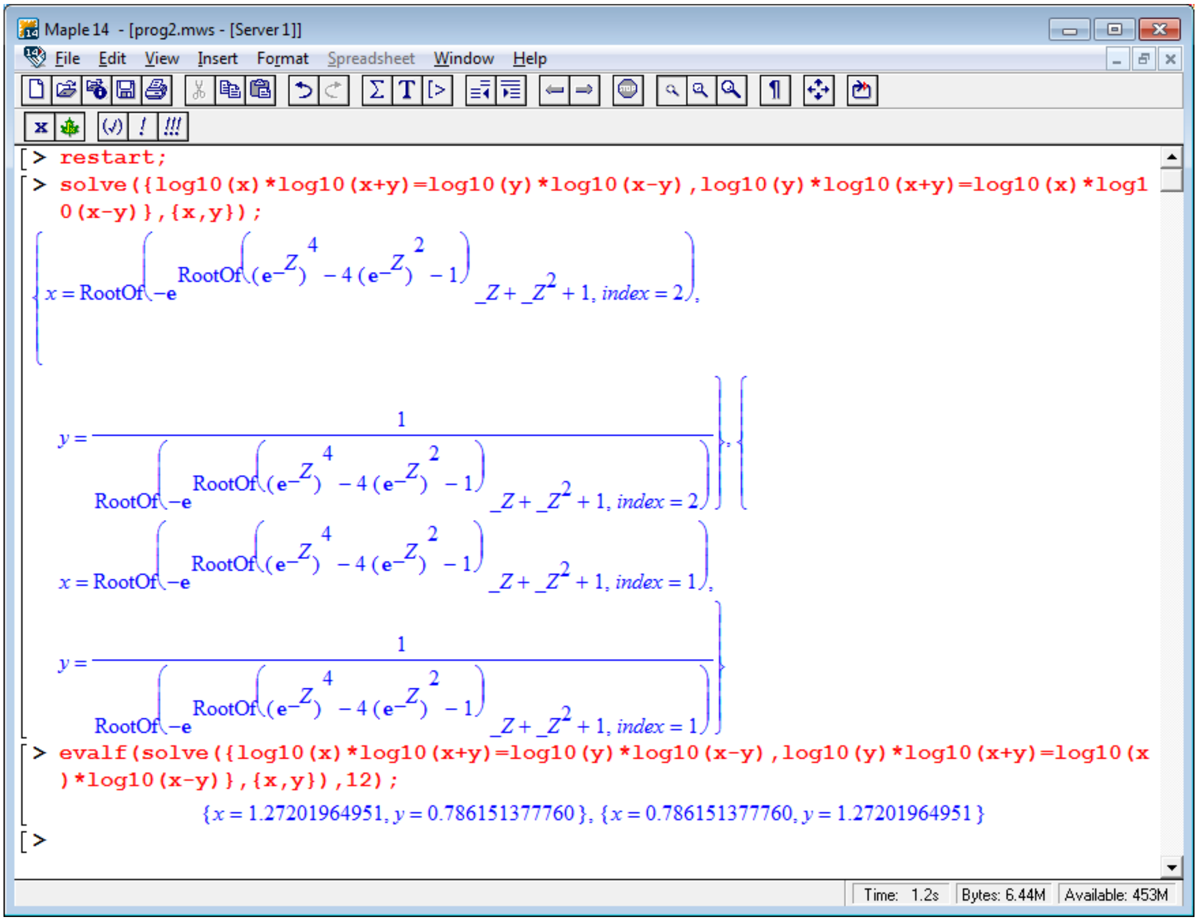



ნახ.7.14

$$\begin{cases} \lg x \lg(x+y)=\lg y \lg(x-y) \\ \lg y \lg(x+y)=\lg x \lg(x-y) \end{cases} \qquad (7.10)$$

(7.10) სისტემების **Maple** მოდელს ექნება სახე ნახ.7.15

ნახ.15 – დან ჩანს, რომ (7.10 ) სისტემას ზუსტი ამონახსენი არა აქვს. ამიტომ ჩვენ ეს განტოლება ამოვხსენით მიახლოებით Evalf ფუნქციის გამოყენებით.

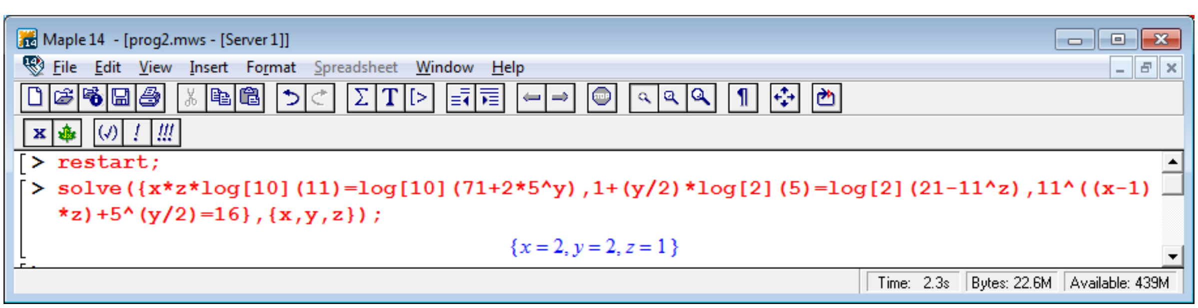



ნახ.7.15

ახლა განვიხილოთ სისტემა (7.11)

$$\begin{cases} xz\lg 11 = \lg(71 + 2 * 5^{y} \\ 1 + \dfrac{y}{2}\log_2 5 = \log_2(21 - 11^{z}) \\ 11^{(x-1)z} + 5^{\frac{y}{2}} = 16 \end{cases} \qquad (7.11)$$

(7.11) სისტემების **Maple** მოდელს ექნება სახე ნახ.7.16

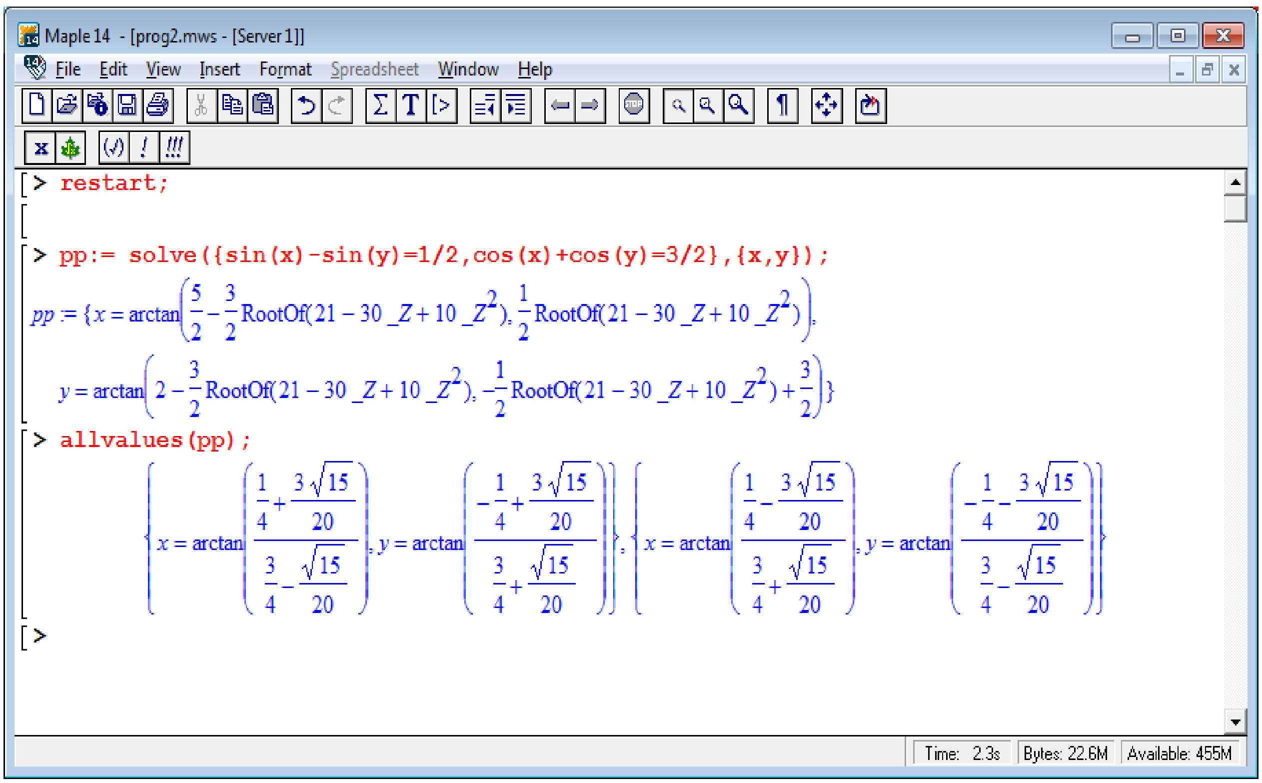


ნახ.7.16

ახლა ამოვხსნათ სისტემა (7.12)

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = \dfrac{1}{2} \\ \cos x + \cos y = \dfrac{3}{2} \end{cases} \qquad (7.12)$$

(7.12) სისტემების **Maple** მოდელს ექნება სახე ნახ.7.17

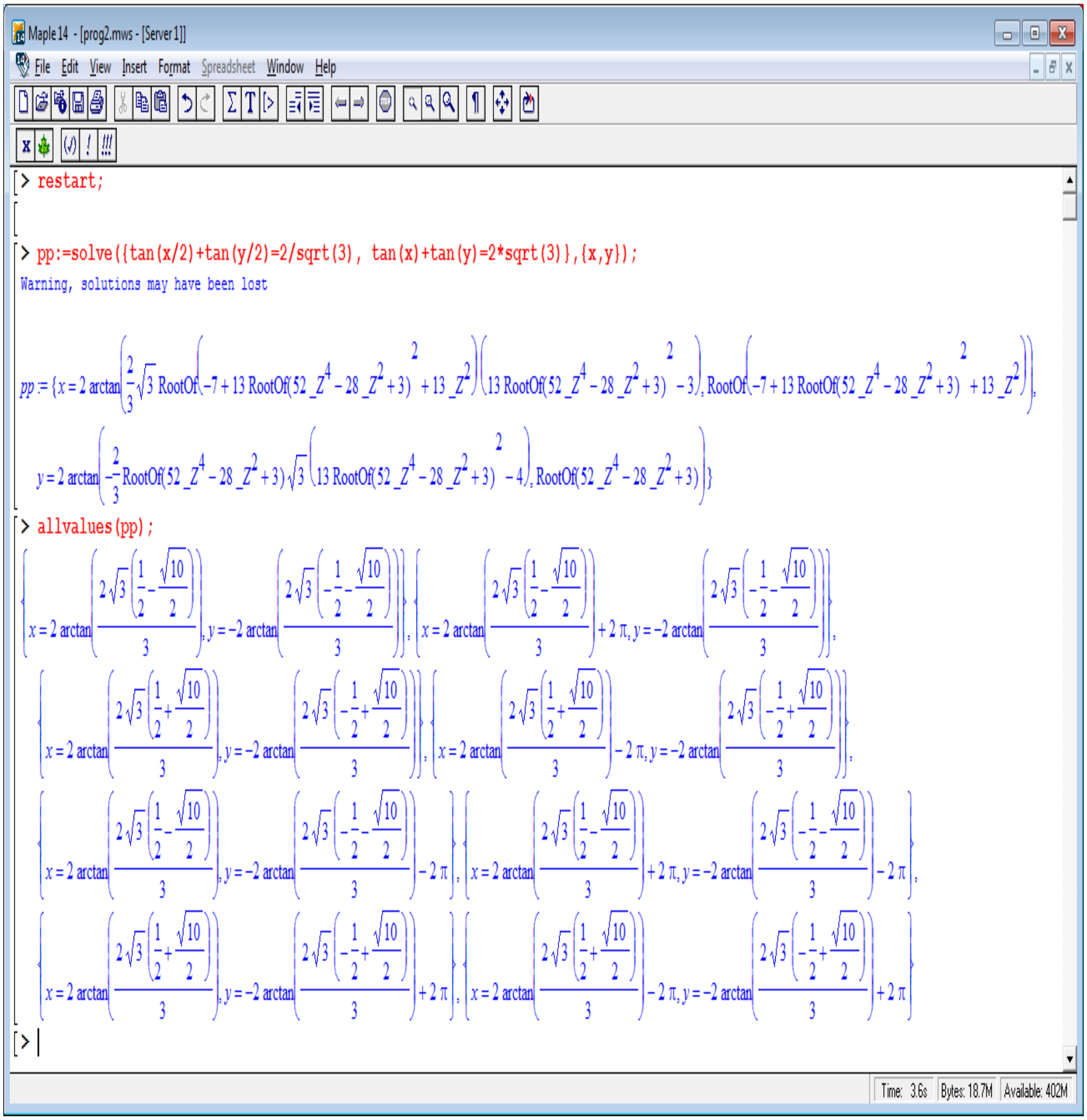



ნახ.7.17

ახლა ამოვხსნათ ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა მორიგი სისტემა 7.13

$$
\begin{cases}
tg\dfrac{x}{2} + tg\,\dfrac{y}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\
tgx + tgy = 2\sqrt{3}
\end{cases}
\qquad (7.13)
$$

(7.13) სისტემების **Maple** მოდელს ექნება სახე ნახ.7.18




ნახ.7.18

ახლა ამოვხსნათ ისეთი არაწრფივ განტოლებათა სისტემები, რომელთაც ზუსტი ამონახსნები არა აქვთ. ასეთი განტოლებების სისტემების ამოსახსნელად, როგორც წესი ვიყენებთ **ნიუტონის** მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით. მოკლედ მოვიყვანოთ ამ მეთოდის სამუშაო ფორმულები:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{J(x_n,y_n)}\begin{vmatrix} F(x_n,y_n) & F_y^{'}(x_n,y_n) \\ G(x_n,y_n) & G_y^{'}(x_n,y_n)\end{vmatrix} = x_n - \frac{\Delta_x^{(n)}}{J(x_n,y_n)} \\ y_{n+1} &= y_n - \frac{1}{J(x_n,y_n)}\begin{vmatrix} F_x^{'}(x_n,y_n) & F(x_n,y_n) \\ G_x^{'}(x_n,y_n) & G(x_n,y_n)\end{vmatrix} = y_n - \frac{\Delta_y^{(n)}}{J(x_n,y_n)} \end{aligned} \qquad (7.14)$$

ანუ $\Delta_x^{(n)} = \begin{vmatrix} F(x_n,y_n) & F_y^{'}(x_n,y_n) \\ G(x_n,y_n) & G_y^{'}(x_n,y_n)\end{vmatrix}$, $\Delta_y^{(n)} = \begin{vmatrix} F_x^{'}(x_n,y_n) & F(x_n,y_n) \\ G_x^{'}(x_n,y_n) & G(x_n,y_n)\end{vmatrix}$

ხოლო $J(x_n,y_n)$ არის **იაკობიანი** და იგი ტოლია

$J(x_n,y_n) = \begin{vmatrix} F_x^{'}(x_n,y_n) & F_y^{'}(x_n,y_n) \\ G_x^{1}(x_n,y_n) & G_y^{'}(x_n,y_n)\end{vmatrix} \neq 0$ ანუ ეს არის იტერაციული პროცესი, რომლითაც ვიცით რა ამოხსნის წინა მნიშვნელობა მოვძებნით შემდგომს, და ა.შ, რაც უფრო ბევრ იტერაციას გამოვთვლით მით უფრო კარგად მივუახლოვდებით სისტემის საძიებელ ფესვებს. ფესვების საწყისი (საბაზისო) მიახლოებები შეიძლება მოიძებნოს უხეში მიახლოებით (გრაფიკულად, ზეპირად ან სხვა რაიმე ევრისტიკული წესით). უნდა ითქვას, რომ ეს (ნიუტონის) მეთოდი ეფექტურია თუ საწყისი მნიშვნელობა ფესვისა საკმარისად ახლოსაა სისტემის ამონახსნთან.

განვიხილოთ მაგალითი.

მოვძებნოთ შემდეგი სისტემის ნამდვილი ამონახსნები

$$\begin{cases} F(x,y) \equiv 2x^3 - y^2 - 1 = 0 \\ G(x,y) \equiv xy^3 - y - 4 = 0 \end{cases} \qquad (7.15)$$

გრაფიკულად მოვძებნოთ ამ სისტემის საბაზისო ამონახსნები $x_0 = 1{,}2$ და $y_0 = 1{,}7$.

ახლა გამოვთვალოთ იაკობიანი (1,2; 1,7) წერტილში გვაქვს:

$J(x,y) = \begin{vmatrix} 6x^2 & -2y \\ y^3 & 3xy^2 - 1 \end{vmatrix}$, და შესაბამისად $J(1{,}2;1{,}7) = \begin{vmatrix} 8{,}64 & -3{,}4 \\ 4{,}91 & 9{,}4 \end{vmatrix} = 97{,}91$.

7.14 ფორმულის საშუალებით მივიღებთ ფესვების პირველ მიახლოებებს $x_1$ და $y_1$ მნიშვნელობებს, რომლებიც ტოლია:

$$x_1 = 1{,}2 - \frac{1}{97{,}91}\begin{vmatrix} -0{,}434 & -3{,}4 \\ 0{,}1956 & 9{,}4 \end{vmatrix} = 1{,}2 + 0{,}0349 = 1{,}2349$$

$$y_1 = 1{,}7 - \frac{1}{97{,}91}\begin{vmatrix} 8{,}64 & -0{,}434 \\ 4{,}91 & 0{,}1956 \end{vmatrix} = 1{,}7 - 0{,}039 = 1{,}661$$

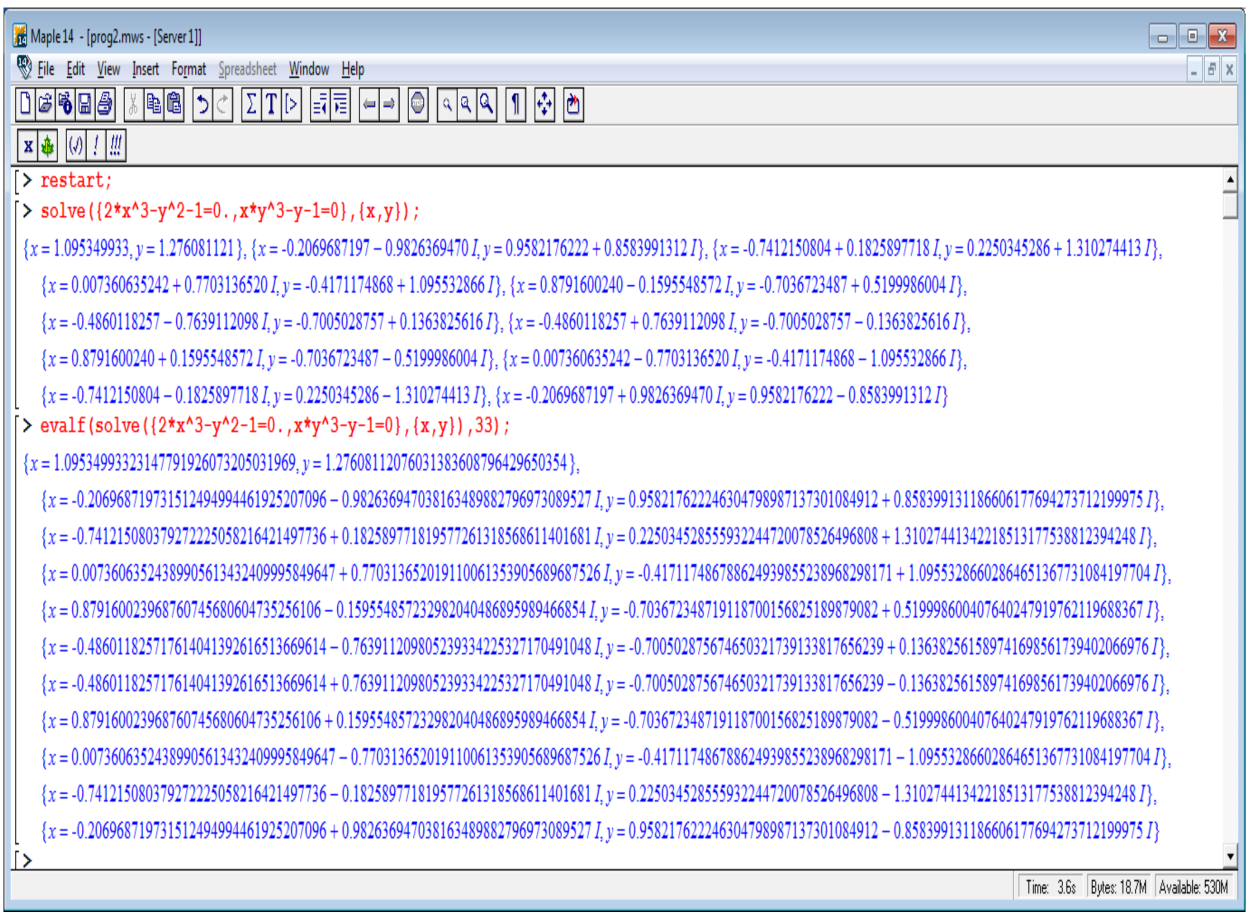
$x_1$ და $y_1$ მნიშვნელობების მიხედვით ვპოულობთ $x_2$ და $y_2$ მნიშვნელობებს და ა. შ., როგორც ვთქვით რაც უფრო ბევრ მნიშვნელობებს(იტერაციას) გამოვთვლით წესით ამონახსნების მით უფრო კარგ მიახლოებას მივიღებთ. ახლა განტოლებათა ეს სისტემა (7.15) ამოვხსნათ პროგრამა **Maple**-ს საშუალებით იხილე ნახ.7.19. როგორც ნახ.7.19 დან ჩანს პროგრამა **Maple** მოგვცა ამ სისტემის 11 წყვილი ამონახსნი მათგან ერთი ნამდვილია ხოლო დანარჩენები კომპლექსური. აქვე ვაჩვენოთ ოთხი სხვა სისტემის(7.16 , 7.17, 7.18 და 7.19 ) **Maple**–ში ამოხსნის მოდელები:

$$\begin{cases} x^2y^2 - 3x^3 - 6y^3 + 8 = 0 \\ x^4 - 9y + 2 = 0 \end{cases} \qquad (7.16)$$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0 \\ x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0 \end{cases} \qquad (7.17)$$

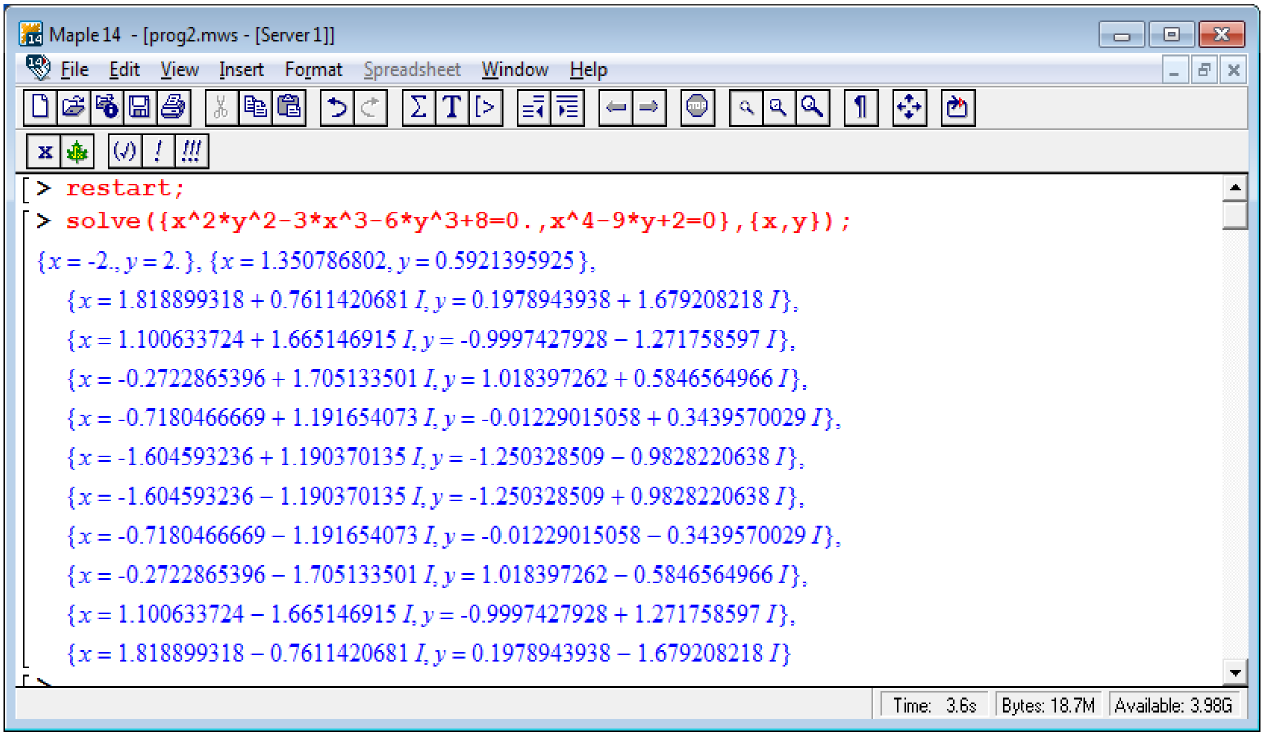
$$\begin{cases} xy = x^2 - y + 1{,}2 \\ (x + 0{,}5)^2 + y^2 = 0{,}8 \end{cases} \qquad (7.18)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z = 0 \\ 3x^2 - 4y + z^2 = 0 \end{cases} \qquad (7.19)$$



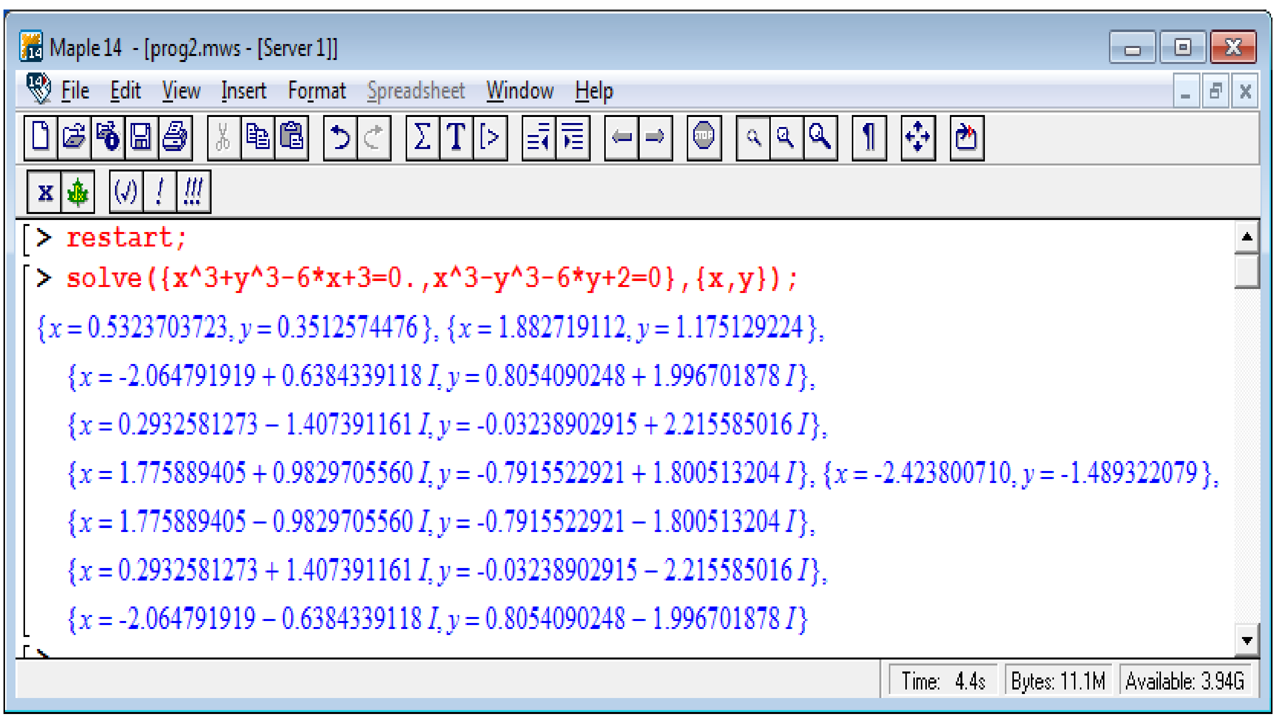

ნახ.7.19

(7.16) სისტემების **Maple** მოდელს ექნება სახე ნახ.7.20



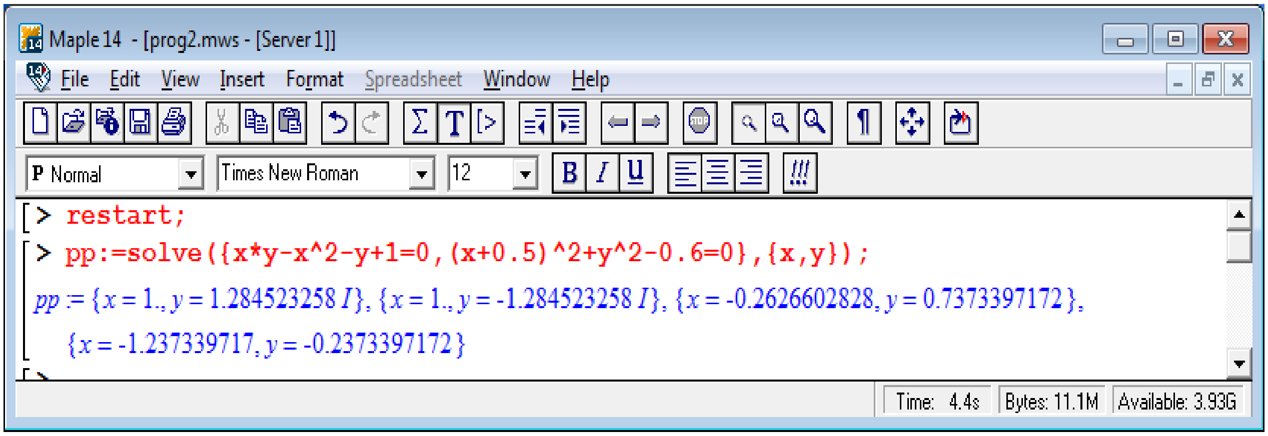

ნახ.7.20

(7.17) სისტემების **Maple** მოდელს ექნება სახე ნახ.7.21



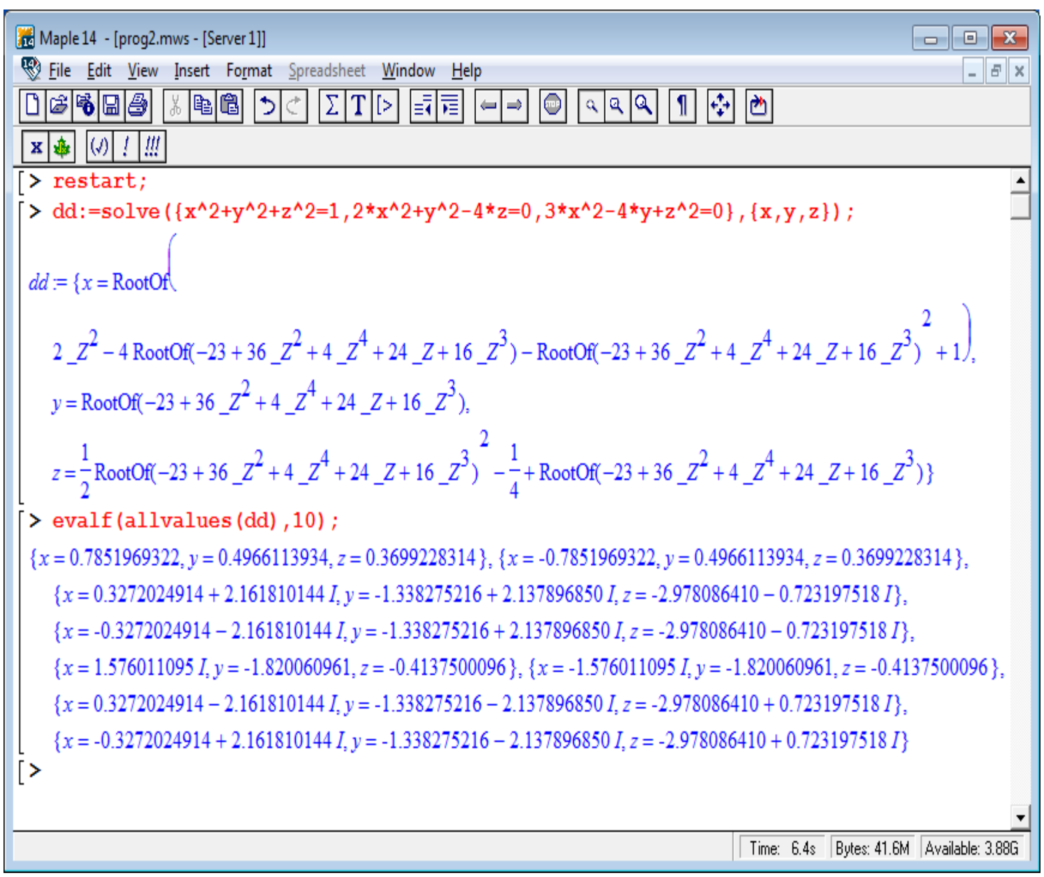

ნახ.7.21

(7.18) სისტემების **Maple** მოდელს ექნება სახე ნახ.7.22




ნახ.7.22

(7.19) სისტემების **Maple** მოდელს ექნება სახე ნახ.7.23




ნახ.7.23

# თავი 8

## 8. უტოლობებისა და უტოლობათა სისტემების ამოხსნა Maple –ში

### 8.1 ლოგიკური და შედარების ოპერაციები Maple –ში

როგორც ვიცით უტოლობები წარმოადგენენ ლოგიკური ოპერაციების განხორციელების ერთ–ერთ კლასიკურ მაგალითებს. ამიტომ სანამ უშუალოდ უტოლობების **Maple –ში** ამოხსნის ალგორითმების შესწავლას დავიწყებთ არ იქნება ურიგო თუ მიმოვიხილავდით ლოგიკური ოპერაციებისა და ლოგიკური შედარების ოპერაციების აგების მეთოდებს **Maple –ში.**

როგორც ვიცით ამ პროგრამას აქვს თანდართული პროგრამირების ეგრეთწოდებული **M** ენა და სწორედაც ამ ენის ელემენტების გამოყენების საფუძველზე ჩვენ შეგვიძლია მიმოვიხილოთ ლოგიკური და ლოგიკური შედარების ოპერაციები. **Maple –ს** პროგრამირების **M** ენაში არსებობს( როგორც სხვა მრავალ პროგრამირების ენაში ) სამი ლოგიკური და შვიდი შედფარების ლოგიკური ოპერაციები განვიხილოთ ისისნი:

**ლოგიკური ოპერაციებია : AND, OR და NOT.**

**შედარების ლოგიკური ოპერაციებია: <,<=,>,>=,=,<>**

განვიხილოთ თითოეული ცალკ–ცალკე.

1. **ლოგიკური გამრავლების** ოპერაცია **AND.** ეს ოპერაცია გულისხმობს ლოგიკური ცვლადებისა და ლოგიკური გამოსახულებების **გამრავლებას** ანუ ერთდროულად მოხდენას მაგალითად გვინდა შემდეგი ლოგიკური გამოსახულება ჩავწეროთ **M** ენაზე : $-10 \leq X < 10$

ეს გამოსახულება ჩაიწერება ასე: X>=-10 AND X<10 ანუ ორი ლოგიკური გამოსახულების ერთდროულად მოხდენა (გამრავლებ) ეს ლოგიკური გამოსახულებებია X>=-10 და X<10 ანუ გამოსახულება **ჭეშმარიტია** მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ორივე ლოგიკური გამოსახულება ერთდროულად იქნება ჭეშმარიტი.

2. **ლოგიკური შეკრების** ოპერაცია **OR** . ეს ოპერაცია გულისხმობს ლოგიკური ცვლადებისა და ლოგიკური გამოსახულებების **შეკრებას** ანუ უხეშად რომ ვთქვათ ორი ლოგიკური მუდმივადან ან ცვლადიდან ან გამოსახულებიდან ამოარჩევს ჭეშმარიტს (თუ ორივე ჭეშმარიტია, მაშინაც ამოარჩევს ჭეშმარიტს) ესე იგი იგი ყოველთვის არჩევს ჭეშმარიტს გარდა იმ შემთხვევისა, როცა ორივე მცდარია ( მაშინ შედეგი არის მცდარი) დანარჩენ შემთხვევებში აირჩევა ჭეშმარიტი გამოსახულება. მაგალითად X<=-10 OR X>10 საკმარისია ერთ–ერთი ქვეგამოსახულება იყოს ჭეშმარიტი, რომ მთლიანად ეს გამოსახულება იქნება ჭეშმარიტი განვიხილოთ შეთხვევები ვთქვათ X=100 , მაშინ პირველი გამოსახულება მცდარია მეორე კი ჭეშმარიტი ე.ი. მთლიანი გამოსახულება იქნება ჭეშმარიტი. ვთქვათ X=–40 მაშინ პირველი ჭეშმარიტია მეორე კი მცდარი ე.ი. მთლიანი გამოსახულება იქნება ჭეშმარიტი.ვთქვათ X=–4 მაშინ პირველი მცდარია მეორეც მცდარი ე.ი. მთლიანი გამოსახულება იქნება მცდარი

3. **ლოგიკური უარყოფის** ოპერაცია **NOT** . ეს ოპერაცია გულისხმობს ლოგიკური მუდმივას ან ლოგიკური ცვლადის ან ლოგიკური გამოსახულების ლოგიკური მნიშვნელობის შებრუნება მცდარის ჭეშმარიტად და პირიქით.

4. **ლოგიკური შედარების ოპერაცია : <** ნაკლებია

5. **ლოგიკური შედარების ოპერაცია : <=** ნაკლებია და ტოლია

6. **ლოგიკური შედარების ოპერაცია : >**მეტია

7. **ლოგიკური შედარების ოპერაცია : >=** მეტია და ტოლია

8. **ლოგიკური შედარების ოპერაცია : =** ტოლია

9. **ლოგიკური შედარების ოპერაცია : <>** არ უდრის

ახლა განვიხილოთ ერთი ლოგიკური გამოსახულებიდან შედეგის ამორჩევის მაგალითი :

ARCHEVA = {
PIRVELI თუ $X<0$
MEORE თუ $0 \le X < 1$

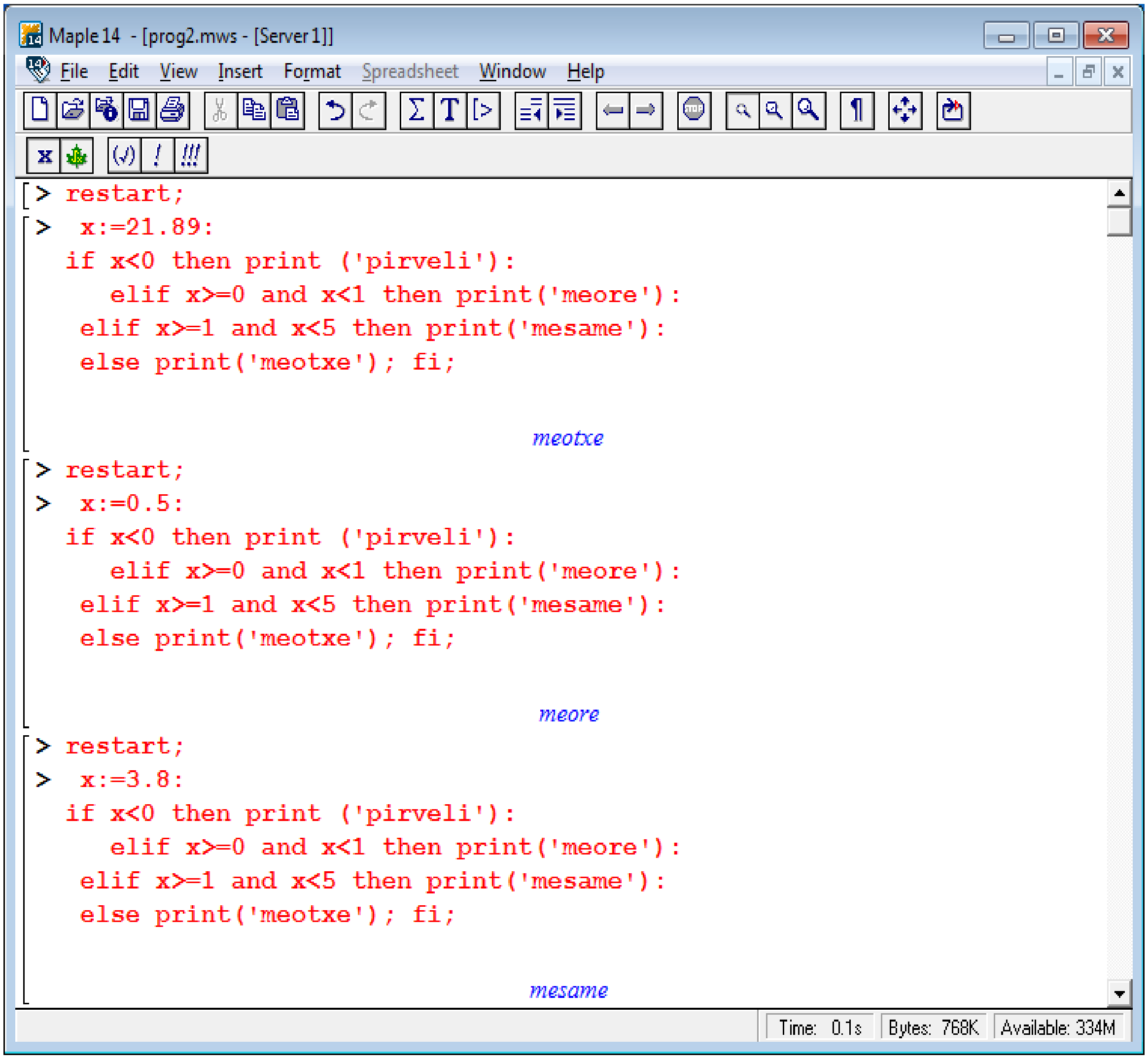
**MESAME** თუ $1 \le X < 5$

**MEOTXE** თუ $X \ge 5$

ამ ამოცანის შესაბამის პროგრამას **Maple –ს** პროგრამირების **M** ენაში შეიძლება მიეცეს შემდეგი სახე:

- **restart;**
- **x:=21.89:**
- **if x<0 then print ('pirveli'):** (8.1)
- **elif x>=0 and x<1 then print('meore'):**
- **elif x>=1 and x<5 then print('mesame'):**
- **else print('meotxe'; fi;**

8.1 პროგრამა შევასრულოთ **Maple –ში** იხილე ნახ. 8.1




ნახ. 8.1

## 8.2 . წრფივი წრფივზე დაყვანადი და არაწრფივი უტოლობების ამოხსნა Maple –ში

**ორ გამოსახულებას, რომლებიც შეიძლება ცვლადებსაც შეიცავდნენ, შეერთებულს შედარების ლოგიკურ შედარების ოპერაციებით უტოლობა ეწოდება.**

უტოლობებს ეწოდება ერთნაირი აზრის, თუ ყველა მათგანში გამოყენებულია უტოლობის ერთი დაიგივე ნიშანი. ორ უტოლობას ეწოდება მოპირდაპირე აზრის, თუ თითოეულ მათგანში გამოყენებულია ერთმანეთის მოპირდაპირე ლოგიკური სედარების ოპერაციათა ნიშნები.

განვიხილოთ რიცხვითი უტოლობების ზოგიერთი თვისებები:

1. თუ **a>b,**მაშინ **b<a.**
2. თუ **a>b,**და **b>c** მაშინ **a>c.**
3. თუ **a >b** და **c** ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, მაშინ **a+c>b+c.**
4. თუ **a >b** და **c>d**, მაშინ **a+c>b+d.**
5. თუ **a >b** და **c<d**, მაშინ **a-c>b-d.**
6. თუ **a >b** და $c \neq 0$ მაშინ:

   **ac>bc** როცა **c>0**

   და

   **ac<bc** როცა **c<0**

7. თუ **a >b** და **a** და **b** რიცხვებს ერთნაირი ნიშანი აქვთ, მაშინ:

   $$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

8. თუ **a >b, c>d** და **a** , **b,c,d** დადებითი რიცხვებია, მაშინ **ac>bd.**
9. თუ **a >b, a** , **b** დადებითი რიცხვებია და $n \in N$ მაშინ:

   $$a^n > b^n$$

10. თუ **a >b, a** , **b** დადებითი რიცხვებია და $n \in N$ $n \neq 1$ მაშინ:

   $$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$$

**წრფივი ერთცვლადიანი უტოლობის ამოხსნის წესები** ალბათ გვახსოვს სასკოლო პროგრამიდან. წრფივი ეწოდება 8.2 უტოლობებიდან ერთ–ერთს.

$$ax+b>0 \text{ , } ax+b \geq 0$$
$$ax+b<0 \text{ , } ax+b \leq 0 \qquad (8.2)$$

განვიხილოთ თითოეული მათგანის ამოხსნის მეთოდები ცალკ–ცალკე:

1. $ax+b>0$ როცა a>0, მაშინ

$$ax+b>0 \Longrightarrow x>-\frac{b}{a}$$ ანუ

$$x\in\left]-\frac{b}{a};+\infty\right[$$

2. $ax+b\geq 0$ როცა a>0, მაშინ

$$ax+b\geq 0 \Longrightarrow x\geq-\frac{b}{a}$$ ანუ

$$x\in\left[-\frac{b}{a};+\infty\right[$$

3. $ax+b>0$ როცა a<0, მაშინ

$$ax+b>0 \Longrightarrow x<-\frac{b}{a}$$ ანუ

$$x\in\left]-\infty;-\frac{b}{a}\right[$$

4. $ax+b\geq 0$ როცა a<0, მაშინ

$$ax+b\geq 0 \Longrightarrow x\leq-\frac{b}{a}$$ ანუ

$$x\in\left]-\infty;-\frac{b}{a}\right]$$

ანალოგიურად ამოიხსნებიან $ax+b<0$ და $ax+b\leq 0$ წრფივი უტოლობებიც.

ახლა ვნახოთ **კვადრატული უტოლობების** ამოხსნის მეთოდები:

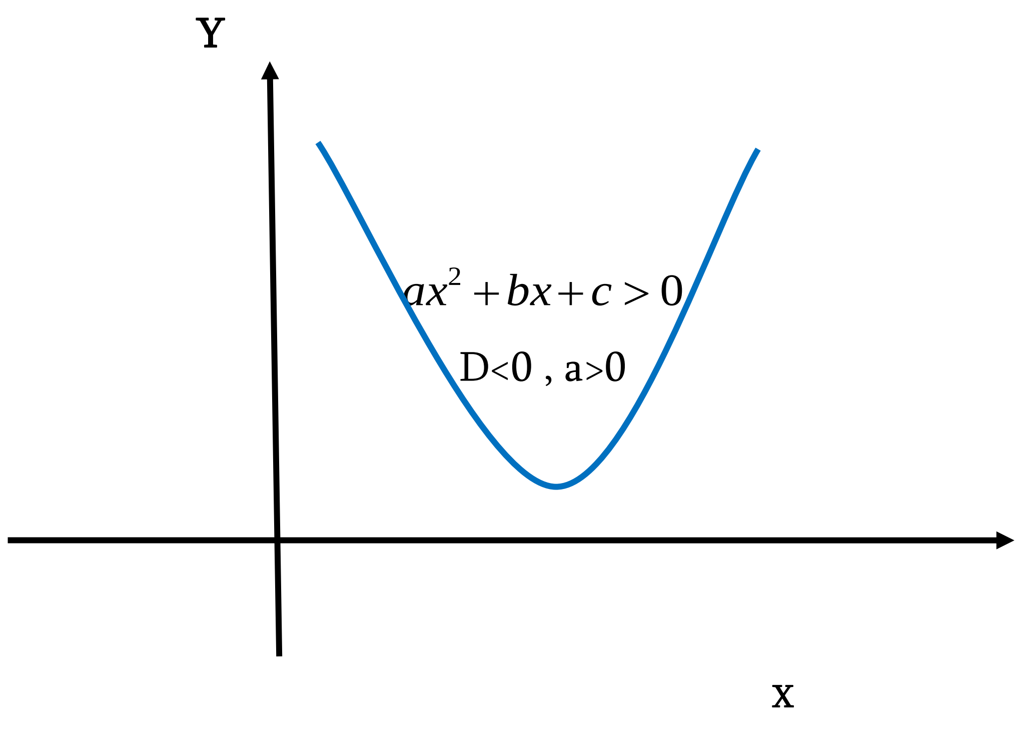
კვადრატული უტოლობა ეწოდება 8.3 უტოლობებიდან ერთ–ერთს.

$$ax^2+bx+c<0 \quad , \quad ax^2+bx+c\le 0$$
$$ax^2+bx+c>0 \quad , \quad ax^2+bx+c\ge 0 \qquad (8.3)$$

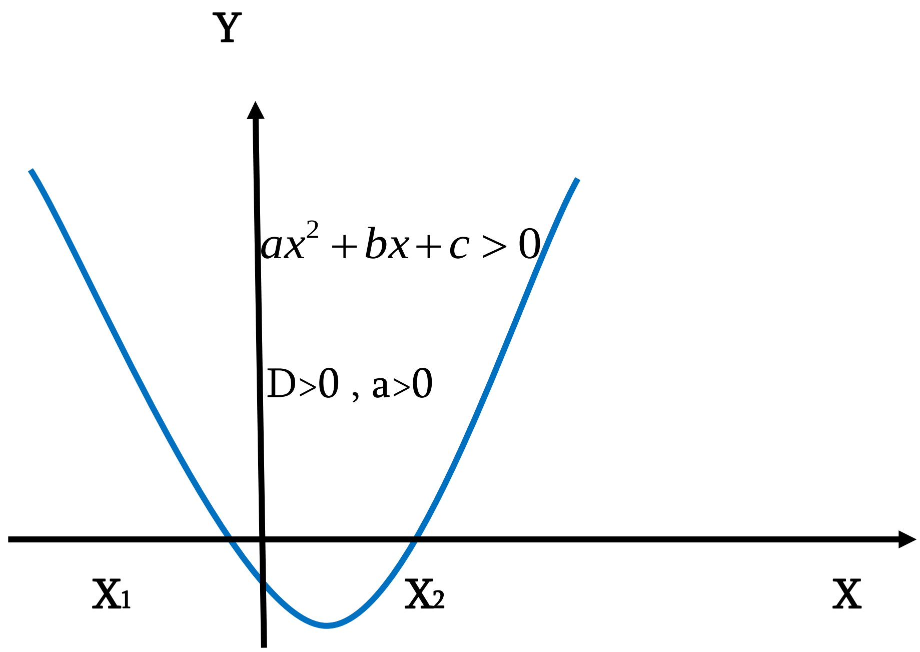
სადაც $x$ ცვლადია, ხოლო **a,b** და **c** ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია და $a\neq 0$.

განვიხილოთ დაწვრილებით ერთ–ერთი მათგანი მაგალითად უტოლობა $ax^2+bx+c>0$. შემოიღოთ აღნიშვნა ( კვადრატული სამწევრის **დისკრიმინანტი** ) $D=b^2-4ac$

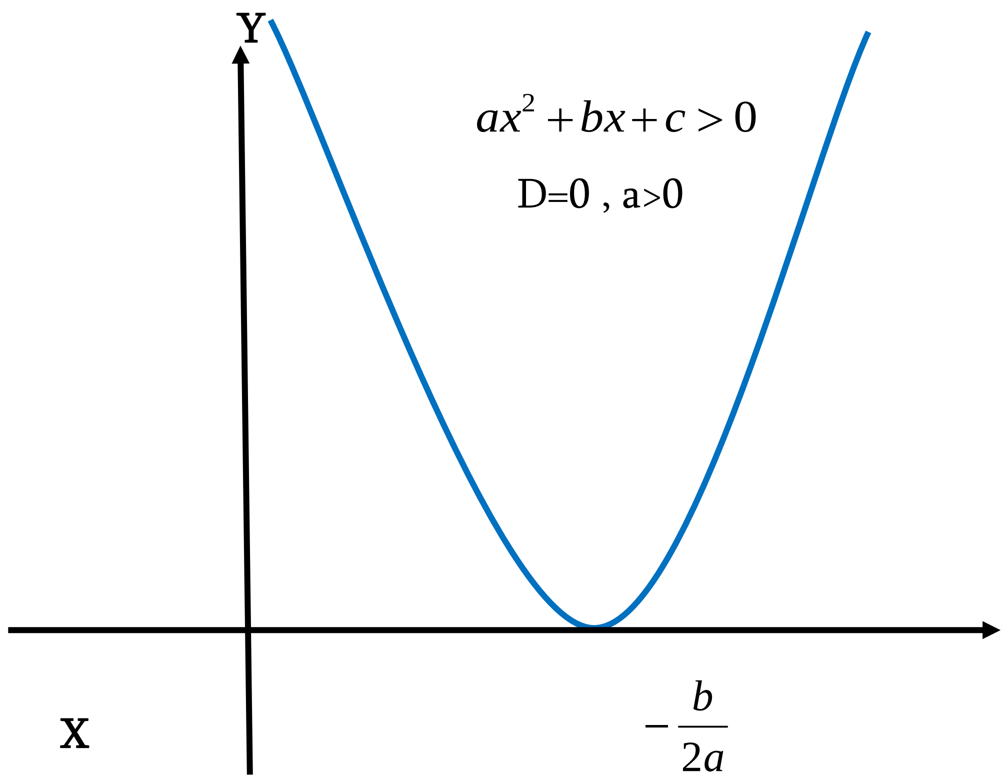
**1.** $ax^2+bx+c>0$ შემთხვევა, როცა D<0 , a>0 უტოლობას აქვს **უამრავი ამონახსნი** $x\in\left]-\infty;+\infty\right[$




**2.** $ax^2+bx+c>0$ შემთხვევა, როცა D>0 , a>0 უტოლობას აქვს **შემდეგი ამონახსნები** $x\in\left]-\infty;x_1\right[\cup\left]x_2;+\infty\right[$

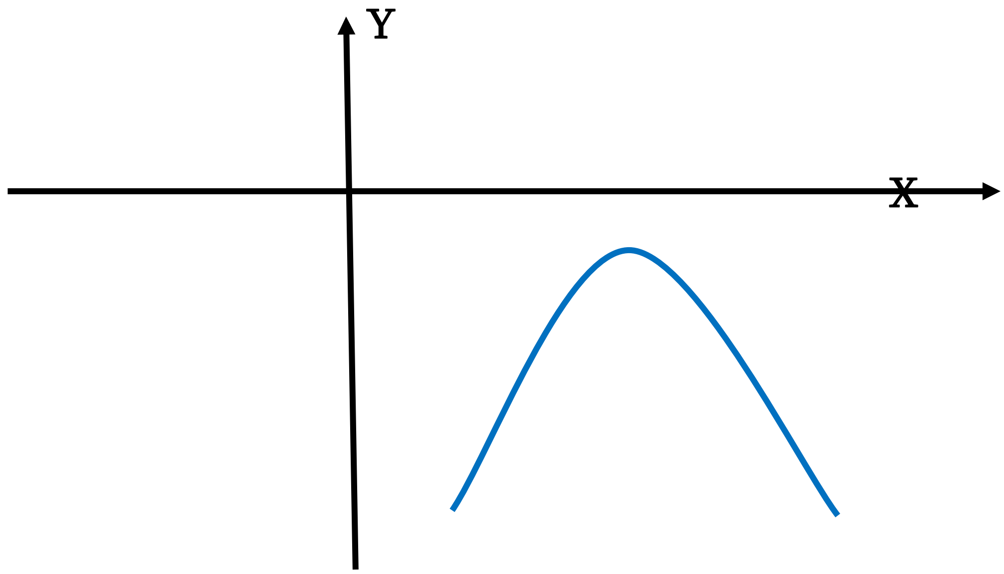



**3.** $ax^2+bx+c>0$ შემთხვევა, როცა D=0 , a>0 უტოლობას აქვს უამრავი ამონახსნები გარდა $x=-\frac{b}{2a}$ $x\in\left]-\infty;-\frac{b}{2a}\right[\cup\left]-\frac{b}{2a};+\infty\right[$



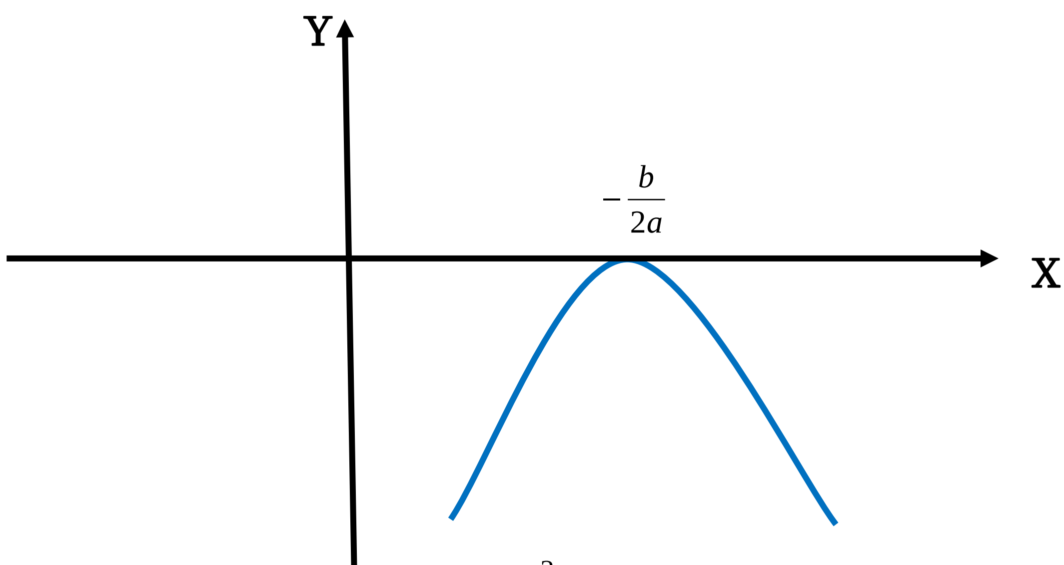

**4.** $ax^2+bx+c>0$ შემთხვევა, როცა D<0 , a<0 უტოლობას **არა აქვს**

**ამონახსნები** გარდა $x \in \acute{\varnothing}$




$$ax^2+bx+c>0$$
D<0 , a<0

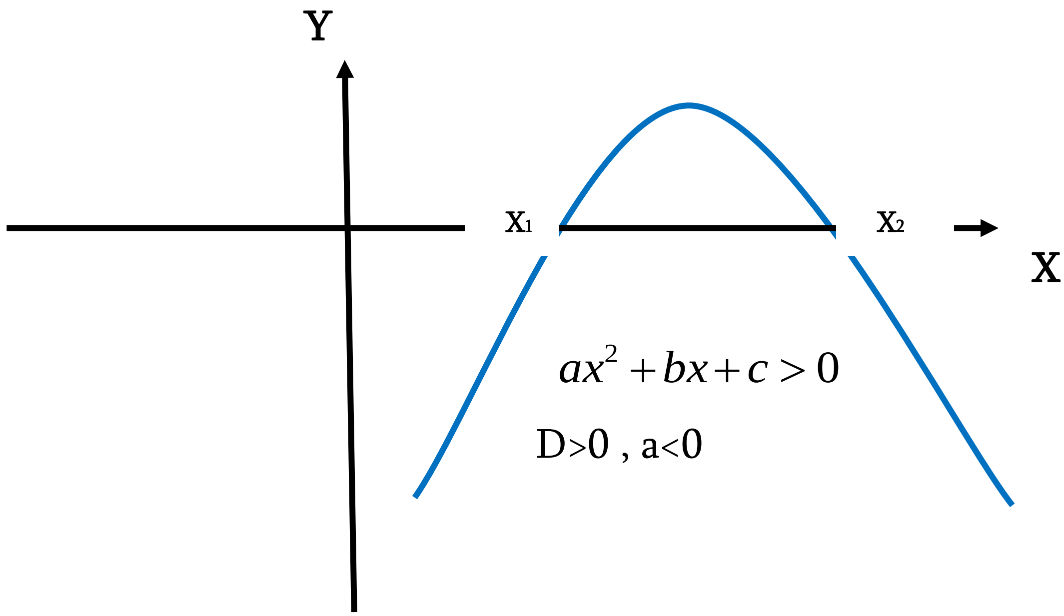
**5.** $ax^2+bx+c>0$ შემთხვევა, როცა D=0 , a<0 უტოლობას **არა აქვს ერთი ამონახსნი** გარდა $x=-\frac{b}{2a}$




$$ax^2+bx+c>0$$
D=0 , a<0

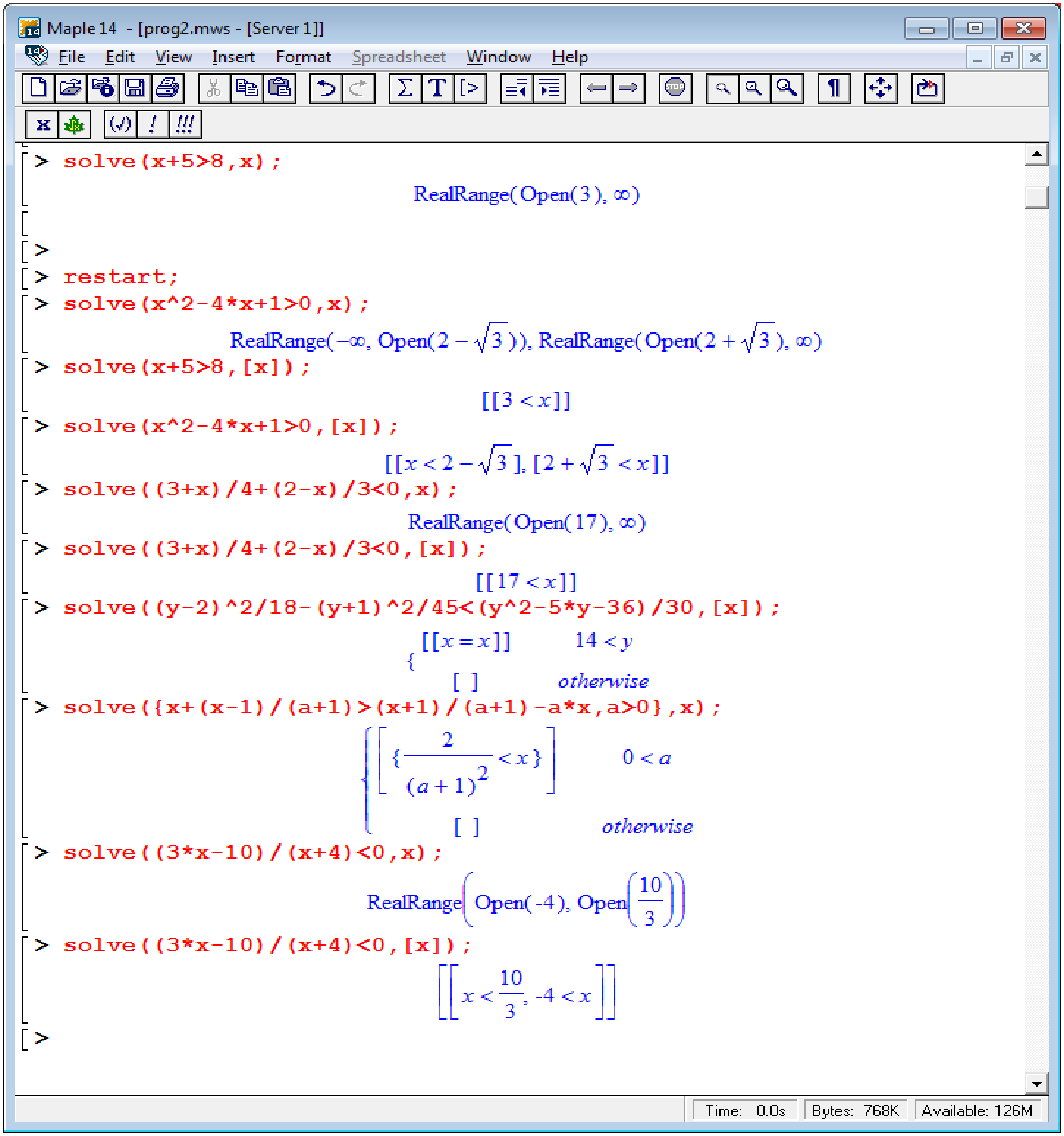
**6.** $ax^2+bx+c>0$ შემთხვევა, როცა D>0 , a<0 უტოლობას **აქვს**

ამონახსნთა კონკრეტული სიმრავლე $X \in \left]X_1; X_2\right[$




ასეთივე ფორმულები გამოიყვანება 8.3–ში მითითებული დანარჩენი სამი კვადრატული უტოლობის შემთხვევაშიც. გავაკეთეთ რა მოკლე მიმოხილვა უმარტივესი უტოლობებისა, ახლა შეგვიძლია დავიწყოთ პროგრამა **Maple –ში** უტოლობების ამოხსნის ალგორითმების შესწავლა. უნდა აღინიშნოს, რომ ისევე როგორც განტოლებებისა და განტოლებათა სისტემების ამოხსნისას აქაც უტოლობების ამოხსნისას გამოიყენება ჩვენთვის უკვე ნაცნობი ბრძანება **solve().**

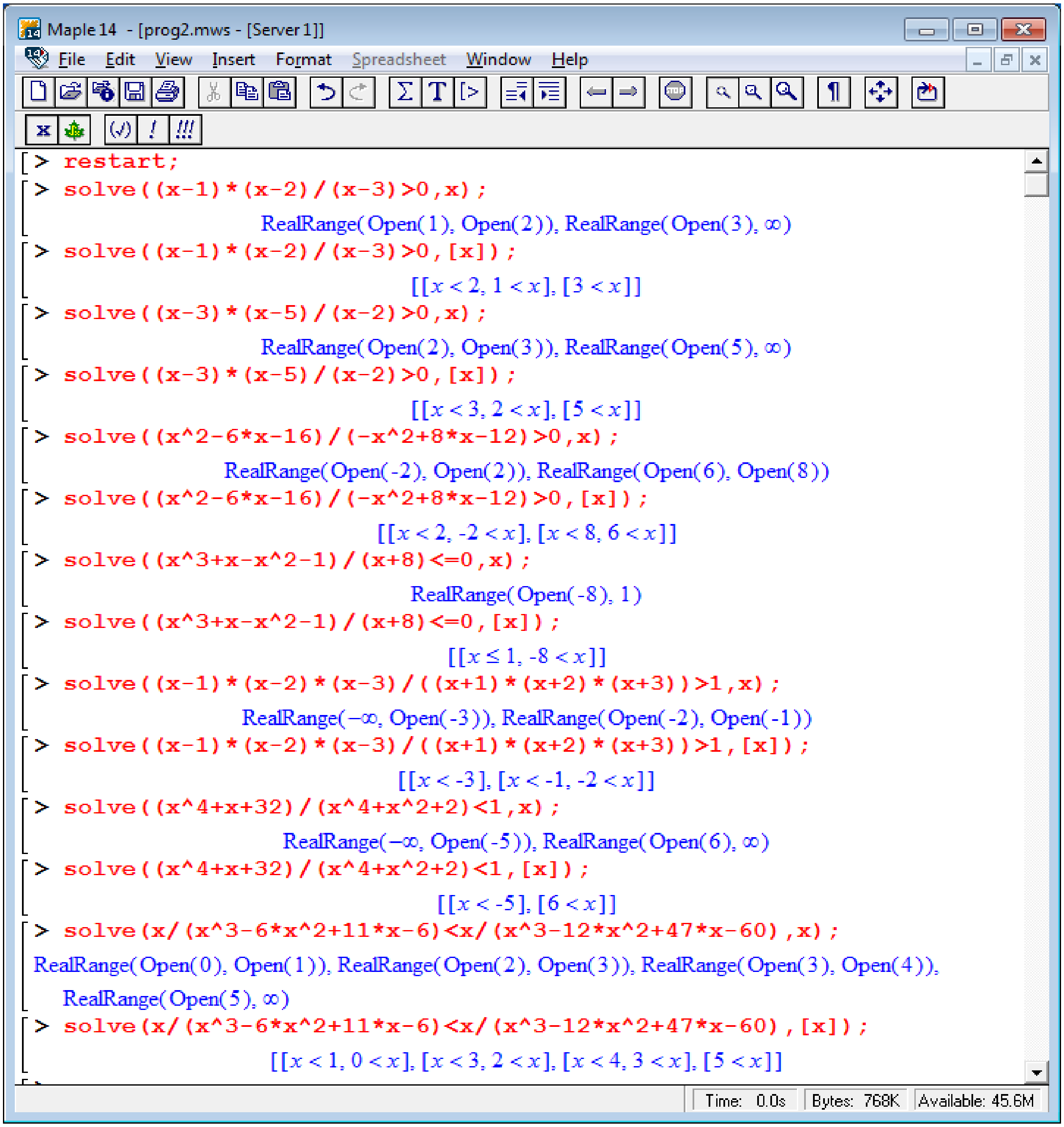
ნახ.8.2 მოცემულია ძირითადად წრფივი წრფივზე დაყვანადი და კვადრატული უტოლობები.




ნახ. 8.2

ახლა ამოვხსნათ კვადრატულზე დაყვანადი უტოლობები,

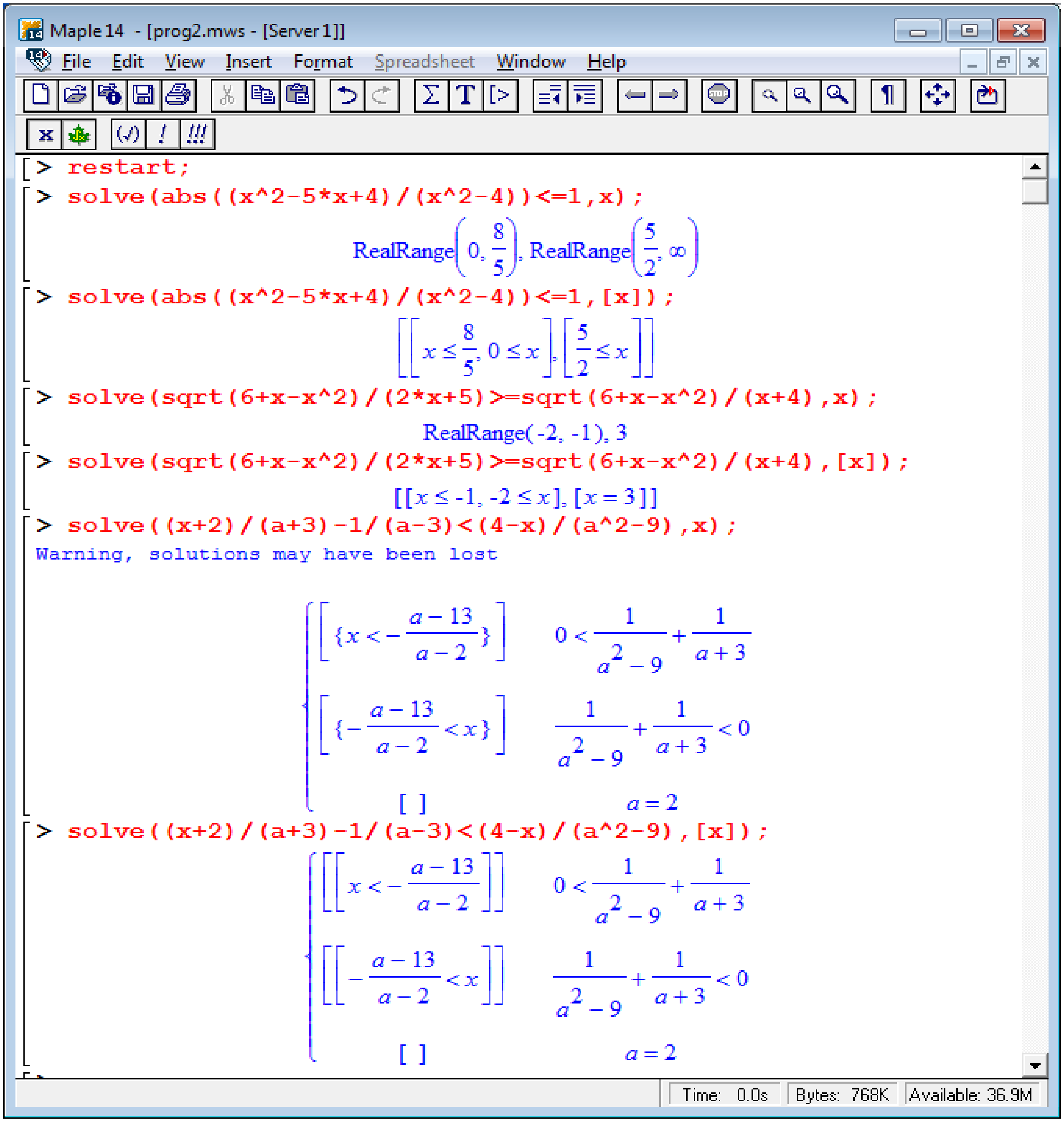
მაგალითად ასეთები $\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-3} > 0$ , $\dfrac{(x-3)(x-5)}{x-2} > 0$




ნახ. 8.3

ახლა განვიხილოთ უტოლობები რომლებიც შეიცავენ რადიკალებს და მოდულებს.

მაგალითად $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \le 1$, $\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \ge \dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$

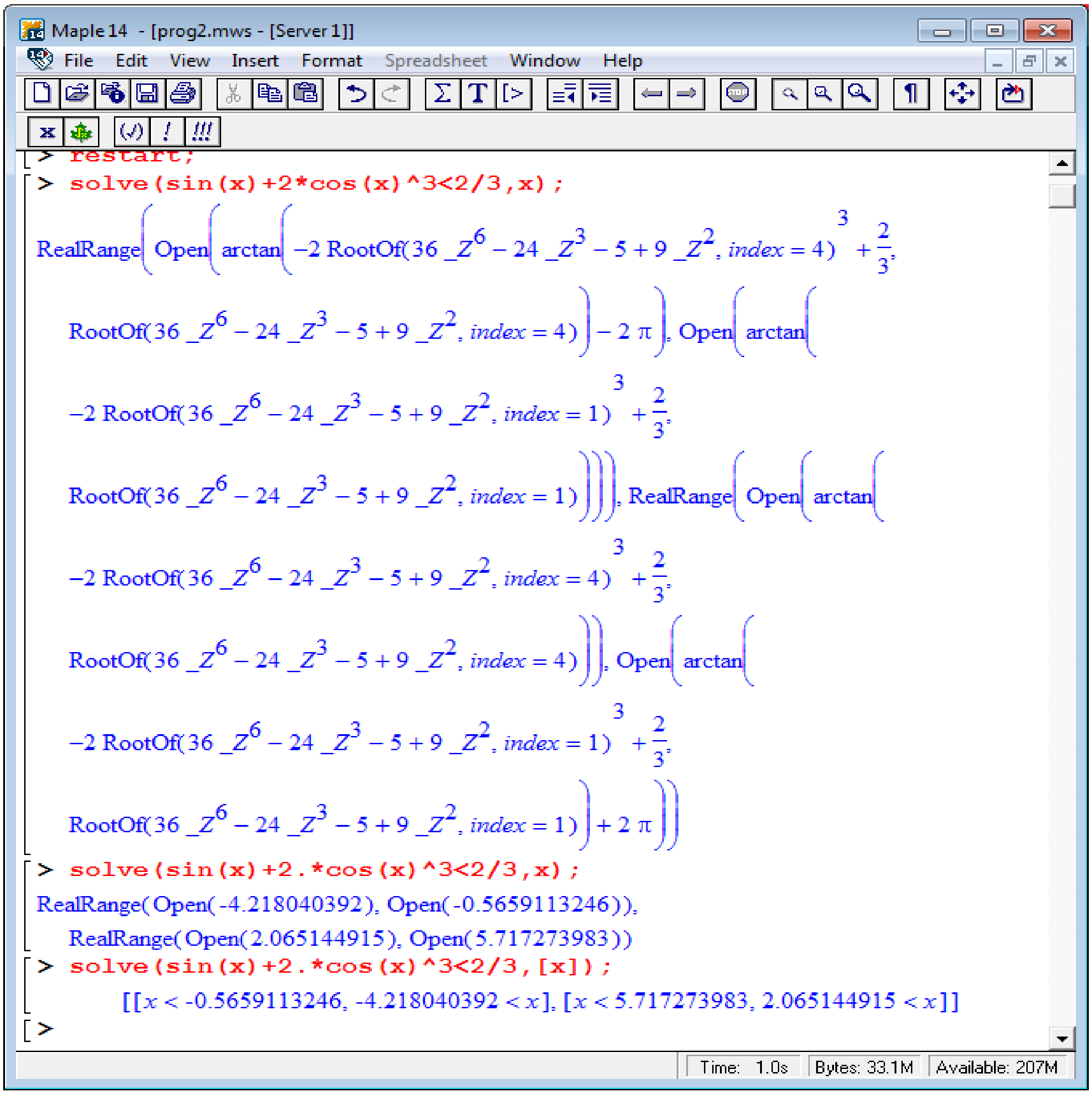



ნახ. 8.4

ახლა ავაგოთ ტრანსცენდენტული უტოლობების ამოხსნის **Maple** ალგორითმები

მაგალითად ამოვხსნათ უტოლობები:

$\sin x + 2\cos^3 x < \dfrac{2}{3}$ ამოხსნა მოცემულია ნახ.8.5–ზე, როგორც ნახაზიდან ჩანს ამ უტოლობას არა აქვს ზუსტი ამონახსენი, ამიტომ ერთ–ერთ კოეფიციენტს დავუსვით ბოლოში წერტილი ანუ მოვითხოვეთ მიახლოებითი ამოხსნა.



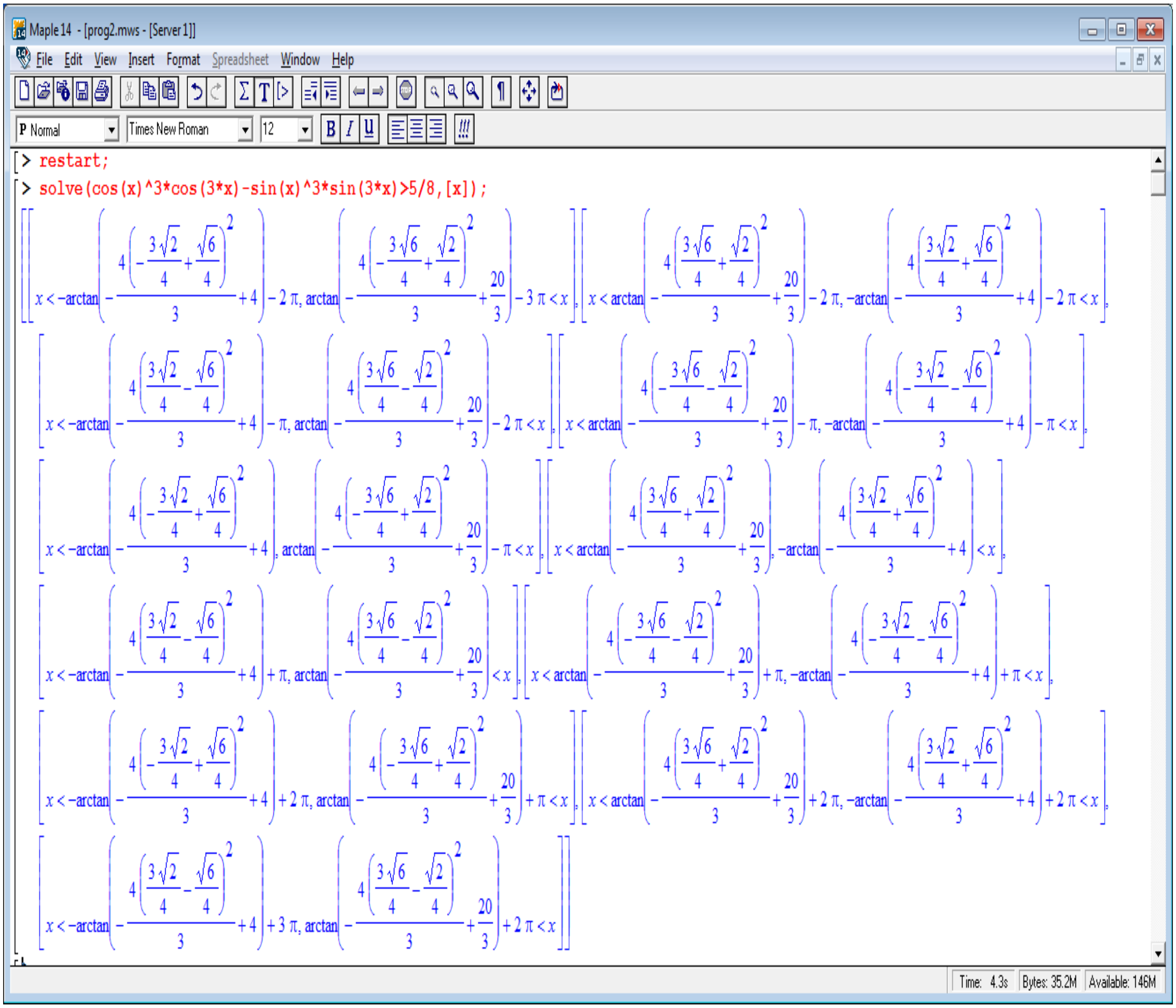

ნახ.8.5

ახლა ამოვხსნათ შემდეგი ტრიგონომეტრიული უტოლობები:

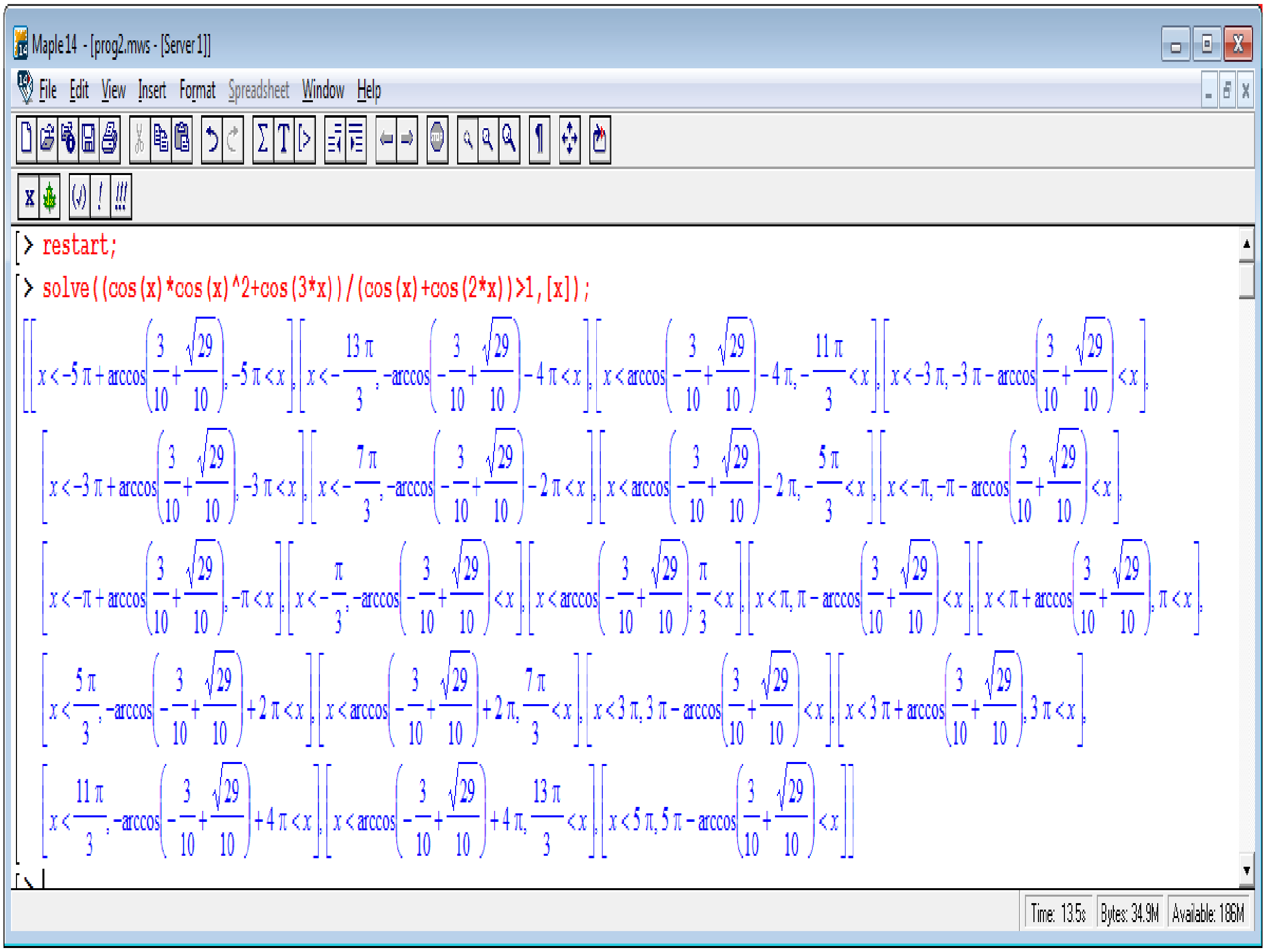
$$\cos^3 x \cos 3x - \sin^3 x \sin 3x > \frac{5}{8}$$

და $\dfrac{\cos x + 2\cos^2 x + \cos 3x}{\cos x + \cos 2x} > 1$

ამ უტოლობების ამოხსნა მოცემულია ნახ.8.6 და 8.7–ზე




ნახ. 8.6




ნახ.8.7

განვიხილოთ შემდეგი უტოლობები:

**1.** $\ell^{2x+3} < 1$ ამოვხსნათ ეს უტოლობა **X**-ის მიმართ

**2.** $13x^3 - 25x^2 - x^4 - 129x + 270 > 0$ ამოვხსნათ ეს უტოლობა **X**-ის მიმართ.

$\ln(2 + x^3) < 12$ ამოვხსნათ ეს უტოლობა **X**-ის მიმართ

**3.** $\ell^{\sin(x)} < \ell^{\cos(x)}$ ამოვხსნათ ეს უტოლობა **X**-ის მიმართ

**4.** ამოვხსნათ სისტემა **X**-ის მიმართ

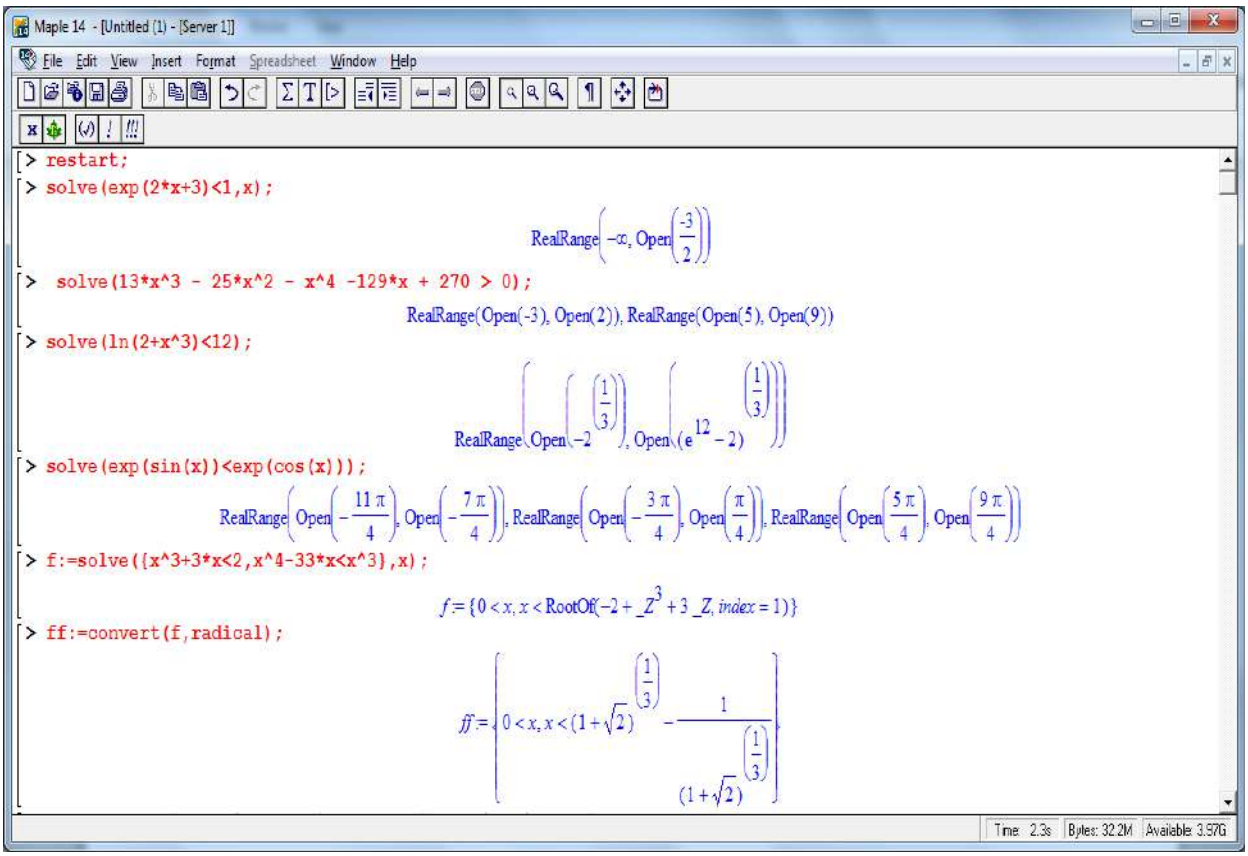
$$\begin{cases} x^3 + 3x < 2 \\ x^4 - 33x < x^3 \end{cases}$$

**5.** ამოვხსნათ სისტემა **X**-ის მიმართ

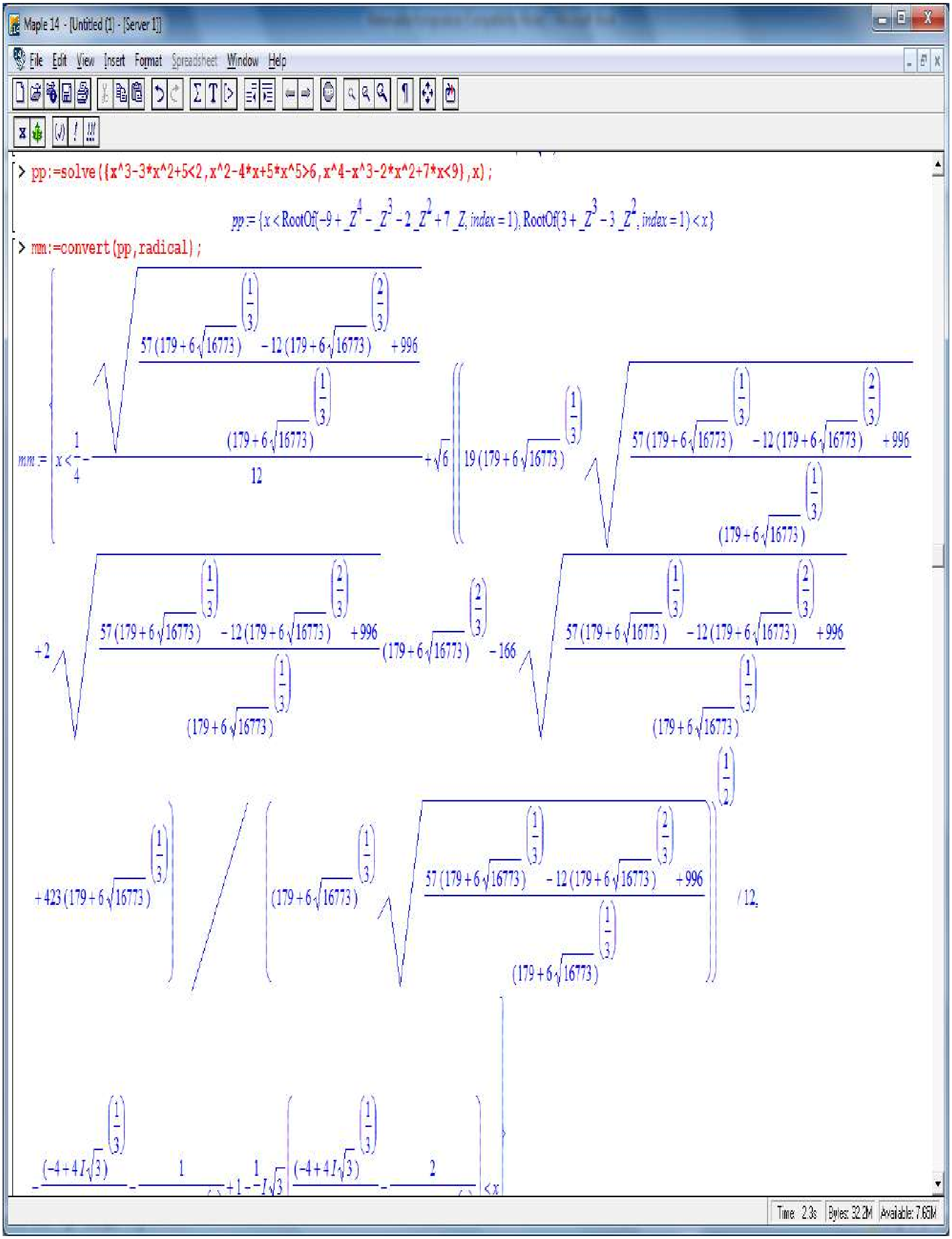
$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 5 < 2 \\ x^2 - 4x + 5x^5 > 6 \\ x^4 - x^3 - 2x^2 + 7x < 9 \end{cases}$$

**6.** ამოვხსნათ უტოლობა **X**-ის მიმართ

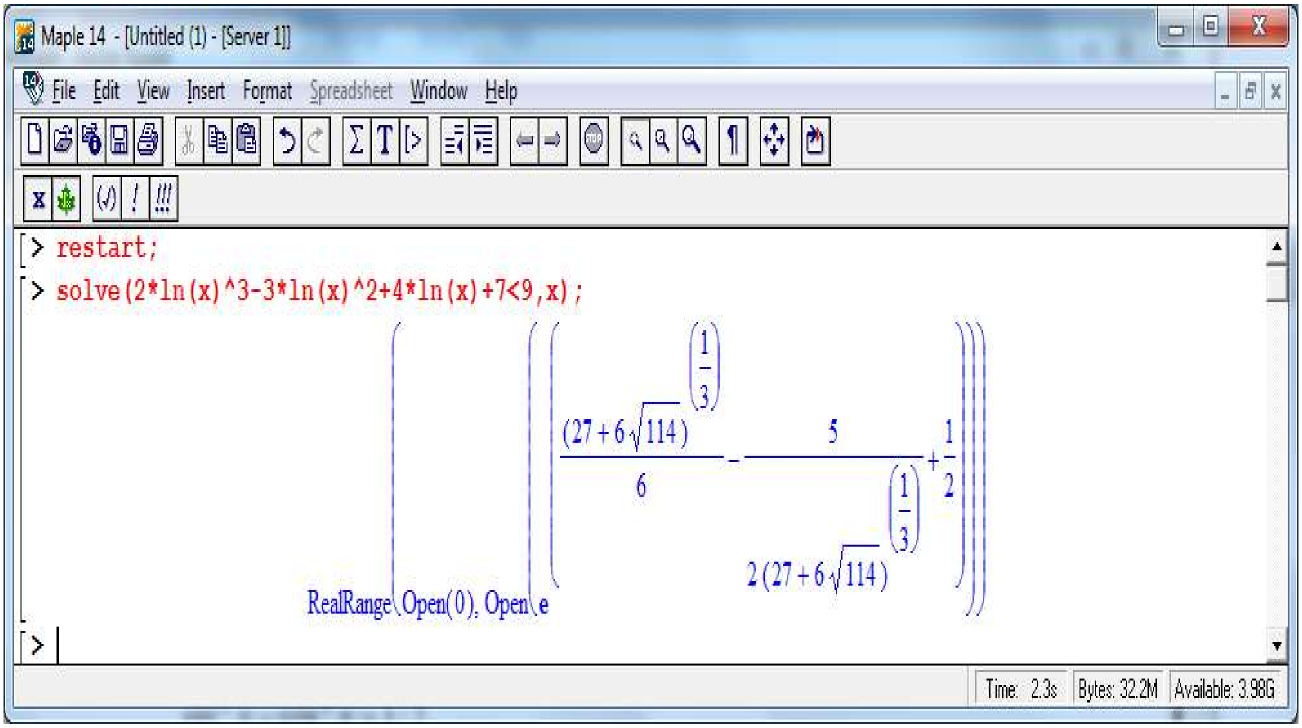
$$2\ln^3(x) - 3\ln^2(x) + 4\ln(x) + 7 < 9$$




ნახ. 8.8


Maple 14 - [Untitled (1) - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
> pp:=solve({x^3-3*x^2+5<2,x^2-4*x+5*x^5>6,x^4-x^3-2*x^2+7*x<9},x);
pp := {x < RootOf(-9 + _Z^4 - _Z^3 - 2 _Z^2 + 7 _Z, index = 1), RootOf(3 + _Z^3 - 3 _Z^2, index = 1) < x}
> mm:=convert(pp,radical);
Time: 2.3s Bytes: 32.2M Available: 7.65M

ნახ.8.9


Maple 14 - [Untitled (1) - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
> restart;
> solve(2*ln(x)^3-3*ln(x)^2+4*ln(x)+7<9,x);
RealRange(Open(0), Open(e^((27+6√114)^(1/3)/6 − 5/(2(27+6√114)^(1/3)) + 1/2)))
Time: 2.3s
Bytes: 32.2M
Available: 3.98G

ნახ. 8.10

# თავი 9. ზღვრების გამოთვლა Maple –ში

## 9.1. მიმდევრობის ზღვრის გამოთვლა

a რიცხვს ეწოდება $x_1, x_2, \ldots, x_n$ მიმდევრობის ზღვარი, თუ ნებისმიერი რაგინდ მცირე $\varepsilon$ დადებითი რიცხვითვის მოიძებნება ისეთი დადებითი N რიცხვი, რომ $|x_n - a| < \varepsilon$ თუ n>N. ამ შემთხვევაში წერენ $\lim\limits_{n \to .\infty} x_n = a$ .

რიცხვ A-ს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი ,როცა $x \to a$, თუ ნებისმიერი რაგინდ მცირე $\varepsilon$>0 რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ , რომ $|f(x) - A| < \varepsilon$, როცა $0 < |x - a| < \delta$.

ამ დამოკიდებულებას ჩაწერენ ხოლმე ასე: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

ანალოგიურად $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$, თუ $|f(x) - A| < \varepsilon$ როცა $|x| > N$ .

პირობითად წერენ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ , თუ $|f(x)| > M$ , როცა $0 < |x - a| < \delta$, სადაც M - არის ნებისმიერი დადებითი რიცხვი. ამ შემთხვევაში $f(x)$ -ს ეწოდება უსასრულოდ მცირე, როცა $x \to a$.

თუ $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, მაშინ ფუნქციას $\alpha(x)$ ეწოდება უსასრულოდ მცირე როცა $x \to a$.

თუ $x < a$ და $x \to a$, მაშინ გამოვიყენებთ ჩანაწერს $x \to a - 0$; ხოლო თუ $x > a$ და $x \to a$ მაშინ ვიყენებთ ჩანაწერს $x \to a + 0$. რიცხვი $f(a-0) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ და

$f(a+0) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ ეწოდება შესაბამისად $f(x)$ ფუნქციის მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები $a$ წერტილში.

იმისათვის , რომ არსებობდეს $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი $a$ წერტილში ,. აუცილებელი და საკმარისია, რომ $f(a-0) = f(a+0)$. პრაქტიკულად ზღვრების გამოთვლა ემყარება შემდეგ თეორემებს:

თუ არსებობენ $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ და $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, მაშინ:

1) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)*g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x)*\lim\limits_{x\to a} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ ოღონდ $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$.

გამოვიყენებთ აგრეთვე შემდეგ ზღვრებს:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\ell=2{,}71828\ldots$$

მაგალითების ამოხსნის დროს სასარგებლოა გავითვალისწინოთ შემდეგი ტოლობები:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a,\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{m}-1}{x}=m.$$

ახლა გავეცანით რა მოკლედ , ზღვრების თეორიულ საკითხებს შეგვიძლია გადავიდეთ ზღვრების გამოთვლის მაგალითებზე გამოვთვალოთ შემდეგი მიმდევრობების ზღვრები:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+5}{1+2+3+\ldots+n}$ 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\ldots+n}{n+3}-\dfrac{n}{2}\right)$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+\ldots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+1}}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$ 5. $\dfrac{(n+4)!+(n+2)!}{(n+5)!}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!-(n+1)!}{(n+3)!+(n+1)!}$ 7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n+1}+5^{n+1}}{4^{n}+5^{n}}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{2+4+6+\ldots+2n}$

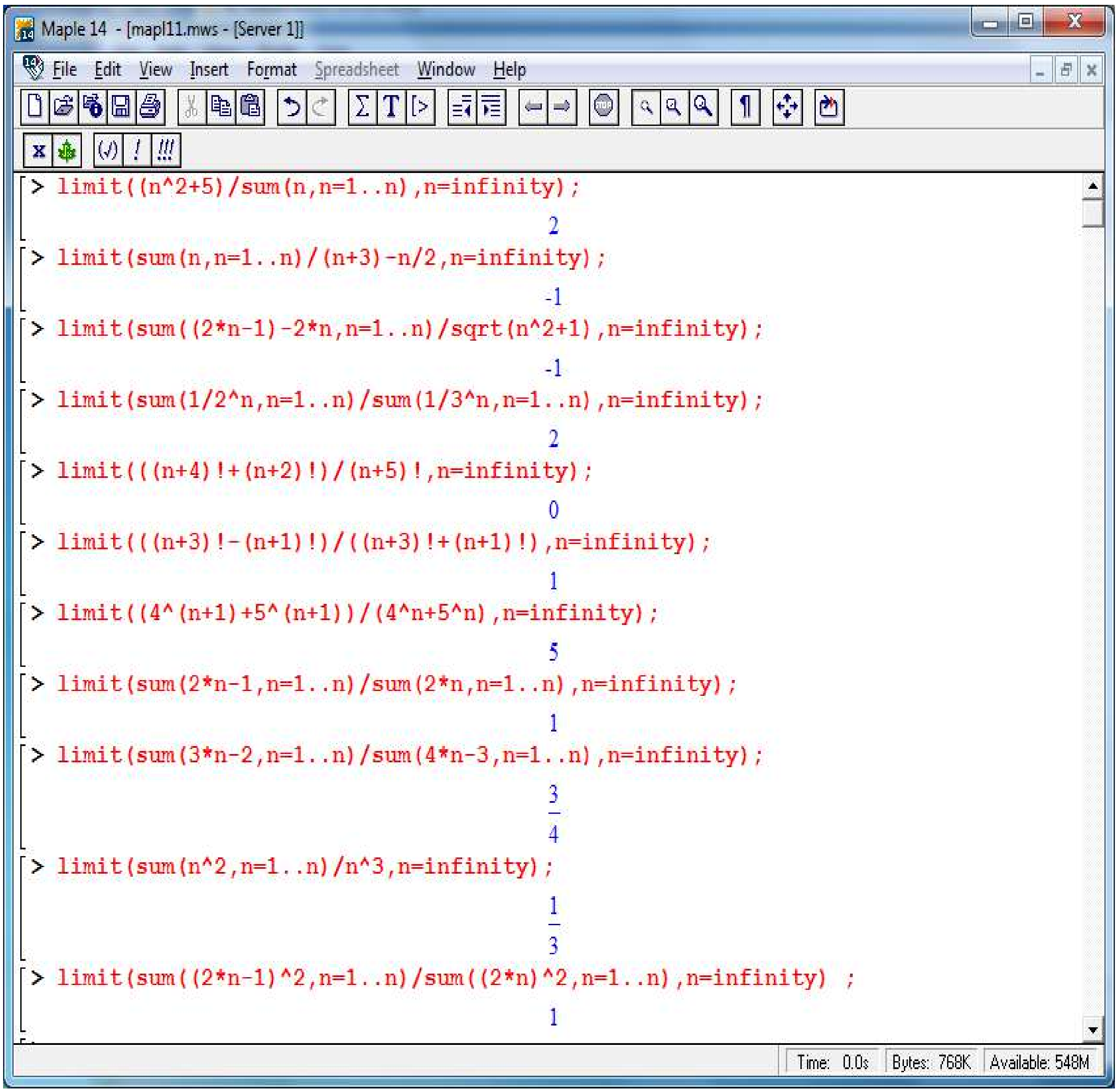
9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{1+5+9+\ldots+(4n-3)}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2*3+3*4+\ldots+n(n+1)}{n^3}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2}$.

ახლა ზემოთ მოცემული 12 მაგალითი ზღვრების გამოთვლაზე შევასრულოთ პროგრამა **Maple**-ს დახმარებით:




ნახ.9.1

### 9.2. ფუნქციის ზღვარის გამოთვლა Maple-ში

ფუნქციის ზღვართან დაკავშირებული თეორიული საკითხები ჩვენ უკვე მიმოვიხილეთ 9.1 პარაგრაფში. აქ კი ჩვენ პირდაპირ შევასრულოთ სხვადასხვა ფუნქციონალური ზღვრების გამოთვლა პროგრამა **Maple-ის** საშუალებით. გამოვთვალოთ შემდეგი ალგებრული ფუნქციების ზღვრები:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+1}$ 2. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$ 3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3+4x^2}{x^2+x-12}$

4. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x^3-3x^2}{4x^2-3x}$ 5. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x-h)^4-x^4}{h}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^5-1}$ 8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ 9. ( m და n მთელი რიცხვებია)

10. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$ 11. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{4}{x^4-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-x+3}{x^3-8x+5}$ 12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(5x-1)(3x+7)(2x+3)}{2x^3+x^2-9}$

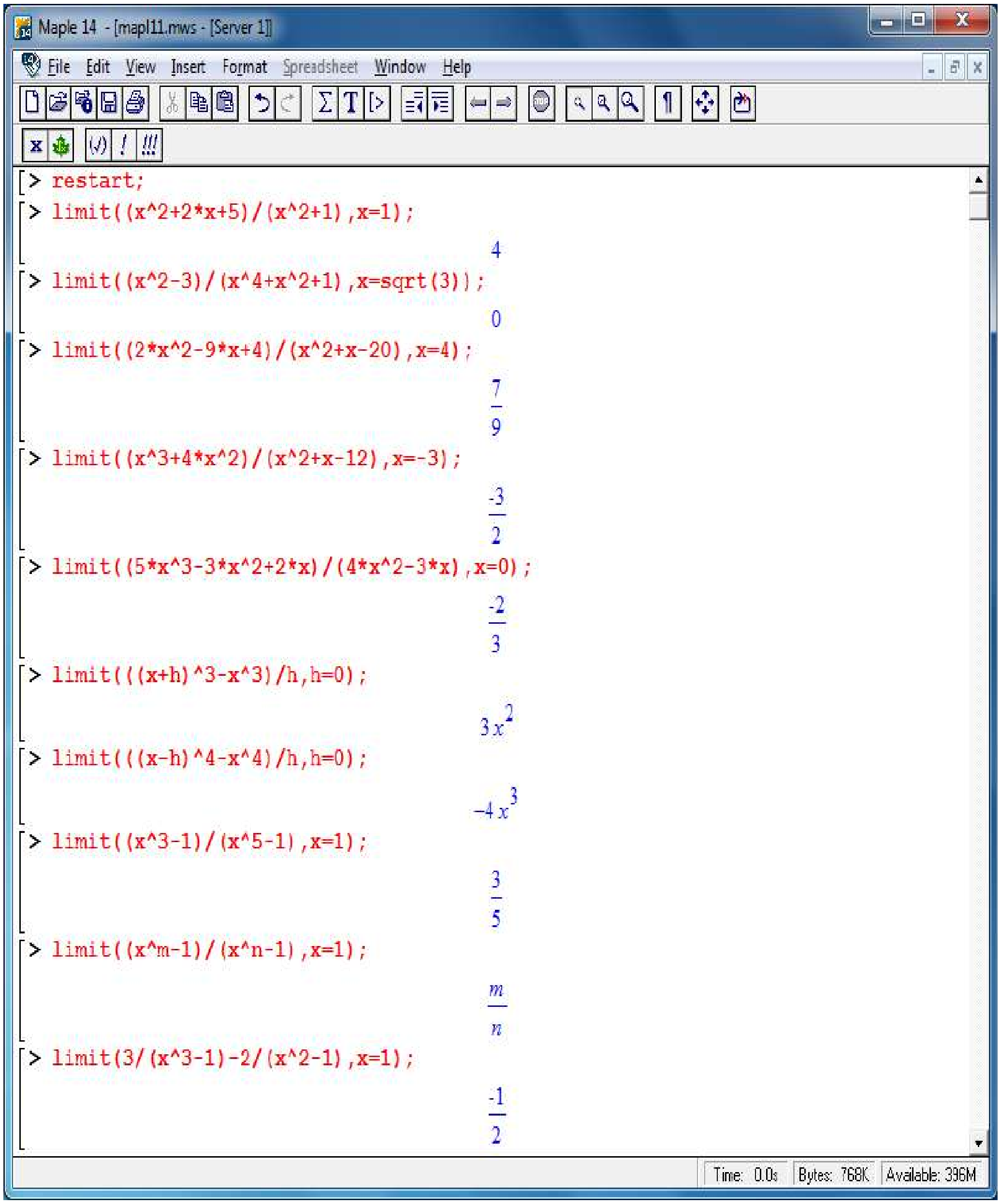
13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+2)^4(2x-5)^3}{27x^7+4x+3}$ 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+\sqrt{3x+8}}{-7x^2+\sqrt{6x-5}}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ 16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{3+4x+5x^2}}{2x+9}$

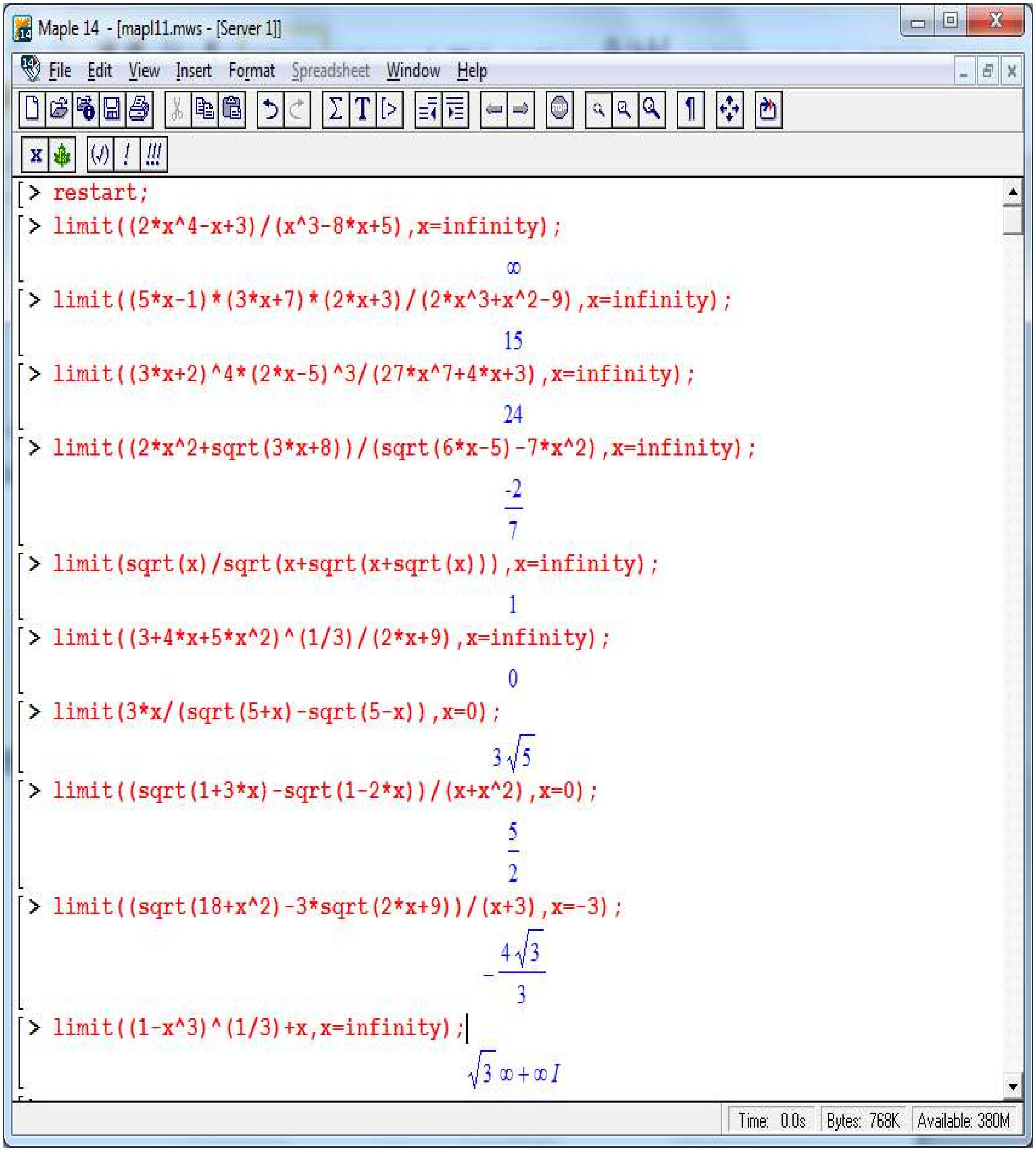
17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}$ 18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{18+x^2}-3\sqrt{2x}}{x+3}$ 20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)$

ახლა განვახორციელოთ ამ ზემოთ მოცემული ზღვრების პროგრამა Maple-ის საშუალებით გამოთვლა. გამოთვლების შედეგები და ვიზუალური პორტრეტი მოცემულია ნახ.9.2-ზე




ნახ. 9.2




ნახ. 9.3

ქვემოთ განვიხილოთ ელემენტარულ მათემატიკურ ფუნქციათა ზღვრები :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$  2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$  3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{tg7x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}$  5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2xtg3x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x\sin 2x}$  7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{tg^2 2x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\right)$  9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2+\cos x}}{xtgx}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1-tgx}}{\sin x}$  11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$

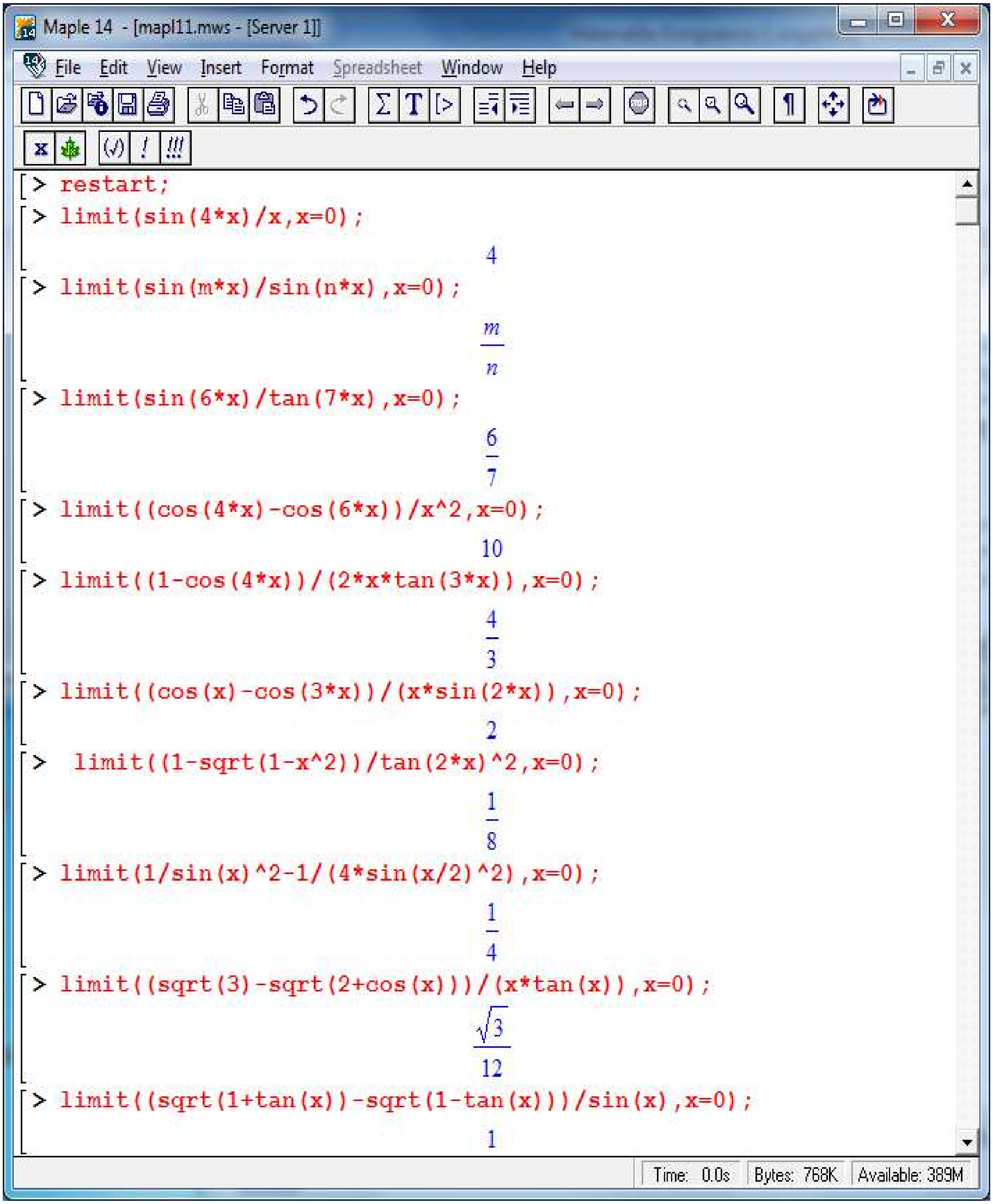
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+2tg^2x}-\sqrt[3]{1+x^2}}{\sin^2 x}$  13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos mx)}{\ln(\cos nx)}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{\sin x}-b^{tgx}}{x}(a>0,b>0)$  15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ell^{\alpha x}-\ell^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{k}{x})^x$  17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x-2}{x^2+4x-3}\right)^x$

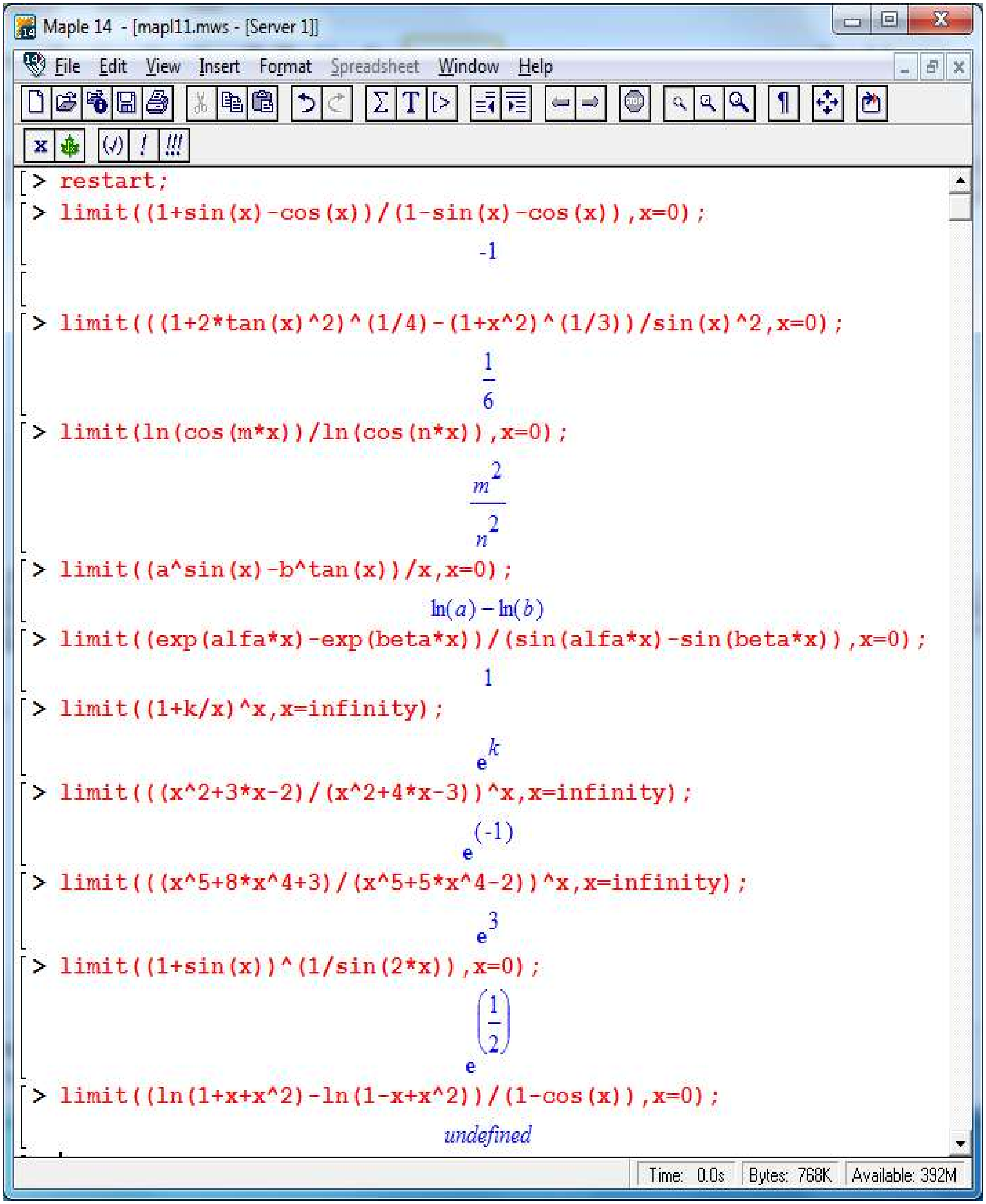
18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^5+8x^4+3}{x^5+5x^4-2}\right)^x$  19. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin 2x}}$ .

ახლა ეს ზღვრები გამოვთვალოთ პროგრამა Maple-ის საშუალებით (იხილე ნახ.9.4 და ნახ. 9.5).



Maple 14 - [mapl11.mws - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
> restart;
> limit(sin(4*x)/x,x=0);
4
> limit(sin(m*x)/sin(n*x),x=0);
m
n
> limit(sin(6*x)/tan(7*x),x=0);
6
7
> limit((cos(4*x)-cos(6*x))/x^2,x=0);
10
> limit((1-cos(4*x))/(2*x*tan(3*x)),x=0);
4
3
> limit((cos(x)-cos(3*x))/(x*sin(2*x)),x=0);
2
> limit((1-sqrt(1-x^2))/tan(2*x)^2,x=0);
1
8
> limit(1/sin(x)^2-1/(4*sin(x/2)^2),x=0);
1
4
> limit((sqrt(3)-sqrt(2+cos(x)))/(x*tan(x)),x=0);
√3
12
> limit((sqrt(1+tan(x))-sqrt(1-tan(x)))/sin(x),x=0);
1
Time: 0.0s
Bytes: 768K
Available: 389M


ნახ. 9.4


Maple 14 - [mapl11.mws - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
> restart;
> limit((1+sin(x)-cos(x))/(1-sin(x)-cos(x)),x=0);
-1
> limit(((1+2*tan(x)^2)^(1/4)-(1+x^2)^(1/3))/sin(x)^2,x=0);
$\frac{1}{6}$
> limit(ln(cos(m*x))/ln(cos(n*x)),x=0);
$\frac{m^2}{n^2}$
> limit((a^sin(x)-b^tan(x))/x,x=0);
$\ln(a)-\ln(b)$
> limit((exp(alfa*x)-exp(beta*x))/(sin(alfa*x)-sin(beta*x)),x=0);
1
> limit((1+k/x)^x,x=infinity);
$e^k$
> limit(((x^2+3*x-2)/(x^2+4*x-3))^x,x=infinity);
$e^{(-1)}$
> limit(((x^5+8*x^4+3)/(x^5+5*x^4-2))^x,x=infinity);
$e^3$
> limit((1+sin(x))^(1/sin(2*x)),x=0);
$e^{\left(\frac{1}{2}\right)}$
> limit((ln(1+x+x^2)-ln(1-x+x^2))/(1-cos(x)),x=0);
*undefined*
Time: 0.0s Bytes: 768K Available: 392M

ნახ. 9.5

# თავი 10. წარმოებული, დიფერენციალი, ჩვეულებრივი და კერძო წარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნა Maple –ში

## 10.1. ფუნქციის, რთული ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლა Maple –ში

დავუშვათ, რაიმე შუალედში მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქცია. ამ შუალედში ავიღოთ რომელიმე $x_0$ წერტილი და მივანიჭოთ მას მცირე $\Delta x$ ნაზრდი, რომელსაც ვუწოდოთ **არგუმენტის ნაზრდი.** ვიგულისხმოთ, რომ $\Delta x \neq 0$ და ამასთან $(x_0 + \Delta x)$ წერტილი არ გამოდის ფუნქციის განსაზღვრის არიდან. ცხადია, რომ, თუ $\Delta x > 0$, მაშინ $(x_0 + \Delta x)$ წერტილი ძევს $x_0$ წერტილის მარჯვნივ, და თუ $\Delta x < 0$ მაშინ- მარცხნივ. არგუმენტის $\Delta x$ ნაზრდით შეცვლისას ფუნქციაც მიიღებს შესაბამის ნაზრდს, რომელიც აღინიშნება $\Delta y$ სიმბოლოთი და გამოითვლება ფორმულით

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\,.$$

ფუნქციის საშუალო ნაზრდი მასშტაბის ერთეულზე გაანგარიშებით იქნება

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \qquad (10.1)$$

რაც ახასიათებს ფუნქციის ცვლილების სიჩქარეს, როდესაც არგუმენტი იცვლება $x_0$ -დან $(x_0 + \Delta x)$ -მდე. რაც უფრო მცირეა $\Delta x$ (ანუ რაც უფრო ახლოსაა $\Delta x$ ნულთან), მით უფრო ზუსტად აღწერს ეს შეფარდება ფუნქციის ცვლილების სიჩქარეს $x_0$ წერტილის უშუალო მახლობლობაში. ამ პროცესს ბუნებრივად მივყავართ წარმოებულის ცნებასთან, ანუ 10.1 შეფარდების ზღვრის გამოთვლასთან, როდესაც $\Delta x \to 0$.

$f(x)$ **ფუნქციის წარმოებული** $x_0$ წერტილში ეწოდება ამ წერტილში ფუნქციის ნაზრდის არგუმენტის ნაზრდთან შეფარდების ზღვარს, როცა არგუმენტის ნაზრდი

მიისწრაფის ნულისაკენ. ფუნქციის წარმოებული $x_0$ წერტილში აღინიშნება $f^1(x)$ სიმბოლოთი. მაშასადამე განმარტების თანახმად გვაქვს

$$f^1(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad (10.2)$$

თუ $f(x)$ ფუნქციას გააჩნია წარმოებული $f^1(x)$ მისი განსაზღვრის არის ყოველ $x$ წერტილში, მაშინ ამბობენ, რომ ფუნქცია წარმოებადია მოცემულ არეში. ფუნქციის წარმოებულის მოძებნის ოპერაციას ფუნქციის გაწარმოება ეწოდება. წარმოებული აღინიშნება აგრეთვე $\frac{dy}{dx}$ სიმბოლოთი. გავეცნოთ ძირითადი ფუნქციების დიფერეცირების ძირითად წესებსა და ფორმულებს :

1. $C^1=0$; 2. $x^1=1$; 3. $(u\pm v)^1=u^1\pm v^1$; 4. $(Cu)^1=Cu^1$;

5. $(uv)^1=u^1v+uv^1$; 6. $(\frac{u}{v})^1=\frac{u^1v-uv^1}{v^2}$;

7. თუ $y=f(u)$, $u=u(x)$, ანუ $y=f[u(x)]$, სადაც ფუნქცია $f(u)$-ს და $u(x)$-ს გააჩნიათ წარმოებულები, მაშინ

$$y_X^1=y_u^1\cdot u_x^1 \quad (10.3)$$

10.3 ფორმულას უწოდებენ რთული ფუნქციის წარმოებულის ფორმულას.

ძირითადი ელემენტარული ფუნქციების გაწარმოების ფორმულებს აქვს შემდეგი სახე:

1. $(x^m)^1=mx^{m-1}$.; 2. $(\sqrt{x})^1=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 3. $(\frac{1}{x})^1=-\frac{1}{x^2}$; 4. $(\ell^x)^1=\ell^x$;

5. $(a^x)^1=a^x\ln a$; 6. $(\ln x)^1=\frac{1}{x}$; 7. $(\log_a x)^1=\frac{1}{x\ln a}$;

8. $(\sin x)^1=\cos x$; 9. $(\cos x)^1=-\sin x$; 10. $(tgx)^1=\sec^2 x$

11. $(ctgx)^1 = -\cos ec^2 x$; 12. $(\arcsin x)^1 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 13. $(\arccos x)^1 = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

14. $(arctgx)^1 = \frac{1}{1+x^2}$; 15. $(arcctgx)^1 = -\frac{1}{1+x^2}$; 16. $(shx)^1 = (\frac{\ell^x - \ell^{-x}}{2})^1 = chx$;

17. $(chx)^1 = (\frac{\ell^x + \ell^{-x}}{2})^1 = shx$; 18. $(thx)^1 = (\frac{shx}{chx})^1 = \frac{1}{ch^2 x}$;

19. $(cthx)^1 = (\frac{chx}{shx})^1 = -\frac{1}{sh^2 x}$.

ახლა განვიხილოთ რამოდენიმე მაგალითი გაწარმოების საკითხებზე:

**გავაწარმოოთ ფუნქცია** $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$

მივცეთ $x$ ცვლადს ნაზრდი $\Delta x$ მაშინ $y$ ცვლადის ნაზრდს ექნება სახე $\Delta y$ ანუ

$$y + \Delta y = 2(x+\Delta x)^3 + 5(x+\Delta x)^2 - 7(x+\Delta x) - 4$$

ახლა მოვძებნოთ $\Delta y$ -ის მნიშვნელობა (ანუ ფუნქციის ნაზრდი).

$$\Delta y = [2(x+\Delta x)^3 + 5(x+\Delta x)^2 - 7(x+\Delta x) - 4] - (2x^3 + 5x^2 - 7x - 4) =$$
$$= 6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 + 2\Delta x^3 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 - 7\Delta x$$

გამოვთვალოთ ფუნქციის ნაზრდის არგუმენტის ნაზრდის შეფარდების სიდიდე გვექნება:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 + 2\Delta x^3 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 - 7\Delta x}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7$$

ახლა მოვძებნოთ ამ შეფარდების ზღვარი, როცა $\Delta x \to 0$, მივიღებთ:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7) = 6x^2 + 10x - 7$$ მაშასადამე

$$y^1 = 6x^2 + 10x - 7$$ რ.გ.გ

**გავაწარმოოთ ფუნქცია** $y = -ctgx - x$

მოვძებნოთ $\Delta y$

$$\Delta y = -ctg(x+\Delta x) - (x+\Delta x) + ctgx + x = ctgx - ctg(x+\Delta x) - \Delta x.$$

გამოვიყენოთ ფორმულა $ctg\alpha - ctg\beta = \dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$, მივიღებთ

$$\Delta y = \frac{\sin(x+\Delta x - x)}{\sin x \sin(x+\Delta x)} - \Delta x = \frac{\sin\Delta x}{\sin x\sin(x+\Delta x)} - \Delta x,$$ საიდანაც გვაქვს

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}}{\sin x\sin(x+\Delta x)} - 1$$ და აქედან გამომდინარეობს

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}}{\sin x\sin(x+\Delta x)} - 1 = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$ მაშასადამე

$$y^1 = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 = ctg^2 x$$ რ.გ.გ

ახლა განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითები გაწარმოების ზოგადი წესების გამოყენებით

**გავაწარმოოთ შემდეგი ფუნქცია** $y = x^2\ell^x$

$$y^1 = x^2(\ell^x)^1 + \ell^x(x^2)^1 = x^2\ell^x + 2x\ell^x = x\ell^x(x+2).$$

**გავაწარმოოთ შემდეგი ფუნქცია** $y = \dfrac{\arcsin x}{x}$

$$y^1 = \frac{x(\arcsin x)^1 - \arcsin x(x)^1}{x^2} = \frac{x\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x^2} = \frac{x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

**გავაწარმოოთ შემდეგი ფუნქცია** $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

$$y^1=\frac{(\sin x+\cos x)(\cos x+\sin x)-(\sin x-\cos x)(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2}{(\sin x+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{2}{(\sin x+\cos x)^2}$$

ახლა კი გამოვიყენოთ კომპიუტერული პროგრამა Maple და ვაჩვენოთ ამპროგრამის საშუალებით გაწარმოების პროცედურების შესრულების მექანიზმები.

**Maple-ში წარმოებულის გამოსათვლელად გამოიყენება ორი ბრძანება:**

1) **diff(f,x) ,** სადაც f- არის ფუნქცია, რომელიც უნდა გავაწარმოოთ, x- იმ ცვლადის დასახელებაა რომლის მიმართაც ხდება გაწარმოება.

2) **Diff(f,x),** სადაც ბრძანების პარამეტრები ისეთივეა, როგორიც წინაში. მხოლოდ ამ ბრძანების მოქმედების შედეგად ფუნქციის წარმოებული გამოდის ანალიზური სახით ანუ $\frac{\partial}{\partial x} f(x)$ სახით. რის შემდეგაც მიღებული გამოსახულება სასურველია გავამარტივოთ. ამისათვის საჭიროა გამოვიყენოთ ბრძანებები simplify, factor და expand ეს დამოკიდებულია იმაზე, თუ როგორი სახით გვინდა მივიღოთ შედეგი.

განვიხილოთ მაგალითები:

გავაწარმოოთ შემდეგი ფუნქციები Maple-ში:

1. $y=\sin(x^2)$ ; 2 . $y^{IV}=(\cos^2(2x))^{IV}$ ; 3. $y=x^2\ell^x$

4. $y=x^3 arctgx$; 5. $y=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$ ; 6. $y=\arcsin\frac{2x^2}{1+x^4}$ ;

7. $y=\frac{1}{2}tg^2\sqrt{x}+\ln\cos\sqrt{x}$ ; 8. $y=\frac{(2x-1)^3\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}$

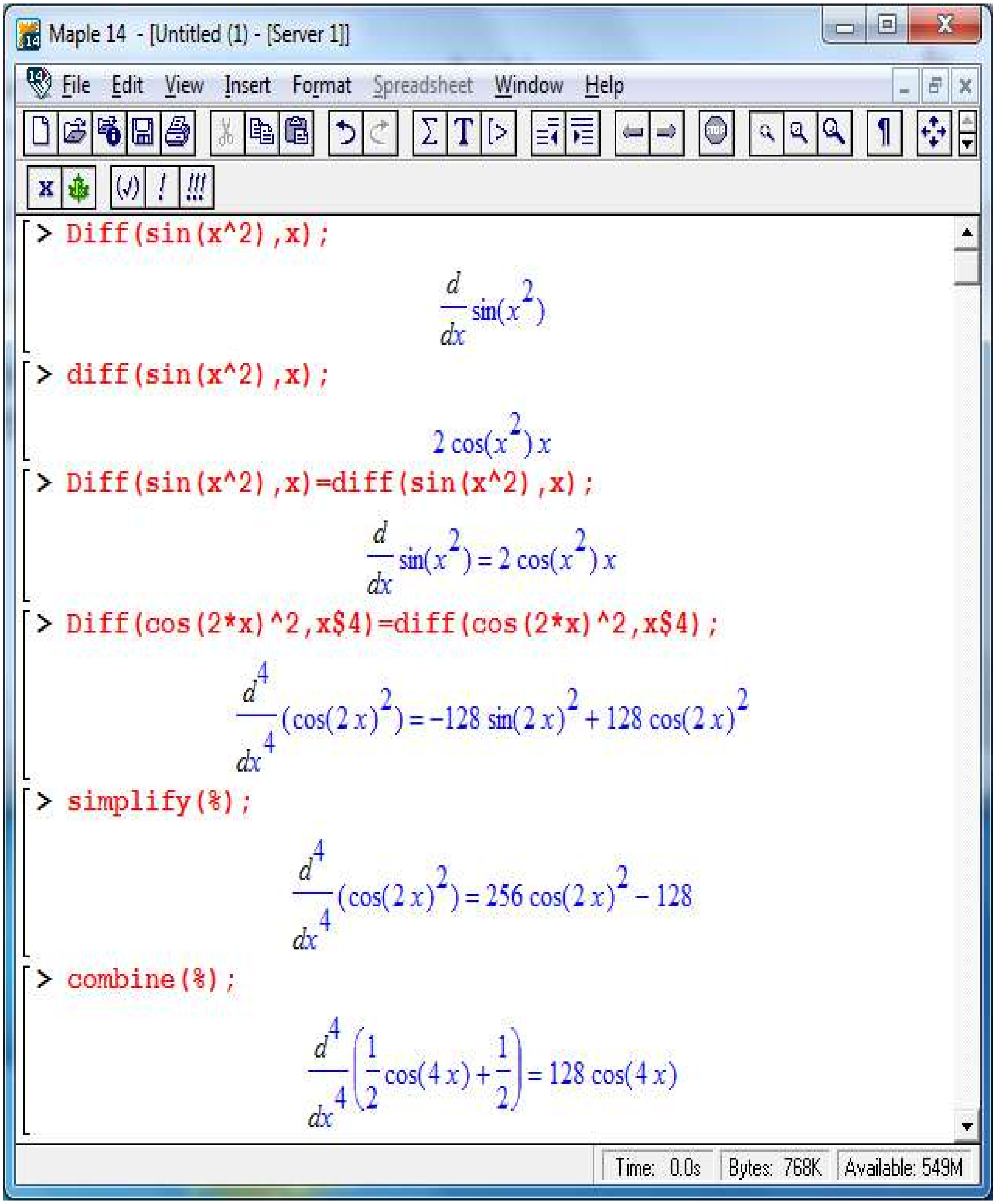
9. $y = m\sqrt{x^2 + 2\alpha x + \beta} + (n - m\alpha)\ln(x + \alpha + \sqrt{x^2 + 2\alpha x + \beta})$

10. $y = \ell^x - \sin \ell^x \cos^3 \ell^x - \sin^3 \ell^x \cos \ell^x$

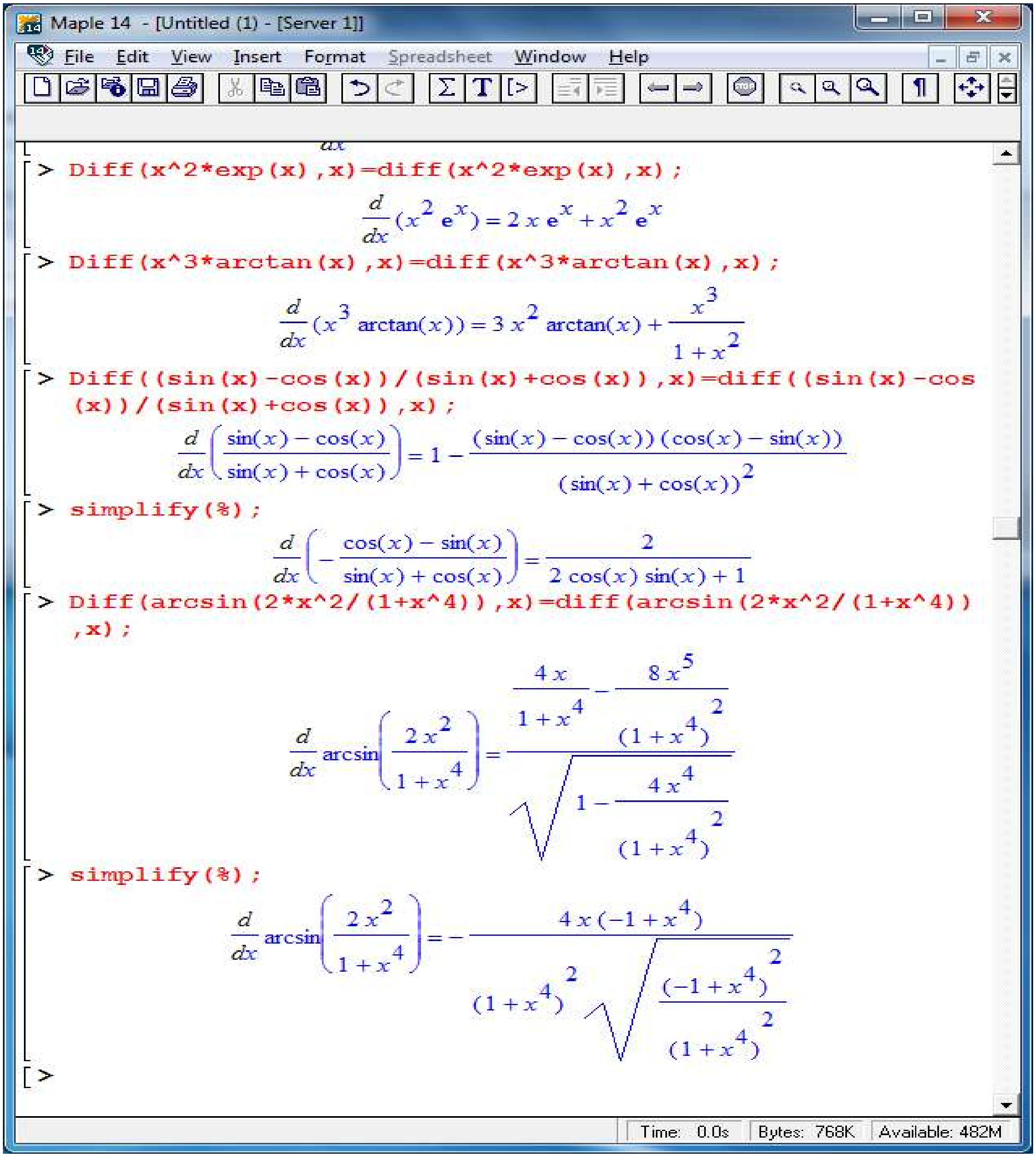
10. $y = tg^3 tgx + 3tgtgx$

11. $y = \frac{1}{4a}\ln\frac{x-a}{x+a} + \frac{1`}{2a} arctg\frac{x}{a}$

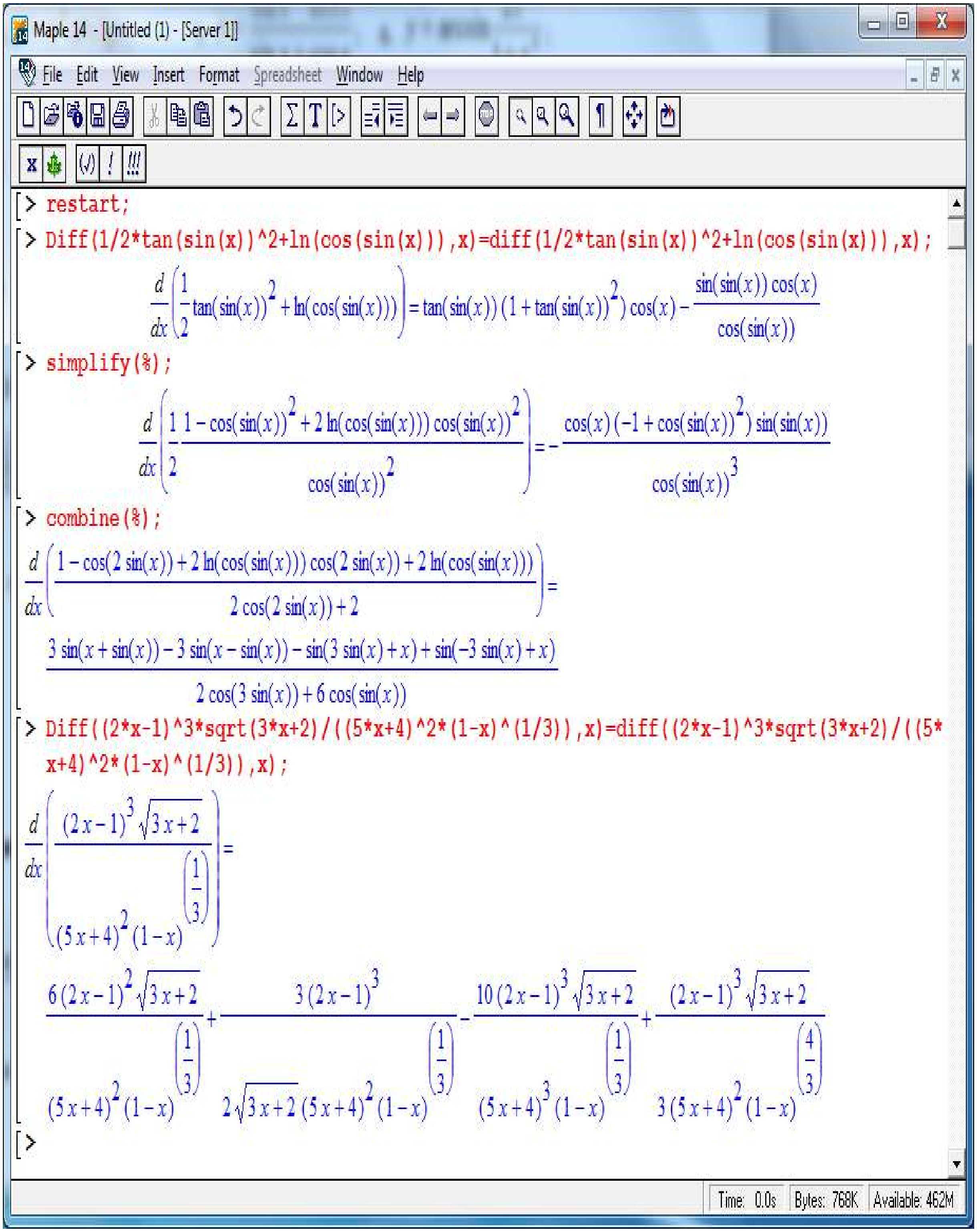
ეს წარმოებულები გამოთვლილია ნახ.10.1,10.2 ,10.3 ,10.4 და ნახ.10.5 -ზე


Maple 14 - [Untitled (1) - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
> Diff(sin(x^2),x);
> diff(sin(x^2),x);
> Diff(sin(x^2),x)=diff(sin(x^2),x);
> Diff(cos(2*x)^2,x$4)=diff(cos(2*x)^2,x$4);
> simplify(%);
> combine(%);
Time: 0.0s
Bytes: 768K
Available: 549M

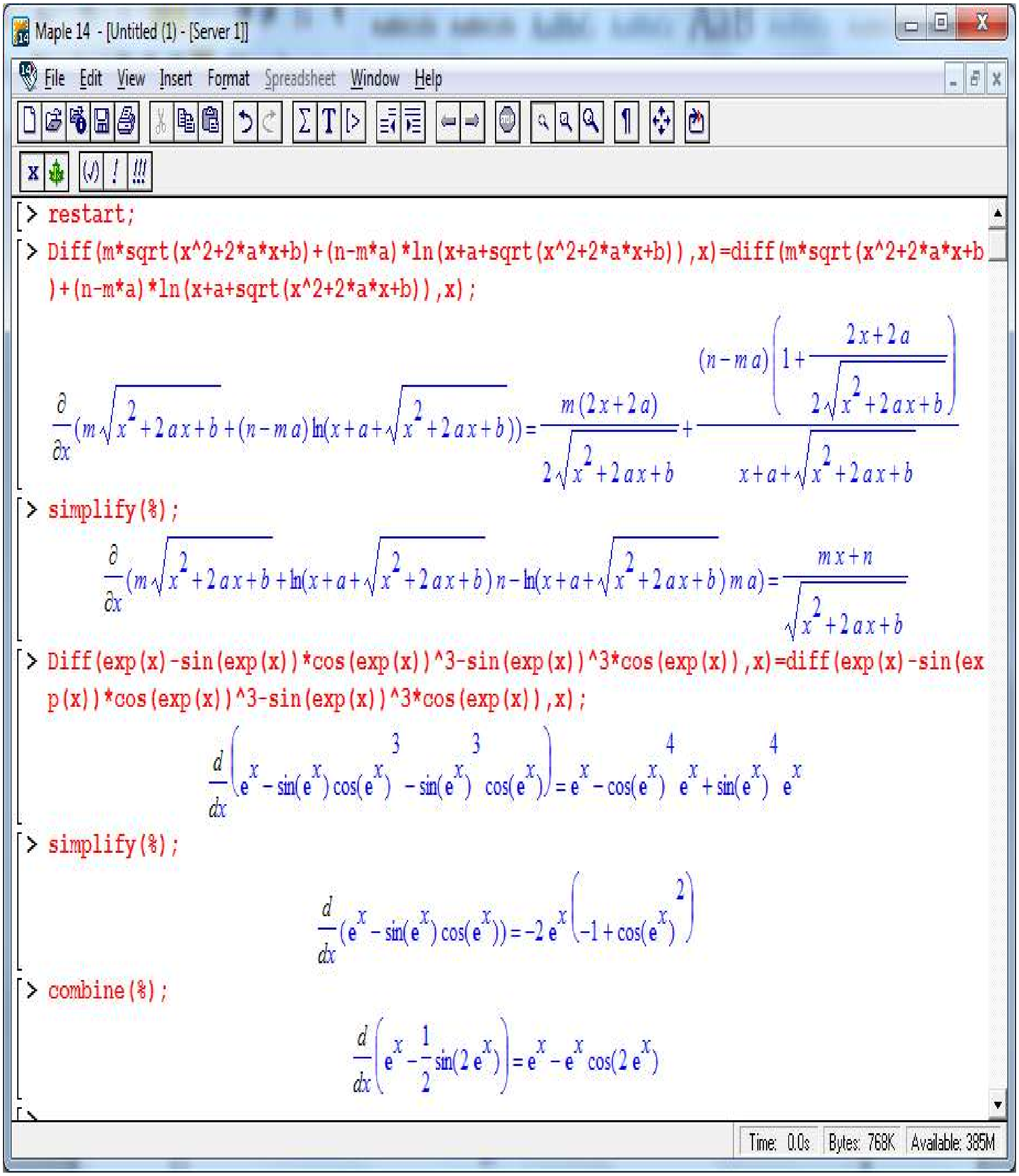
ნახ.10.1


Maple 14 - [Untitled (1) - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
> Diff(x^2*exp(x),x)=diff(x^2*exp(x),x);
$\frac{d}{dx}(x^2 e^x) = 2 x e^x + x^2 e^x$
> Diff(x^3*arctan(x),x)=diff(x^3*arctan(x),x);
$\frac{d}{dx}(x^3 \arctan(x)) = 3 x^2 \arctan(x) + \frac{x^3}{1+x^2}$
> Diff((sin(x)-cos(x))/(sin(x)+cos(x)),x)=diff((sin(x)-cos(x))/(sin(x)+cos(x)),x);
$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\right) = 1 - \frac{(\sin(x)-\cos(x))(\cos(x)-\sin(x))}{(\sin(x)+\cos(x))^2}$
> simplify(%);
$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos(x)-\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\right) = \frac{2}{2\cos(x)\sin(x)+1}$
> Diff(arcsin(2*x^2/(1+x^4)),x)=diff(arcsin(2*x^2/(1+x^4)),x);
$\frac{d}{dx}\arcsin\left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right) = \frac{\frac{4x}{1+x^4} - \frac{8x^5}{(1+x^4)^2}}{\sqrt{1 - \frac{4x^4}{(1+x^4)^2}}}$
> simplify(%);
$\frac{d}{dx}\arcsin\left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right) = -\frac{4x(-1+x^4)}{(1+x^4)^2\sqrt{\frac{(-1+x^4)^2}{(1+x^4)^2}}}$
Time: 0.0s Bytes: 768K Available: 482M

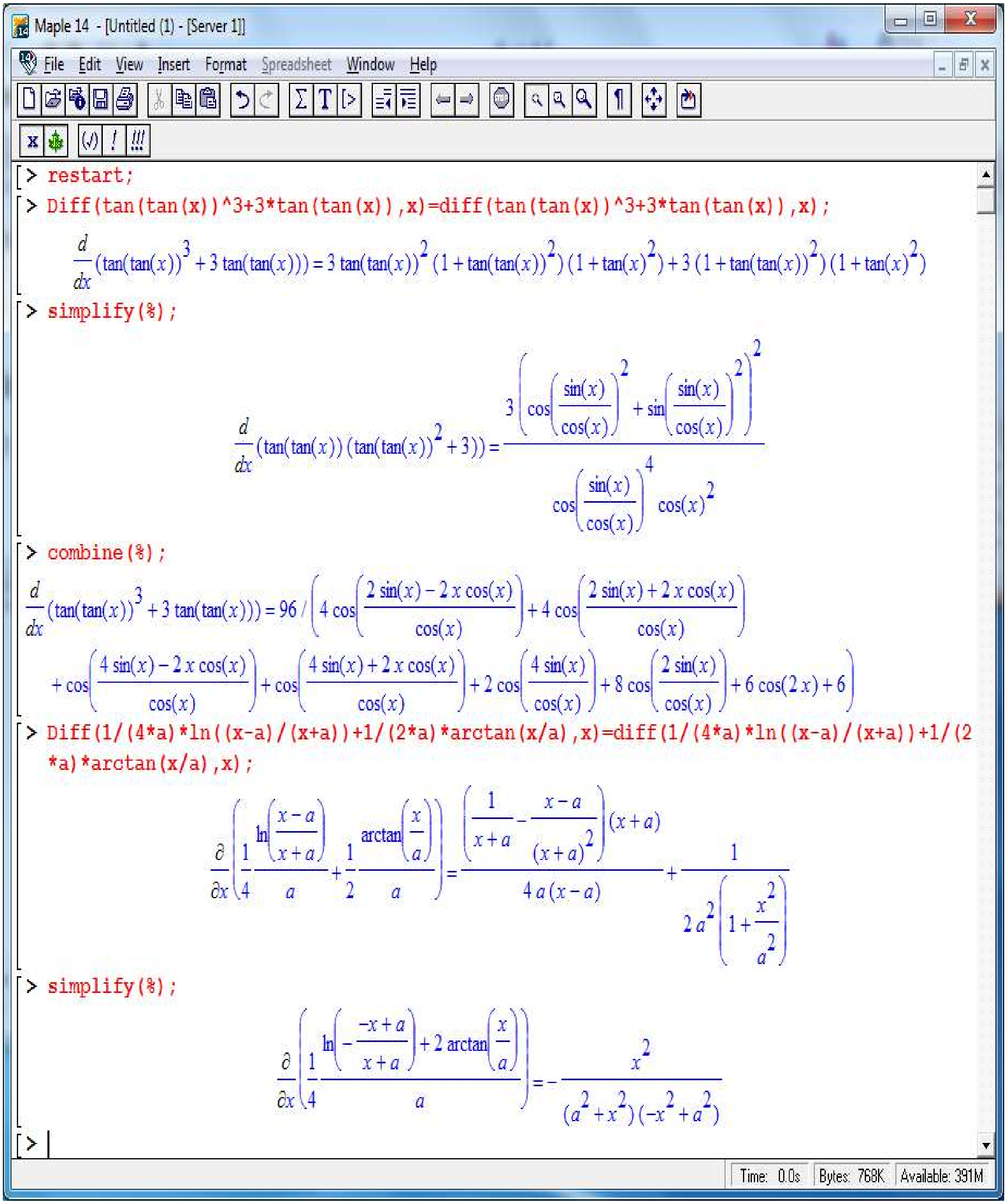
ნახ.10.2


Maple 14 - [Untitled (1) - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
> restart;
> Diff(1/2*tan(sin(x))^2+ln(cos(sin(x))),x)=diff(1/2*tan(sin(x))^2+ln(cos(sin(x))),x);
> simplify(%);
> combine(%);
> Diff((2*x-1)^3*sqrt(3*x+2)/((5*x+4)^2*(1-x)^(1/3)),x)=diff((2*x-1)^3*sqrt(3*x+2)/((5*x+4)^2*(1-x)^(1/3)),x);
Time: 0.0s
Bytes: 768K
Available: 462M

ნახ. 10.3


Maple 14 - [Untitled (1) - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
> restart;
> Diff(m*sqrt(x^2+2*a*x+b)+(n-m*a)*ln(x+a+sqrt(x^2+2*a*x+b)),x)=diff(m*sqrt(x^2+2*a*x+b)+(n-m*a)*ln(x+a+sqrt(x^2+2*a*x+b)),x);
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(m\sqrt{x^2+2ax+b}+(n-ma)\ln\left(x+a+\sqrt{x^2+2ax+b}\right)\right)=\frac{m(2x+2a)}{2\sqrt{x^2+2ax+b}}+\frac{(n-ma)\left(1+\frac{2x+2a}{2\sqrt{x^2+2ax+b}}\right)}{x+a+\sqrt{x^2+2ax+b}}$$
> simplify(%);
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(m\sqrt{x^2+2ax+b}+\ln\left(x+a+\sqrt{x^2+2ax+b}\right)n-\ln\left(x+a+\sqrt{x^2+2ax+b}\right)ma\right)=\frac{mx+n}{\sqrt{x^2+2ax+b}}$$
> Diff(exp(x)-sin(exp(x))*cos(exp(x))^3-sin(exp(x))^3*cos(exp(x)),x)=diff(exp(x)-sin(exp(x))*cos(exp(x))^3-sin(exp(x))^3*cos(exp(x)),x);
$$\frac{d}{dx}\left(e^x-\sin(e^x)\cos(e^x)^3-\sin(e^x)^3\cos(e^x)\right)=e^x-\cos(e^x)^4e^x+\sin(e^x)^4e^x$$
> simplify(%);
$$\frac{d}{dx}\left(e^x-\sin(e^x)\cos(e^x)\right)=-2e^x\left(-1+\cos(e^x)^2\right)$$
> combine(%);
$$\frac{d}{dx}\left(e^x-\frac{1}{2}\sin(2e^x)\right)=e^x-e^x\cos(2e^x)$$
Time: 0.0s Bytes: 768K Available: 385M

ნახ.10.4


Maple 14 - [Untitled (1) - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
> restart;
> Diff(tan(tan(x))^3+3*tan(tan(x)),x)=diff(tan(tan(x))^3+3*tan(tan(x)),x);
$\frac{d}{dx}(\tan(\tan(x))^3+3\tan(\tan(x)))=3\tan(\tan(x))^2(1+\tan(\tan(x))^2)(1+\tan(x)^2)+3(1+\tan(\tan(x))^2)(1+\tan(x)^2)$
> simplify(%);
$\frac{d}{dx}(\tan(\tan(x))(\tan(\tan(x))^2+3))=\frac{3\left(\cos\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2+\sin\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2\right)^2}{\cos\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^4\cos(x)^2}$
> combine(%);
$\frac{d}{dx}(\tan(\tan(x))^3+3\tan(\tan(x)))=96\Big/\left(4\cos\left(\frac{2\sin(x)-2x\cos(x)}{\cos(x)}\right)+4\cos\left(\frac{2\sin(x)+2x\cos(x)}{\cos(x)}\right)+\cos\left(\frac{4\sin(x)-2x\cos(x)}{\cos(x)}\right)+\cos\left(\frac{4\sin(x)+2x\cos(x)}{\cos(x)}\right)+2\cos\left(\frac{4\sin(x)}{\cos(x)}\right)+8\cos\left(\frac{2\sin(x)}{\cos(x)}\right)+6\cos(2x)+6\right)$
> Diff(1/(4*a)*ln((x-a)/(x+a))+1/(2*a)*arctan(x/a),x)=diff(1/(4*a)*ln((x-a)/(x+a))+1/(2*a)*arctan(x/a),x);
$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4}\frac{\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)}{a}+\frac{1}{2}\frac{\arctan\left(\frac{x}{a}\right)}{a}\right)=\frac{\left(\frac{1}{x+a}-\frac{x-a}{(x+a)^2}\right)(x+a)}{4a(x-a)}+\frac{1}{2a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}$
> simplify(%);
$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4}\frac{\ln\left(-\frac{-x+a}{x+a}\right)+2\arctan\left(\frac{x}{a}\right)}{a}\right)=-\frac{x^2}{(a^2+x^2)(-x^2+a^2)}$
Time: 0.0s Bytes: 768K Available: 391M

ნახ.10.5

## 10.2. დიფერენცილაური ოპერატორი

დიფერენციალური ოპერატორის განსაზღვრისათვის გამოიყენება ბრძანება D(f) - სადაც f- არის ფუნქცია. მაგალითად:

>**D(sin); Ent** გამოვა შედეგი **Cos**

ახლა გამოვთვალოთ წარმოებული წერტილში. მაგალითად :

>**D(sin)(Pi) : eval(%); Ent** გამოვა შედეგი **-1**

დიფერენციალური ოპერატორი გამოიყენება აგრეთვე ფუნქციებისათვისაც. მაგალითად:

**>f:=x-> ln(x^2)+exp(3*x):**

**>D(f); Ent** გამოვა შედეგი

$$x \to 2\frac{1}{x} + 3\ell^{(3x)}$$

ახლა ეს ყველაფერი განვახორციელოთ პროგრამა **Maple** -ს ფანჯარაში იხ. ნახ. 10.6 და ნახ.10.7

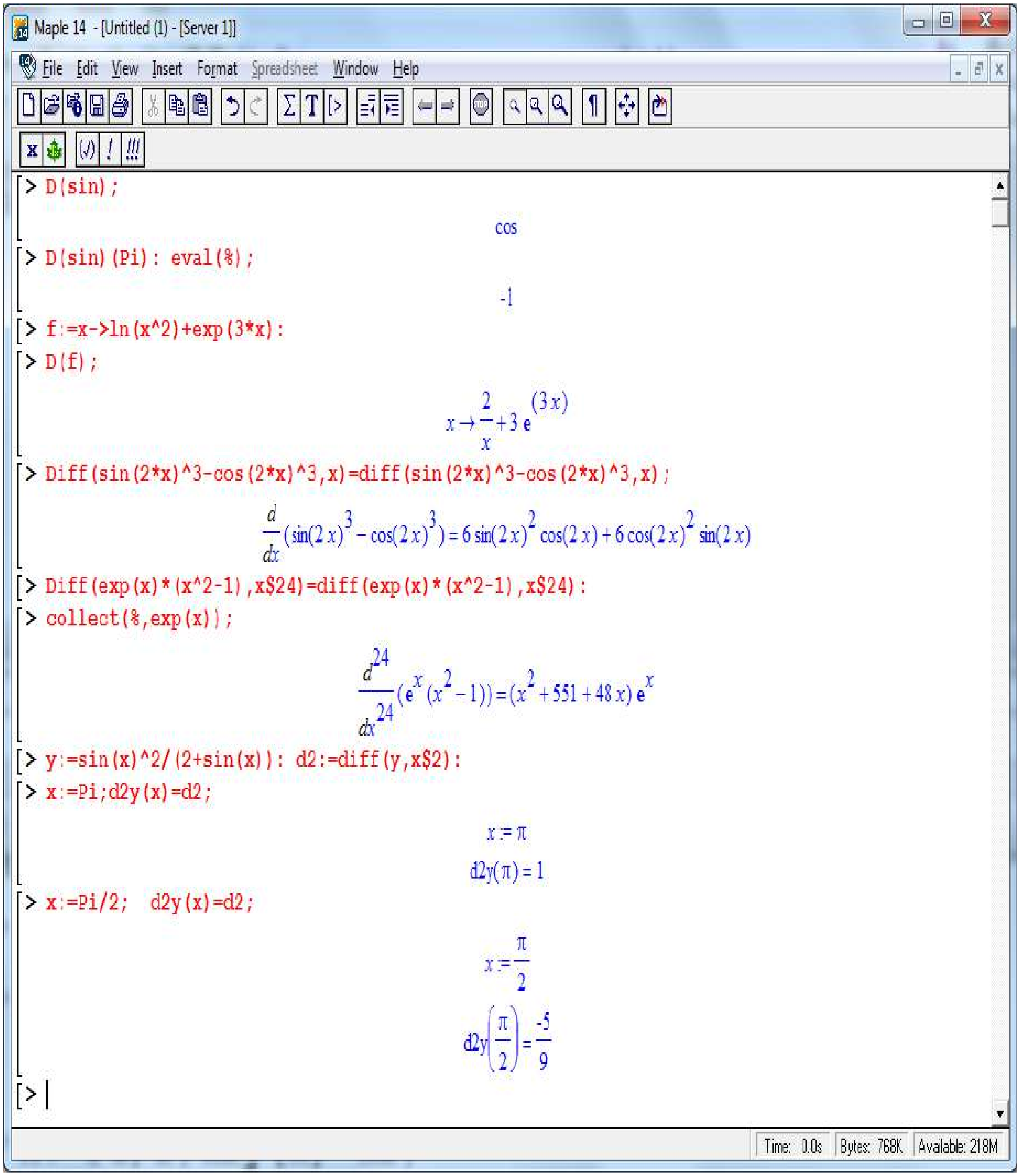
გამოვთვალოთ შემდეგი წარმოებულები:

1. გამოვიყენოთ დიფერენციალური ოპერატორი **sin** ფუნქციისათვის;
2. გამოვთვალოთ **sin** ფუნქციის წარმოებული $\pi$ წერტილში;
3. გამოვთვალოთ $f(x) = \ln(x^2) + \ell^{3x}$ ფუნქციის წარმოებული;
4. გამოვთვალოთ $f(x) = \sin^2(2x) - \cos^3(2x)$ ფუნქციის წარმოებული;
5. გამოვთვალოთ $f(x) = \ell^x(x^2 - 1)$ ფუნქციის 24-ე რიგის წარმოებული;
6. გამოვთვალოთ $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{2 + \sin x}$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული $x = \dfrac{\pi}{2}, x = \pi$ წერტილებში;
7. ვიპოვოთ მესამე რიგის წარმოებული $y = \dfrac{x}{6(x+1)}$ ფუნქციისა;

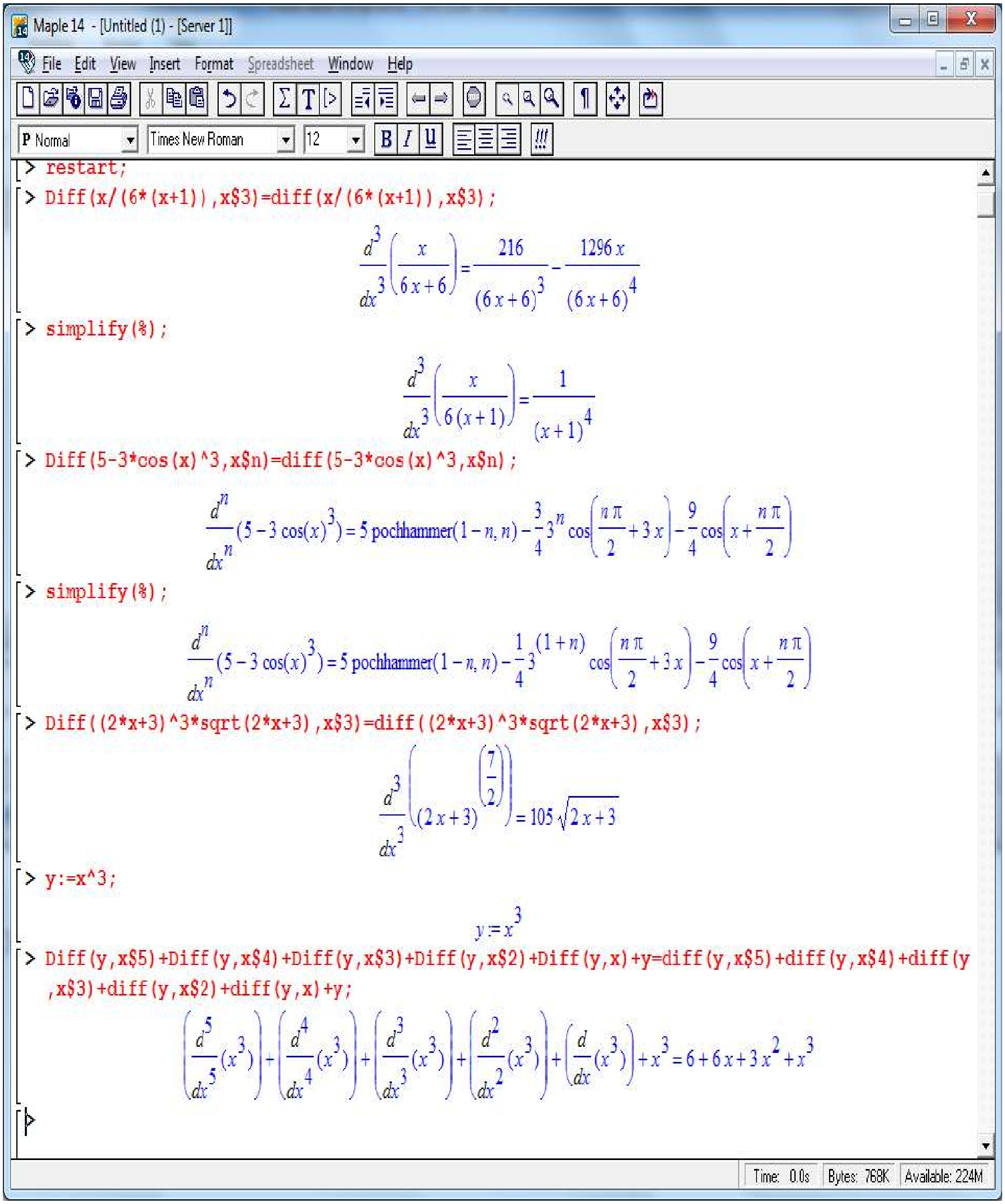
8. ვიპოვოთ n - ური რიგის წარმოებული $y=5-3\cos^2 x$ ფუნქციისა;

9. ვიპოვოთ მესამე რიგის წარმოებული $y=(2x+3)^3\sqrt{2x+3}$ ფუნქციისა;

10. დავამტკიცოთ, რომ $y=x^3$ ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას: $y^V+y^{IV}+y^{III}+y^{II}+y^{I}+y=x^3+3x^2+6x+6$




ნახ.10.6


Maple 14 - [Untitled (1) - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
P Normal
Times New Roman
12
> restart;
> Diff(x/(6*(x+1)),x$3)=diff(x/(6*(x+1)),x$3);
$\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{x}{6x+6}\right)=\frac{216}{(6x+6)^3}-\frac{1296x}{(6x+6)^4}$
> simplify(%);
$\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{x}{6(x+1)}\right)=\frac{1}{(x+1)^4}$
> Diff(5-3*cos(x)^3,x$n)=diff(5-3*cos(x)^3,x$n);
$\frac{d^n}{dx^n}(5-3\cos(x)^3)=5\,\mathrm{pochhammer}(1-n,n)-\frac{3}{4}3^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}+3x\right)-\frac{9}{4}\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
> simplify(%);
$\frac{d^n}{dx^n}(5-3\cos(x)^3)=5\,\mathrm{pochhammer}(1-n,n)-\frac{1}{4}3^{(1+n)}\cos\left(\frac{n\pi}{2}+3x\right)-\frac{9}{4}\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
> Diff((2*x+3)^3*sqrt(2*x+3),x$3)=diff((2*x+3)^3*sqrt(2*x+3),x$3);
$\frac{d^3}{dx^3}\left((2x+3)^{\left(\frac{7}{2}\right)}\right)=105\sqrt{2x+3}$
> y:=x^3;
$y:=x^3$
> Diff(y,x$5)+Diff(y,x$4)+Diff(y,x$3)+Diff(y,x$2)+Diff(y,x)+y=diff(y,x$5)+diff(y,x$4)+diff(y,x$3)+diff(y,x$2)+diff(y,x)+y;
$\left(\frac{d^5}{dx^5}(x^3)\right)+\left(\frac{d^4}{dx^4}(x^3)\right)+\left(\frac{d^3}{dx^3}(x^3)\right)+\left(\frac{d^2}{dx^2}(x^3)\right)+\left(\frac{d}{dx}(x^3)\right)+x^3=6+6x+3x^2+x^3$
Time: 0.0s
Bytes: 768K
Available: 224M

ნახ.10.7

## 10.3. ფუნქციათა გამოკვლევა

ტრადიციულად ფუნქციათა გამოკვლევა უნდა დავიწყოთ ამ ფუნქციის განსაზღვრის არის მოძებნით, მაგრამ სამწუხაროდ ეს რთულად ავტომატიზებადი პროცედურაა. ამიტომ ამ საკითხის განხილვისას გვიხდება უტოლობების ამოხსნა, მაგრამ კითხვაზე განსაზღვრულია თუ არა ფუნქცია მთელს რიცხვით ღერძზე, შეიძლება მხოლოდ ფუნქციის უწყვეტობაზე შემოწმების გზით.

### ფუნქციის უწყვეტობა და წყვეტის წერტილები

**Maple**-ში $f(x)$ ფუნქციის მოცემულ $[x_1, x_2]$ შუალედზე, უწყვეტობის შემოწმების საკითხის გარკვევა ხორციელდება სპეციალური ბრძანებით რომელიც მოიცემა **iscont(f,x=x1..x2)** სახით. თუ **f** ფუნქცია უწყვეტია ამ შუალედზე მაშინ პასუხი მოცემა ჭეშმარიტია **(true)** . თუ არა და მოიცემა მცდარია **(false).** ხოლო თუ მივცემთ მთელ რიცხვით ღერძს მაშინ **x=-infinity..+infinity** სახით მაშინ ფუნქცია შემოწმდება უწყვეტობაზე მთელი რიცხვითი ღერძის ფარგლებში და შესაბამისად თუ უწყვეტია მთელს შუალედზე გვაძლევს სიტყვას ჭეშმარიტია **(true)** და გვაძლევს სიტყვასმცდარია **(false)** საწინააღმდეგო შემთხვევაში. ამი განხორციელება **Maple**-ში შესაძლებელია ორნაირად:

1. ბრძანებით **discont(f,x)** სადაც **f** - არის უწყვეტობაზე გამოსაკვლევი ფუნქციაა, ხოლო **x** -ცვლადია. ეს ბრძანება კარგია წყვეტის პირველი და მეორე გვარის წერტილების მოსაძებნად.
2. ბრძანებით **singular(f,x)** სადაც **f** - ფუნქციაა, ხოლო **x** -ცვლადია. ეს ბრძანება მოხერხებულია მეორე გვარის წყვეტის წერტილების მოსაძებნად, როგორც ნამდვილი ასევე კომპლექსური მნიშვნელობებისთვის.

ამ ბრძანებების გამოყენებამდე აუცილებელია ჩაიტვირთოს სტანდარტული ბიბლიოთეკიდან ეს ბრძანება ასე: **readlib(name)** სადაც **name** არის ერთ-ერთი ზემოთ განხილული ბრძანებებიდან. ორივე ეს ბრძანება შედეგებს გვაძლევს წყვეტის წერტილების ჩამონათვალის სახით, რომლების მოცემული არიან კვადრატულ ფრჩხილებში ასეთი ჩანაწერის ტიპს ეწოდება **set.** იმისათვის , რომ შემდგომში ამ რიცხვების გამოყენება შევძლოთ საჭიროა ეს რიცხვები გადავიყვანოთ **set** ფორმატიდან ბრძანება **convert-**ის საშუალებით გადავიყვანოთ ჩვეულებრივ ფორმატში.

განვიხილოთ მაგალითები:

ვიპოვოთ $y = \ell^{\frac{1}{x+3}}$ ფუნქციის წყვეტის წერტილები;

**>readlib(iscont) : readlib(discont):**

**>iscont(exp(1/(x+3)),x=-infinity..+infinity; Ent**

გამოვა სიტყვა ***false***

რაც იმას ნიშნავს, რომ ფუნქცია არ არის უწყვეტი. ამიტომ საჭიროა მოვძებნოთ წყვეტის წერტილები ბრძანება **discont** -ის გაქმოყენებით ასე:

\> **discont(exp(1/(x+3)),x); Ent**

გამოვა წყვეტის წერტილი შემდეგი სახით:

**{-3}**

ანუ წყვეტის წერტილია -3.

ახლა განვიხილოთ ამოცანა :

**ვიპოვოთ** $y = tg\,\dfrac{x}{2-x}$ **ფუნქციის წყვეტის წერტილები:**

**Maple** - ში ამის გაკეთებას ვახდენთ ასე:

**> readlib(singular):**

**> iscont(tan(x/(2-x)),x=-infinity..infinity); Ent**

***false***

**> singular(tan(x/(2-x)),x); Ent**

პასუხი გამოვა ასეთი სახით: $\{x=2\}, \left\{x = 2\dfrac{\pi(2\_N+1)}{-2+2\_N\pi+\pi}\right\}$

სადაც ***N*** მთელი რიცხვია ანუ ეს ჩანაწერი ნიშნავს $x=2$ და $x=\dfrac{2\pi(2n+1)}{\pi(2n+1)-2}$

ახლა ამოვხსნათ Maple-ში შემდეგი ამოცანები იხ. ნახ10.8 და ნახ.10.9

1. მოვძებნოთ წყვეტის წერტილები შემდეგი ფუნქციისა $y=\dfrac{1}{1+x}$;

2. დავადასტუროთ შემდეგი ფუნქცის უწყვეტობა $y=\sin x+\dfrac{2}{\ell^x}$;

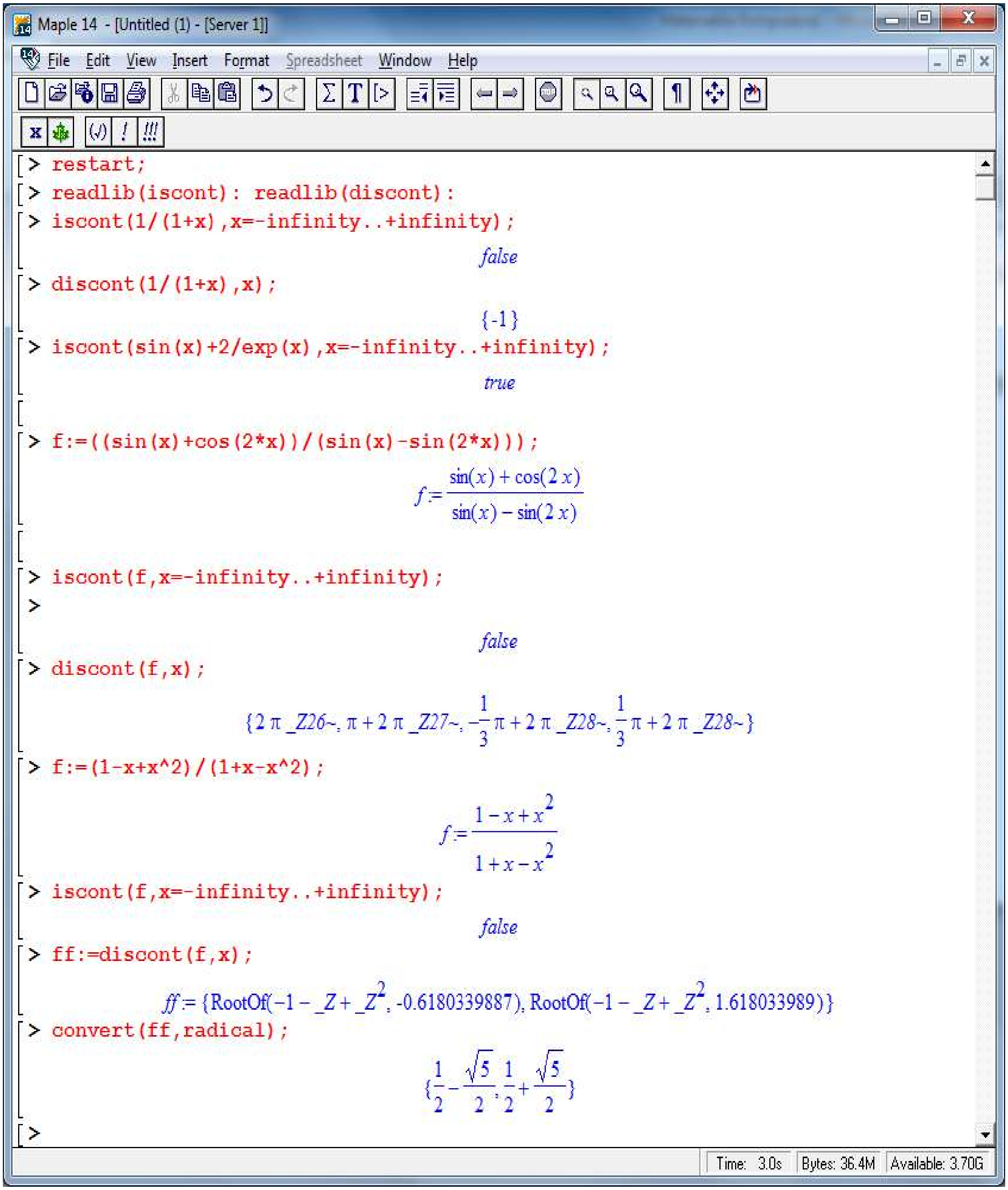
3. გამოვიკვლიოთ ფუნქცია $y=\dfrac{\sin x+\cos 2x}{\sin 3x-\cos 4x}$ უწყვეტობაზე და მოვძებნოთ წყვეტის წერტილები;

4. გამოვიკვლიოთ ფუნქცია $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ უწყვეტობაზე და მოვძებნოთ წყვეტის წერტილები;

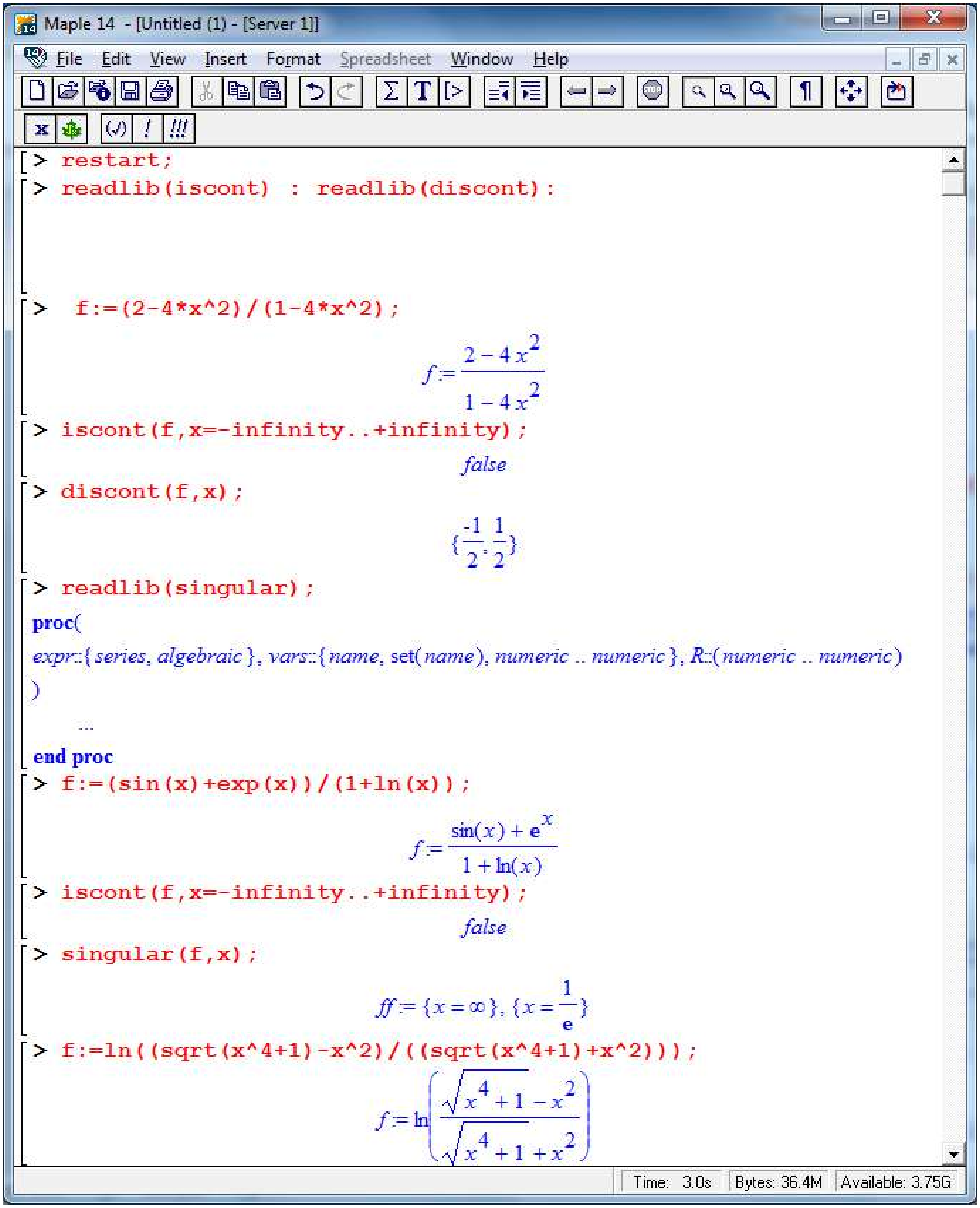
5. გამოვიკვლიოთ ფუნქცია $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$ უწყვეტობაზე და მოვძებნოთ წყვეტის წერტილები;

6. გამოვიკვლიოთ ფუნქცია $y=\dfrac{\sin x+\ell^x}{1+\ln x}$ უწყვეტობაზე და მოვძებნოთ წყვეტის წერტილები;

7. 7.გამოვიკვლიოთ ფუნქცია $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^4+1}-x^2}{\sqrt{x^4+1}+x^2}$ უწყვეტობაზე და მოვძებნოთ წყვეტის წერტილები;


Maple 14 - [Untitled (1) - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
> restart;
> readlib(iscont): readlib(discont):
> iscont(1/(1+x),x=-infinity..+infinity);
false
> discont(1/(1+x),x);
{-1}
> iscont(sin(x)+2/exp(x),x=-infinity..+infinity);
true
> f:=((sin(x)+cos(2*x))/(sin(x)-sin(2*x)));
$f := \frac{\sin(x) + \cos(2\,x)}{\sin(x) - \sin(2\,x)}$
> iscont(f,x=-infinity..+infinity);
>
false
> discont(f,x);
$\{2\,\pi\,\_Z26\sim, \pi + 2\,\pi\,\_Z27\sim, -\frac{1}{3}\pi + 2\,\pi\,\_Z28\sim, \frac{1}{3}\pi + 2\,\pi\,\_Z28\sim\}$
> f:=(1-x+x^2)/(1+x-x^2);
$f := \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$
> iscont(f,x=-infinity..+infinity);
false
> ff:=discont(f,x);
$ff := \{\mathrm{RootOf}(-1 - \_Z + \_Z^2, -0.6180339887), \mathrm{RootOf}(-1 - \_Z + \_Z^2, 1.618033989)\}$
> convert(ff,radical);
$\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\}$
>
Time: 3.0s
Bytes: 36.4M
Available: 3.70G

ნახ.10.8


Maple 14 - [Untitled (1) - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
> restart;
> readlib(iscont) : readlib(discont):
> f:=(2-4*x^2)/(1-4*x^2);
f := (2 - 4 x^2)/(1 - 4 x^2)
> iscont(f,x=-infinity..+infinity);
false
> discont(f,x);
{-1/2, 1/2}
> readlib(singular);
proc(
expr::{series, algebraic}, vars::{name, set(name), numeric .. numeric}, R::(numeric .. numeric)
)
...
end proc
> f:=(sin(x)+exp(x))/(1+ln(x));
f := (sin(x) + e^x)/(1 + ln(x))
> iscont(f,x=-infinity..+infinity);
false
> singular(f,x);
ff := {x = ∞}, {x = 1/e}
> f:=ln((sqrt(x^4+1)-x^2)/((sqrt(x^4+1)+x^2)));
f := ln((√(x^4 + 1) - x^2)/(√(x^4 + 1) + x^2))
Time: 3.0s Bytes: 36.4M Available: 3.75G

ნახ.10.9

### 10.4. ექსტრემუმები. ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები.

*Maple* -ში ფუნქციის ექსტერმუმზე გამოკვლევისათვის გამოიყენება ბრძანება **extrema(f,{cond},x,'s')** , სადაც **f** - არის ის ფუნქცია ანალიზური სახით, რომლის ექსტრემუმსაც ვეძებთ, ფიგურულ ფრჩხილებში მოცემულია შეზღუდვები ცვლადზე, **x**- არის იმ ცვლადის დასახელება, რომლის მიმართაც ვეძებთ ექსტრემუმს. **'s'** - არის იმ ცვლადის დასახელება, რომელსაც მიენიჭება ექსტრემუმის წერტილის კორდინატა. თუ ფიგურულ ფრჩხილებში არაფერს არ ჩავწერთ (ანუ გაჩუმების წესს გამოვიყენებთ) მაშინ ექსტრემუმები მოიძებნება მთელ რიცხვით ღერძზე. ამ ბრძანების რეზულტატი მიეკუთვნება *set* ტიპის ცვლადებს. განვიხილოთ მაგალითი

**>readlib(extrema):**

\> **extrema(arctan(x)-ln(1+x^2)/2,{},x,'x0');x0;**

გამოვა შედეგი:

$\left\{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}LN(2)\right\}$ , {{x=1}}

პირველ ფრჩხილში მოცემულია ფუნქციის ექსტრემუმი, ხოლო მეორე ფრჩხილში ექსტრემუმის წერტილი. სამწუხაროდ, ეს ბრძანება არ იძლევა საშუალებას განვსაზღვროთ, ექსტრემუმის წერტილებისაგან რომელია მაქსიმუმის და რომელია მინიმუმის წერტილები. $x \in [x1,\ x2]$ შუალედზე $f(x)$ ფუნქციის მაქსიმუმის მოსაძებნად გამოიყენება ბრძანება **maximize(f,x,x=x1..x2),** ხოლო მინიმუმის მოსაძებნად ბრძანება **minimize(f, x, x=x1..x2),** ხოლო თუ ცვლადის შემდეგ მივუთითებთ სიტყვას **'infinity'** ან ინტერვალს **x=-infinity..+infinity,** მაშინ ბრძანება **maximize** და **minimize** მოძებნის მაქსიმუმსა და მინიმუმს ფუნქციისას მთელ რიცხვით ღერძზე როგორც ნამდვილი ასევე კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში. თუ ეს პარამეტრები არაა მითითებული მაშინ შედეგები მოიძებნება მხოლოდ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში. განვიხილოთ მაგალითები:

მოვძებნოთ $\ell^{-x^2}$ ფუნქციის მაქსიმუმი

**> maximize(exp(-x^2),{x}); Ent**

**1**

ამ ბრძანებების ხარვეზები იმაში მდგომარეობს, რომ ისინი გვაძლევენ ფუნქციის მნიშვნელობებს მხოლოდ მაქსიმუმის და მინიმუმის წერტილებში. იმისათვის, რომ სრულყოფილად გადავწყვიტოთ ფუნქციის გამოკვლევის ამოცანა, საჭიროა თავიდან შევასრულოთ ბრძანება > **extrema(f,{},x,’s’);s;** ხოლო შემდეგ შევასრულოთ ბრძანებები: **maximize(f,x); minimize(f,x).** მხოლოდ ამის შემდეგ მოიძებნება ყველა ექსტერმუმის კოორდინატები და განისაზღვრებიან მათი თვისებები (**max** ან **min**).

ბრძანებები **maximize(f,x);** და **minimize(f,x)** სწრაფად პოულობენ აბსოლუტურ ექსტრემუმებს, მაგრამ მოუხერხებელნი არიან ლოკალური ექსრემუმების მოძებნის დროს. ბრძანება **extrema** პოულობს აგრეთვე იმ კრიტიკულ წერტილებსაც, სადაც ფუნქციას არა აქვს ექსტრემუმი. ამ შემთხვევაში ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობები შედეგების პირველ სტრიქონში იქნება ნაკლები, ვიდრე მეორე სტრიქონში. მოძებნილი ექსტრემუმის სახე (მინიმუმი თუ მაქსიმუმი) განისაზღვრება ფუნქციის მეორე წარმოებულის საშუალებით. ***f*(*x*)** წერტილში ***x*=*x*0** უნდა მოვახდინოთ მეორე რიგის წარმოებულის ნიშნის განსაზღვრა. თუ $f^{II}(x) > 0$ მაშინ გვაქვს *x*0 წერტილში ფუნქციის მინიმუმი, და პირიქით $f^{II}(x) < 0$ - გვაქვს მაქსიმუმი. მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილების კორდინატები შეიძლება მივიღოთ თუ ბრძანების პარამეტრებში ცვლადის შემდეგ, მძიმით გამოყოფილ პარამეტრს **location**-ს მივუთითებთ. შედეგად პასუხების სტრიქონში მაქსიმუმის(მინიმუმის) სტრიქონის შემდეგ გამოვა იგურულ ფრჩხილებში მითითებული მაქსიმუმის(მინიმუმის) წერტილების კორდინატები.

**> minimize(x^4-x^2, x, location);** **Ent**

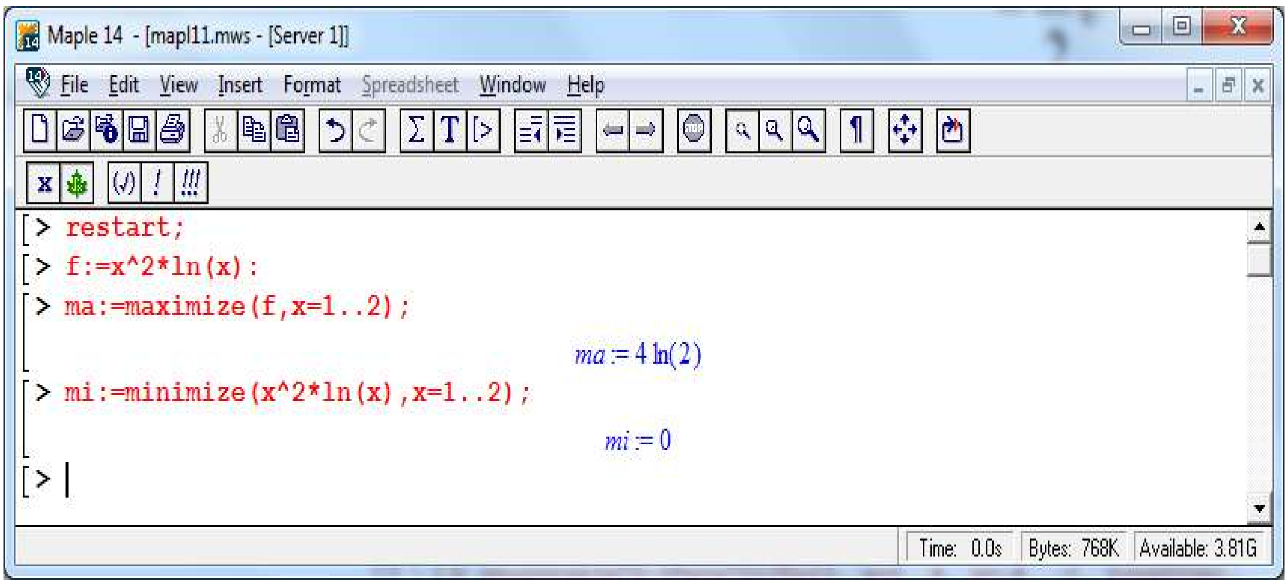
ამის შემდეგ შედეგები გამოვა პასუხები შემდეგი სახით:

$$-\frac{1}{4},\left\{[\left\{x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right\},-\frac{1}{4}],[\{x=\frac{1}{2}\sqrt{2}\},-\frac{1}{4}]\right\}$$

ბრძანებები **extrema**, **maximize** და **minimize** აუცილებლად უნდა იქნენ ჩატვირთულნი სტანდარტული ბიბლიოთეკის მითითების ბრძანების საშუალებით ანუ ბრძანებით **readlib(name),** სადაც **name** – არის ჩატვირთული ბრძანების სახელი.

ახლა მოვძებნოთ ფუნქციის მინიმუმიც და მაქსიმუმიც. ამ ამოცანის *Maple* -ში ამოხსნის ალგორითმს ექნება შემდეგი სახე. იხ. ნახ.10.10

ახლა მოვძებნოთ $f(x)=x^2\ln x$ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები $x\in[1,2]$ ინტერვალში იხ ნახ.10.10.




ნახ.10.10

## 10.5. ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებები

***დიფერენციალური განტოლება*** ეს არის განტოლება, რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს დამოუკიდებელ ცვლადებს, მათ ფუნქციებს და ან ფუნქციის წარმოებულებს ( ან დიფერენციალებს) . თუ დამოუკიდებელი ცვლადი მარტოა, მაშინ ასეთ ასეთ დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება ***ჩვეულებრივი ;*** თუ დამოუკიდებელი ცვლადები განტოლებაში ორი ან ორზე მეტი რაოდენობითაა წარმოდგენილი, მაშინ ასეთ ასეთ დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება ***კერძო წარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლება.***

განტოლებაში წარმოდგენილი წარმოებულის უმაღლესი ხარისხი განსაზღვრავს დიფერენციალური განტოლების რიგს. მაგალითად:

1) $x^2 y' + 5xy = y^2$ - ეს არის პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება;

2) $\frac{d^2 y}{dx^2} - 4xy\frac{dy}{dx} = x^2$ - ეს არის მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება;

3) $y'^3 + y'' y''' = x$ -ეს არის მესამე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება;

4) $F(x, y, y', y'') = 0$ - ეს არის მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახე;

5) $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ -ეს არის პირველი რიგის კერძოწარმოებულიანი დიფერენ-ციალური განტოლება;

ამ პარაგრაფში ჩვენ ძირითადად განვიხილავთ პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის ტრადიციულ და კომპიუტერზე *Maple* პროგრამაში რეალიზების მეთოდებს.

**დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა** ეწოდება ისეთ დიფერენცირებად $y=\phi(x)$ ფუნქციას , რომელიც ჩაისმება რა დიფერენციალურ განტოლებაში უცნობის ადგილზე განტოლებას გადააქცევს იგივეობად.

$y^{'}=f(x,y)$ ტიპის პირველი რიგის დიფერნციალური განტოლების $D$ არეში ზოგადი ამონახსნი ეწოდება იმ $y=\phi(x,C)$ ფუნქციას, რომელსაც გააჩნია შემდეგი თვისებები: 1) იგი წარმოადგენს მოცემული დიფ. განტოლების ამონახსნს C მუდმივის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის, რომლებიც ეკუთვნიან რომელიღაც სიმრავლეს. 2) ნებისმიერი საწყისი $y(x_0)=y_0$, $(x_0;y_0)\in D$, არსებობს ერთადერთი $C=C_0$ მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $y=\phi(x,C_0)$ ამონახსნი აკმაყოფილებს მოცემულ საწყის პირობას.

ყოველი $y=\phi(x,C_0)$ ამონახსნი, რომელიც მიიღება $y=\phi(x,C)$ ზოგადი ამონახსნისაგან კონკრეტული $C=C_0$ მნიშვნელობისათვის იწოდება ***კერძო ამონახსნად.***

ამოცანას, რომელშიც საჭიროა ვიპოვოთ $y^{'}=f(x,y)$ განტოლების ამონახსნი $y(x_0)=y_0$ საწყისი პირობებით ეწოდება ***კოშის*** ამოცანა.

დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის პროცესს ეწოდება დიფერენციალური განტოლების ***ინტეგრირების*** პროცესი. განვიხილოთ სხვადასხვა ტიპის დიფერენციალური განტოლებები.

1. **დიფერენციალური განტოლებები განცალებად ცვლადებში.**

$f_1(x)\phi_1(y)dx+f_2(x)\phi_2(y)dy=0$ სახის დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდებათ დიფერენციალური განტოლება განცალებედ ცვლადებში. თუ არც ერთი $f_1(x), f_2(x),\varphi_1(y),\varphi_2(y)$ ამ ფუნქციათაგანი არ არის იგივურად ნოლის ტოლი, მაშინ საწყისი განტოლების $f_2(x),\varphi_1(y)$ - ზე გაყოფის შედეგად მიიყვანება შემდეგ სა-

ხემდე: $$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=0$$

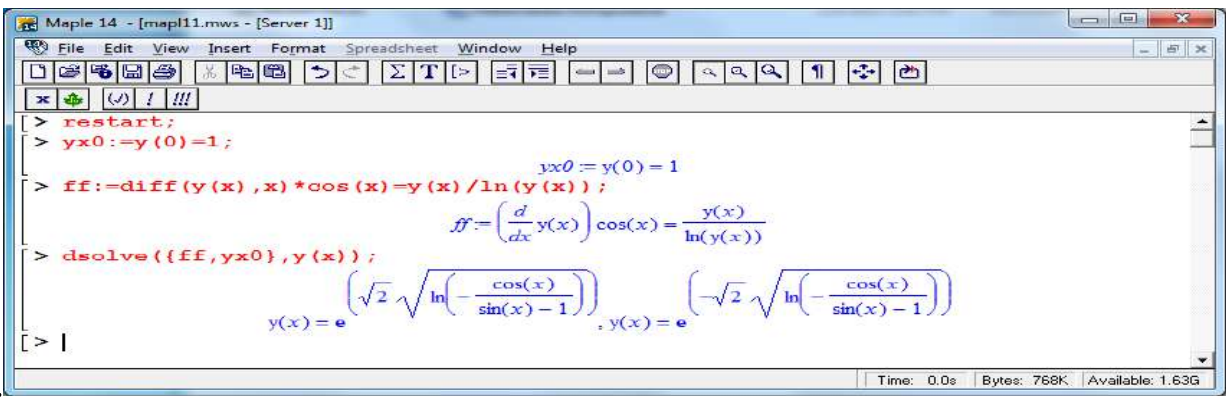
რომელიც განსაზღვრავს ( არაცხადი სახით) საწყისი განტოლების ამოხსნას. განვიხილოთ მაგალითები:

1. ვიპოვოთ კერძო ინტეგრალი $y^{'}\cos x = \frac{y}{\ln y}$ განტოლებისა, რომელიც აკმაყოფილებს $y(0)=1$ საწყის პირობას.

**ამოხსნა.** თუ გავითვალისწინებთ, რომ $y^{'} = \frac{dy}{dx}$ , მაშინ მოცემული განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს $\cos x\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\ln y}$, განვაცალოთ ცვლადები მივიღებთ:

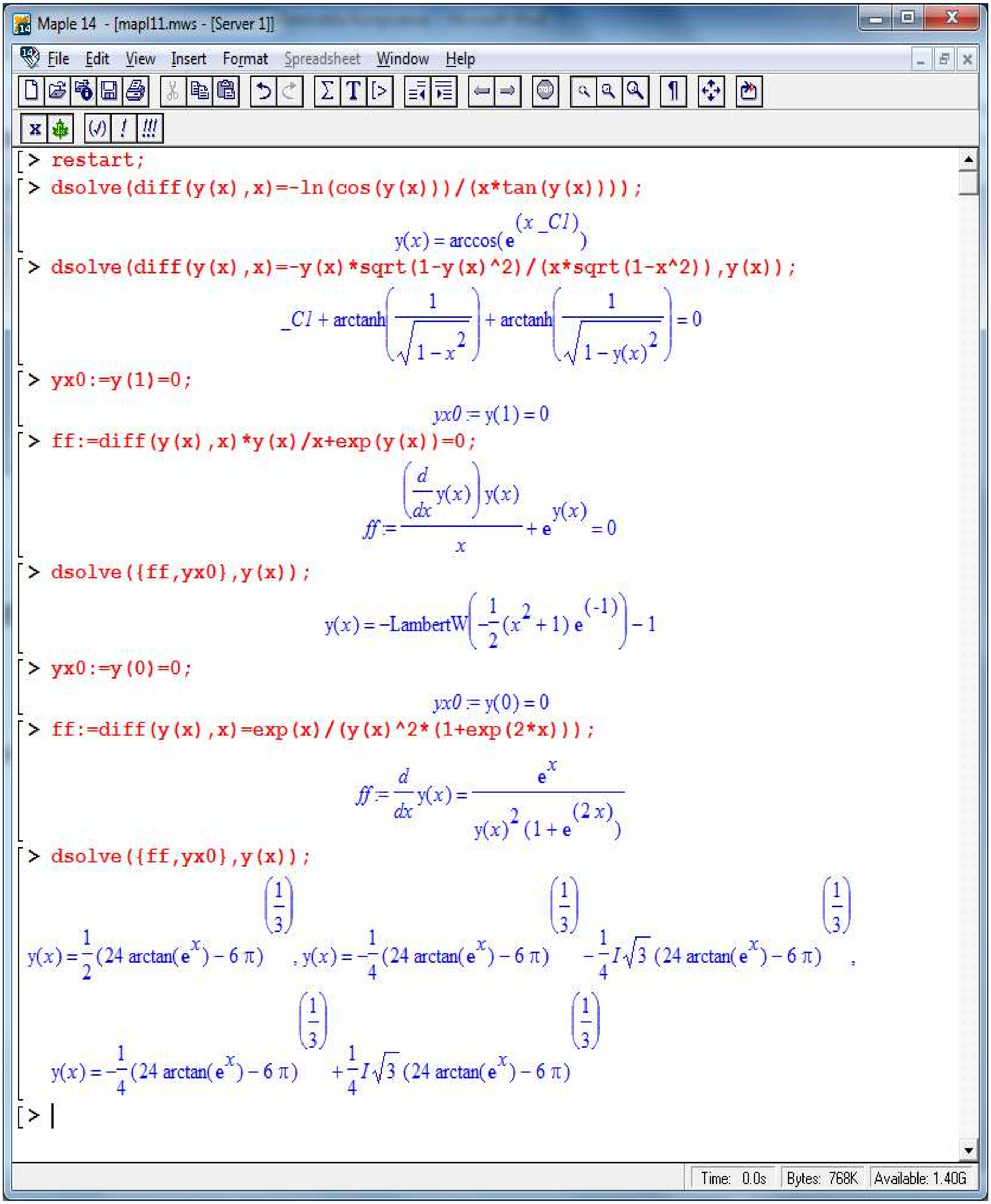
$\frac{\ln y}{y}dy = \frac{dx}{\cos x}$ ამოვიღოთ ორივე მხრიდან ინტეგრალი

$\int \frac{\ln y}{y}dy = \int \frac{dx}{\cos x} + C$, ან $\frac{1}{2}\ln^{2} y = \ln tg(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}) + c.$ გამოვიყენეოთ საწყისი პირობა $y=1$ $x=0$ - თვის, და ვპოულობთ $C=0$ ე.ი. საბოლოოდ მივიღებთ $\frac{1}{2}\ln^{2} y = \ln tg(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}).$ ახლა ვნახოთ როგორ იხსნება ეს განტოლება Maple-ში.




ნახ. 10.11

ახლა ვაჩვენოთ Maple-ში პირველი რიგის განცალებად ცვლადებიანი განტოლებების ამოხსნის ნიმუშები იხ. ნახ.10.12




ნახ.10.12

თუ დავაკვირდებით ნახ.10.12-ს ვნახავთ, რომ Maple-ში განტოლებები ისე წარმოვადგინეთ, რომ წარმოებული მოვაქციეთ მარცხენა მხარეში. ნახ. 10.12-ზე ამოხსნილია 4 განტოლება:

1. $\ln\cos y dx + xtgydy = 0$ - ეს განტოლება Maple-ში მოხერხებულია ჩავწეროთ ასე:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\ln\cos y}{xtgy} \text{ ანუ } y' = -\frac{\ln\cos y}{xtgy};$$

2. $\frac{xdy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{ydx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ - ეს განტოლება Maple-ში მოხერხებულია ჩავწეროთ ასე:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y\sqrt{1-y^2}}{x\sqrt{1-x^2}};$$

3. $\frac{yy'}{x} + \ell^x = 0, y(1) = 0$ -ეს განტოლება არ გარდაგვიქმნია;

4. $(1+\ell^{2x})y^2dy = \ell^x dx, y(0) = 0$ ეს განტოლება Maple-ში მოხერხებულია ჩავწეროთ ასე:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ell^x}{y^2(1+\ell^{2x})}, y(0) = 0$$

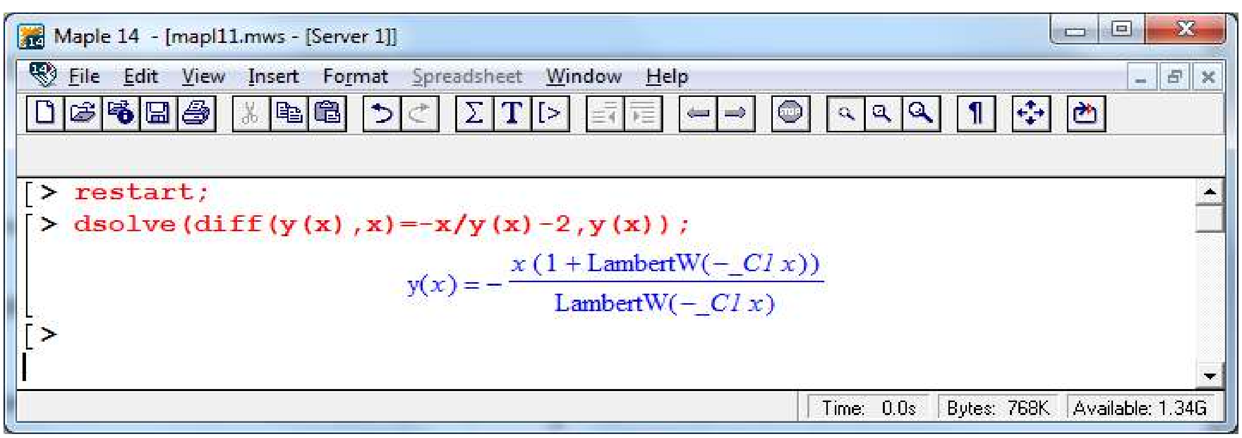
## 10. 6. ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებები

დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება **ერთგვაროვანი** თუ მას აქვს შემდეგის სახე: $P(x,y)dx + Q(x,y)dx = 0$, სადაც $P(x,y)$ და $Q(x,y)$ ერთნაირი რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციებია. ფუნქცია $f(x,y)$ იწოდება **m რიგის ერთგვაროვან ფუნქციად** თუ: $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x,y)$ . თუ ერთგვაროვანი განტოლებები შეიძლება მიყვანილ იქნან $y' = f(\frac{y}{x})$ სახეზე. $y = tx$ ჩასმის დახმარებით ერთგვაროვანი განტოლება დაიყვანება დიფ. განტოლებაზე განცალებად ცვლადებში უკვე ახალი $t$ ცვლადის მიმართ.

ახლა განვიხილოთ მაგალითი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების სტან-დარტული ხერხით (ხელით) ამოხსნაზე. ვთქვათ გვინდა ამოვხსნათ შემდეგი დიფ.

განტოლება (ერთგვაროვანი მეორე რიგის) : $(x^2+2xy)dx+xydy=0$ ამ განტოლებაში $P(x,y)=x^2+2xy$ და $Q(x,y)=xy$, როგორც ვხედავთ ორივე ფუნქცია არის მეორე რიგის ერთგვაროვანი. შემოვიტანოთ სტანდარტული ჩასმა $y=tx$, საიდანაც $dy=xdt+tdx$ ამ შემთხვევაში დიფ. განტოლება მიიღებს სახეს: $(x^2+2x^2t)dx+tx^2(xdt+tdx)=0$ ანუ გარდაქმნის შედეგად მივიღებთ განტოლებას: $(x^2+2x^2t+t^2x^2)dx+tx^3dt=0$ ამ ბოლო სახიდან მოვახდინოთ ცვლადების განცალება და პარალელურად ინტეგრება, მაშინ მივიღებთ: $\frac{dx}{x}+\frac{tdt}{(t+1)^2}=0;$ ინტეგრების შედეგად გვაქვს $\int\frac{dx}{x}+\int\frac{tdt}{(t+1)^2}=C.$ გარდავქმნათ მეორე ინტეგრალი ასე: $\ln|x|+\int\frac{t+1-1}{(t+1)^2}dt=C,$ ანუ $\ln|x|+\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}=C.$

თუ დავბრუნდებით საწყის ცვლადებზე ანუ $t=\frac{y}{x}$ ანუ საბოლოოდ მივიღებთ ამონახსნს შემდეგი სახით: $\ln|x+y|+\frac{x}{x+y}=C.$ ახლა ეს განტოლება ამოვხსნათ Maple-ში. საწყისი დიფ. განტოლების ორივე მხარე გავყოთ $dx$ზე და გრდავქმნათ განტოლება სახემდე $y'=f(x,y)$ მივიღებთ $xy\frac{dy}{dx}+x^2+2xy=0$ ანუ საბოლოოდ $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}-2$ ანუ $y'=-\frac{x}{y}-2$ და ამ სახით ამოვხნათ ეს განტოლება Maple-ში. (იხ. ნახ .10.13)




ნახ.10.13

სადაც , ფუნქცია $LambertW(x)\ell^{LambertW(x)} = x$

ახლა განვიხილოთ სხვადასხვა ერთგვაროვანი დიფ. განტოლებების ამოხსნის ნიმუშები Maple-ში ( იხ.ნახ10.14 და ნახ10.15).

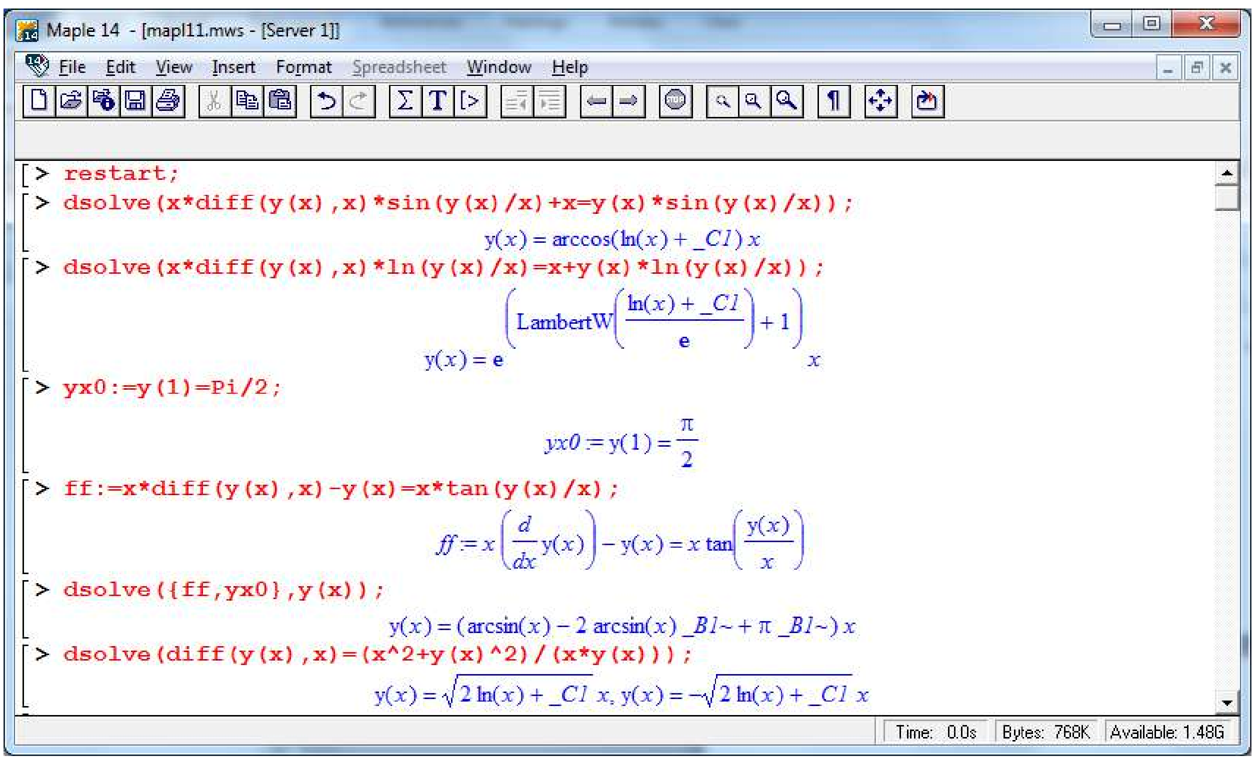
1. $xy^{'}\sin(y/x) + x = y\sin(y/x)$ ; 2. $xy^{'}\ln(y/x) = x + y\ln(y/x);$

2. $xy^{'} - y = xtg(y/x); y(1) = \pi/2$ ; 4. $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$ ;

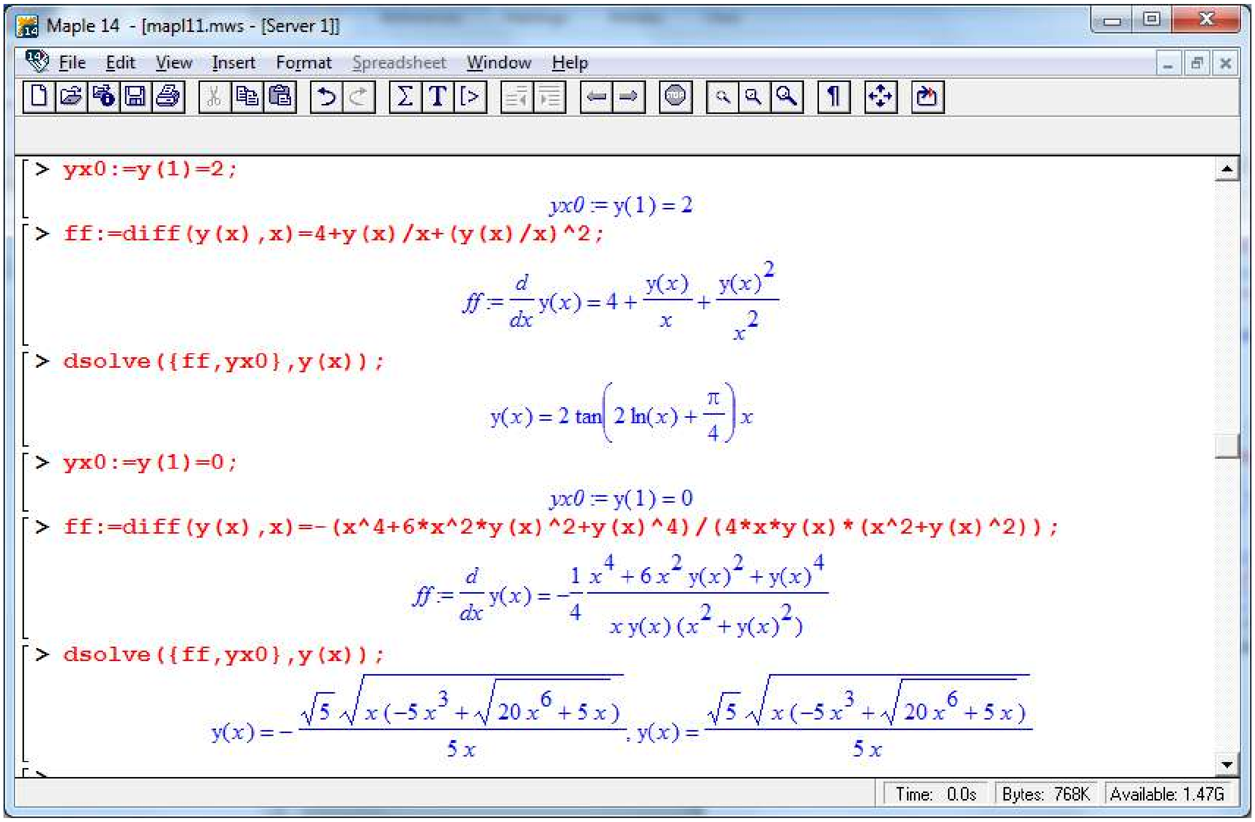
5. $(x^4 + 6x^2y^2 + y^4)dx + 4xy(x^2 + y^2)dy = 0; y(1) = 0;$ ;

6. $y^{'} = 4 + \frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^2; y(1) = 2;$

7. $xy^{'} = x\ell^{\frac{y}{x}} + y; y(1) = 0;$




ნახ.10.14




ნახ.10.15

## 10.7. დიფერენციალური განტოლებები სრულ დიფერენციალებში

დიფერენციალური განტოლება $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, სადაც $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, იწოდება დიფ.განტოლება სრულ დიფერენციალებში. ანუ ამ განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს რაიმე $u(x,y)$ სრულ დიფერენციალს. თუ ამ განტოლებას გადავწერთ $du = 0$ სახით , მაშინ ზოგადი ამონახსენი შეიძლება მოცემულ იქნას $u = C$ სახით. ფუნქცია $u(x,y)$ შეიძლება მოძებნილ იქნას შემდეგი ფორმულით:

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy.$$

ამ ფორმულაში ინტეგრალების ქვედა საზღვრები $x_0$ და $y_0$ თავისუფლები არიან; მათი ამორჩევა შემოფარგლულია ერთადერთი პირობით - ინტეგრალს ფორმულის მარჯვენა

მხარეში უნდა ჰქონდეს აზრი (ანუ არ უნდა იყოს არასაკუთრივი მეორე რიგის განშლადი ინტეგრალი). თუ $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ პირობა არ სრულდება, მაშინ ზოგიერთ შემთხვევებში შესაძლებელია ინტეგრირებული მამრავლის საფუძველზე შესაძლებელია, ამ ინტეგრალის სასურველ სახემდე მიყვანა. მამრავლი უნდა იყოს $x$ და $y$ ცვლადების რაიმე ფუნქცია $\mu(x,y)$. თყ მოცემულ განტოლებას აქვს მაინტეგრებელი მამრავლი მხოლოდ $x$ ზე დამოკიდებული, მაშინ იგი მოიძებნება შემდეგი ფორმულით:

$$\mu=\ell^{\int\frac{(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})}{Q}dx}$$

სადაც $\frac{(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})}{Q}$ ფარდობა წარმოადგენს ფუნქციას მხოლოდ $x$ -ის მიმართ. ანალოგიურად ფორმირდება მაინტეგრებელი მამრავლი მხოლოდ $y$ -ზე დამოკიდებული. ამ მამრავლს ექნება შემდეგი სახე:

$$\mu=\ell^{-\int\frac{(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})}{P}dx}$$

სადაც $\frac{(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})}{P}$ ფარდობა წარმოადგენს ფუნქციას მხოლოდ $y$ -ის მიმართ.

ახლა განვიხილოთ მაგალითი ამ ტიპის დიფერენცილური განტოლების ამოხსნაზე: ვთქვათ გვინდა ამოვხსნათ შემდეგი დიფერენციალური განტოლება:

$$(\ell^x+y+\sin y)dx+(\ell^y+x+x\cos y)dy=0$$

**ა მ ო ხ ს ნ ა:** ამ განტოლებაში $P(x,y)=\ell^x+y+\sin y, Q(x,y)=\ell^y+x+x\cos y$

$\frac{\partial P}{\partial y}=1+\cos y$ , $\frac{\partial Q}{\partial y}=1+\cos y$. მაშასადამე , განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს , რომელიღაც $u(x,y)$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს, ანუ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \ell^x + y + \sin y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \ell^x + x + sx\cos y .$$

ავიღოთ ინტეგრალი $\frac{\partial u}{\partial x}$ დან $x$ -ის მიხედვით.

გვექნება: $u = \int (\ell^x + y + \sin y)dx + C(y) = \ell^x + xy + x\sin y + C(y)$.

ბოლო გამოსახულების დიფერენციალს თუ ავიღებთ $y$ -ის მიმართ, მაშინ მოვძებნით $C(y)$ ფუნქციას.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + x\cos y + C'(y) .$$

მივიღებთ განტოლებას

$$x + x\cos y + C'(y) = x + x\cos y + \ell^y .$$

საიდანაც ბპოულობთ $C'(y) = \ell^y$ ანუ $C(y) = \ell^y$. მაშასადამე განტოლების ზოგად ინტეგრალს ექნება შემდეგი სახე:

$$\ell^x + xy + x\sin y + \ell^y = C .$$

ახლა განვიხილოთ სხვადასხვა სრულ დიფერენციალებში მოცემული დიფ. განტოლებების ამოხსნის ნიმუშები Maple-ში ( იხ.ნახ10.16 -- ნახ10.18).

1. $(x + \sin y)dx + (x\cos y + \sin y)dy = 0$.

2. $(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + \ell^x)dy = 0$.

3. $(2xy\ell^{x^2} + \ln y)dx + (\ell^{x^2} + \frac{x}{y})dy = 0$; $y(0) = 1$.

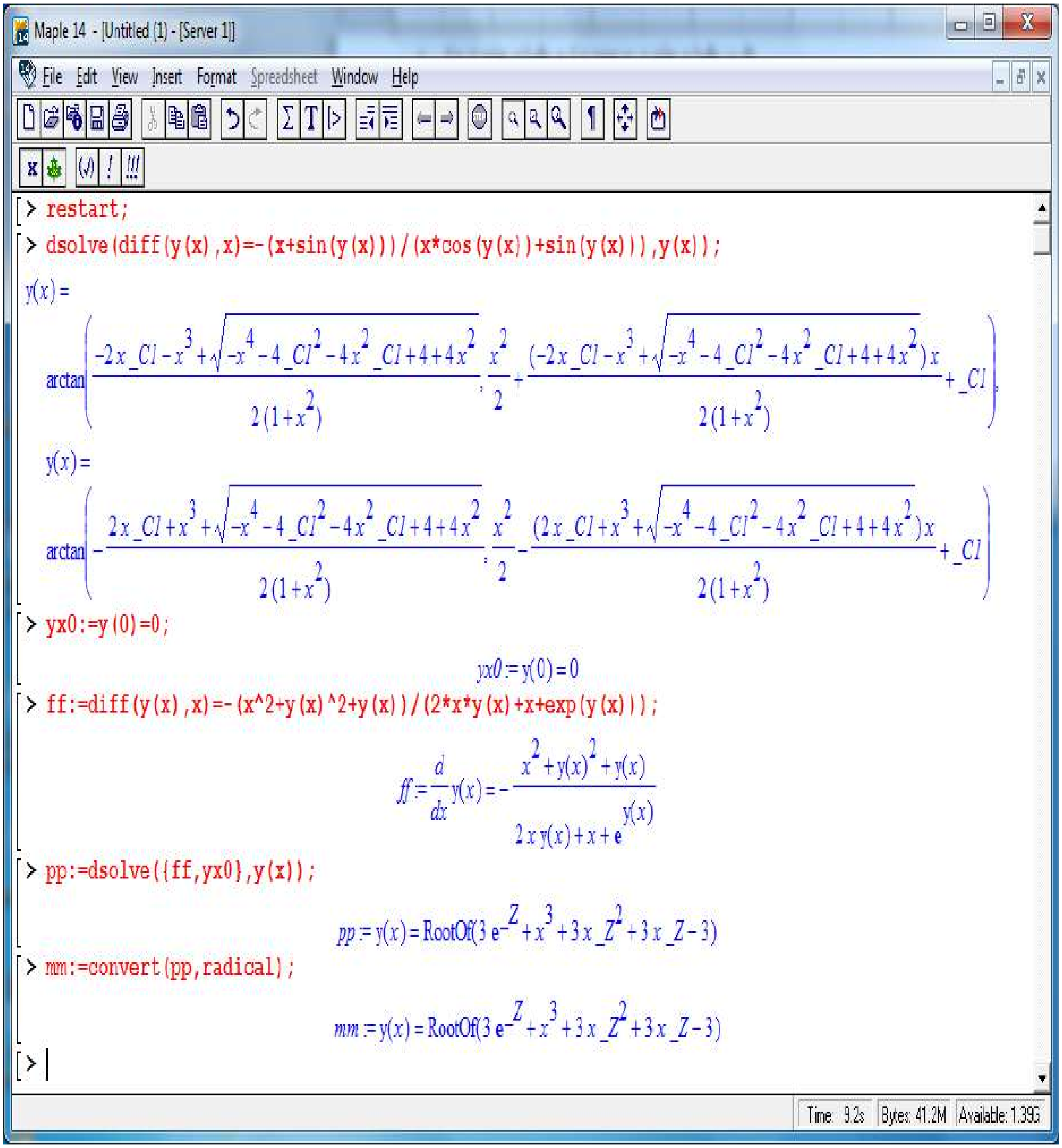
4. $(\sin y + (1 - y)\cos x)dx + ((1 + x)\cos y - \sin x)dy = 0$.

5. $(\ln y - 5y^2 \sin 5x)dx + (\frac{x}{y} + 2y\cos 5x)dx = 0$; $y(0) = \ell$

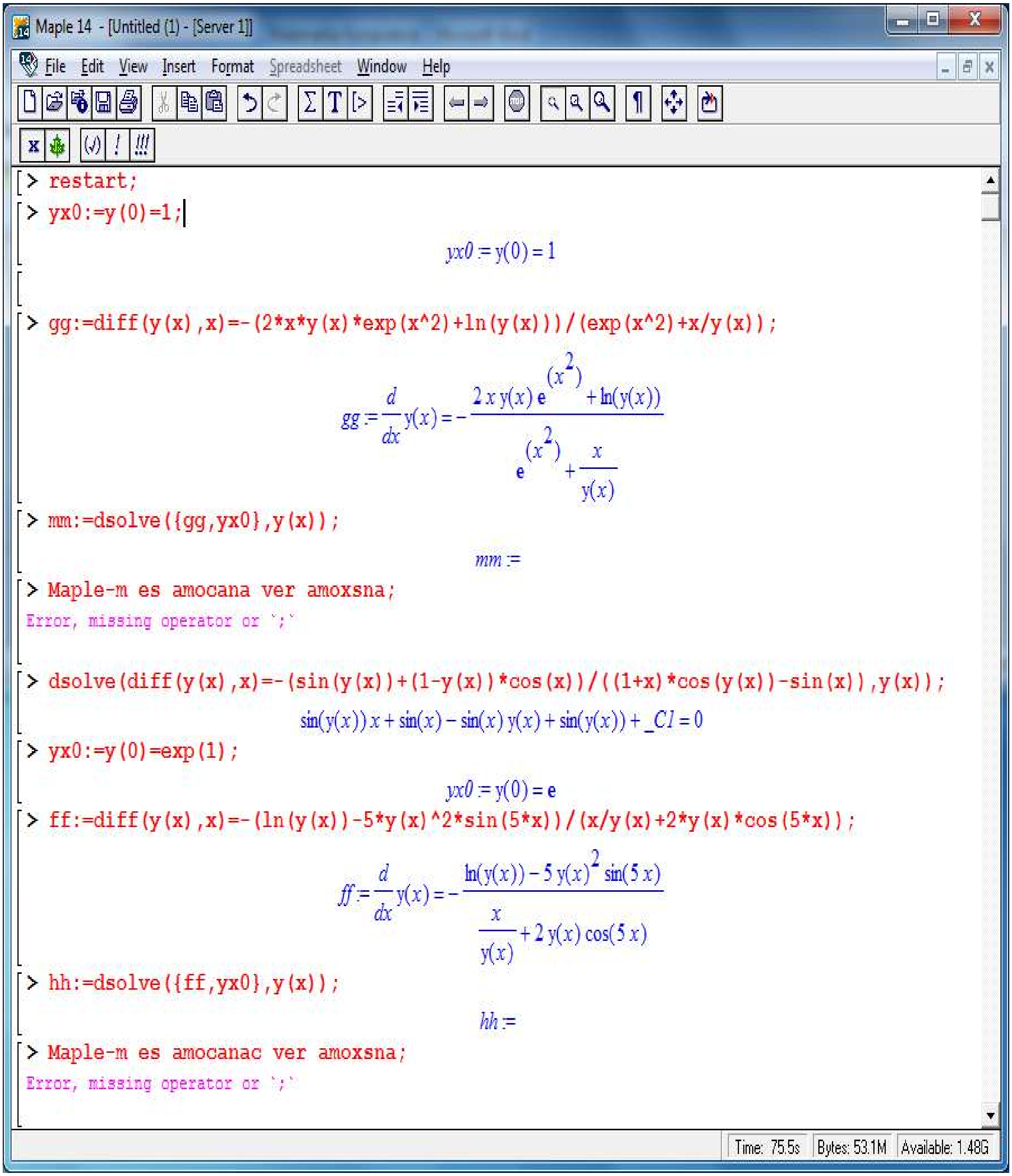
6. $(\ell^{x+y} + 3x^2)dx + (\ell^{x+y} + 4y^3)dy = 0$; $y(0) = 0$.

7. $(tgy - y\cos ec^2 x)dx + (ctgx + x\sec^2 y)dy$

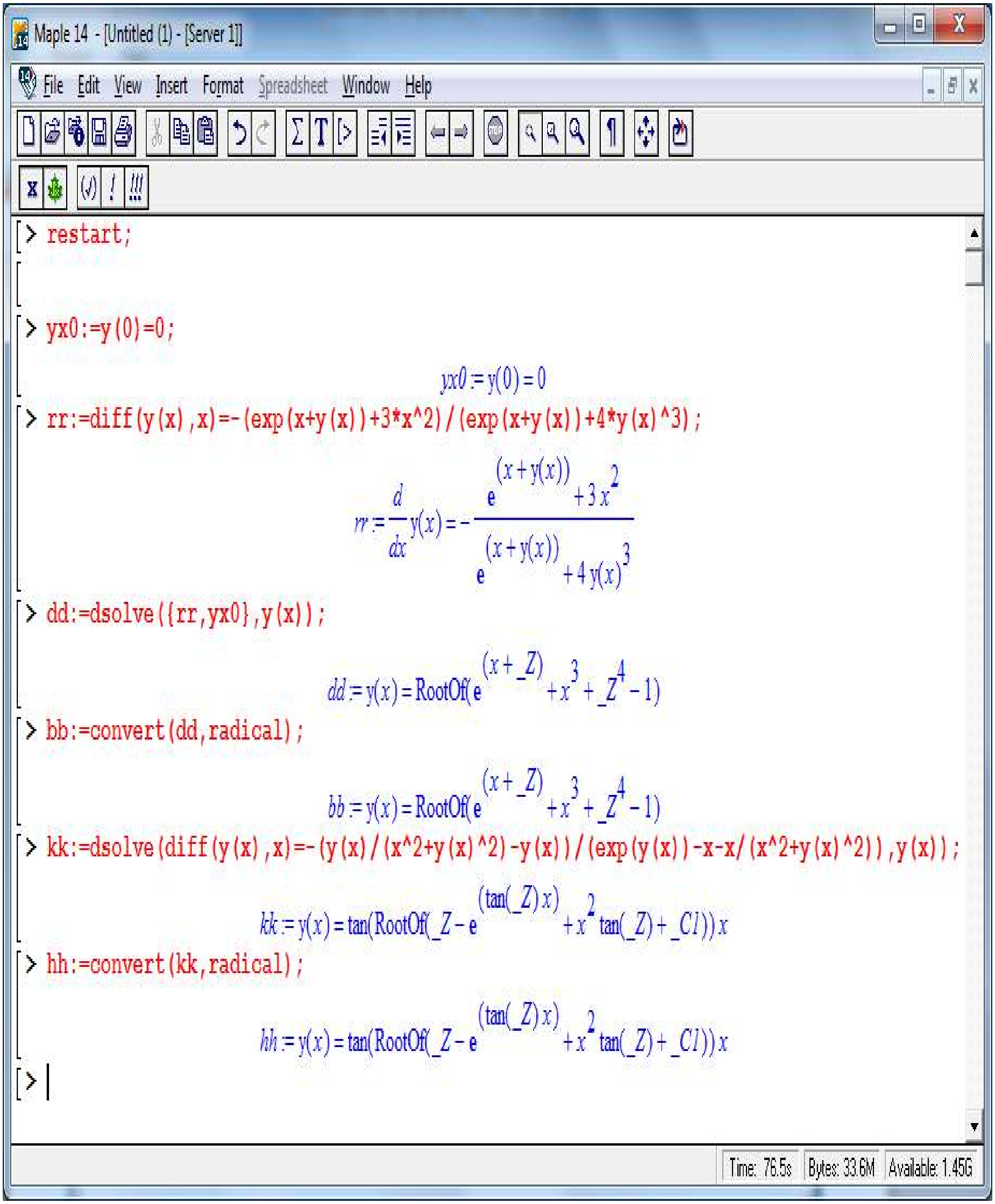
8. $(\frac{y}{x^2 + y^2} - y)dx + (\ell^y - x - \frac{x}{x^2 + y^2})dy = 0$


Maple 14 - [Untitled (1) - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
> restart;
> dsolve(diff(y(x),x)=-(x+sin(y(x)))/(x*cos(y(x))+sin(y(x))),y(x));
$y(x) = \arctan\left(\frac{-2x\_C1 - x^3 + \sqrt{-x^4 - 4\_C1^2 - 4x^2\_C1 + 4 + 4x^2}}{2(1+x^2)}, \frac{x^2}{2} + \frac{(-2x\_C1 - x^3 + \sqrt{-x^4 - 4\_C1^2 - 4x^2\_C1 + 4 + 4x^2})x}{2(1+x^2)} + \_C1\right),$
$y(x) = \arctan\left(-\frac{2x\_C1 + x^3 + \sqrt{-x^4 - 4\_C1^2 - 4x^2\_C1 + 4 + 4x^2}}{2(1+x^2)}, \frac{x^2}{2} - \frac{(2x\_C1 + x^3 + \sqrt{-x^4 - 4\_C1^2 - 4x^2\_C1 + 4 + 4x^2})x}{2(1+x^2)} + \_C1\right)$
> yx0:=y(0)=0;
$yx0 := y(0) = 0$
> ff:=diff(y(x),x)=-(x^2+y(x)^2+y(x))/(2*x*y(x)+x+exp(y(x)));
$ff := \frac{d}{dx}y(x) = -\frac{x^2 + y(x)^2 + y(x)}{2x\,y(x) + x + e^{y(x)}}$
> pp:=dsolve({ff,yx0},y(x));
$pp := y(x) = \mathrm{RootOf}(3\,e^{\_Z} + x^3 + 3x\_Z^2 + 3x\_Z - 3)$
> mm:=convert(pp,radical);
$mm := y(x) = \mathrm{RootOf}(3\,e^{\_Z} + x^3 + 3x\_Z^2 + 3x\_Z - 3)$
Time: 9.2s Bytes: 41.2M Available: 1.39G

ნახ.10.16


Maple 14 - [Untitled (1) - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
> restart;
> yx0:=y(0)=1;
yx0 := y(0) = 1
> gg:=diff(y(x),x)=-(2*x*y(x)*exp(x^2)+ln(y(x)))/(exp(x^2)+x/y(x));
gg := d/dx y(x) = -(2 x y(x) e^(x^2) + ln(y(x)))/(e^(x^2) + x/y(x))
> mm:=dsolve({gg,yx0},y(x));
mm :=
> Maple-m es amocana ver amoxsna;
Error, missing operator or `;`
> dsolve(diff(y(x),x)=-(sin(y(x))+(1-y(x))*cos(x))/((1+x)*cos(y(x))-sin(x)),y(x));
sin(y(x)) x + sin(x) - sin(x) y(x) + sin(y(x)) + _C1 = 0
> yx0:=y(0)=exp(1);
yx0 := y(0) = e
> ff:=diff(y(x),x)=-(ln(y(x))-5*y(x)^2*sin(5*x))/(x/y(x)+2*y(x)*cos(5*x));
ff := d/dx y(x) = -(ln(y(x)) - 5 y(x)^2 sin(5 x))/(x/y(x) + 2 y(x) cos(5 x))
> hh:=dsolve({ff,yx0},y(x));
hh :=
> Maple-m es amocanac ver amoxsna;
Error, missing operator or `;`
Time: 75.5s Bytes: 53.1M Available: 1.48G

ნახ.10.17


Maple 14 - [Untitled (1) - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
> restart;
> yx0:=y(0)=0;
yx0 := y(0) = 0
> rr:=diff(y(x),x)=-(exp(x+y(x))+3*x^2)/(exp(x+y(x))+4*y(x)^3);
> dd:=dsolve({rr,yx0},y(x));
> bb:=convert(dd,radical);
> kk:=dsolve(diff(y(x),x)=-(y(x)/(x^2+y(x)^2)-y(x))/(exp(y(x))-x-x/(x^2+y(x)^2)),y(x));
> hh:=convert(kk,radical);
Time: 76.5s
Bytes: 33.6M
Available: 1.45G

ნახ.10.18

## 10.8. პირველი რიგის წრფივი დიფ.განტოლება. ბერნულის განტოლება.

განტოლება რომელსაც აქვს შედეგი სახე: $y' + P(x)y = Q(x)$ ეწოდება **წრფივი ერთგვაროვანი** თუ $Q(x) = 0$ და ეწოდება **წრფივი არაერთგვაროვანი** თუ $Q(x) \neq 0$.

**წრფივი ერთგვაროვანი** განტოლების ზოგადი ამოხსნა ადვილად შეიძლება მოვძებნოთ თუ გავყოფთ განტოლების ორივე მხარეს $y$ -ზე მივიღებთ :

$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$; $\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx$; $\ln y = -\int P(x)dx + \ln C$ ანუ საბოლოოდ გვაქვს

$y = C\ell^{-\int P(x)dx}$, სადაც $C$ -თავისუფალი მუდმივაა.

**წრფივი არაერთგვაროვანი** განტოლების ზოგადი ამოხსნა, შეიძლება შეიძლება მოიძებნოს ლაგრანჟის მეთოდის გამოყენებით წრფივი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნიდან, ეს უნდა მოვახერხოთ თავისუფალი მუდმივას ვარირებით, ანუ თუ დავუშვებთ, რომ $y = C(x)\ell^{-\int P(x)dx} = Q(x)$ , მაშინ აქედან გვექნება:

$C(x) = \int Q(x)\ell^{\int P(x)dx}dx + C$, სადაც $C$ თავისუფალი მუდმივაა, მაშინ საძიებელი ზოგადი ამონახსენი არაერთგვაროვანი წრფივი განტოლებისა იქნება:

$$y = \ell^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)\ell^{\int P(x)dx}dx + C].$$

წრფივი პირველი რიგის განტოლების ინტეგრირება შესაძლებელია აგრეთვე ბერნულის მეთოდით, რომელიც მდგომარეობს შემდეგში. $y = uv$ ჩასმის საფუძველზე, სადაც $u$ და $v$ ორი უცნობი ფუნქციაა, საწყისი განტოლება გარდაიქმნება შედეგ სახემდე: $u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$ , ან $u[v' + P(x)v] + uv' = Q(x)$.

თუ ვისარგებლებთ იმით, რომ ერთ-ერთი ფუნქციათაგანი (მაგალითად $v$) შეგვიძლია შევარჩიოთ ნებისმიერად ( რადგანაც მხოლოდ ნამრავლი $uv$ უნდა აკმაყოფილებდეს

საწყის პირობას, $v$-ედ მივიღებთ $v' + P(x)v = 0$ განტოლების ნებისმიერ კერძო ამონახსნს ( მაგალითად $v = \ell^{-\int P(x)dx}$ ), რომელიც $u$-ს კოეფიციენტს გარდაქმნის ნულად წინა განტოლება მივიყვანოთ შემდეგ სახემდე:

$$vu' = Q(x) \quad \text{ან} \quad u' = \frac{Q(x)}{v} = Q(x)\ell^{\int P(x)dx}$$

საიდანაც გვაქვს

$$u = C + \int Q(x)\ell^{\int P(x)dx}dx$$

საწყისი განტოლების ზოგადი ამონახსნის მოსაძებნად ვამრავლებთ $u$ -ს $v$ -ზე და გვაქვს:

$$y = \ell^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)\ell^{\int P(x)dx}dx + C]$$

არაწრფივ განტოლებას $y' + P(x)y = Q(x)y^m$ სადაც $m \neq 0, m \neq 1$ სახისას ეწოდება **ბერნულის განტოლება.** ჩვენ შეგვიძლია ეს განტოლება გარდავმნათ წრფივ განტოლებად, თუ უცნობ ფუნქციას შევცვლით ასე: $z = y^{1-m}$ რის შედეგადაც საწყისი განტოლება გარდაიქმნება შემდეგ სახემდე:

$$\frac{1}{1-m}z' + P(x)z = Q(x)$$

ბერნულის კონკრეტული განტოლებების ინტეგრირებისას, არაა მათი წინასწარი გაწრფივება საჭირო, არამედ მაშინვე შეგვიძლია გამოვიყენოთ ბერნულის მეთოდი ან თავისუფალი მუდმივას ვარიაციის მეთოდი.

ახლა მაგალითისათვის ამოვხსნათ ერთი განტოლება ასეთი:

$y' \cos^2(x) + y = tgx$ საწყისი პირობით $y(0) = 0$.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

თუ საწყისი განტოლების შ ესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლებას ( $y' \cos^2(x) + y = 0$ ) გავყოფთ ცვლადებს მივიღებთ

$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{\cos^2 x}=0$ თუ ავიღებთ ინტეგრალს $\int\frac{dy}{y}dy+\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\int 0$ მივიღებთ $\ln y+tgx=\ln c$ აქედან კი საბოლოოდ ვპოულობთ $y$-ს და $y=C\ell^{-tgx}$ ამის შემდეგ არაერთგვაროვანი (საწყისი) განტოლების ამონახსენს ვეძებთ $y=C(x)\ell^{-tgx}$ სადაც $C(x)$-არის უცნობი ფუნქცია. თუ საწყის განტოლებაში მოვახდენთ $y=C(x)\ell^{-tgx}$ ჩასმას და $y^{'}=C^{'}(x)\ell^{-tgx}-C(x)\ell^{-tgx}\sec^2 x$ მიიყვანება შემდეგ სახემდე:

$$\cos^2 xC^{'}(x)\ell^{-tgx}-C(x)\ell^{-tgx}\sec^2 x\cos^2 x+C(x)\ell^{-tgx}=tgx\ ,$$

ანუ

$$C^{'}(x)\cos^2 x\ell^{-tgx}=tgx$$

საიდანაც გვაქვს

$$C(x)=\int\frac{\ell^{tgx}tgx}{\cos^2 x}dx=\ell^{tgx}(tgx-1)+c$$

რის შედეგადაც საბოლოოდ მივიღებთ საწყისი განტოლების ზოგად ამონახსნს :

$$y=tgx-1+C\ell^{-tgx}$$

გამოვიყენოთ საწყისი პირობა $y(0)=0$ და მივიღებთ $0=-1+c$ საიდანაც $C=1$ ანუ გამომდინარეობს, რომ კერძო ამონახსნი მიიღბს სახეს :

$$y=tgx-1+\ell^{-tgx}$$

ახლა განვიხილოთ პირველი რიგის წრფივი დიფ.განტოლების ბერნულის განტოლების ამოხსნა, განვიხილოთ შემდეგი მაგალითები:

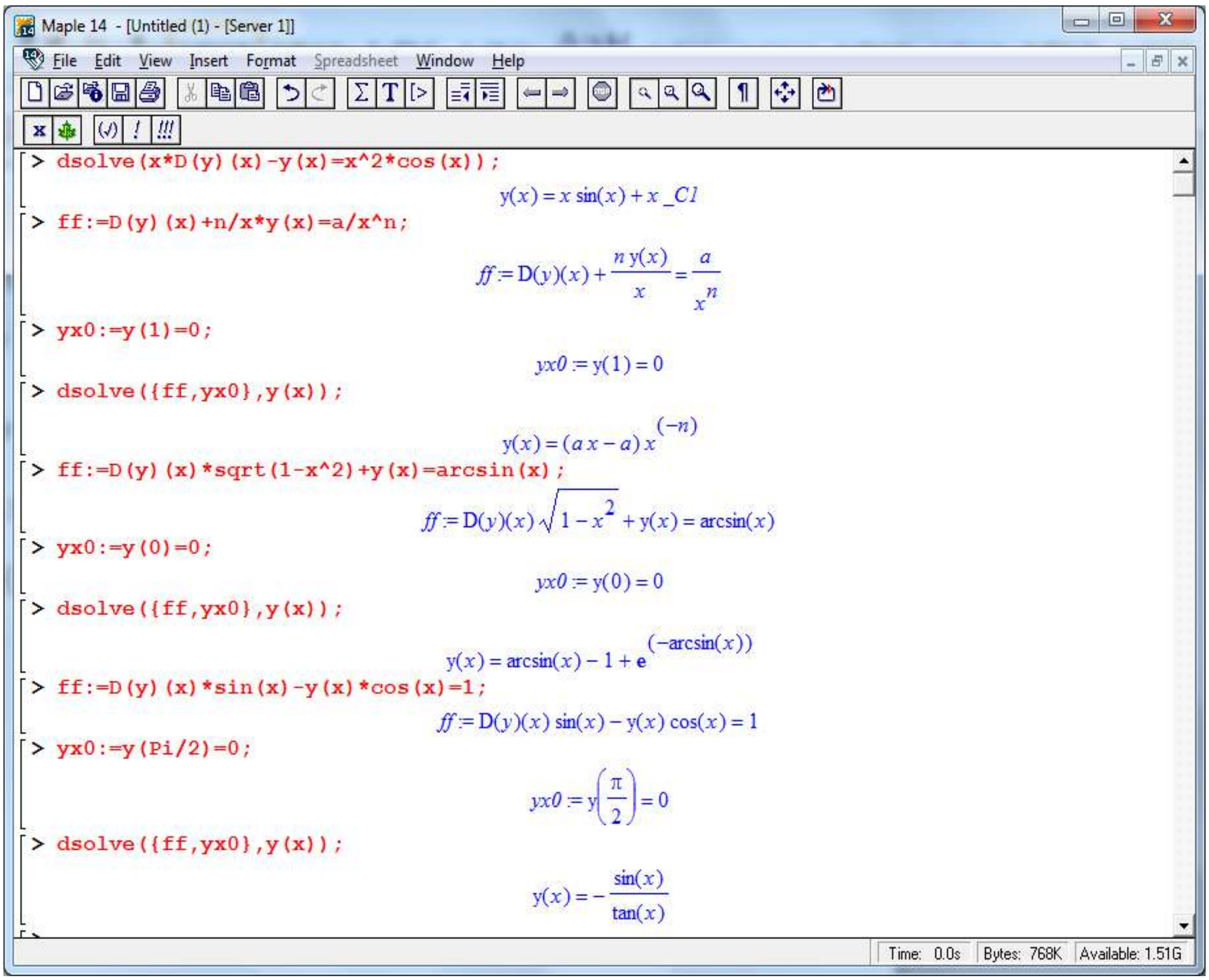
1. $xy^{'}-y=x^2\cos x$ . 2. $y^{'}+\frac{n}{x}y=\frac{a}{x^n}$ , $y(1)=0$.

3. $y^{'}\sqrt{1-x^2}+y=\arcsin x$ ; $y(0)=0$. 4. $y^{'}\sin x-y\cos x=1$; $y(\frac{\pi}{2})=0$.

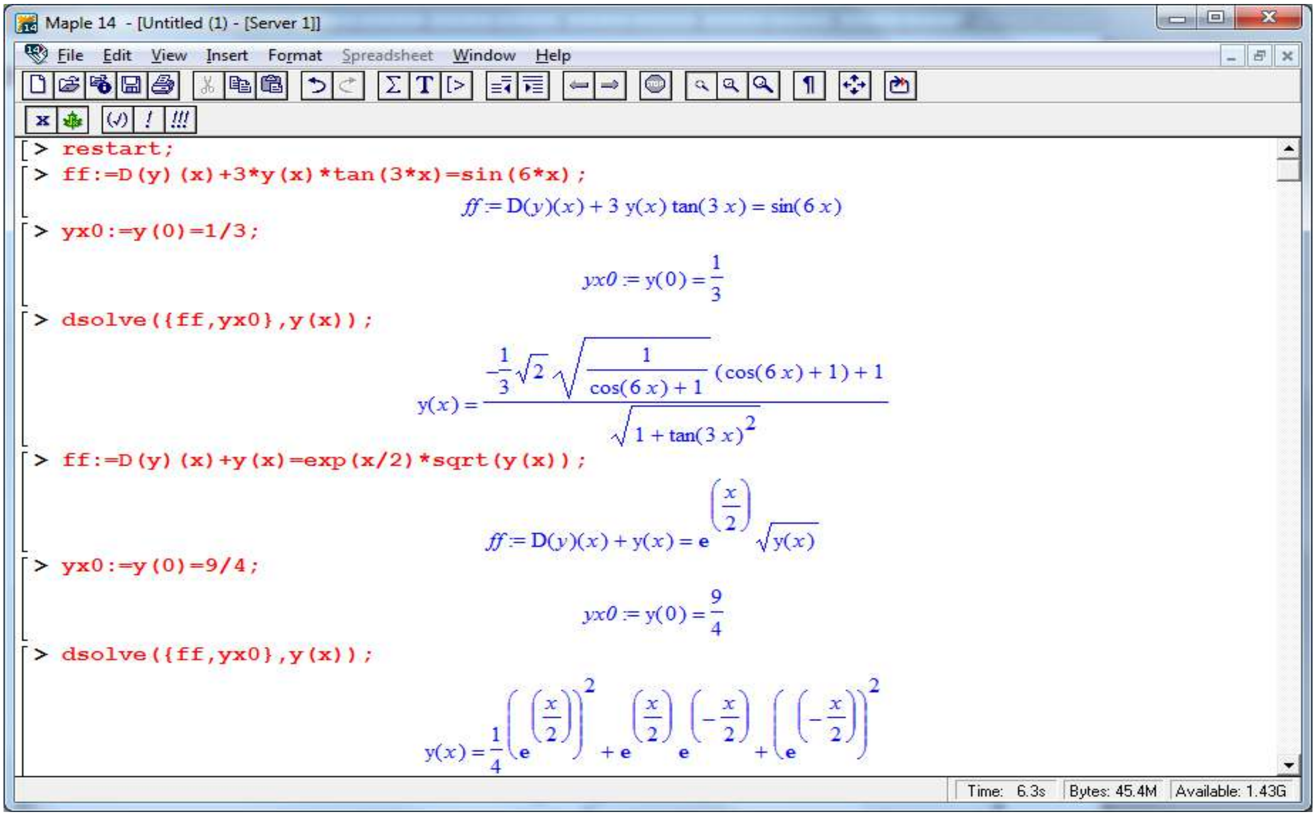
5. $y' + 3ytg3x = \sin 6x$; $y(0) = \frac{1}{3}$. 6. $y' + y = \ell^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}$; $y(0) = \frac{9}{4}$.

7. $y' + \frac{3x^2 y}{x^3 + 1} = y^2(x^3 + 1)\sin x$; $y(0) = \frac{1}{3}$.

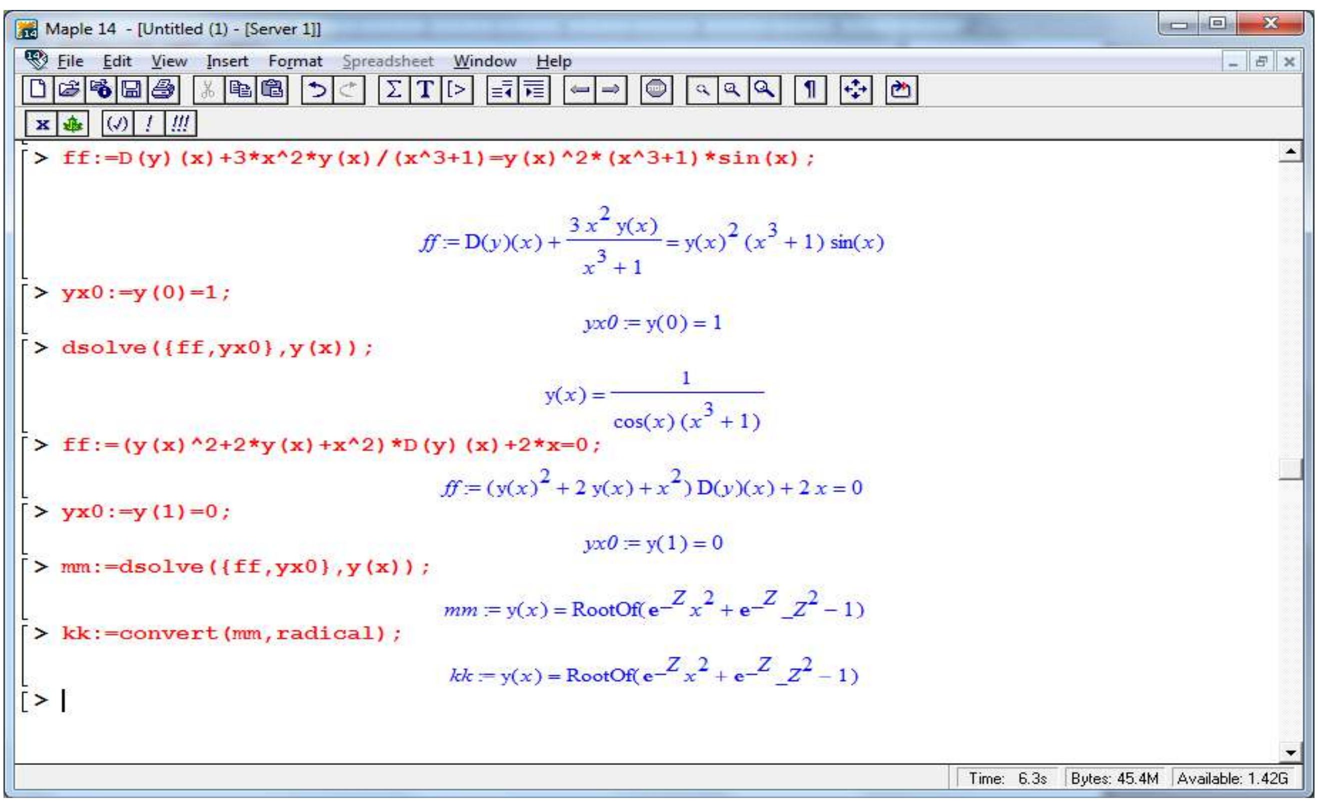
8. $(y^2 + 2y + x^2)y' + 2x = 0$; $y(1) = 0$. ამ განტოლებების Maple-ში ამოხსნა იხილე ნახ.10.19 დან 10.21 მდე




ნახ.10.19




ნახ. 10.20




ნახ.10.21

## 10.9. $x=\varphi(y')$ და $y=\varphi(y')$ ტიპის დიფ. განტოლებები.

ამ ტიპის განტოლება ადვილად ინტეგრირდება პარამეტრული ფორმით, თუ დავუშვებთ, რომ $y'=p$ სადაც $p$-ს განვიხილავთ, როგორც პარამეტრს, რომლის საშუალებითაც გამოვსახავთ $x$ და $y$-ს. სინამდვილეში შემოვიღებთ რა აღნიშვნას $y'=p$ ანტოლებაში $x=\varphi(y')$ მაშინვე შეგვიძლია მივიღოთ $x$ გამოსახული $p$ პარამეტრით $x=\varphi(p)$ ამ განტოლების დიფერენცირებით გვაქვს $dx=\varphi'(p)dp$ იმის გამო, რომ $dy=y'$ და $dx=pdx$, მაშინ გვაქვს $dy=p\varphi'(p)dp$ და $y$ მოიძებნება ინტეგრირებით: $y=\int p\varphi'(p)dp+C$.

აქედან გამომდინარე $x=\varphi(y')$ განტოლების ამოხსნა შეიძლება ჩაიწეროს პარამეტრული სახით:

$$\begin{cases} x=\varphi(p), \\ y=\int p\varphi'(p)dp+C. \end{cases}$$

ანალოგიურად, თუ დავუშვებთ $y=\varphi(y')$ განტოლებაში $y'=p$ -ს და ვპოულობთ $y=\varphi(p)$ -ს დიფერენცირების შემდეგ ვიღებთ $dy=\varphi'(p)dp$. ვიცით, რომ $dy=pdx$. ესე იგი $pdx=\varphi'(p)dp$ საიდანაც გვაქვს $dx=\dfrac{\varphi'(p)dp}{p}$ და $x$-ს ვპოულობთ ინტეგრირებით, $x=\int\dfrac{\varphi'(p)dp}{p}+C$. აქედან გამომდინარე $y=\varphi(y')$ განტოლების ზოგადი ამოხსნა შეიძლება ჩაიწეროს პარამეტრული სახით:

$$\begin{cases} y=\varphi(p), \\ x=\int\dfrac{\varphi'(p)dp}{p}+C. \end{cases}$$

თუ არის შესაძლებლობა ორივე შემთხვევაში, მაშინ გამოვრიცხავთ $p$ პარამეტრს და მოვძებნით განტოლების ზოგად ინტეგრალს.

ახლა განვიხილოთ ერთ-ერთი მაგალითი ამ ტიპის დიფერენციალური განტოლების უკომპიუტეროდ (ხელით) ამოხსნაზე.

**ამოვხსნათ შემდეგი განტოლება:** $x = y' \sin y' + \cos y'$

ა მ ო ხ ს ნ ა . შემოვიღოთ აღნიშვნა $y' = p$, მაშინ გვექნება $x = p\sin p + \cos p$.

თუ მოვახდენთ ბოლო ტოლობის დიფერენცირებას, მაშინ მივიღებთ:

$$dx = (\sin p + p\cos p - \sin p)dp = p\cos p dp$$

და ტოლობაში $dy = pdx$ შევიტანოთ $dx$ -ის მნიშვნელობა წინა ტოლობიდან გვექნება:

$dy = p^2 \cos p dp$ ანუ აქედან ინტეგრებით ვპოულობთ $y$ -ს, რომელიც ტოლია:

$y = \int p^2 \cos p dp = (p^2 - 2)\sin p + 2p\cos p + C$.

მაშასადამე, პარამეტრებში მოცემულ ზოგად ამონახსნს ექნება სახე:

$$\begin{cases} x = p\sin p + \cos p, \\ y = (p^2 - 2)\sin p + 2p\cos p + C \end{cases}$$

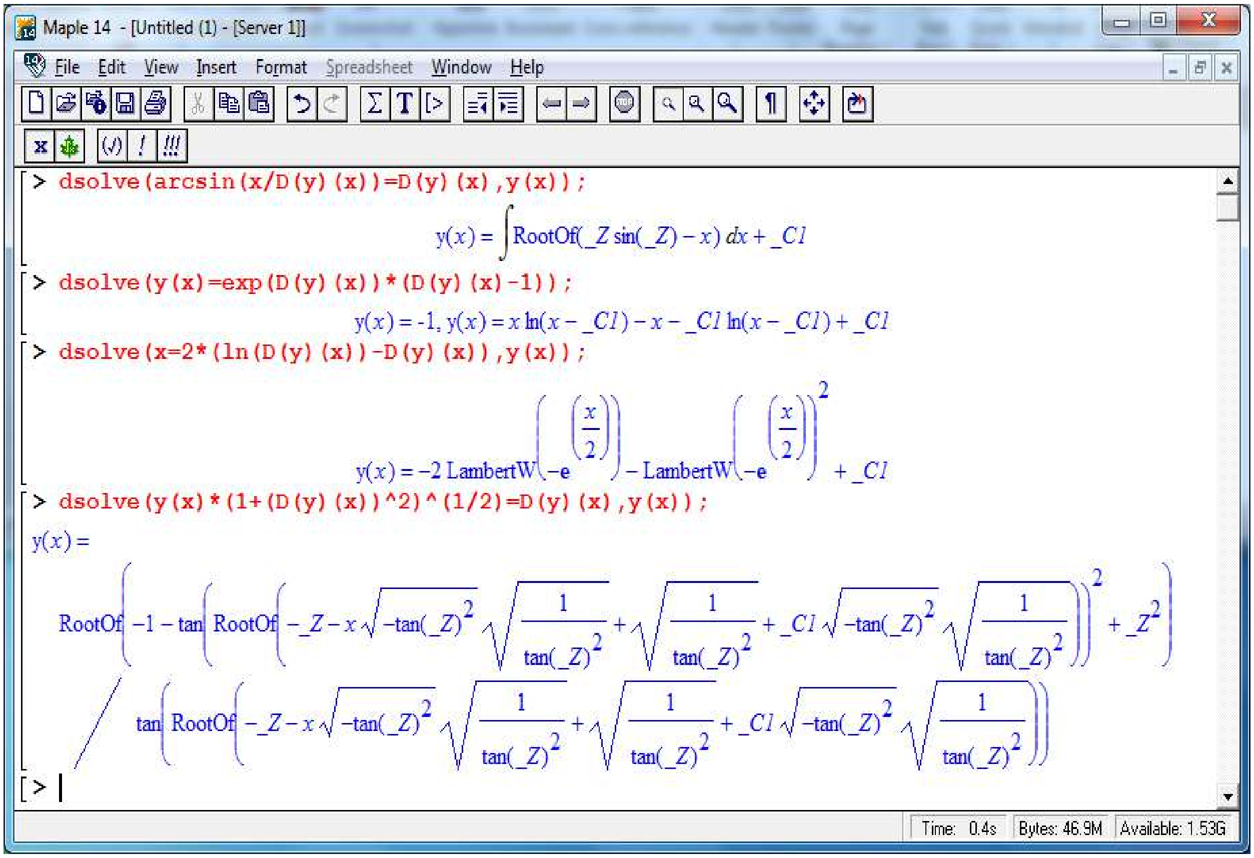
ამოვხსნათ Maple-ში შემდეგი განტოლებები:

1. $\arcsin(\frac{x}{y'}) = y'$. 2. $y = \ell^{y'}(y' - 1)$. 3. $x = 2(\ln y' - y')$.

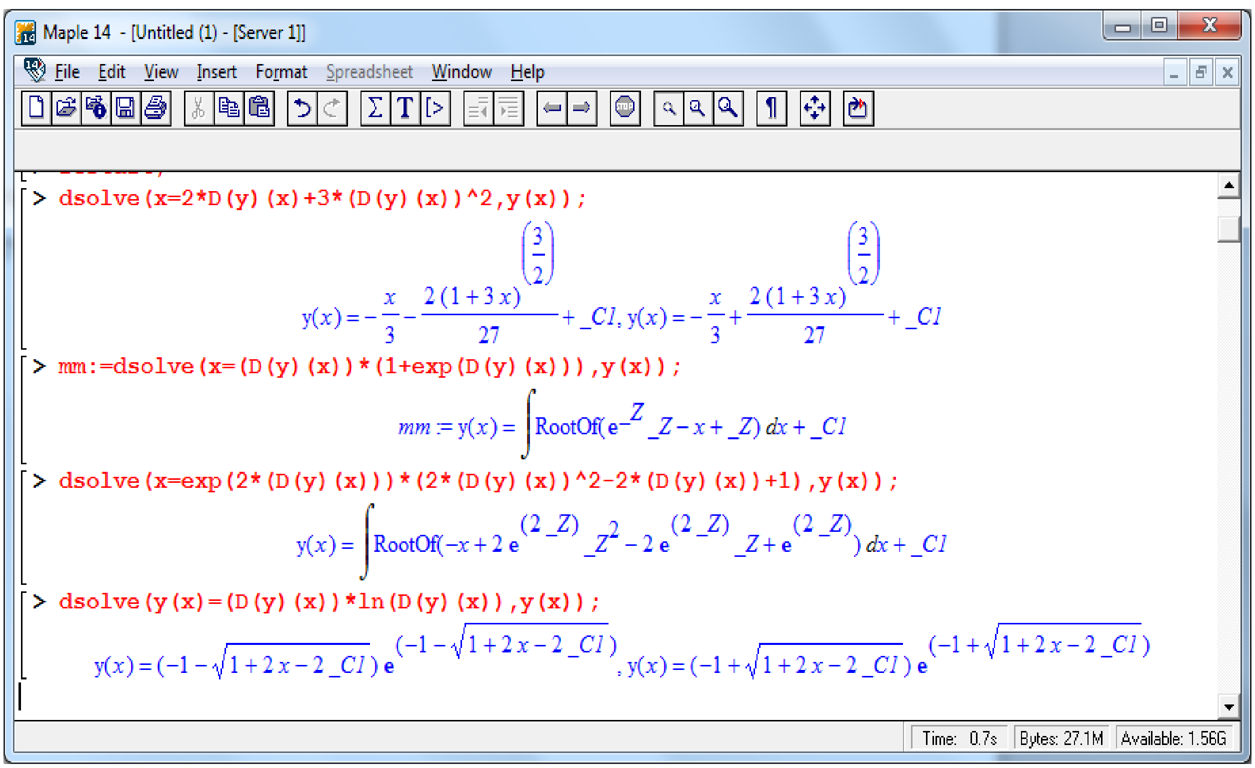
4. $y(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} = y'$. 5. $x = 2y' + 3y'^2$. 6. $x = y'(1 + \ell^{y'})$.

7. $x = \ell^{2y'}(2y'^2 - 2y' + 1)$. 8. $y = y' \ln y'$

ამ განტოლებების Maple-ში ამოხსნის ნიმუშები მოცემულია ნახ.10.22 და ნახ.10.23-ზე




ნახ.10.22




ნახ.10.23

## 10.10. ლაგრანჟისა და კლეროს დიფ. განტოლებები

**ლაგრანჟის** ეწოდება პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას $x$ და $y$ ცვლადებზე დამოკიდებულს, რომლის კოეფიციენტებია $y'$:

$$P(y')x + Q(y')y + R(y') = 0.$$

ლაგრანჟის განტოლება ინტეგრირდება შემდეგნაირად. ამოვხსნით მას $y$-ის მიმართ პარამეტრად განვიხილავთ $y'$-ს, თუ დავუშვებთ, რომ $y' = p$:

$$y = xf(p) + \varphi(p).$$

[აქ შემოვიტანეთ აღნიშვნები $f(y') = -\frac{P(y')}{Q(y')}$, $\varphi(y') = -\frac{R(y')}{Q(y')}$] მიღებული განტოლების დიფერენცირებით და თუ მარცხენა მხარეში $dy$-ს შევცვლით $pdx$-ით მივიღებთ განტოლება: $pdx = f(p)dx + xf'(p)dp + \varphi'(p)dp$ მიღებული განტოლება არის წრფივი $x$-ის მიმართ ( როგორც ფუნქციები $p$-ს მიმართ) და ამიტომაც შეიძლება მათი ინტეგრირება. თუ ამონახსნია $x = F(p,C)$, მაშინ **ლაგრანჟის** საწყისი განტოლების ზოგადი ამონახსენი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} x = F(p,C), \\ y = xf(p) + \varphi(p) = F(p,c)f(p) + \varphi(p). \end{cases}$$

**კლეროს** განტოლება ეწოდება შემდეგი სახის განტოლებას

$y = xy' + \varphi(y')$, რომელიც არის ლაგრანჟის განტოლების კერძო შემთხვევა. ამ განტოლების ინტეგრირებით ადვილად მივიღებთ ზოგად ამონახსენს $y = Cx + \varphi(C)$, რომელიც გვაძლევს სიბრტეზე წრფეთა კონას.

**კლეროს** განტოლებას გარდა ზოგადი ამონახსნისა გააჩნია აგრეთვე განსაკუთრებული ამონახსენიც, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი პარამეტრული განტოლებებით:

$$\begin{cases} x = -\varphi'(p), \\ y = -p\varphi'(p) + \varphi(p). \end{cases}$$

ახლა ამოვხსნათ სტანდარტული( ხელით) ამ ტიპის დიფერენციალური განტოლებები:

ვთქვათ გვინდა ამოვხსნათ $y = xy' - \ell^{y'}$ განტოლება.

ა მ ო ხ ს ნ ა

თუ კარგად დავაკვირდებით ეს არის **კლეროს** განტოლება. შემოვიღოთ აღნიშვნა $y' = p$ და გადავწეროთ განტოლება ასე $y = px - \ell^p$. ამ განტოლების დიფერენცირების შემდეგ: $dy = pdx + xdp - \ell^p dp$, მაგრამ $dy = pdx$ ამიტომ ბოლო განტოლება მიიღებს $xdp - \ell^p dp = 0$ სახეს ანუ $(x - \ell^p)dp = 0$. მაშასადამე ან $dp = 0$, ან $x = \ell^p$. თუ დავუშვებთ, რომ $dp = 0$, მაშინ $p = C$; თუ ჩავსვავთ $p$ -ს ამ მნიშვნელობას $y = px - \ell^p$ განტოლებაში, მივიღებთ მოცემული განტოლების ზოგად ამონახსნს:

$$y = Cx - \ell^C.$$

თუ დავუშვებთ, რომ $x = \ell^p$, მაშინ $y = p\ell^p - \ell^p = (p-1)\ell^p$, და მივდივართ საწყისი განტოლების განსაკუთრებული ამონახსენამდე:

$$\begin{cases} x = \ell^p, \\ y = (p-1)\ell^p. \end{cases}$$

თუ გამოვრიცხავთ $p$ პარამეტრს ( მოცემულ შემთხვევაში $p = \ln x$ ), მაშინ მოიძებნება განსაკუთრებული ამონახსენი ცხადი სახით:

$$y = x(\ln x - 1).$$

შევამოწმოთ, რომ იმ წრფეთა სიმრავლე, რომლებიც განისაზღვრებიან ზოგადი ამონახსენით, არის ინტეგრალური წირის მხებთა სიმრავლე.

მოვახდინოთ რა განსაკუთრებული ამონახსნის დიფერენცირებას, მოვძებნით $y' = \ln x$. ამ მხების განტოლება $M(x_0; y_0)$ წერტილში [სადაც $y_0 = x_0(\ln x_0 - 1)$] შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0) \quad \text{ან} \quad y - x_0(\ln x_0 - 1) = \ln x_0 (x - x_0),$$

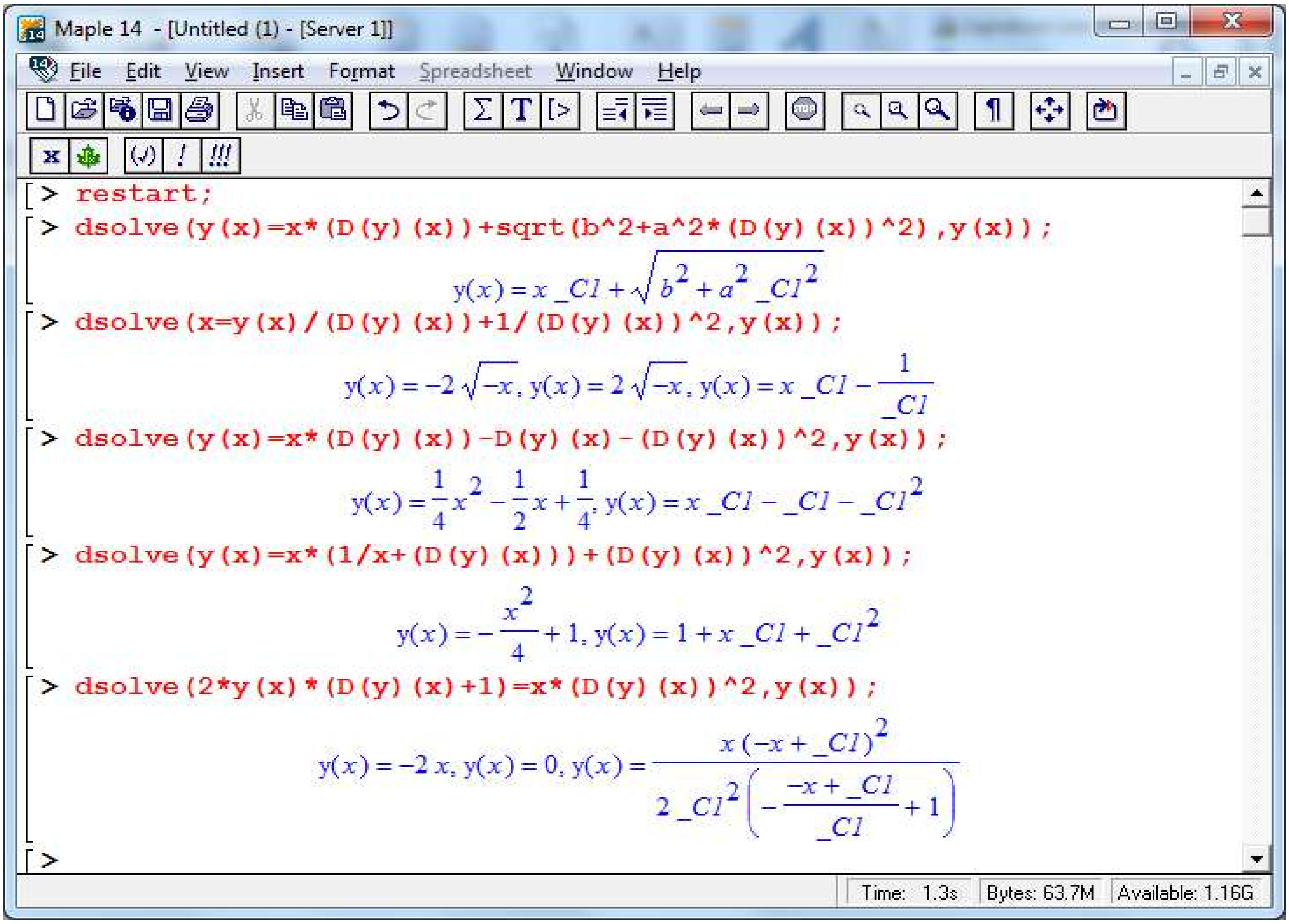
რაც გამარტივების შემდეგ გვაძლევს $y = x \ln x_0 - x_0$. თუ აქ ავღნიშნავთ $\ln x_0 = C$, მაშინ განსაკუთრებული ინტეგრალური წირისადმი მხებთა კონას ექნება სახე $y = Cx - \ell^C$ რისი დადგენაც გვინდოდა.

ამოვხსნათ Maple-ში შემდეგი განტოლებები:

1. $y = xy' + \sqrt{b^2 + a^2 y'^2}$. 2. $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{y'^2}$. 3. $y = xy' + y' - y'^2$.

4. $y = x(\dfrac{1}{x} + y') + y'^2$. 5. $2y(y' + 1) = xy'^2$.

ამ განტოლებების Maple-ში ამოხსნის ნიმუშები მოცემულია ნახ.10.23-ზე




ნახ.10.23

## 10.11.მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებები

n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლება ეს არის $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ ტიპის განტოლება. ამ ტიპის განტოლების ამონახნია ნებისმიერი n -ჯერ დიფერენცირებადი ფუნქცია $y = \varphi(x)$, რომელიც მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებას გადააქცევს იგივეობად, ანუ $F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), ..., \varphi^{(n)}(x)] = 0.$ კოშის ამოცანა ამ განტოლებისათვის მდგომარეობს იმაში რომ, მოვძებნოთ ამ განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$y = y_0, y' = y_0', ..., y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ იმ პირობებში, როცა $x = x_0$, სადაც $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ მოცემული რიცხვებია, რომელთაც ეწოდებათ საწყისი პირობები.

ფუნქცია $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ იწოდება მოცემული n - ური რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნად, თუ $C_1, C_2, ..., C_n$ კოეფიციენტების თავისუფალი შერჩევის პირობებში ეს ფუნქცია წარმოადგენს ამ განტოლებისათვის შედგენილი კოშის ნებისმიერი ამოცანის ამოხსნას.

ყოველი ამონახსენი, მიღებული ზოგადი ამონახსნიდან $C_1, C_2, ..., C_n$ კოეფიციენტების კონკრეტული მნიშვნელობებისათვის, იწოდება მოცემული განტოლების კერძო ამონახსნად. დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა სიმრავლიდან განსაზღვრული კერძო ამონახსნების ამოსარჩევად გამოიყენებიან ე.წ. სასაზღვრო პირობები. ეს პირობები ( მათი რიცხვი არ უნდა ჭარბობდეს განტოლების რიგს) მოიცემიან არა ერთ წერტილში , არამედ რომელიღაც შუალედის ბოლოებზე. ცხადია, რომ სასაზღვრო პირობები ისმება მხოლოდ იმ განტოლებებისათვის, რომელთა რიგი აღემატება ერთს.

$y^{(n)} = f(x)$ ტიპის განტოლების ამონახსნი იძებნება n - ჯერ ინტეგრირების საშუალებით, ანუ ასე:

$$y^{(n)} = f(x)$$

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1 = f_1(x) + C_1$$

$$y^{(n-2)} = \int [f_1(x) + C_1]dx = f_2(x) + C_1 x + C_2$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$y = f_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + ... + C_{n-1}x + C_n.$$

სადაც $f_n(x) = \iiint ... \int \underbrace{f(x)dx^n}_{\text{n ჯერ}}$

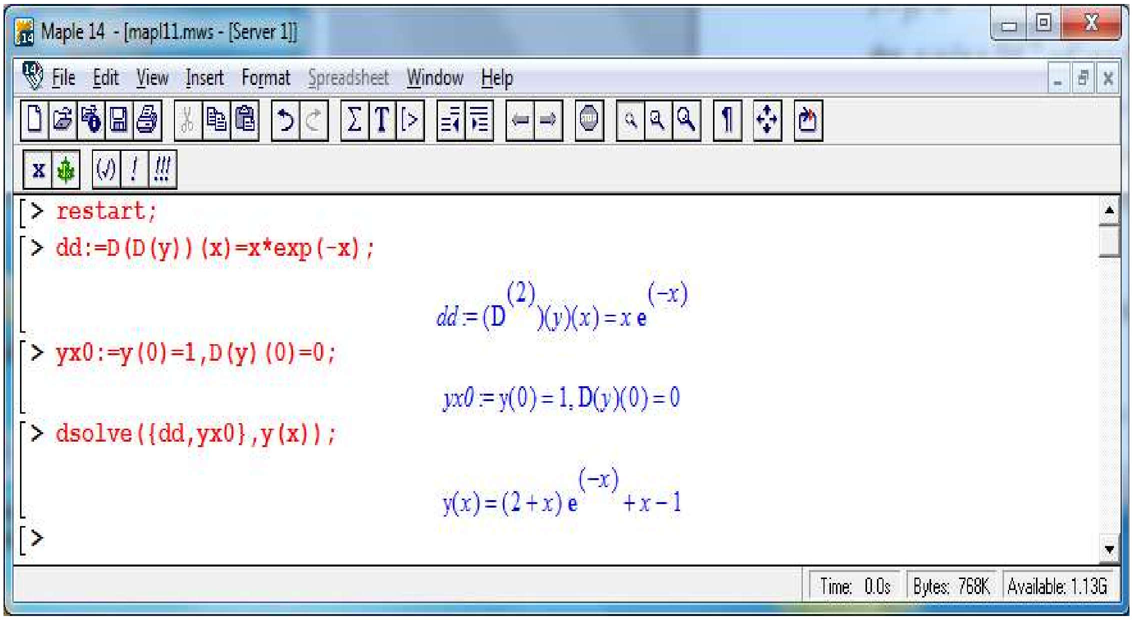
იმდენად, რამდენადაც $\frac{C_1}{(n-1)!}, \frac{C_2}{(n-2)!},\dots$ სიდიდეები არიან მუდმივები, ამიტომ ზოგადი ამონახსნი შეიძლება ჩაწერილ იქნას შემდეგი სახითაც:
$$y = f_n(x) + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-1}x + C_{n.}$$
განვიხილოთ ზოგიერთი განტოლების ამოხსნის მაგალითები:

ამოვხსნათ განტოლება $y'' = x\ell^{-x}$ $y(0)=1, y'(0)=0$ საწყისი პირობებით.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

მოვძებნოთ ზოგადი ამოხსნა მოცემული განტოლების თანმიმდევრობითი ინტეგრირების საშუალებით:
$$y' = \int x\ell^{-x}dx = -x\ell^{-x} - \ell^{-x} + C_{1,}$$
$$y = \int [-x\ell^{-x} - \ell^{-x} + C_1]dx = x\ell^{-x} + 2\ell^{-x} + C_1 x + C_{2,}$$
ანუ $y = (x+2)\ell^{-x} + C_1 x + C_2$.

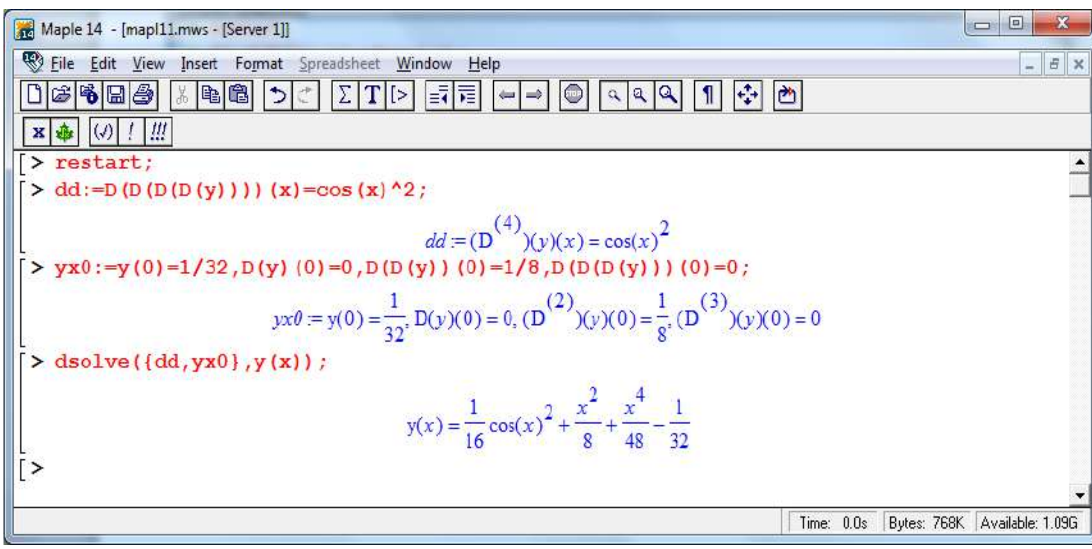
თუ ვისარგებლებთ საწყისი პირობებით: $1 = 2 + C_2; C_2 = -1; 0 = -1 + C_1; C_1 = 1$ მაშინ, საძიებელი კერძო ამონახსენი მიიღებს სახეს $y = (x+2)\ell^{-x} + x - 1$. იგივე ამონახსნი შეიძლება მოვძებნოთ შემდეგო სახითაც, გამოვიყენებთ რა მაშინვე საწყის პირობებს:
$$y' = y'(0) + \int_0^x x\ell^{-x}dx = [-x\ell^{-x} - \ell^{-x}]_0^x = -x\ell^{-x} - \ell^{-x} + 1;$$
$$y = y(0) + \int_0^x [-x\ell^{-x} - \ell^{-x} + 1]dx = 1 + [(x+2)\ell^{-x} + x]_0^x = (x+2)\ell^{-x} + x - 1.$$
ახლა ამოვხსნათ იგივე განტოლება Maple-ში(ნახ.10.24):




ნახ. 10.24

ახლა ამოვხსნათ ამ ტიპის სხვადასხვა განტოლებების Maple-ში.ამოვხსნათ განტოლება

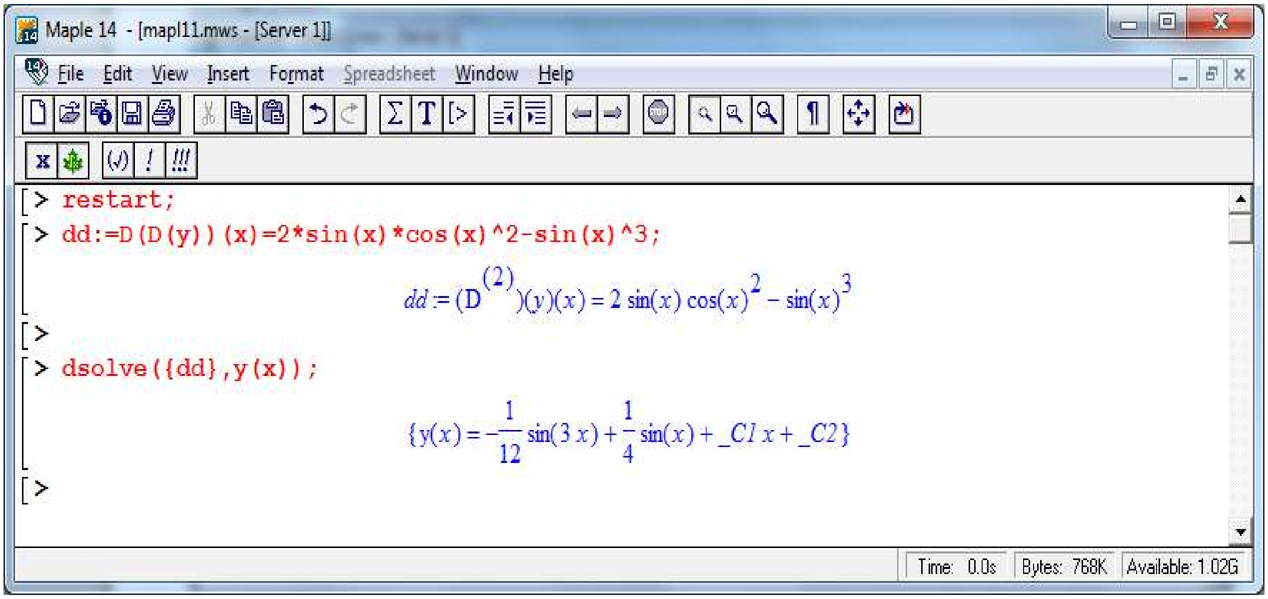
$y^{IV} = \cos^2 x;\quad y(0) = \frac{1}{32}, y^{'}(0) = 0, y^{''}(0) = \frac{1}{8}, y^{'''}(0) = 0$ იხ. ნახ.10.25



ნ

ნახ.10.25

ამოვხსნათ ასეთი განტოლება $y^{''} = 2\sin x\cos^2 x - \sin^3 x;$ იხ. ნახ. 10.26




ნახ.10.26

**$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$ ტიპის მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნა .**

ამ ტიპის განტოლების რიგი ჩვენ შეგვიძლია დავწიოთ თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას $y^{(k)} = z$

მაშინ მივიღებთ განტოლებას $F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0.$

მაშასადამე, საწყისი განტოლების რიგმა დაიწია k ერთეულით. განვიხილოთ კონკრეტული

**ამოვხსნათ შემდეგი განტოლება:** $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$

ამოხსნა. შემოვიტანთ აღნიშვნა $y' = z$ , მაშინ ჩვენი საწყისი განტოლება მიიღებს სახეს:

$xz' = z \ln \dfrac{z}{x}$ , ან $z' = \dfrac{z}{x} \ln \dfrac{z}{x}$. ეს არის პირველი რიგის ერთგვაროვანი განტოლება. თუ

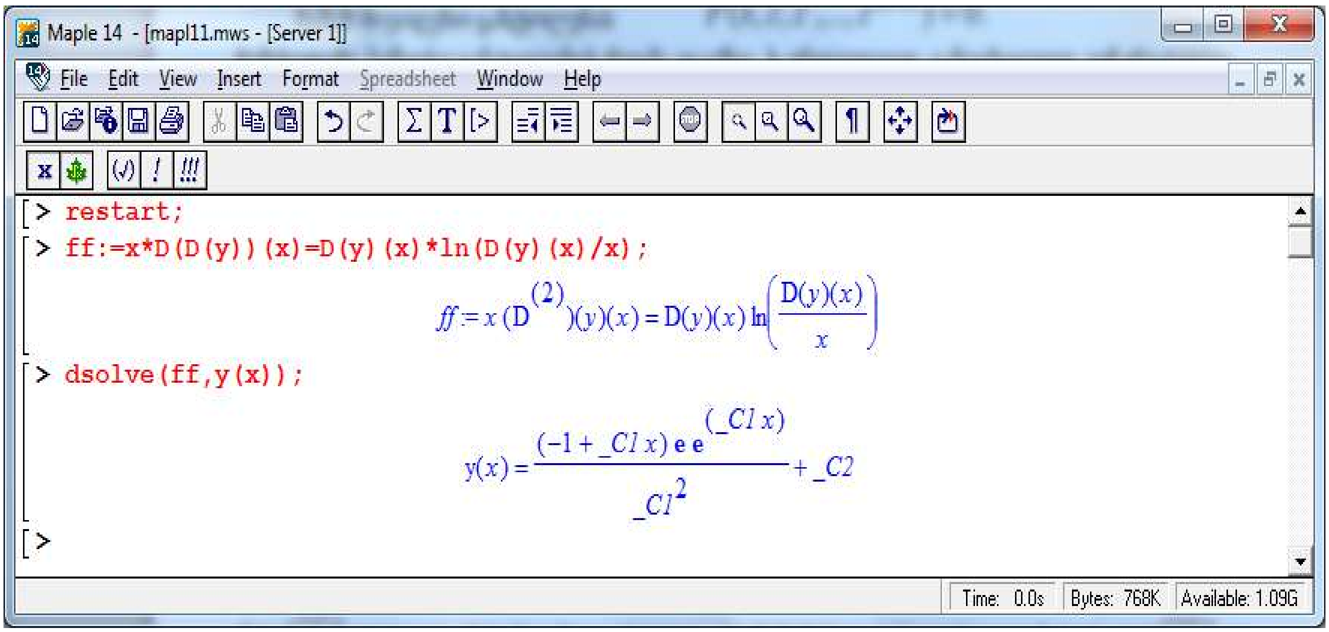
შემოვიღებთ აღნიშვნას $\dfrac{z}{x} = t,$ საიდანაც გვექნება $z = tx,\ z' = t'x + t$ , მივიღებთ

განტოლებებს $t'x + t = t \ln t,$ ან $\dfrac{dt}{t(\ln t - 1)} = \dfrac{dx}{x}$.

ინტეგრირების შედეგად მივიღებთ: $\ln(\ln t - 1) = \ln x + \ln C_1$, ან $\ln t - 1 = C_1 x$, საიდანაც $t = \ell^{1+C_1 x}$; თუ დავუბრუნდებით $y$ ცვლადს , მაშინ მივიღებთ განტოლებას $y' = x\ell^{1+C_1 x}$ და შესაბამისად ინტეგრების შემდეგ გვექნება:

$$y = \int x\ell^{1+C_1 x} dx = \frac{1}{C_1} x\ell^{1+C_1 x} - \frac{1}{C_1^2} \ell^{1+C_1 x} + C_2 .$$

ახლა იგივე განტოლება ამოვხსნათ Maple-ში. (იხ. ნახ.10.27)

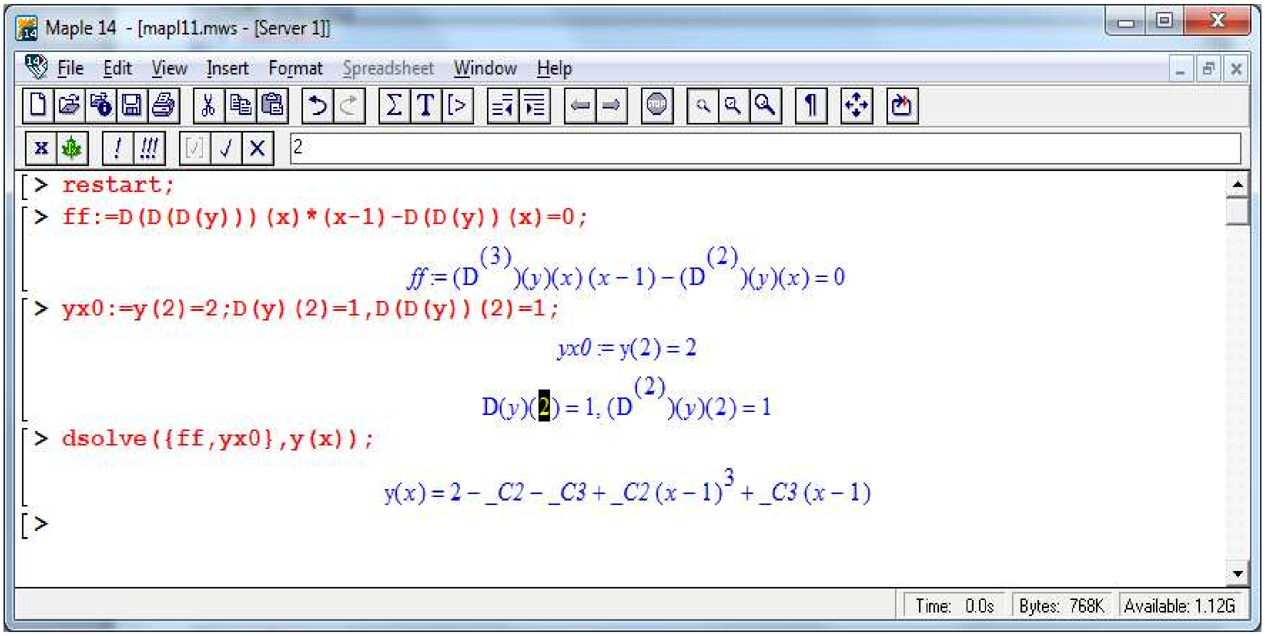



ნახ.10.27

ახლა განვიხილოთ შემდეგი განტოლება

; $y'''(x-1) - y'' = 0; y(2) = 2; y'(2) = 1; y''(2) = 1.$

განტოლება ამოვხსნათ Maple-ში. (იხ. ნახ.10.28)




ნახ.10.28

**ახლა ამოვხსნათ** $F(y, y', y'',..., y^{(n)}) = 0$ **ტიპის განტოლება,** ანუ განტოლება, რომელიც არ შეიცავს დამოუკიდებელ ცვლადს $x$ -ს. ასეთი ტიპის განტოლების განტოლებაშიც გვაქვს საშუალება დავწიოთ ხარისხი თუ შემოვიღებთ $y' = z$ აღნიშვნას, ხოლო ახალ არგუმენტად განვიხილოთ $y$ - ი. ამ შემთხვევაში $y'', y''',...$ გამოისახებიან ფორმულების მიხედვით (ისინი გამოიყვანებიან, რთული ფუნქციის დიფერენცირების წესის მიხედვით)

$y'' = z\dfrac{dz}{dy}, y''' = z\left[z\dfrac{d^2z}{d^2y} + \left(\dfrac{dz}{dy}\right)^2\right],...$ ამის შედეგად განტოლების რიგი შემცირდება ერთით. ახლა განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი $1 + y'^2 = yy''$

ამოხსნა:

დავუშვათ $y' = z, y'' = z\dfrac{dz}{dy}$ $\cdot$ განტოლება მიიღებს სახეს $1 + z^2 = yz\dfrac{dz}{dy}$; ეს არის $z$ -ის მიმართ პირველი რიგის განტოლება განცალებადი ცვლადებით $\dfrac{zdz}{1+z^2} = \dfrac{dy}{y}$;. ავიღოთ ინტეგრალი მივიღებთ: $\ln(1+z^2) = 2\ln y + 2\ln C_1; 1 + z^2 = C_1^2 y^2;\ z = \pm\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}.$

თუ დავუბრუნდებით საწყის ცვლადს y-ს, მივიღებთ:

$y' = \pm\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}$ , $\quad \dfrac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}} = \pm dx.$ $\quad \dfrac{1}{C_1}\ln(C_1 y + \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}) = \pm(x + C_2),$

ან

$y = \dfrac{1}{2C_1}(\ell^{\pm(x+C_2)C_1} + \ell^{\pm(x+C_2)C_1}) = \dfrac{1}{C_1} chC_1(x + C_2) = C_1^* ch\dfrac{x + C_2}{C_1^*}.$ ამ განტოლების Maple-ში ამოხსნა მოხდება ანალოგიურად ზეოთ განხილული მაგალითებისა იხ. ნახ.10.27,10.28.

სხვა ტიპის დიფერენციალური განტოლებების Maple-ში ამოხსნაც დაიყვანება ასეთივე სახეზე ამიტომ მათ დაწვრილებით ილუსტრაციაზე აღარ გავაჩერებთ ყურადღებას.

განვიხილოთ დიფერენციალურ განტოლებათა **სისტემების ამოხსნის** მაგალითები Maple-ში.

დიფერენციალურ განტოლებათა **ნორმალურ სისტემას** ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n), \end{cases}$$

სადაც $x_1, x_2, ..., x_n$ ცვლადები არიან $t$ ცვლადზე დამოკიდებული უცნობი ფუნქციები.

თუ ამ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაში შემავალი განტოლებების მარჯვენა მხარეში $x_1, x_2, ..., x_n$ ცვლადებზე დამოკიდებული ფინქციებინ არია წრფივები ამ სისტემას ეწოდება წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა. ზოგჯერ შესაძლებელია ნორმალურ განტოლებათა სისტემის ერთი n -ური რიგის დიფერენციალური განტოლების შეცვლით, რომელიც შეიცავს ერთ უცნობს. ეს შესაძლებელია ე.წ. გამორიცხვის მეთოდის გამოყენებით, რომელსაც აქ არ განვიხილავთ. ახლა განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითები. დავუშვათ გვინდა ამოვხსნათ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$$ შემდეგი საწყისი პირობებით: $(0) = 2, y(0) = 0.$

**ამოხსნა**. გავაწარმოოთ სისტემის პირველი განტოლება t-ს მიმართ, მივიღებთ: $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$ მიღებული განტოლებიდან თუ გამოვრიცხავთ $\frac{dy}{dt}$ -ს და y-ს , მაშინ მივიღებთ $\frac{d^2x}{dt^2} - 2x = 0.$ მის მახასიათებელ განტოლებას, რომელსაც აქვს $k^2 - 2 = 0$ სახე აქვს ორი ფესვი $k_{1,2} = \pm\sqrt{2}.$ შესაბამისად , ზოგადი ამონახსნი $x$ ცვლადისათვის ჩაიწერება შემდეგი სახით: $x = C_1\ell^{t\sqrt{2}} + C_2\ell^{-t\sqrt{2}}.$ ზოგადი ამონახსენი y -თვის მოიძებნება პირველი განტოლებიდან და იგი ტოლია $y = \frac{dx}{dt} - x = C_1(\sqrt{2}-1)\ell^{t\sqrt{2}} - C_2(\sqrt{2}+1)\ell^{-t\sqrt{2}}.$საწყისი პირობების გათვალისწინებით მოვძებნოთ თავისუფალი წევრების გამოთვლა $C_1 + C_2 = 2, \sqrt{2}(C_1 - C_2) - (C_1 + C_2) = 0.$საიდანაც გვაქვს $C_1 = \frac{\sqrt{2}+2}{2}, C_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ამის გათვალისწინებით საძიებელი კერძო ამონახსნებს აქვთ შემდეგი სახე :

$$x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)\ell^{t\sqrt{2}} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ell^{-t\sqrt{2}}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell^{t\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\ell^{-t\sqrt{2}}.$$

ახლა ამოვხსნათ შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{2x+3y} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{2x+3y} \end{cases}$$ შემდეგი საწყისი პირობებით: $0) = 1, y(0) = 2.$

**ამოხსნა.** შევადგინოთ პირველი ინტეგრირებადი კომბინაცია, რომელსაც მივიღებთ თუ გავყოფთ სისტემის პირველ განტოლებას მეორეზე, შედეგად მივიღებთ:

გვაქვს $\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y};\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y};\ln x=\ln y+\ln C_1,$ ე.ი. $x=C_1y.$

შევადგინოთ მეორე ინტეგრირებადი კომბინაცია. შევკრიბავთ რა, გაორმაგებულ პირველ და გასამმაგებულ მეორე განტოლებებს მივიღებთ:

$$2\frac{dx}{dt}+3\frac{dy}{dt}=1;\Rightarrow 2dx+3dy=dt\Rightarrow 2x+3y=t+C_2.$$

განტოლებათა მიღებული სისტემიდან:

$$\begin{cases} x=C_1y \\ 2x+3y=t+C_2 \end{cases} \Longrightarrow$$

ვპოულობთ სისტემის ზოგად ამონახსნებს

რაც ტოლია შემდეგი მნიშვნელობებისა

$$x=\frac{C_1(t+C_2)}{2C_1+3} \quad \text{და} \quad y=\frac{t+C_2}{2C_1+3}.$$

თუ გამოვიყენებთ საწყის პირობებს $x(0)=1,y(0)=2$ მაშინ გვექნება:

$$1=\frac{C_!C_2}{2C_1+3},2=\frac{C_2}{2C_1+3}\Rightarrow \qquad C_1=\frac{1}{2},C_2=8.$$

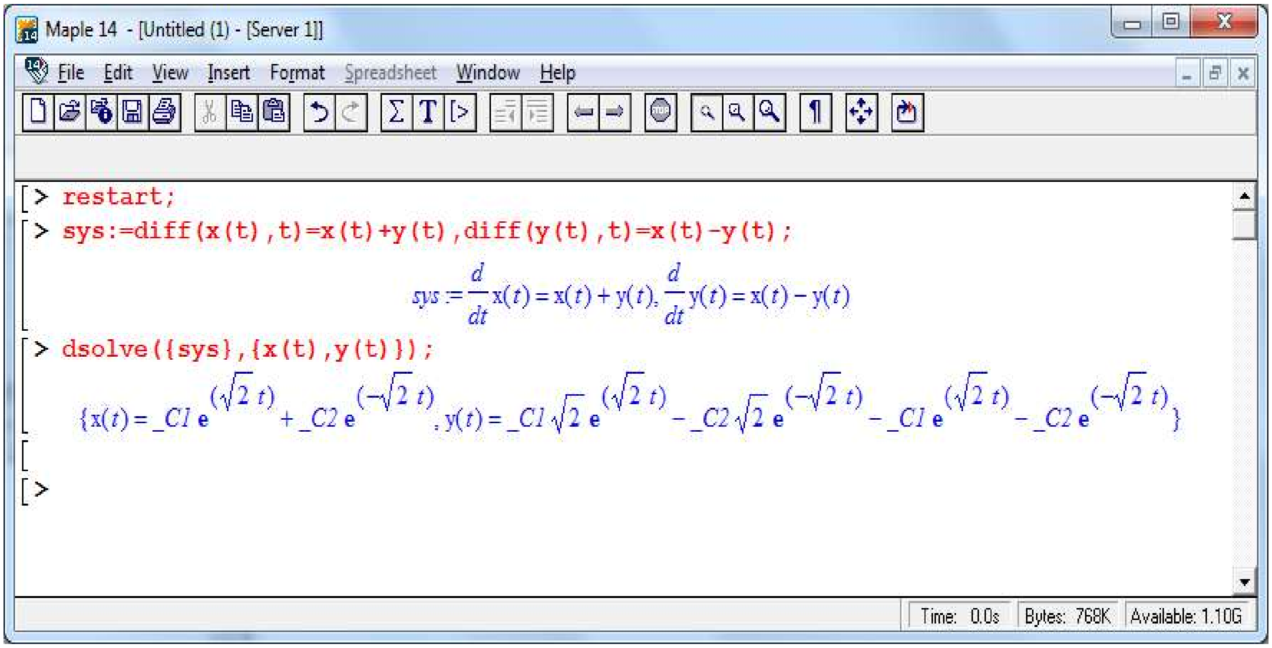
თუ ჩავსვავთ $C_1$ და $C_2$ -ის მოძებნილ ზოგად მნიშვნელობებს , მაშინ მივიღებთ ამონახსნებს, რომლებიც დააკმაყოფილებენ საწყის პირობებს:

$x=\frac{1}{8}t+1$ და $y=\frac{1}{4}t+2$. განვიხილეთ რა, რამოდენიმე მაგალითი ახლა შევასრულოთ მოცემული განტოლებების ამოხსნა პროგრამა Maple-ს გამოყენებით:

ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$$ საწყისი პირობებით: $x(0) = 2, y(0) = 0.$

ამოხნა Maple-ში მიიღებს სახეს(იხ. ნახ.10.29):



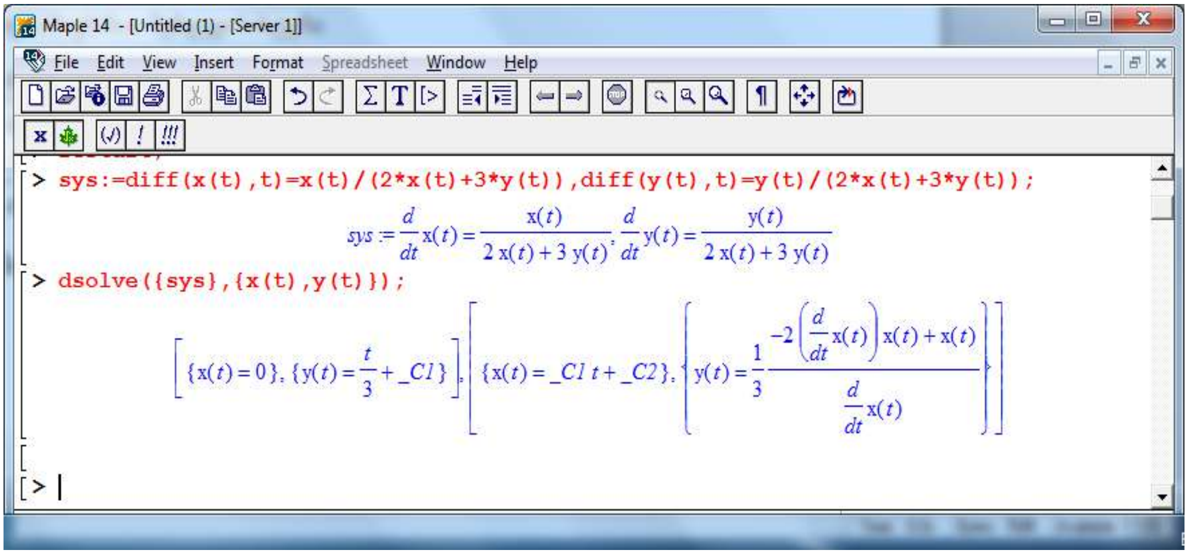

ნახ.10.29

ახლა ამოვხსნათ შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{2x+3y} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{2x+3y} \end{cases}$$ შემდეგი საწყისი პირობებით:

$x(0) = 1, y(0) = 2.$

ამოხნა Maple-ში მიიღებს სახეს(იხ. ნახ.10.30

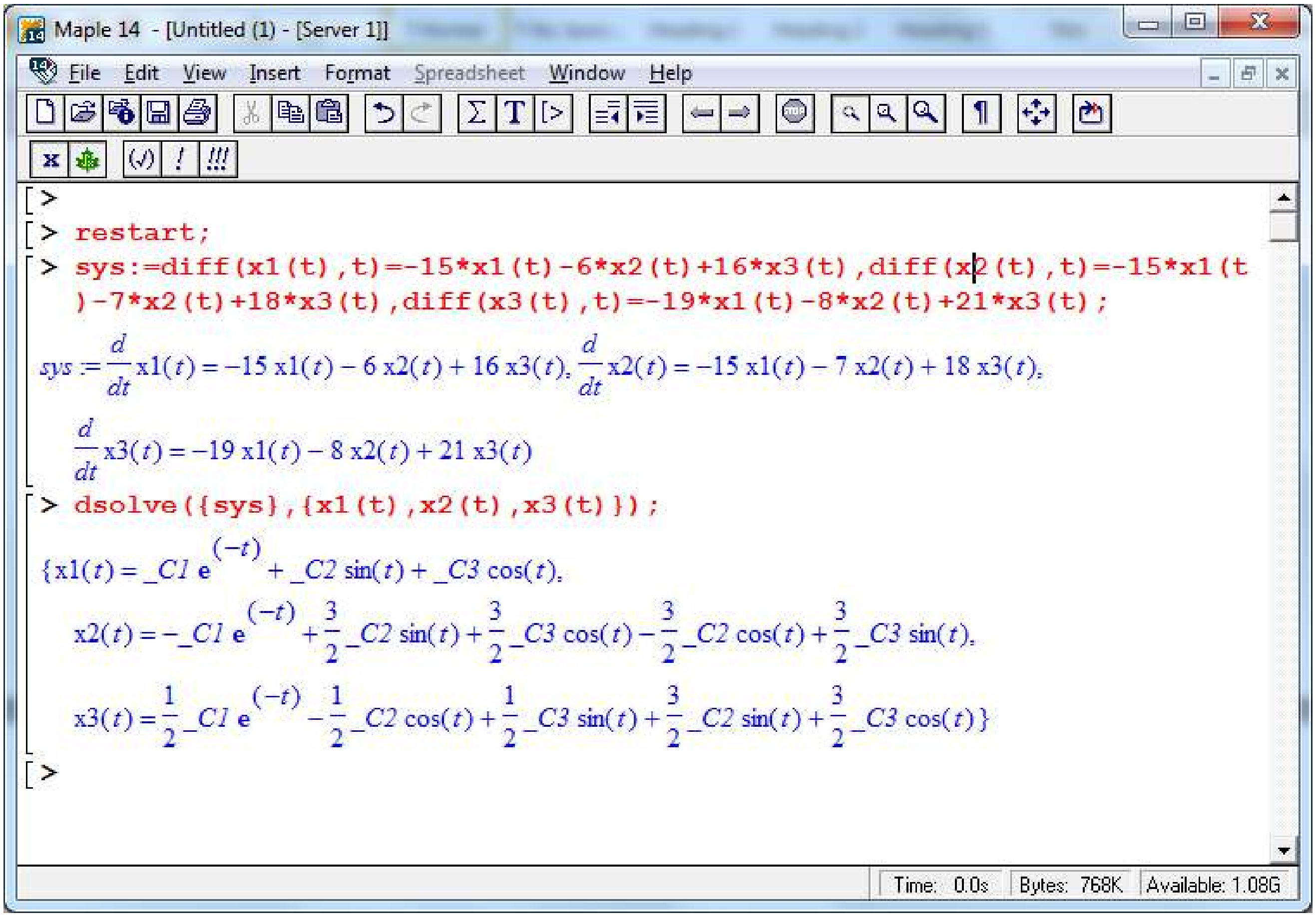



ნახ.10.30

ამოვხსნათ Maple-ში შემდეგი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -15x_1 - 6x_2 + 16x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -15x_1 - 7x_2 + 18x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -19x_1 - 8x_2 + 21x_3 \end{cases}$$

ამოხსნა მოცემულია ნახ.10.31-ზე


Maple 14 - [Untitled (1) - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
> restart;
> sys:=diff(x1(t),t)=-15*x1(t)-6*x2(t)+16*x3(t),diff(x2(t),t)=-15*x1(t)-7*x2(t)+18*x3(t),diff(x3(t),t)=-19*x1(t)-8*x2(t)+21*x3(t);
$sys := \frac{d}{dt}x1(t) = -15\,x1(t) - 6\,x2(t) + 16\,x3(t), \frac{d}{dt}x2(t) = -15\,x1(t) - 7\,x2(t) + 18\,x3(t), \frac{d}{dt}x3(t) = -19\,x1(t) - 8\,x2(t) + 21\,x3(t)$
> dsolve({sys},{x1(t),x2(t),x3(t)});
$\{x1(t) = \_C1\, e^{(-t)} + \_C2 \sin(t) + \_C3 \cos(t),$
$x2(t) = -\_C1\, e^{(-t)} + \frac{3}{2}\_C2 \sin(t) + \frac{3}{2}\_C3 \cos(t) - \frac{3}{2}\_C2 \cos(t) + \frac{3}{2}\_C3 \sin(t),$
$x3(t) = \frac{1}{2}\_C1\, e^{(-t)} - \frac{1}{2}\_C2 \cos(t) + \frac{1}{2}\_C3 \sin(t) + \frac{3}{2}\_C2 \sin(t) + \frac{3}{2}\_C3 \cos(t)\}$
Time: 0.0s
Bytes: 768K
Available: 1.08G

ნახ.10.31

## 11.1. განუსაზღვრელი ინტეგრალი

ინტეგრება არის გაწარმოების შებრუნებული მოქმედება. წარმოებულის გამოთვლისას ისმება შემდეგი ამოცანა: მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქცია, უნდა ვიპოვოთ მისი წარმოებული ანუ $F'(x) = f(x)$. ინტეგრებისას კი პირიქით, ამოცანა ისმება ასე: ვიპოვოთ ისეთი $F(x)$ ფუნქცია, რომლის წარმოებულიც არის მოცემული $f(x)$ ფუნქცია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოცემულია ფუნქცია $f(x) \equiv 1$. ვიპოვოთ ფუნქცია, რომლის წარმოებული არის ეს ფუნქცია.

ცხადია, რომ ერთ-ერთი ასეთი ფუნქციაა $F(x) = x$ მართლაც $F'(x) = (x)' = 1 = f(x).$ იმ $F(x)$ ფუნქციას, რომლის წარმოებულიც არის მოცემული $f(x)$ ფუნქცია, ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია. მაშასადამე $f(x) \equiv 1$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქციაა $F(x) = x$. შევნიშნოთ, რომ $f(x) \equiv 1$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია იქნება აგრეთვე ყველა შემდეგი სახის ფუნქცია $F(x) = x + C$ სადაც $C$ ნებისმიერი მუდმივია, რადგან $F'(x) = (x + C)' = 1.$

**თეორემა 1. თუ $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქციაა $F(x)$, მაშინ პირველყოფილი ფუნქცია იქნება აგრეთვე ყოველი $F(x) + C$ ფუნქცია, სადაც $C$ ნებისმიერი მუდმივია.**

მართლაც, თუ $F(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია, ე.ი. თუ $F'(x) = f(x)$, მაშინ

$$[F(x) + c]' = F'(x) = f(x).$$

ვინაიდან ერთი და იმავე ფუნქციის ორ ნებისმიერ პირველყოფილთა შორის სხაობა მუდმივია, ამიტომ $F(x) + C$ გამოსახულება იძლევა $f(x)$ ფუნქციის ყველა პირველყოფილის სიმრავლეს, როცა $C$ გაირბენს ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს.

ამრიგად, $F(x) + C$ გამოსახულება არის $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილის ზოგადი სახე. მას $f(x)$ ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი ეწოდება და აღინიშნება $\int f(x)dx$ სიმბოლოთი. ე. ი. გვაქვს $\int f(x)dx = F(x) + C$ . ამ ტოლობაში $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ინტეგრალქვეშა ფუნქცია, $f(x)dx$-ს ეწოდება ინტეგრალქვეშა გამოსახულება, ხოლო $C$-ს ინტეგრების მუდმივი. განუსაზღვრელი ინტეგრების განმარტებიდან გვაქვს, რომ

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

დიფერენციალთა ძირითადი ცხრილიდან გამომდინარეობს ინტეგრალთა ძირითადი ცხრილი:

$\int x^x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ ვინაიდან $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n;$

$\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C,$ ვინაიდან $(\ln(x) + C)' = \frac{1}{x};$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$ ვინაიდან $\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right)' = \frac{a^x \ln a}{a^x} = a^x;$

$\int e^x dx = e^x + C$ ვინაიდან $(e^x + C)' = e^x;$

$\int \sin x dx = -\cos x + C,$ ვინაიდან $(-\cos x + C)' = \sin x;$

$\int \cos x dx = \sin x + C,$ ვინაიდან $(\sin x + C)' = \cos x;$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C,$ ვინაიდან $(tgx + C)' = \frac{1}{\cos^2 x};$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C,$ ვინაიდან $(-ctgx + C)' = \frac{1}{\sin^2 x};$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_{2,}$ ვინაიდან

$$(\arcsin x + C_1) = (-\arccos x + C_2) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C_1 = -arcctgx + C_{2,}$ ვინაიდან

$$(arctgx + C_1)' = (-arcctgx + C_2) = \frac{1}{1+x^2}.$$

თეორემა 2. მუდმივი თანამამრავლი გამოდის ინტეგრალის ნიშნის გარეთ, ე.ი.

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx.$$

მართლაც, განუსაზღვრელი ინტეგრალის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\left(\int cf(x)dx\right)' = c\left(\int f(x)dx\right)' = cf(x).$$

ზემოთ მოცემული ცხრილისა და თეორემების გამოყენების საილუსტრაციოდ გამოვთვალოთ ინტეგრალები:

1. $\int 5x^2dx = 5\int x^2dx = 5\dfrac{x^3}{3} + C.$

2. $\int 3a^x dx = 3\int a^x dx = 3\dfrac{a^x}{\ln a} + C.$

3. $\int 3\sqrt{x}dx = 3\int x^{\frac{1}{2}}dx = 3\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 2x\sqrt{x} + C.$

**თეორემა 3. ალგებრული ჯამის ინტეგრალი ინტეგრალთა ალგებრული ჯამის ტოლია, ე.ი.**

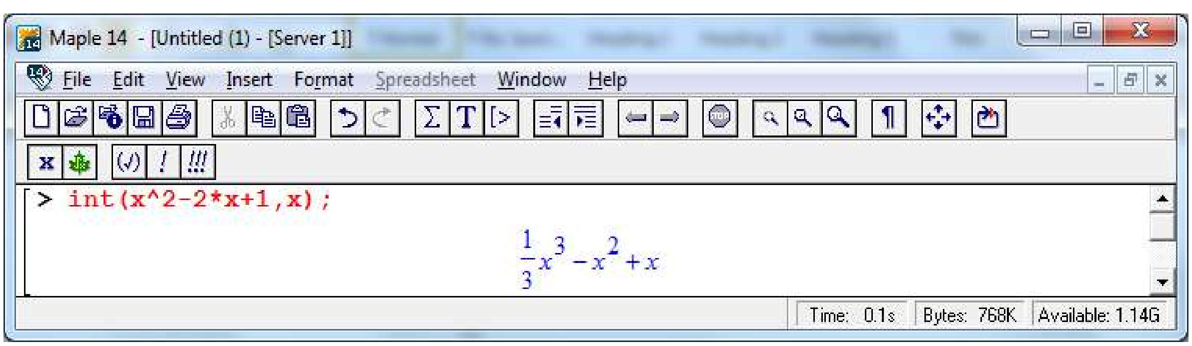
ორი შესაკრების შემთხვევაში გვექნება

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

მაგალითი. გამოვთვალოთ ინტეგრალი: $\int \left(x^2 - 2x + 1\right)dx$

$$\int \left(x^2 - 2x + 1\right)dx = \int x^2dx - 2\int xdx + \int dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + C.$$

პროგრამა Maple-ზე ეს ინტეგრალი გამოითვლება ასე:




ნახ. 11.1

## განუსაზღვრელი ინტეგრალი ლოგარითმული წარმოებულიდან

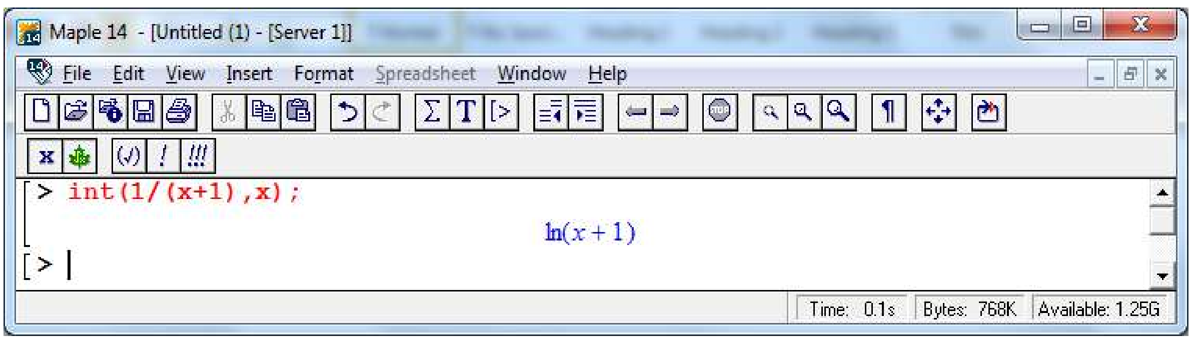
აღინიშნება $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ სიმბოლოთი

**მაგალითი 1.** გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int \frac{dx}{x+1}$,

ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მრიცხველი არის მნიშვნელის წარმოებული, ამიტომ

$$\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + C.$$

პროგრამა Maple-ზე ეს ინტეგრალი გამოითვლება ასე(იხ. ნახ.11.2):



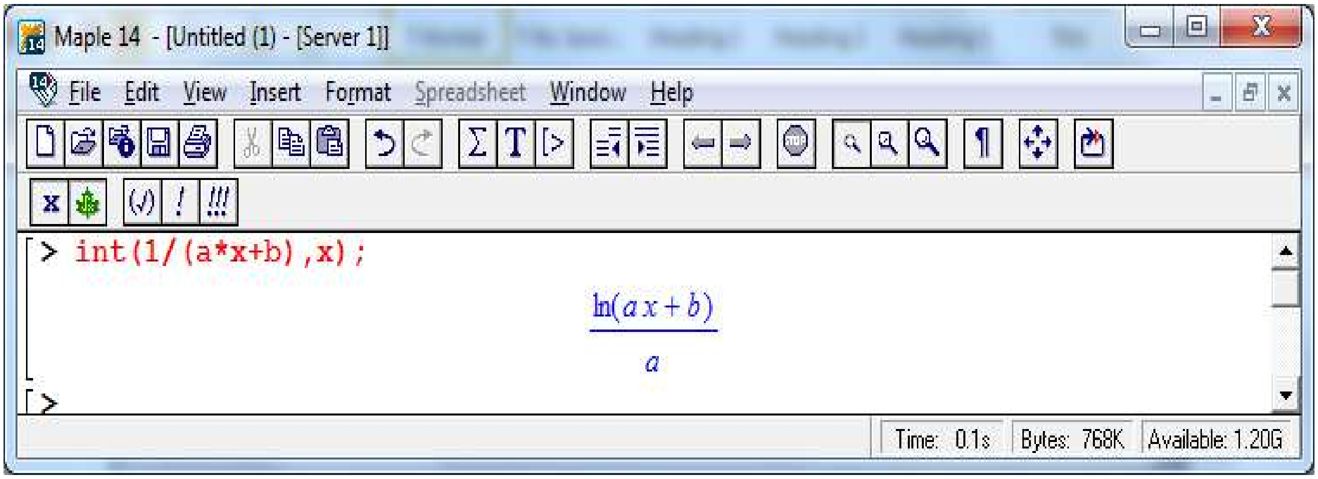

ნახ. 11.2

**მაგალითი 2.** გამოვთვალოთ ინტეგრალი: $\int \frac{dx}{ax+b}$

გარდვაქმნათ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ისე, რომ მისი მრიცხველი წარმოადგენდეს მნიშვნელის წარმოებულს; ამისათვის საკმარისია მრიცხველი და მნიშვნელი გავამრავლოთ $a$ მუდმივ რიცხვზე, მაშინ მივიღებთ

$$\int \frac{adx}{a(ax+b)} = \frac{1}{a}\int \frac{adx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

პროგრამა Maple-ზე ეს ინტეგრალი გამოითვლება ასე(იხ. ნახ.11.3):



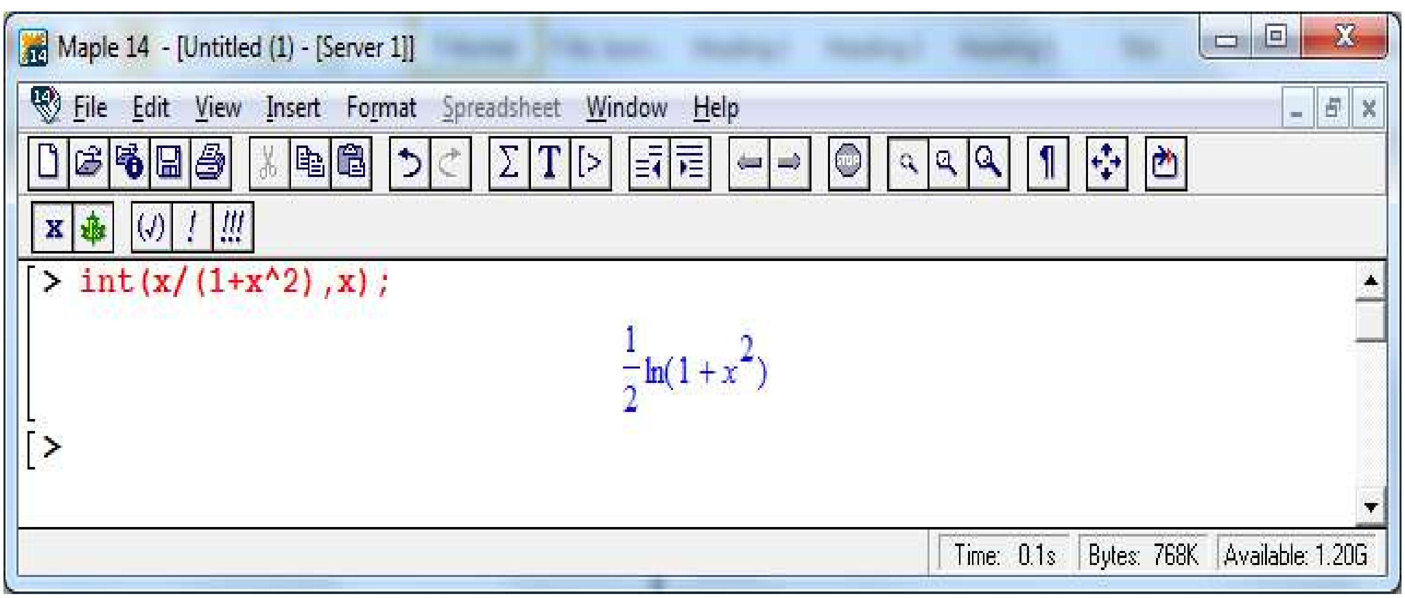

ნახ.11.3

**მაგალითი 3.** გამოვთვალოთ ინტეგრალი: $\int \frac{xdx}{1+x^2}$.

გვექნება

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \int \frac{2xdx}{2(1+x^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$ პროგრამა

Maple-ზე ეს ინტეგრალი გამოითვლება ასე(იხ. ნახ.11.4):

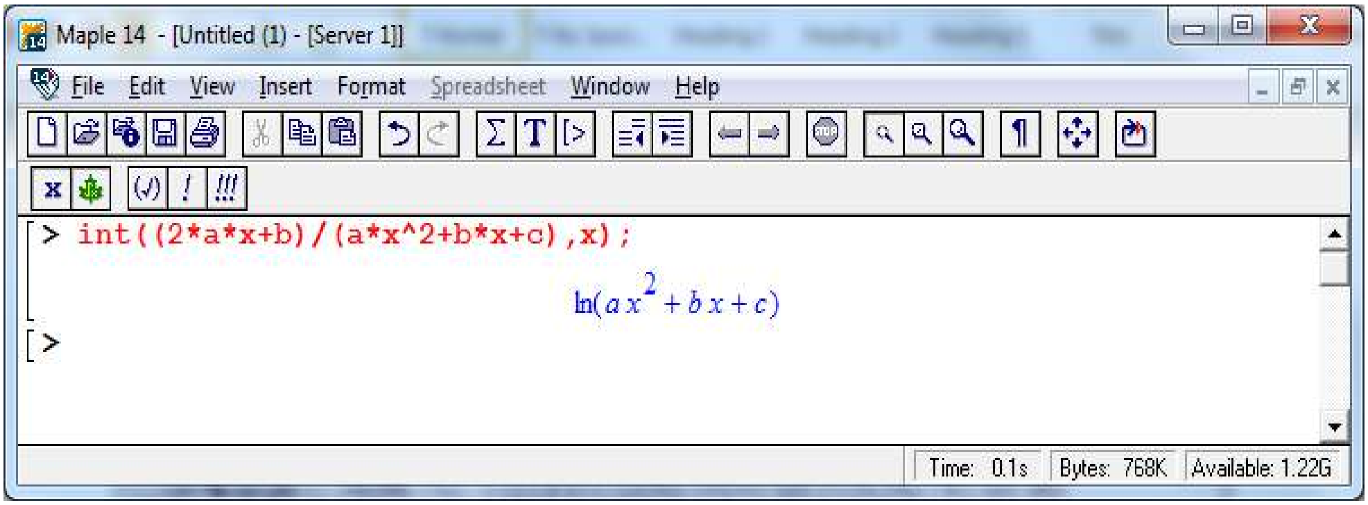



ნახ.11.4

**მაგალითი 4.** გამოვთვალოთ ინტეგრალი: $\int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}$.

$$\int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c} = \ln\left|ax^2+bx+c\right| + C.$$

პროგრამა Maple-ზე ეს ინტეგრალი გამოითვლება ასე(იხ. ნახ.11.5):



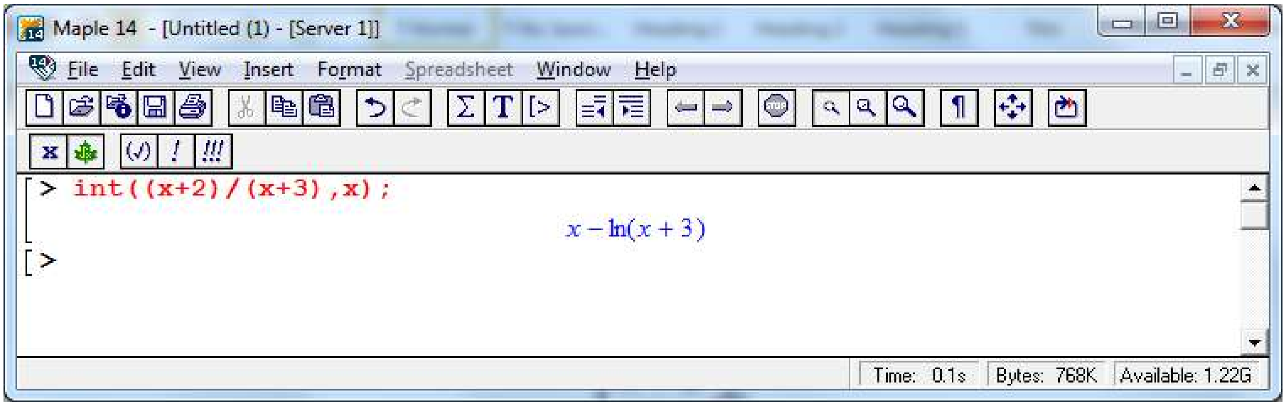

ნახ.11.5

**მაგალითი 5.** გამოვთვალოთ ინტეგრალი: $\int \frac{x+2}{x+3}dx.$

რადგან $\frac{x+2}{x+3} = \frac{x+3-1}{x+3} = 1 - \frac{1}{x+3}$, ამიტომ გვაქვს

$$\int \frac{x+2}{x+3}dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+3}\right)dx = \int dx - \int \frac{dx}{x+3} = x - \ln(x+3) + C.$$

პროგრამა Maple-ზე ეს ინტეგრალი გამოითვლება ასე(იხ. ნახ.11.6):




ნახ.11.6

### 11.2. ნაწილობითი ინტეგრება.

თუ $u(x)$ და $v(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია, მაშინ $(uv)' = u'v + v'u$, საიდანაც გვაქვს $uv' = (uv)'u'v.$ თუ მოვახდენთ ამ ტოლობის წევრობრივ ინტეგრებას, მაშინ გვექნება

$$\int uv' dx = \int (uv)' dx - \int u' v dx,$$

ვინაიდან
$$\int (uv)' dx = \int d(uv) = uv,$$

გვაქვს
$$\int uv' dx = uv - \int u' v dx + C. \qquad (1)$$

(1) ფორმულას ეწოდება ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა. მისი გამოყენებით შიძლება გამოვთვალოთ $\int uv' dx =,$ თუ ცნობილია, რომ უფრო მარტივი ხერხით არის შესაძლებელი $\int u' v \; dx$ -ის გამოთვლა.

**მაგალითი 1.** გამოვთვალოთ ინტეგრალი:

$$\int \ln x dx, \; x > 0.$$

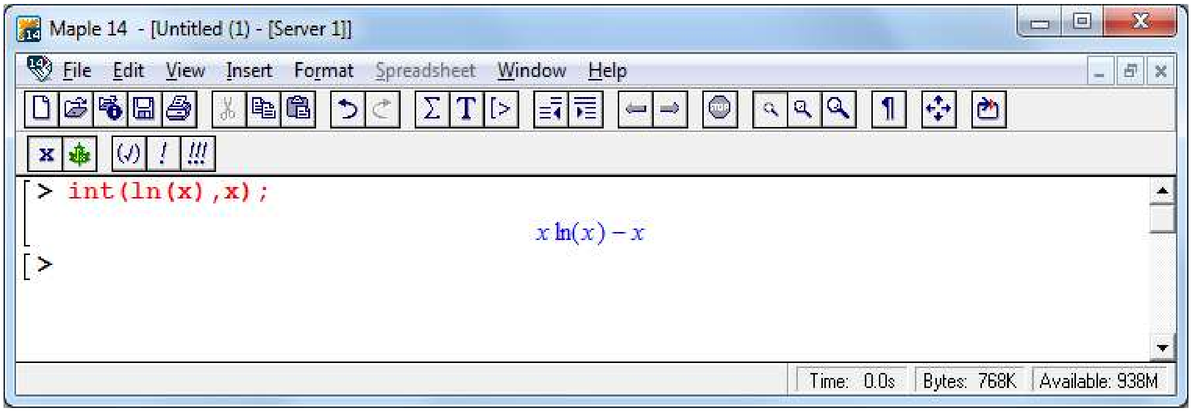
რადგან
$$\int \ln x dx = \int 1 * \ln x dx,$$

ამიტომ შემოვიტანოთ აღნიშვნები: $u = \ln x \;\; v' = 1.$

მაშინ მიღებული მნიშვნელობის (1) ფორმულაში შეტანა გვაძლევს

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx + C = x\ln x - \int dx + C = x\ln x - x + C.$$

პროგრამა Maple-ზე ეს ინტეგრალი გამოითვლება ასე(იხ. ნახ.11.7):




ნახ.11.7

**მაგალითი 2.** გამოვთვალოთ ინტეგრალი:

$$\int x\ln|x|dx,$$

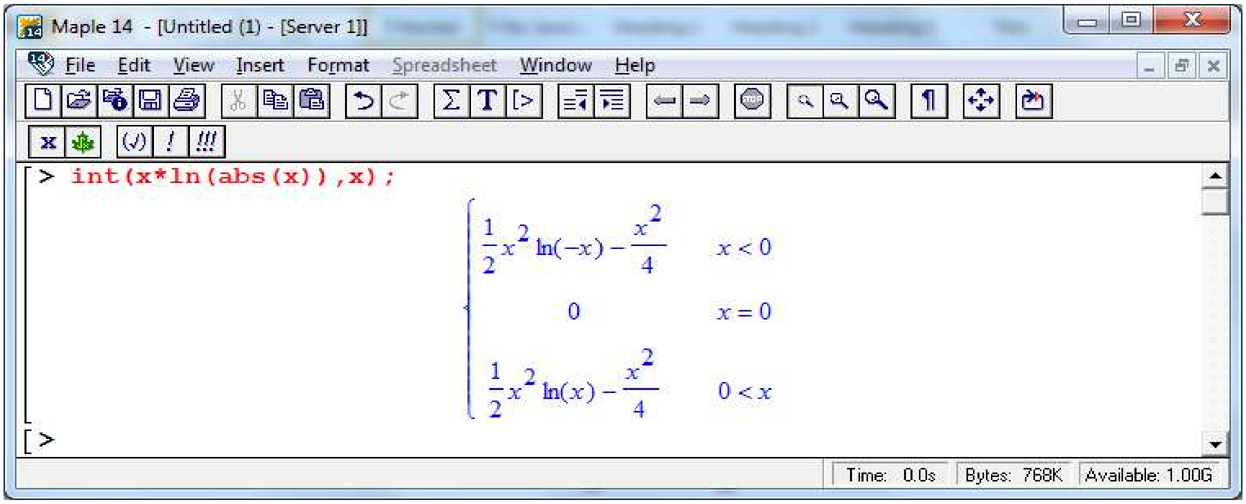
აღვნიშნოთ $u = \ln|x|, v^{'} = x,$ მაშინ

$$u^{'} = \frac{1}{x}, \; v = \frac{x^2}{2}$$

ამიტომ

$$\int x\ln|x|dx = \frac{x^2}{2}\ln|x| - \int \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}dx + C = \frac{x^2}{2}\ln|x| - \int \frac{x}{2}dx + C = \frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{x^2}{4} + C.$$

პროგრამა Maple-ზე ეს ინტეგრალი გამოითვლება ასე(იხ. ნახ.11.8):




ნახ.11.8

**მაგალითი 3.** გამოვთვალოთ ინტეგრალი:

$$\int x^2 \ell^x dx.$$

აღვნიშნოთ $u = x^2, v' = \ell^x$

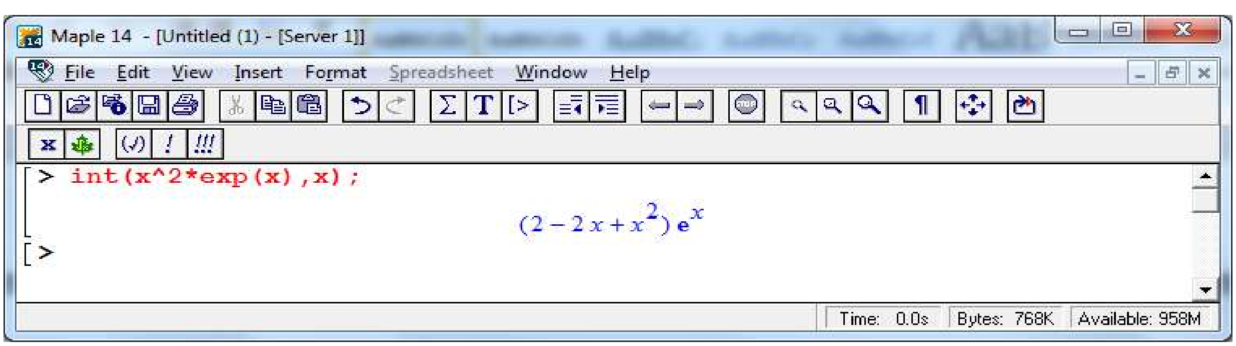
მაშინ, $u' = 2x \qquad v = \ell^x.$

ამიტომ $\int x^2 \ell^x dx = x^2 \ell^x - \int \ell^x 2x dx = x^2 \ell^x - \int 2\ell^x x dx.$

საბოლოოდ,

$$\int x^2 \ell^x dx = x^2 \ell^x - 2(x\ell^x - \ell^x) + C = x^2 \ell^x - 2x\ell^x + 2\ell^x + C = \ell^x (x^2 - 2x + 2) + C$$

პროგრამა Maple-ზე ეს ინტეგრალი გამოითვლება ასე(იხ. ნახ.11.9):




ნახ.11.9

## 11.3. ჩასმის ხერხი განუსაზღვრელ ინტეგრალში

ზოგიერთ შემთხვევაში შესაძლებელია $\int f(x)dx$ გამოთვლა გამარტივდეს ახალი დამოუკიდებელი $t$ ცვლადის შემოტანით, რომელიც $x$ ცვლადთან დაკავშირებულია სათანადოდ შერჩეული დამოკიდებულებით $x = g(t)$. (1)

თუ $x = g(t)$ წარმოებადი ფუნქციაა, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ იგივეობას:

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)]g^{'}(t)dt + C. \qquad (2)$$

მართლაც, რთული ფუნქციის გაწარმოების ფორმულა გვაძლევს

$$\left(\int f(x)dx\right)_t^{'} = \left(\int f(x)dx\right)_x^{'} \cdot x_t^{'} = f(x)g^{'}(x) = f[g(t)] \cdot g^{'}(t).$$

(1) ფორმულას ეწოდება ჩასმის (ცვლადის გარდაქმნის) ხერხით ინტეგრების ფორმულა. ხშირად, მისი გამოყენებით, შესაძლებელია მოცემული ინტეგრალის გამოთვლა $g(t)$ ფუნქციის სათანადო შერჩევით დაყვანილი იქნას უფრო მარტივი ინტეგრალის პოვნაზე.

**მაგალითი 1.** ვიპოვოთ ინტეგრალი:

$$\int (ax+b)^m dx, \quad (m \neq -1).$$

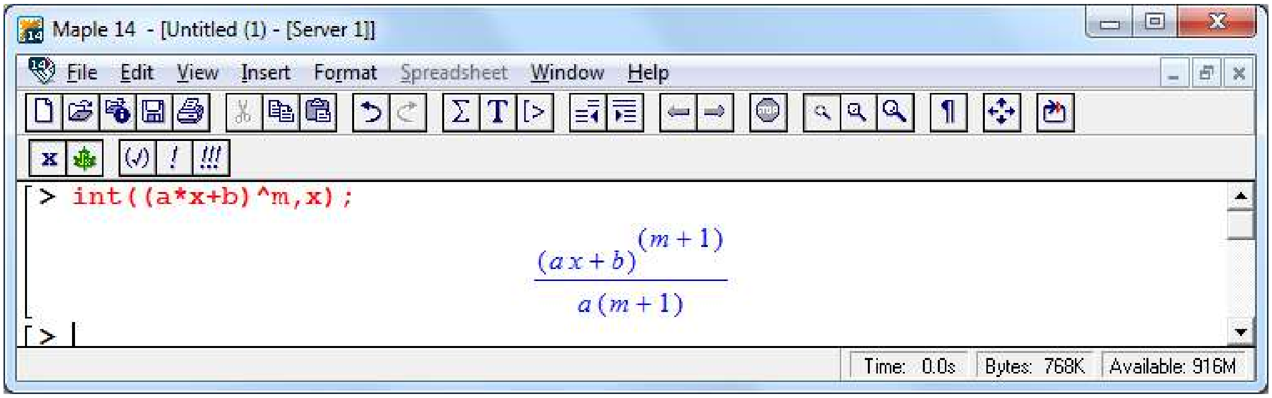
შემოვიტანოთ ახალი ცვლადი, $ax + b = t,$ საიდანაც

$$ax = t - b, \qquad x = \frac{t-b}{a} \qquad x^{'} = \frac{1}{a},$$

მაშინ (2) ფორმულა გვაძლევს

$$\int (ax+b)^m dx = \int t^m \frac{1}{a} dt = \frac{1}{a}\int t^m dt = \frac{1}{a}\frac{t^{m+1}}{m+1} + C = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{m+1}}{m+1} + C.$$

პროგრამა Maple-ზე ეს ინტეგრალი გამოითვლება ასე(იხ. ნახ.11.10):




ნახ.11.10

**მაგალითი 2.** ვიპოვოთ ინტეგრალი:

$$\int \frac{dx}{ax+b}.$$

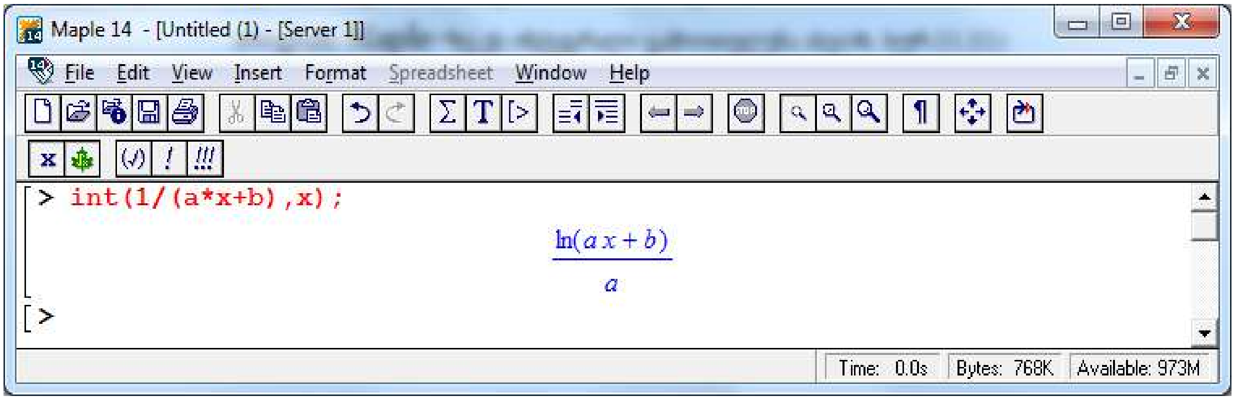
შემოვიტანოთ ახალი ცვლადი, $ax+b=t,$ საიდანაც

$$ax=t-b, \qquad x=\frac{t-b}{a} \qquad x'=\frac{1}{a};$$

მაშასადამე,

$$\int \frac{dx}{ax+b}=\int \frac{1}{t}\frac{1}{a}dt=\frac{1}{a}\int dt=\frac{1}{a}\ln|t|+C=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C.$$

პროგრამა Maple-ზე ეს ინტეგრალი გამოითვლება ასე(იხ. ნახ.11.11):




ნახ.11.11

**მაგალითი 3.** ვიპოვოთ ინტეგრალი:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}.$$

შემოვიტანოთ ახალი ცვლადი, $2x+1=t$ საიდანაც

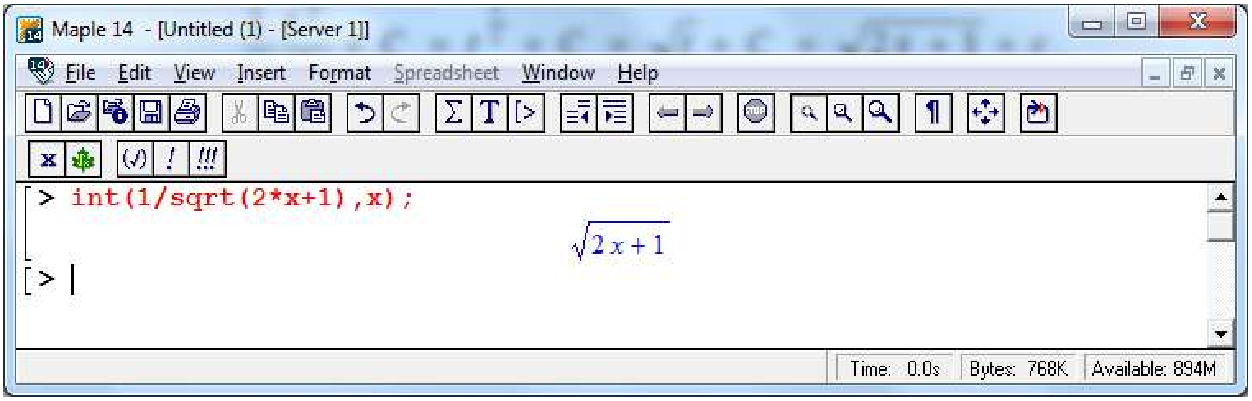
$$x=\frac{t-1}{2}, \qquad x^{'}=\frac{1}{2}.$$

მაშინ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}=\int \frac{dt}{2\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=t^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{t}+C=\sqrt{2x+1}+c.$$

პროგრამა Maple-ზე ეს ინტეგრალი გამოითვლება ასე(იხ. ნახ.11.12):




ნახ.11.12

**მაგალითი 4.** ვიპოვოთ ინტეგრალი:

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx \qquad (n \neq 1).$$

შემოვიტანოთ ახალი ცვლადი, $x-a=t,$ საიდანაც

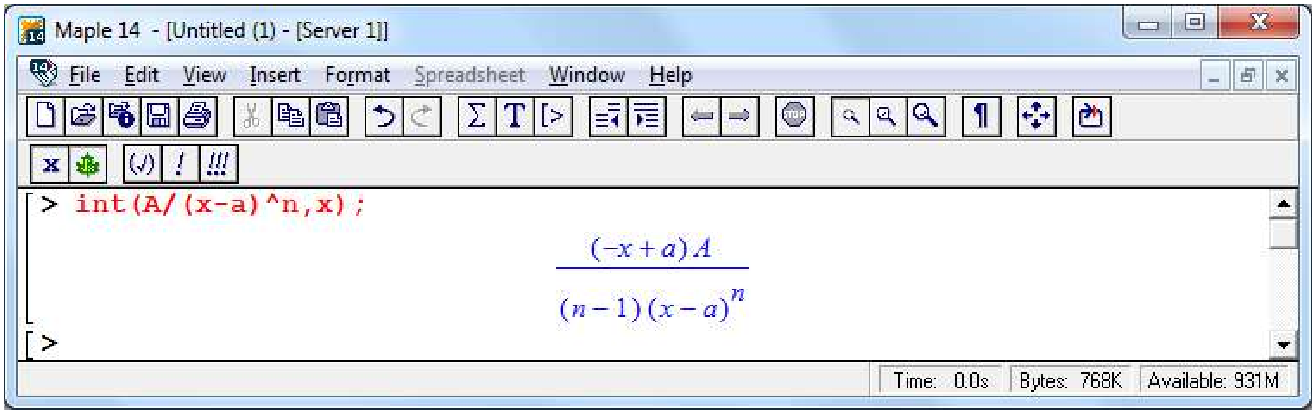
$$x = a + t, \qquad x' = 1.$$

ამიტომ

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int \frac{1}{(x-a)^n}dx = A\int \frac{1}{t^n}dt = A\int t^{-n}dt =$$

$$= A\frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{-A}{n-1}\cdot\frac{1}{t^{n-1}} + c = \frac{A}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C.$$

პროგრამა Maple-ზე ეს ინტეგრალი გამოითვლება ასე(იხ. ნახ.11.13):




ნახ.11.13

### 11.4. ზოგიერთი მნიშვნელოვანი ტიპის ინტეგრალები.

მნიშვნელოვანი ინტეგრალების ამოხსნა განვიხილოთ ცალკეული მაგალითების ფონზე:

**მაგალითი 1.** ვიპოვოთ ინტეგრალი:

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}.$$

რადგან ადგილი აქვს იგივეობას

$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$$

ამიტომ, არსებობს ორი ისეთი A და B რიცხვი, რომ $\frac{1}{x^2 - a^2}$ წილადი შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც ორი , ე.წ. მარტივი წილადების ჯამის სახით:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a},$$

თუ A და B რიცხვების საპოვნელად გავამარტივებთ უკანასკნელ იგივეობას, გვექნება:

$$1 \equiv A(x+a) + B(x-a) = Ax + Aa + Bx - Ba,$$

ანუ $1\equiv(A+B)x+Aa-Ba,$ უკანასკნელ იგივეობას ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა A+B=0 და Aa-Ba=1. ამგვარად, A და B რიცხვების გამოსათვლელლად უნდა ამოვხსნათ შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ Aa-Ba=1. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამოხსნა გვაძლევს $A=\dfrac{1}{2a},\qquad B=-\dfrac{1}{2a}$

მაშასადამე

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\frac{1}{x-a}-\frac{1}{2a}\frac{1}{x+a}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right).$$

ამიტომ

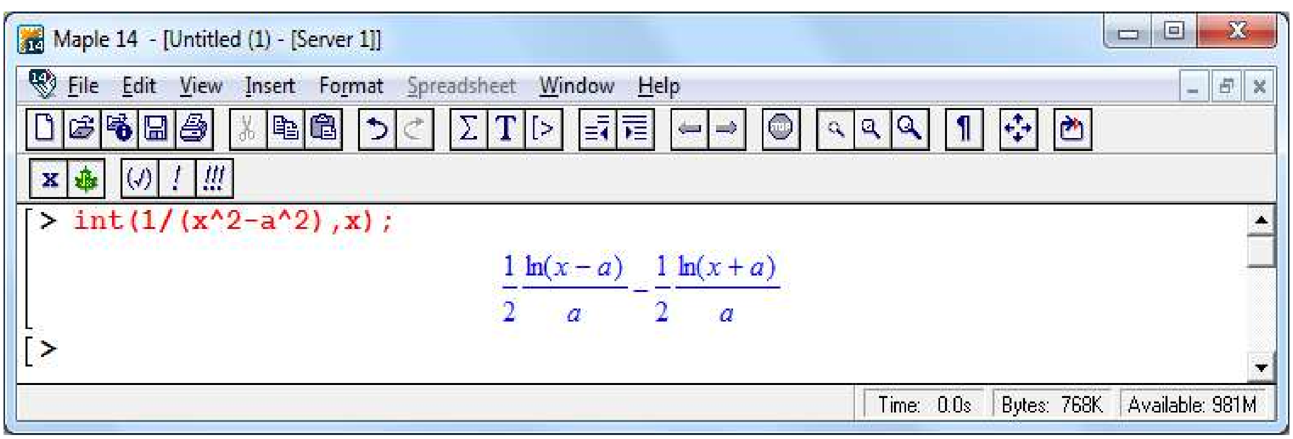
$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\int\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx=\frac{1}{2a}\int\frac{1}{x-a}dx-\frac{1}{2a}\int\frac{1}{x+a}dx=$$

$$=\frac{1}{2a}\left(\ln|x-a|-\ln|x+a|\right)+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}+C.\right|$$

საბოლოოდ გვაქვს

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

პროგრამა Maple-ზე ეს ინტეგრალი გამოითვლება ასე(იხ. ნახ.11.14):




ნახ.11.14

**მაგალითი 2.** ვიპოვოთ ინტეგრალი:

$$\int \frac{7x^2+1}{(x+1)(x-1)(x-3)}\,dx.$$

აქაც ანალოგიურად ვიქცევით: ვშლით ინტეგრალქვეშა ფუნქციას მარტივ წილადებად:

$$\frac{7x^2+1}{(x+1)(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-3},$$

რომლის გამარტივება გვაძლევს

$$7x^2+1 = A(x-1)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x-1) =$$

$$= (A+B+c)x^2 - (4A+2B)x + (3A-3B-C).$$

ამ იგივეობას ადგილიმ აქვს, თუ

$$\begin{cases} A+B+c=7 \\ 4A+2B=0 \\ 3A-3B-c=1. \end{cases}$$

მიღებული სისტემის ამოხსნა გვაძლევს

$$A=1, \quad B=-2, \quad C=8.$$

მაშასადამე,

$$\frac{7x^2+1}{(x+1)(x-1)(x-3)} = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{8}{x-3},$$

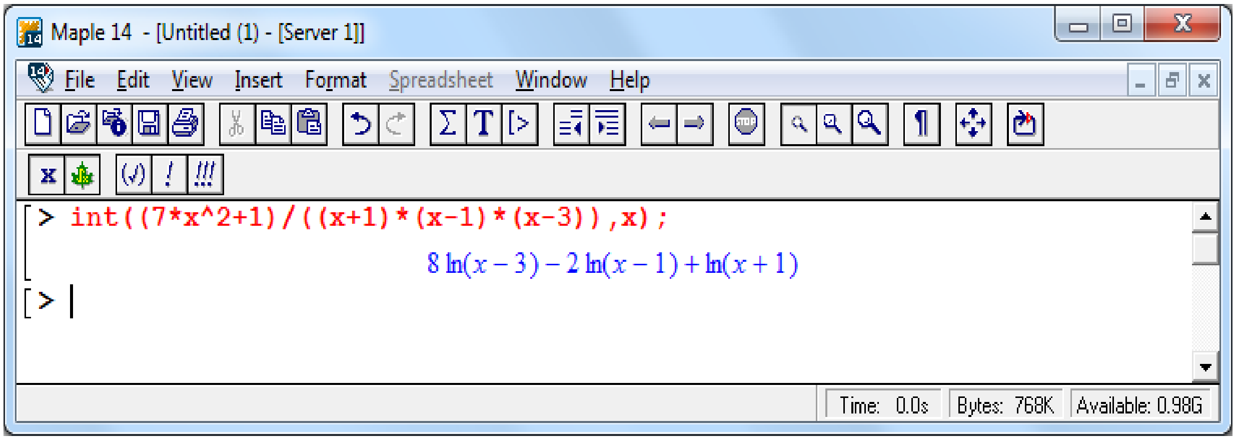
ამიტომ

$$\int \frac{7x^2+1}{(x+1)(x-1)(x-3)}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx - 2\int \frac{1}{x-1}\,dx + 8\int \frac{1}{x-3}\,dx =$$

$$= \ln|x+1| - 2\ln|x-1| + 8\ln|x-3| + C =$$

$$= \ln|x+1| - \ln(x-1)^2 + \ln(x-3)^8 + C = \ln\frac{|x+1|(x-3)^8}{(x-1)^2} + C.$$

პროგრამა Maple-ზე ეს ინტეგრალი გამოითვლება ასე(იხ. ნახ.11.15):




ნახ.11.15

**მაგალითი 3.** ვიპოვოთ ინტეგრალი:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2}.$$

შემოვიტანოთ ახალი $t$ ცვლადი, რომელიც $x$ ცვლადთან დაკავშირებულია ტოლობით (ე.ი. მოვახდინოთ ჩასმა)

$$x = at, \qquad \Rightarrow \qquad dx = adt$$

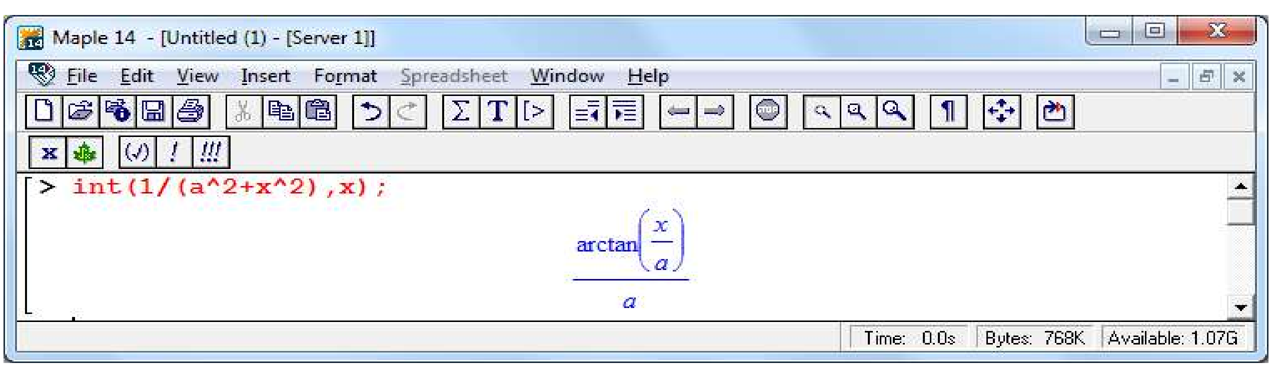
და მოცემული ინტეგრალი შემდეგ სახეს მიიღებს

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{dx}{a^2(1+t^2)} = \frac{1}{a^2} arctgt + C.$$

თუ ისევ დავუბრუნდებით $x$ ცვლადს, საბოლოოდ გვექნება

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2} arctg\frac{x}{a} + C.$$

პროგრამა Maple-ზე ეს ინტეგრალი გამოითვლება ასე(იხ. ნახ.11.16):




ნახ.11.16

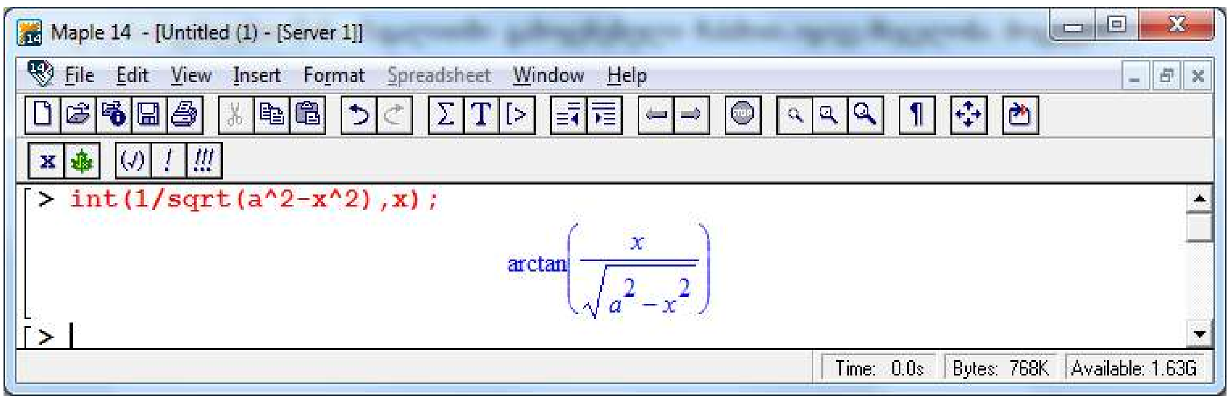
**მაგალითი 4.** ვიპოვოთ ინტეგრალი:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

თუ ვისარგებლებთ წინა მაგალითში გამოყენებული ჩასმით, იგივე მსჯელობა მოგვცემს

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

პროგრამა Maple-ზე ეს ინტეგრალი გამოითვლება ასე(იხ. ნახ.11.17):




ნახ.11.17

**მაგალითი 5.** გამოვთვალოთ ინტეგრალი:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}. \qquad (*)$$

გამოვიყენოთ ჩასმა

$$\sqrt{x^2 + a^2} = t - x$$

ამ ტოლობის კვადრატში აყვანა გვაძლევს

$$x^2 + a^2 = t^2 - 2tx + x^2,$$

$$x = \frac{t^2 - a^2}{2t}$$

საიდანაც

$$dx = \frac{t^2 + a^2}{2t^2}dt.$$

თუ $X$-ის მიღებულ მნიშვნელობას შევიტანთ (*) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$\sqrt{x^2 + a^2} = t - \frac{t^2 -}{2t} = \frac{t^2 + a^2}{2t}.$$

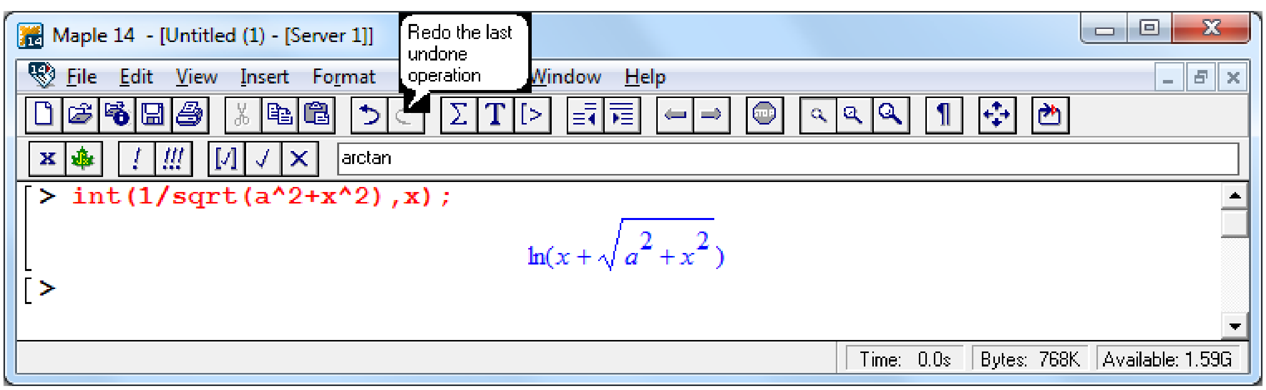
მაშასადამე

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{\frac{t^2 + a^2}{2t^2}}{\frac{t^2 + a^2}{2t}} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C.$$

თუ ახლა დავუბრუნდებით $X$ ცვლადს, მაშინ საბოლოოდ გვექნება:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C.$$

პროგრამა Maple-ზე ეს ინტეგრალი გამოითვლება ასე(იხ. ნახ.11.18):




ნახ.11.18

**მაგალითი 6.** გამოვთვალოთ ინტეგრალი:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

განვახორციელოთ ჩასმა

$$x = a \sin t\,,$$

საიდანაც გვაქვს

$$dx = a\cos t dt$$

მაშინ აღებული ინტეგრალი მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\int\sqrt{a^2 - x^2}dx = \int\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}a\cos tdt = \int a^2\cos^2 tdt =$$

$$= a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C$$

ვინაიდან

$$\sin t = \frac{x}{a}, \quad \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2}, \; t = \arcsin\frac{x}{a}$$

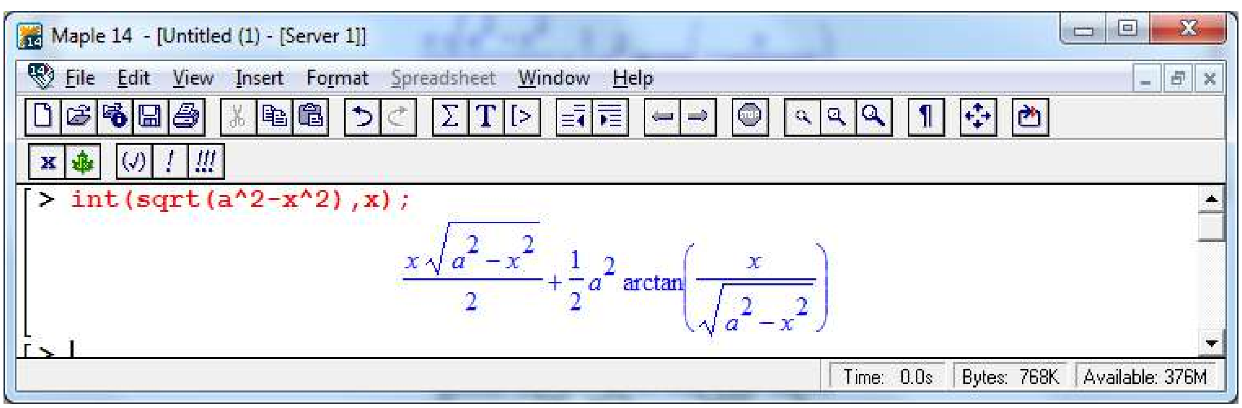
და

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\cdot\frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a},$$

საბოლოოდ კი გვექნება

$$\int\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

პროგრამა Maple-ზე ეს ინტეგრალი გამოითვლება ასე(იხ. ნახ.11.19):

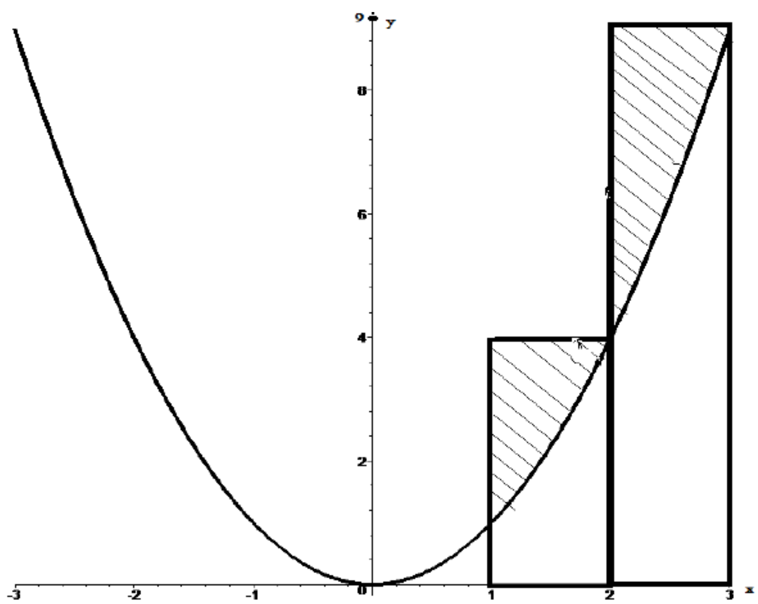



ნახ.11.19

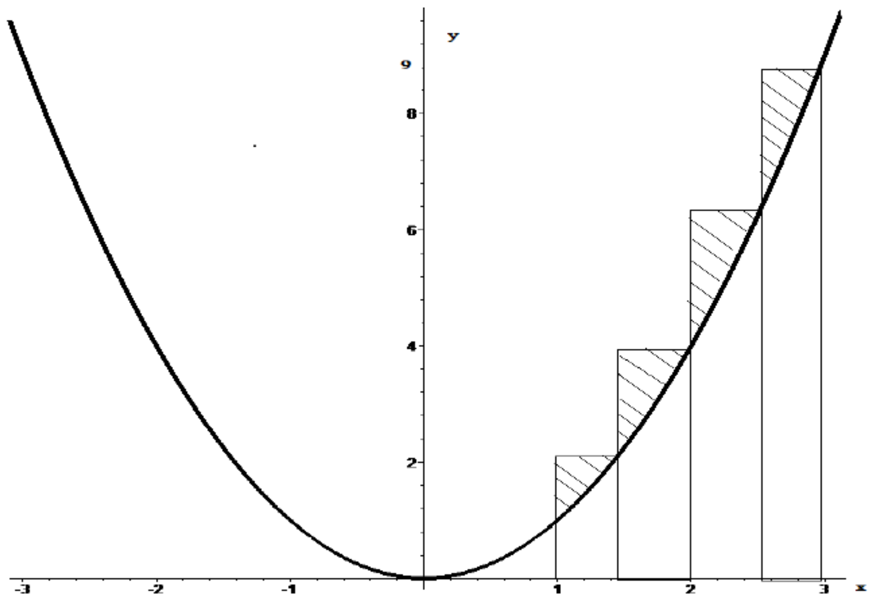
### 11.5. განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება.

წინასწარ განვიხილოთ მაგალითი. ავიღოთ ფუნქცია $y = x^2$ და გამოვთვალოთ იმ ნაკვთის ფართობი,რომელიც შემოსაზღვრულია $Ox$ ღერძითა $y = x^2$ პარაბოლით და ორდინატთა ღერძის პარალელური წრფეებით, რომელთა განტოლებებია $x = 1$ და $x = 3$ (ნახ. 1) $[1,3]$ სეგმენტი დავყოთ ორ ტოლ ნაწილად. მივიღებთ წერტილებს

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 2, \quad x_3 = 3 \text{ და } \Delta x_0 = \Delta x_1 = 1.$$




ნახ.11.1




ნახ.11.2.

მაშინ ჯამი,

$$f(x_1)\Delta x_0\, f(x_2)\Delta x_1 = f(2)\Delta x_0 + f(3)\Delta x_1 = f(2) + f(3) = 4 + 9 = 13$$

რომელიც გამოსახავს მიღებულ ქვესეგმენტზე აგებული ორი მართკუთხედის ფართობთა ჯამს, წარმოადგენს ზემოთ აღნიშნული ფართობის მიახლოებით მნიშვნელობას.

ახლა $[1,3]$ სეგმენტი დავყოთ ოთხ ტოლ ნაწილად (ნახ.2) ახალი დაყოფის წერტილებია

$$x_0 = 1, x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 2, x_3 = \frac{5}{2}, x_4 = 3.$$

ხოლო

$$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0,5$$

აქაც, წინა შემთხვევის ანალოგიურად, ჯამი

$$f(x_1)\Delta x_0 + f(x_2)\Delta x_1 + f(x_3)\Delta x_2 + f(x_4)\Delta x_3 = \left[ f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3) \right] \cdot 0,5 =$$

$$= (2,25 + 4 + 6,25 + 9) \cdot 0,5 = 10,75$$

რომელიც გამოხატავს მიღებულ ქვესეგმენტზე აგებული ოთხი მართკუთხედის ფართობთა ჯამს, ფარმოადგენს განსახილველი ნაკვთის ფართობის მეორე, უფრო ზუსტ მიახლოებით მნიშვნელობას.

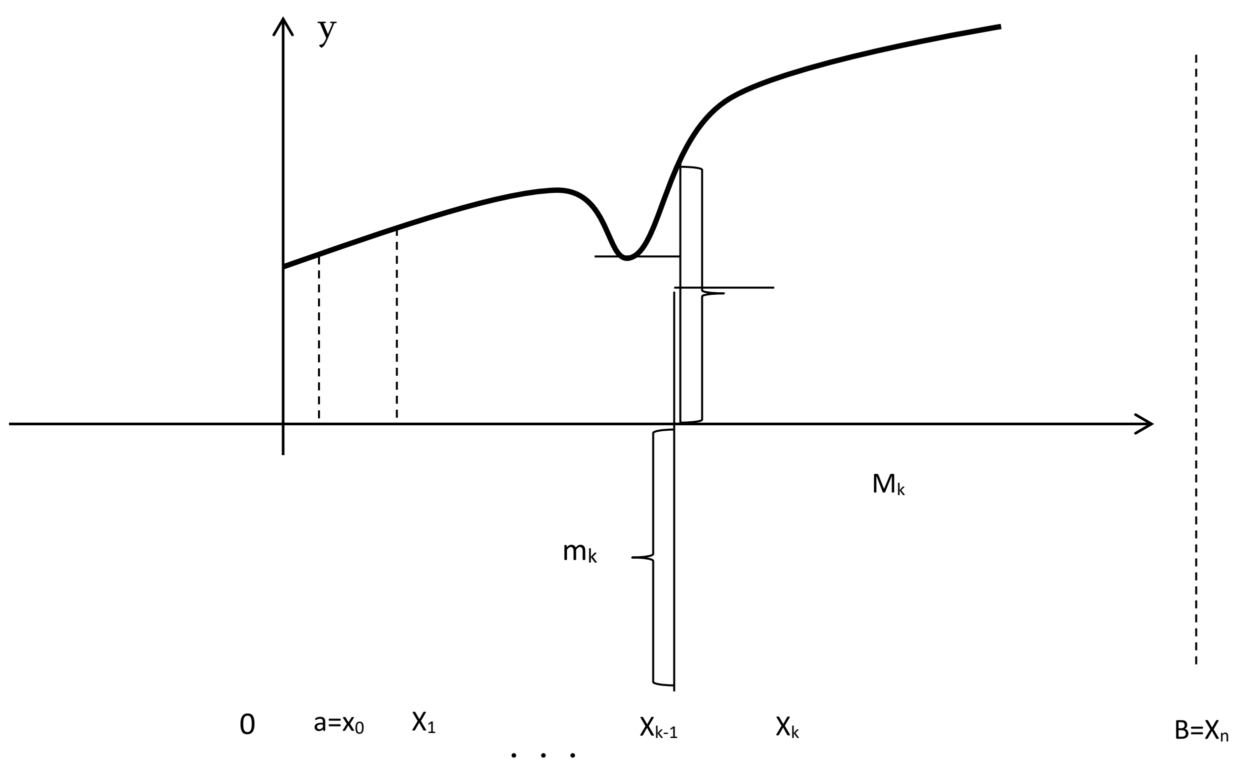
ცხადია რომ, რაც უფრო მეტია აღებული სეგმენტის თანაბრად დაყოფათა რიცხვი, მით უფრო ზუსტია საძიებელი ფართობის მიახლოებითი მნიშვნელობა. ამ გზით მიღებული მართკუთხედების ფართობთა ჯამის ზღვარი, როცა აღებული სეგმენტის დაყოფათა რიცხვი უსასრულოდ იზრდება, არის საძიებელი ფართობი.

განვაზოგადოთ ეს ამოცანა. ვთქვათ $y = f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$სეგმენტზე და ღებულობს მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს (ნახ.3.).

იმ ფიგურის ფართობი,რომელიც მოთავსებულია $Ox$ ღერძსა, $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკსა და $a$ და $b$ წერტილების ორდინატებს შორის აღვნიშნოთ $p(a,b)$ -თი. განვმარტოთ ეს ფართობი.

დავყოთ $[a,b]$სეგმენტი $n$ ნაწილად, ნებისმიერი $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ წერტილებით, სადაც

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$




ნახ.3

ამ შემთხვევაში მოცემული ნაკვთი დაიყოფა ელემენტარულ ზოლებად; აღვნიშნოთ $m_k$ –თი $[x_{k-1}, x_k]$ სემენტში $f(x)$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა, ხოლო $M_k$ -თი ამავე ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა. შესაბამისი ზოლის ფართობი იყოს $P(x_{k-1}, x_k)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ ცხადია, რომ $m_k -$ და $M_k$ სიდიდეები არსებობენ, რადგან სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციას გააჩნია თავისი უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები. $P(x_{k-1}, x_k)$ ზოლის ფართობი მეტია იმ მართკუთხედის ფართობზე, რომლის ფუძეა $x_k - x_{k-1}$ და სიმაღლეა $m_k$ და ნაკლებია იმ მართკუთხედის ფართობზე, რომლის ფუძეა $x_k - x_{k-1}$ (1) და სიმაღლე $M_k$ ე.ი.

$$(x_k - x_{k-1})m_k \le P(x_{k-1} - x_k) \le (x_k - x_{k-1})M_k .$$

თუ (1) უტოლობებში $k$ -ს მივცემთ 1,2,...,n მნიშვნელობებს - გვექნება

$$(x_1 - x_0)m_1 \le P(x_0, x_1) \le (x_1 - x_0)M_1 ,$$

$$(x_2 - x_1)m_2 \le P(x_1, x_2) \le (x_2 - x_1)M_2 ,$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$(x_k - x_{k-1})m_k \le P(x_{k-1}, x_k) \le (x_k - x_{k-1})M_k$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$(x_n - x_{n-1})m_n \le P(x_{n-1}, x_n) \le (x_n - x_{n-1})M_n .$$

ამ უტოლობათა წევრობრივი შეკრება გვაძლევს

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})m_k \le P(a,b) \le \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})M_k , \qquad (2)$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) m_k \qquad \text{(ქვედა ჯამების მიმდევრობა),} \qquad (3)$$

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) M_k \qquad \text{(ზედა ჯამების მიმდევრობა),} \qquad (4)$$

მაშინ , როგორიც არ უნდა იყოს $\varepsilon > 0,$ არსებობს ისეთი $N = N(\varepsilon),$ რომ

$$P_n - p_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})(M_k - m_k) \le \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\varepsilon = \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\varepsilon, \qquad (5)$$

$$n > N(\varepsilon).$$

თუ $n \to \infty,\ x_k - x_{k-1} \to 0\ (k = 1,2,\dots,n),$ მაშინ (5) ტოლობის ძალით გვაქვს

$$\lim (P_n - p_n) = 0 \qquad (6)$$

მტკიცდება, რომ ზემოთ მოყვანილ პირობებში არსებობს ზღვრები

$$\lim_{n\to\infty} p_n \quad \text{და} \quad \lim_{n\to\infty} P_n\,, \qquad (7)$$

რადგან

$$p_n < P(a,b) < P_n\,,$$

ამ უტოლობაში ზღვარზე გადასვლა, როცა $n \to \infty,$ (7) ტოლობის ძალით გვაძლევს

$$P(a,b) = \lim\ p_n = \lim\ P_n\,,$$

მიღებული ტოლობა ნიშნავს, რომ ქვედა და ზედა ჯამების მიმდევრობების ზღვარი არის განსახილველი ფიგურის ფართობი.

მოვიყვანოთ ახლა ინტეგრალური აღრიცხვის ძირითადი თეორემა.

**თეორემა 1.** $f(x)$ **ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი** $a$ **-დან** $b$ **-მდე ამავე წერტილში** $f(x)$ **ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქციის მნიშვნელობათა სხვაობის ტოლია .**

სხვაობა $F(b)-F(a)$ აღინიშნება სიმბოლოთი $\left[F(x)\right]_a^b$ ან $F(x)\Big|_a^b$.

ფორმულას

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

ახლა განვიხილოთ მაგალითები.

**მაგალითი 1.** გამოვთვალოთ ინტეგრალი:

$$\int_1^3 x^2 dx.$$

**ამოხსნა**

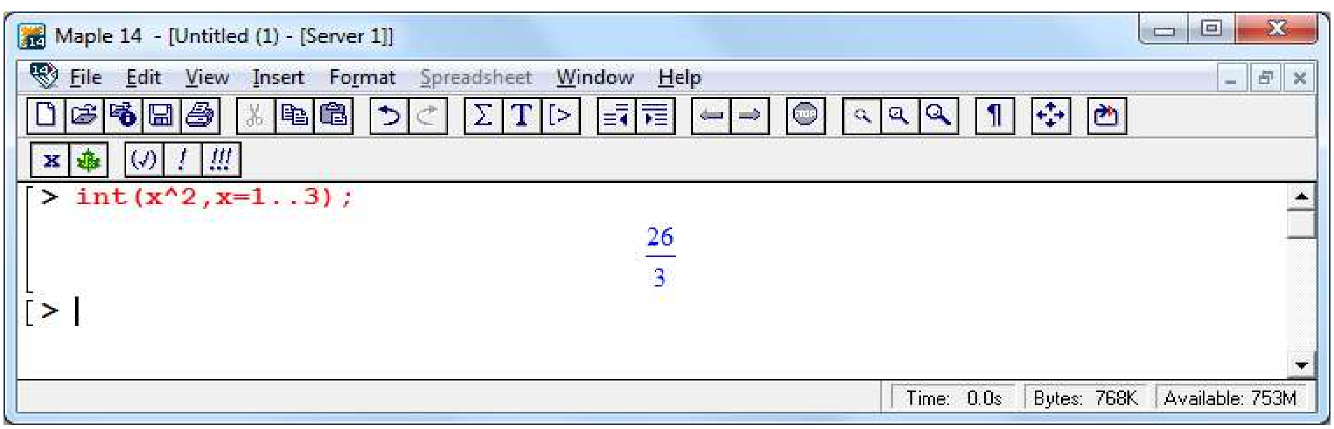
რადგან ინტეგრალქვეშა ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქციაა

$$F(x) = \frac{x^3}{3},$$

ამიტომ

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}.$$

ეს მაგალითი პროგრამა Maple-ში გამოითვლება ასე (იხ. ნახ.11.20):




ნახ.11.20

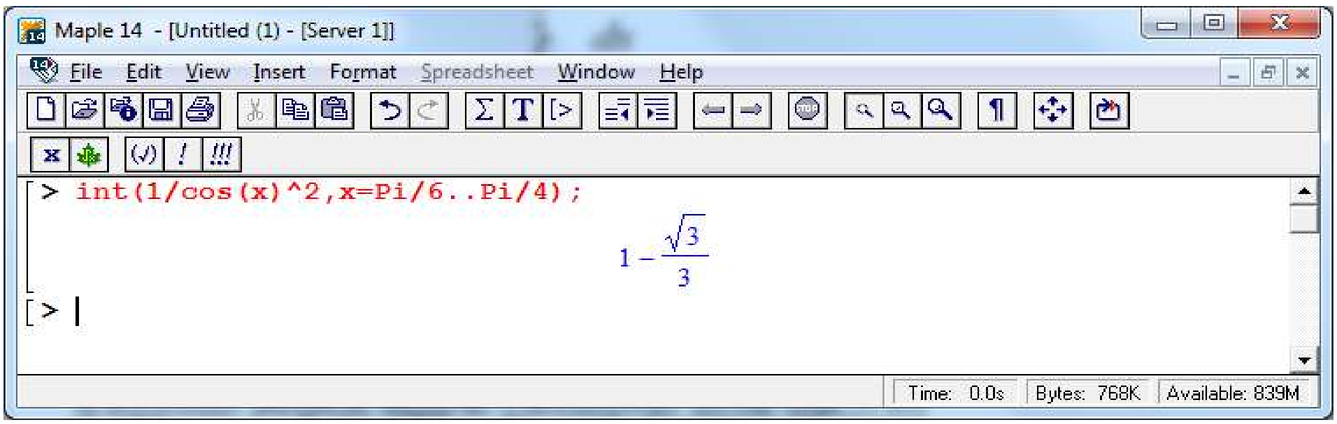
**მაგალითი 2.** გამოვთვალოთ ინტეგრალი:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

**ამოხსნა**

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = tg\frac{\pi}{4} - tg\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

ეს მაგალითი პროგრამა Maple-ში გამოითვლება ასე (იხ. ნახ.11.21):




ნახ.11.21

**მაგალითი 3.** გამოვთვალოთ ინტეგრალი:

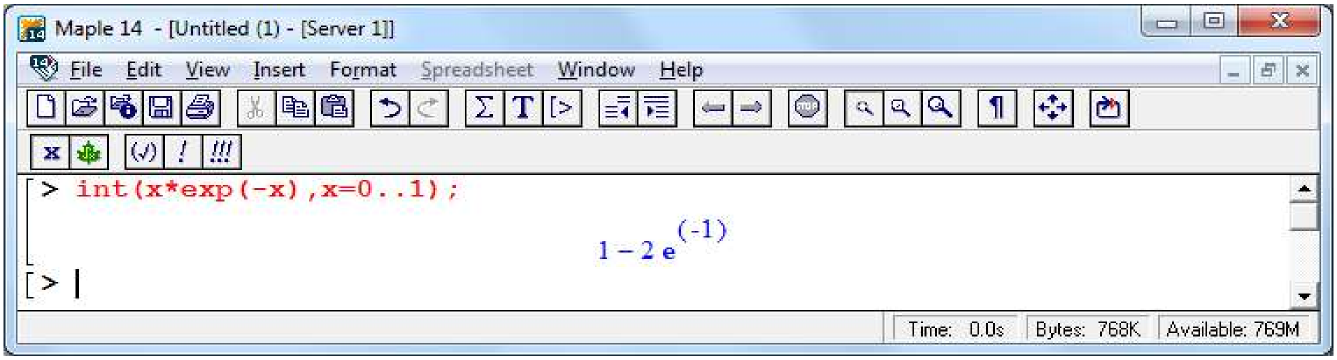
$$\int_{0}^{1} x\ell^{-x}dx.$$

**ამოხსნა**

გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების მეთოდი. დავუშვათ $u = x$, $dv = \ell^{-x}dx,$ საიდანაც $du = dx,\ v = -\ell^{-x}$. მაშინ მივიღებთ

$$\int_0^1 x\ell^{-x}dx = -x\ell^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 \ell^{-x}dx = -\ell^{-1} - \ell^{-x}\Big|_0^1 = -2\ell^{-1} + 1 = \frac{\ell - 2}{2}.$$

ეს მაგალითი პროგრამა Maple-ში გამოითვლება ასე (იხ. ნახ.11.22):




ნახ.11.22

**მაგალითი 4.** გამოვთვალოთ ინტეგრალი:

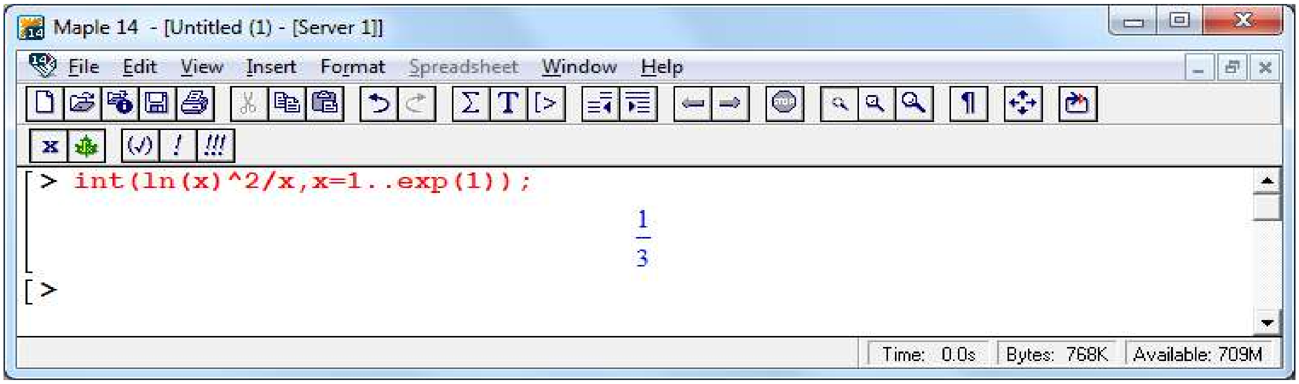
$$\int_1^{\ell} \frac{\ln^2 x}{x} dx.$$

**ამოხსნა**

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\ln x = t$; მაშინ $\frac{dx}{x} = dt$; თუ $x = 1$, მაშინ $t = 0$; თუ $x = \ell$, მაშინ $t = 1$ შესაბამისად გვაქვს:

$$\int_1^{\ell} \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(1^3 - 0^3\right) = \frac{1}{3}.$$

ეს მაგალითი პროგრამა Maple-ში გამოითვლება ასე (იხ. ნახ.11.23):




ნახ.11.23

**მაგალითი 5.** გამოვთვალოთ ინტეგრალი:

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

**ამოხსნა**

შემოვიღოთ აღნიშვნა $x = r\sin t$ ; მაშინ გვაქვს $dx = r\cos t dt$ ; თუ $x = 0$, მაშინ $t = 0$ ;

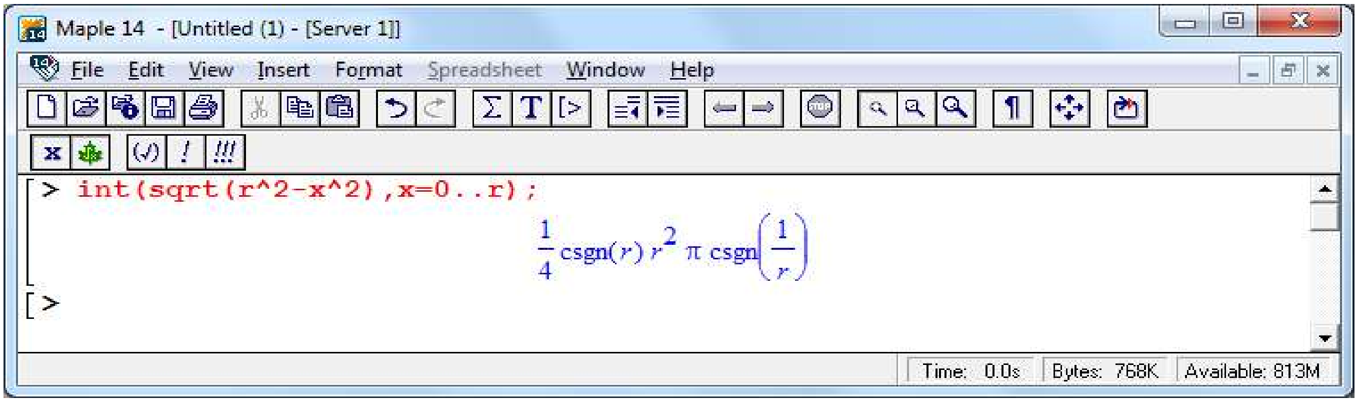
თუ $x = r$, მაშინ $t = \dfrac{\pi}{2}$ ; ამიტომ

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\, r\cos t dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} r^2 \left[ t + \frac{1}{2}\sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{r^2}{2}\left[ \left( \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin \pi \right) - \left( 0 + \frac{1}{2}\sin 0 \right) \right] = \frac{\pi r^2}{4}$$

ეს მაგალითი პროგრამა Maple-ში გამოითვლება ასე (იხ. ნახ.11.24):




ნახ.11.24

**მაგალითი 6.** გამოვთვალოთ ინტეგრალი:

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx.$$

**ამოხსნა**

ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ლუწია ამიტომ

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx.$$

გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი, შემოვიღოთ აღნიშვნა $u = x,$ და $dv = \frac{\sin xdx}{\cos^2 x}$; მაშინ $du = dx$, $v = \frac{1}{\cos x}$. აქედან გვაქვს

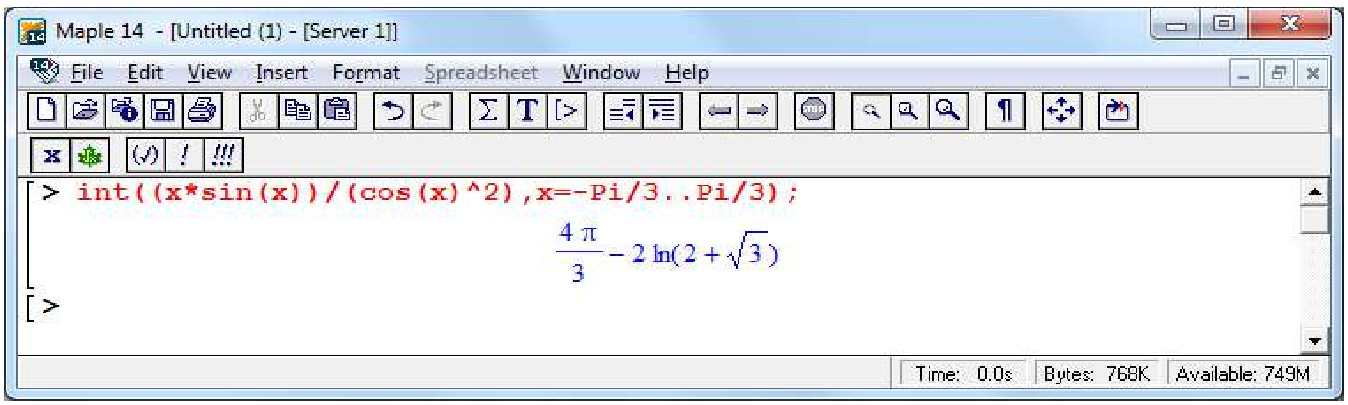
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx = \left.\frac{x}{\cos x}\right|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \frac{\pi}{3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} - \left.\ln tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \ln tg\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + \ln tg\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} - \ln tg\frac{5\pi}{12}.$$

რადგან თავიდან ჩვენ გვქონდა ფორმულა $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx.$

ამიტომ , საბოლოოდ გვაქვს $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx = 2\left(\frac{2\pi}{3} - \ln tg\frac{5\pi}{12}\right).$

ეს მაგალითი პროგრამა Maple-ში გამოითვლება ასე (იხ. ნახ.11.25):




ნახ.11.25

ახლა რამოდენიმე მაგალითი ამოვხსნათ მხოლოდ პროგრამა Maple-ში.

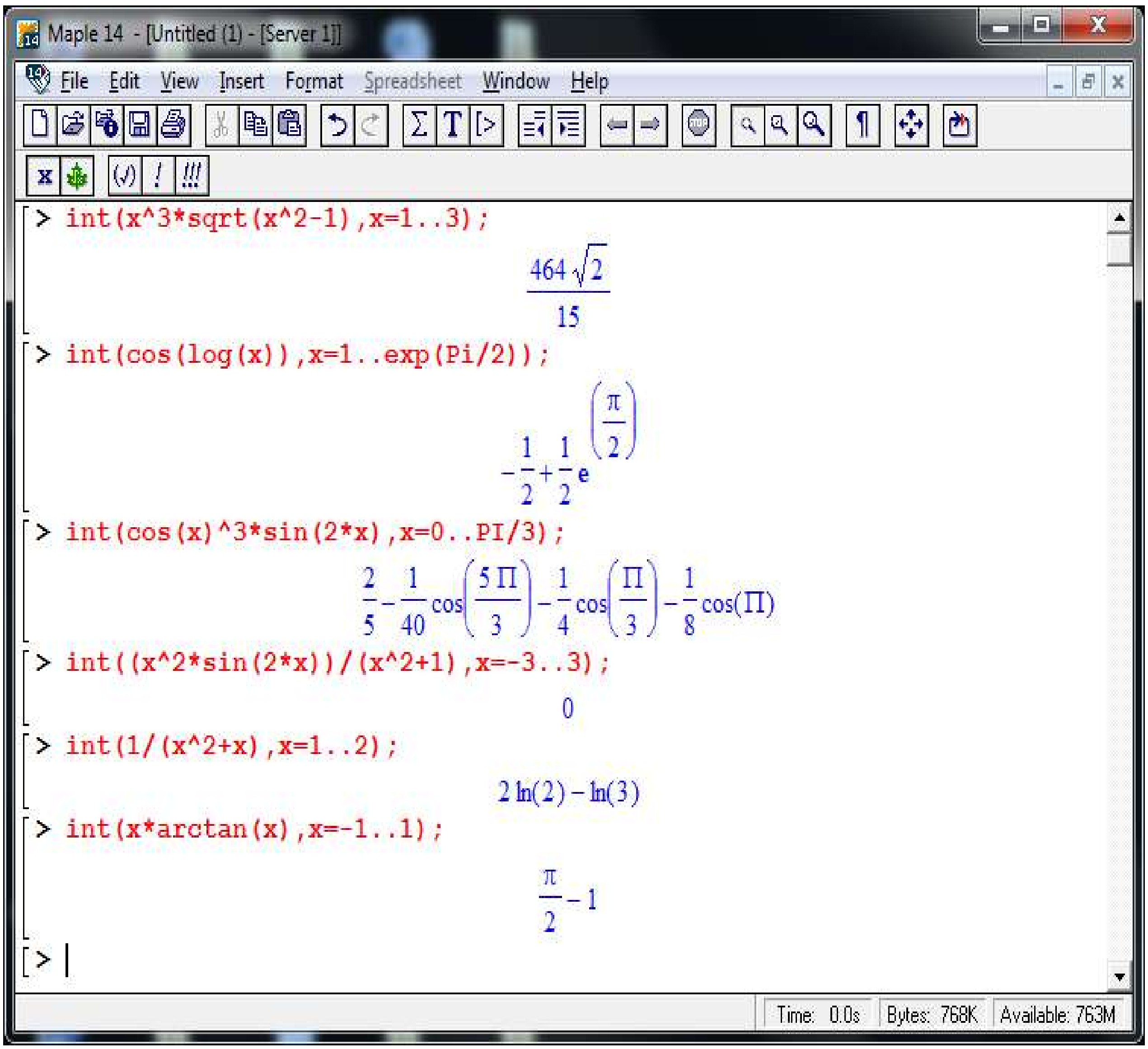
**ამოვხსნათ ინტეგრალები:**

**1.** $\int_{1}^{3} x^3\sqrt{x^2 - 1}dx.$ **2.** $\int_{1}^{\ell^{\frac{\pi}{2}}} \cos\ln xdx.$

**3.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x\sin 2xdx.$ **4.** $\int_{-3}^{3} \frac{x^2\sin 2x}{x^2 + 1}dx.$

**5.** $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^2+x}$.  **6.** $\int_{-1}^{1} xarctgxdx$

ახლა ეს ინტეგრალები ამოვხსნათ პროგრამა Maple-ში. ამოხსნის თანმიმდევრობა დავიცვათ დანომრვის გათვალისწინებით. (იხ. ნახ.11.26)




ნახ.11.26

## 11.1.ორჯერადი ინტეგრალი მართკუთხოვან კორდინატებში

ვთქვათ ფუნქცია $f(x,y)$ განსაზღვრულია $xOy$ სიბრტყის რაიმე შემოსაზღვრულ ჩაკეტილ D არეში. დავყოთ D არე ნებისმიერ n ელემენტარულ ქვეარეებად, რომელთა ფართობები შესაბამისად იქნება $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$, რომელთა დიამეტრები იქნება შესაბამისად $d_1, d_2, \ldots, d_n$, (ქვეარის დიამეტრი ეწოდება არის საზღვრებზე აღებულ წერტილთა შორის უდიდეს მანძილს). თითეულ ქვეარეში ავარჩიოთ ნებისმიერი $P_k(\xi_k, \eta_k)$, გავამრავლოთ მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობა $P_k$ წერტილში ამ არის ფართობზე.ფუნქციის ინტეგრალური ჯამი D არეზე ეწოდება შემდეგი სახის ჯამს:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_n = f(\xi_1, \eta_1)\Delta\sigma_1 + f(\xi_2, \eta_2)\Delta\sigma_2 + \ldots + f(\xi_n, \eta_n)\Delta\sigma_n.$$

$f(x,y)$ ფუნქციის ორჯერადი ინტეგრალი D არეზე ეწოდება ზემოთ მოცემული ჯამის ზღვარს იმ პირობით, რომ ელემენტერული ქვეარეების დიამეტრებს შორის მაქსიმალური მიისწრაფის ნოლისკენ:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_n.$$

თუ ფუნქცია $f(x,y)$ არის უწყვეტი D ჩაკეტილ არეზე, მაშინ ინტეგრალური ჯამის ზღვარი არსებობს და ის არ არის დამოკიდებული D არის ელემენტარულ ქვეარეებად დაყოფის სახეზე და $P_k$ წერტილის შერჩევაზე (ორჯერადი ინტეგრალის ა რ ს ე ბ ო ბ ი ს თ ე ო რ ე მ ა).

თუ $f(x,y) > 0$ ჩაკეტილ D არეში, მაშინ $\iint_D f(x,y)d\sigma$ ტოლია იმ **ცილინდრული სხეულის სხეულის მოცულობისა**, რომელიც შემოსაზღვრულია ზემოდან $z = f(x,y)$, გვერდიდან ცილინდრული ზედაპირით, რომელიც პარალელურია Oz , ხოლო ქვემოდან $xOy$ სიბრტყის D არით.

ქვემოთ განვიხილოთ **ორჯერადი ინტეგრალის ძირითადი თვისებები**

$1^0$. $$\iint_D [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]d\sigma = \iint_D f_1(x,y)d\sigma + \iint_D f_2(x,y)d\sigma.$$

$2^0$. $$\iint_D cf(x,y)d\sigma = c\iint_D f(x,y)d\sigma,$$ სადაც $c$ - მუდმივი სიდიდეა

$3^0$. თუ ინტეგრირების D არე გაყოფილია ორ $D_1$ და $D_2$ არეებად მაშინ გვაქვს

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$

დეკარტის კორდინატებში ორჯერადი ინტეგრალი ჩვეულებრივად გამოისახება შემდეგნაირად

**ორჯერადი ინტეგრალის გამოთვლის წესები**

ცნობილია ორი ძირითადი წესი ინტეგრირების არესთან მიმართებაში

1. ინტეგრირების D არე მარცხნიდან და მარჯვნიდან შემოსაზღვრულია $x = a$ და $x = b$ წრფეებით $(a < b)$, ხოლო ქვემოდან და ზემოდან - უწყვეტი $y = \varphi_1(x)$ და $y = \varphi_2(x)$ ფუნქციებით $[\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)]$, რომელთაგან თითოეული მათგანი გადაიკვეთება ვერტიკალურ წრფესთან მხოლოდ ერთ წერტილში (იხ. ნახ.1)

ასეთი არისათვის ორჯერადი ინტეგრალი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy,$$

ამასთან ჯერ გამოითვლება $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ ინტეგრალი სადაც $x$ ითვლება მუდმივად.

2. ინტეგრირების D არე შემოსაზღვრულია ქვემოდან და ზემოდან $y = c$ და $y = d$ $(c < d)$ წრფეებით, ხოლო მარცხნიდან და მარჯვნიდან $x = \psi_1(y)$ და

$x \quad \psi_2(y) \quad [\psi_1(x) \leq \psi_2(x)]$ მრუდებით, რომელთაგან თითოეული გადაიკვეთებიან ჰ( ოზონტალურ წრფეებთან მხოლოდ ერთ წერტილში

ამ არისთვის ორჯერადი ინტეგრალი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx,$$

ამასთან გავითვალისწინოთ, რომ ჯერ გამოითვლება $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx,$ ინტეგრალი სადაც y ცვლადი განიხილება, როგორც მუდმივი. მოცემული ფორმულების მარჯვენა მხარეები იწოდებიან ორჯერად (ან განმეორებად) ინტეგრალებად. უფრო ზოგად შემთხვევებში ინტეგრირების არე, მისი დანაწილების გზით მიიყვანება ძირითად სახემდე.

**მაგალითი 1.** გამოვთვალოთ შემდეგი ორჯერადი ინტეგრალი $\iint_D x \ln y dxdy$

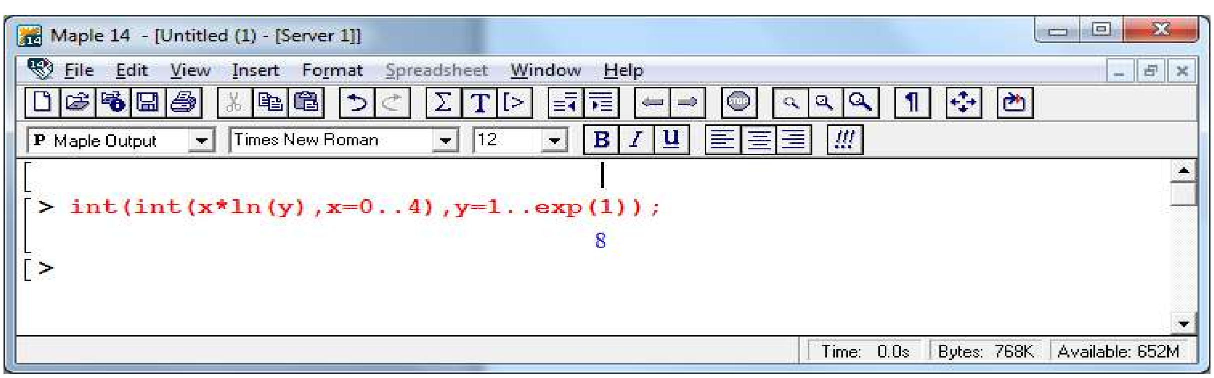
D - მართკუთხოვან არეში, თუ $0 \leq x \leq 4$

**ამოხსნა**

გვაქვს

$$\iint_D x \ln y dxdy = \int_0^4 xdx \int_1^{\ell} \ln y dy = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 [y \ln y - y]_1^{\ell} = 8(\ell - \ell + 1) = 8$$

ეს ინტეგრალი პროგრამა Maple-ში გამოითვლება შემდეგნაირად (იხ. ნახ.11.27):




ნახ.11.27

**მაგალითი 2.** გამოვთვალოთ შემდეგი ორჯერადი ინტეგრალი, $\iint\limits_D (\cos^2 x+\sin^2 y)dxdy$

D - კვადრატულ არეში თუ $0\le x\le \frac{\pi}{4}$ , $0\le y\le \frac{\pi}{4}$

**ამოხსნა**

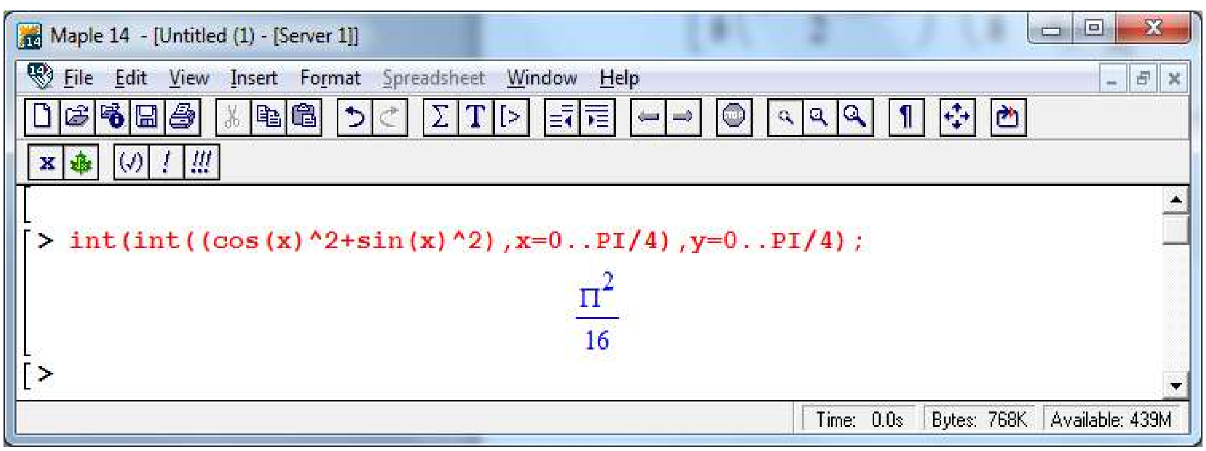
გვაქვს

$$\iint\limits_D (\cos^2 x+\sin^2 y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 x+\sin^2 y)dy=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[y\cos^2 x+\frac{y}{2}-\frac{1}{4}\sin 2y\right]_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{4}\cos^2 x+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{\pi}{8}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{16}$$

ეს ინტეგრალი პროგრამა Maple-ში გამოითვლება შემდეგნაირად (იხ. ნახ.11.28):




ნახ.11.28

**მაგალითი 3.** გამოვთვალოთ $I=\int_1^2 dx\int_x^{x^2}(2x-y)dy$

**ამოხსნა**

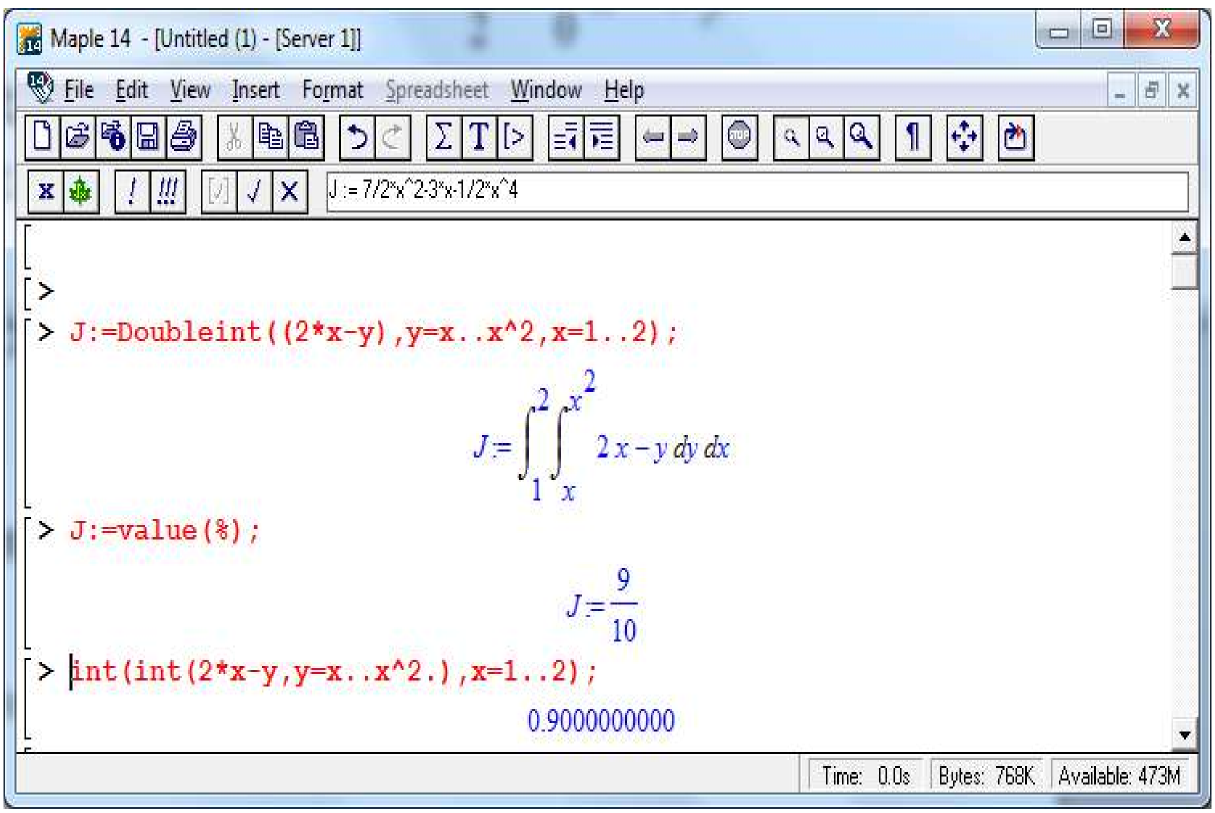
გვაქვს

$$I=\int_1^2\left[2xy-\frac{1}{2}y^2\right]_x^{x^2}dx=\int_1^2\left(2x^3-\frac{1}{2}x^4-2x^2+\frac{1}{2}x^2\right)dx=$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{2}x^3\right]_1^2=0{,}9$$

ეს ინტეგრალი პროგრამა Maple-ში გამოითვლება შემდეგნაირად (იხ. ნახ.11.29):

( ეს ინტეგრალი ამოხსნილია ორნაირად)




ნახ.11.29

**მაგალითი 4.** გამოვთვალოთ შემდეგი ორჯერადი ინტეგრალი, $\iint_D (x-y)dxdy$

D - არის შემოსაზღვრული შემდეგი წირებით

$$y = 2 - x^2, y = 2x - 1$$

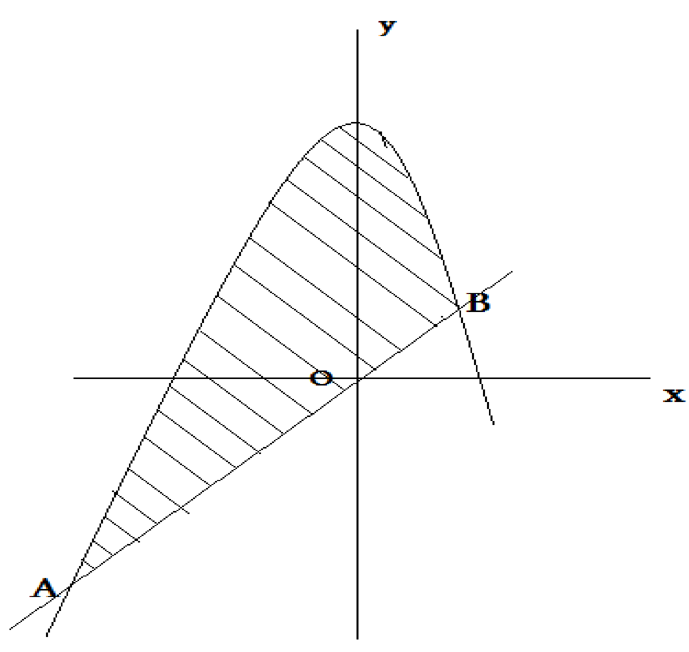
**ამოხსნა**

ავაგოთ D - არე. პირველი წირი არის პარაბოლა რომლის წვეროს კორდინატებია (0;2), იგი სიმეტრიულია Oy ღერძის. მეორე წირი არია წრფე. თუ სისტემაში ამოვხსნით ამ ორივე განტოლებას მივიღებთ ამ წირთა გადაკვეთის წერტილთა კორდინატებს ისინია A(-3;-7) და B(1;1). (იხ. ნახ.3) ინტეგრების არე მიეკუთვნება პირველ სახეს. ვპოულობთ

$$\iint_D (x-y)dxdy = \int_{-3}^{1} dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (x-y)dy = \int_{-3}^{1} \left[ xy - \frac{1}{2}y^2 \right]\Bigg|_{2x-1}^{2-x^2} =$$

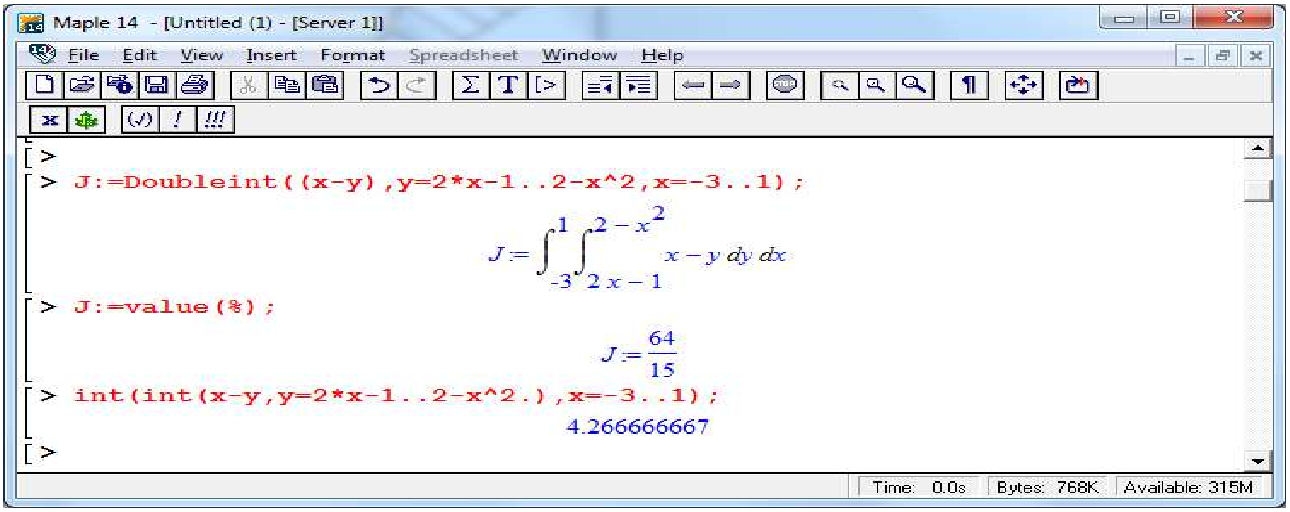
$$= \int_{-3}^{1} \left( 2x - x^3 - 2 + 2x^2 - \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + x + 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right) dx =$$

$$= \int_{-3}^{1} \left( -\frac{1}{2}x^4 - x^3 + 2x^2 + x - \frac{3}{2} \right) dx = \left[ -\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x \right]\Bigg|_{-3}^{1} = 4\frac{4}{15}.$$




ნახ.3

ეს ინტეგრალი პროგრამა Maple-ში გამოითვლება შემდეგნაირად (იხ. ნახ.11.30): (ეს ინტეგრალი ამოხსნილია ორნაირად)

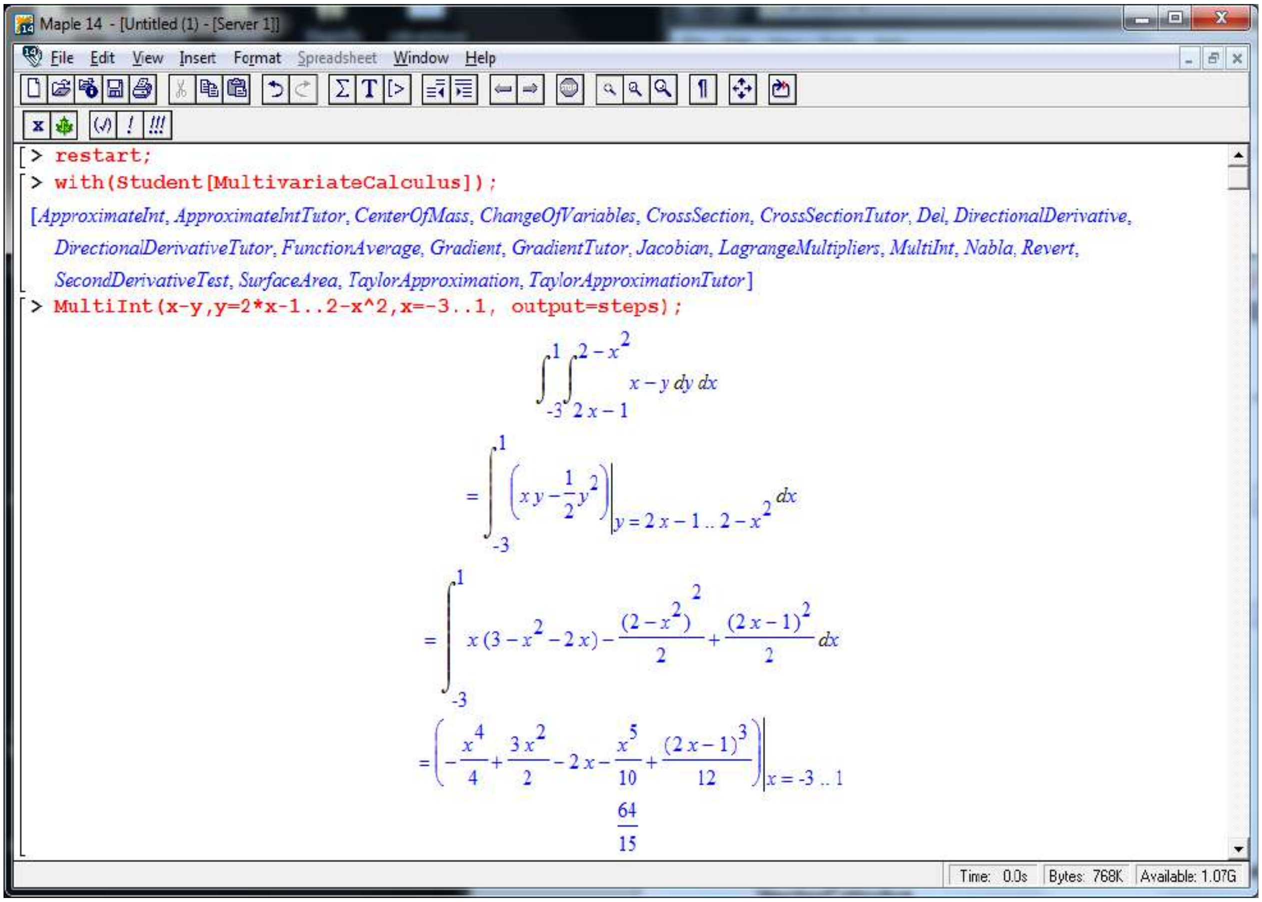



ნახ.11.30

გამოვთვალოთ MultiInt() ფუნქციის დახმარებით შემდეგი ინტეგრალი:

$$\iint_D (x-y)dxdy = \int_{-3}^{1} dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (x-y)dy$$

ამ ინტეგრალის Maple-ში ამოხსნა მოცემულია (ნახ.10.31)




ნახ.11.31

ავაგოთ პოლინომი $y = f(x)$ $x$ და $y$ ცხრილის მიხედვით ლაგრანჟის ფორმულის მიხედვით სადაც ფორმულას აქვს შემდეგი სახე( იხილე ფორმულა *******)

$$f(x) \approx \varphi(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} y_0$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} y_1 + \dots$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} y_n \qquad (***)$$

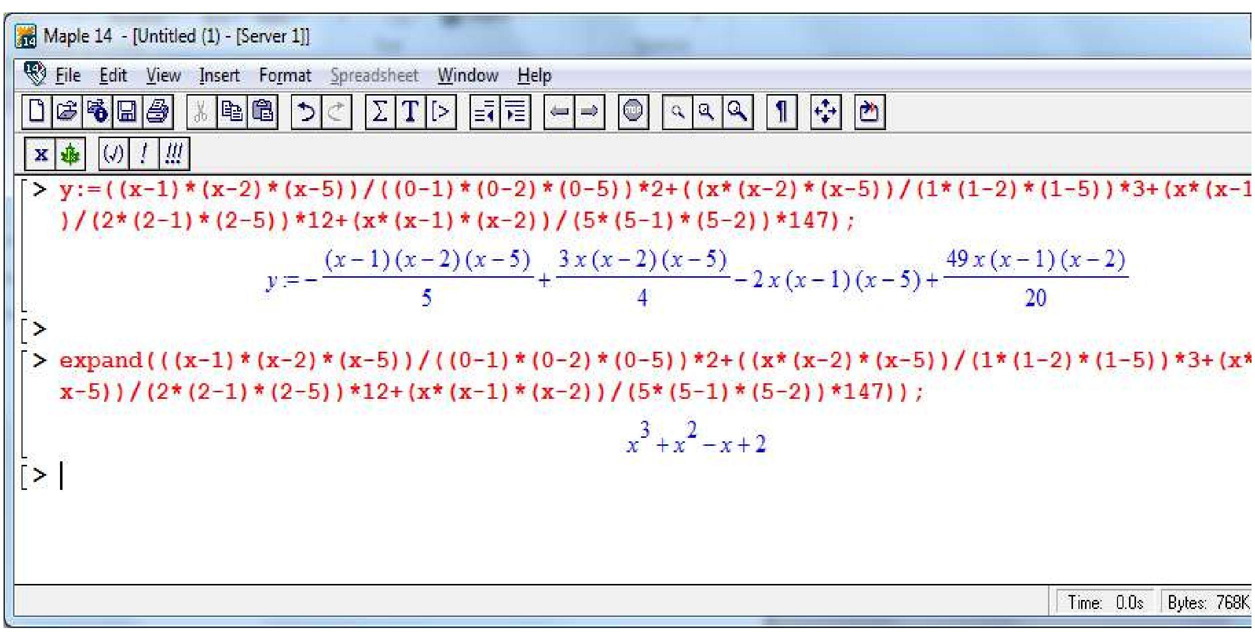
მოცემულია ცხრილი 1

| X | 0 | 1 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| Y | 2 | 3 | 12 | 147 |

ლაგრანჟის ფორმულით მივიღებთ:

$$y = \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(0-1)(0-2)(0-5)}2 + \frac{x(x-2)(x-5)}{1(1-2)(1-5)}3 +$$
$$\frac{x(x-1)(x-5)}{2(2-1)(2-5)}12 + \frac{x(x-1)(x-2)}{5(5-1)(5-2)}147 = x^3 + x^2 - x + 2$$

Maple-ში გამოითვლება შემდეგნაირად: (ნახ.***)




ნახ. ***

## 2.ორჯერადი ინტეგრალში ცვლადების შეცვლა

### 1. ორჯერადი ინტეგრალი პოლარულ კორდინატებში.

ორჯერადი ინტეგრალის გარდაქმნის დროს მართკუთხოვანი $(x,y)$ კორდინატებიდან $(\rho,\theta)$ პოლარულ კორდინატებზე გადასვლისათვის მაკავშირებელ თანაფარდობას წარმოადგენს თანაფარდობა $x=\rho\cos\theta,$ და $y=\rho\sin\theta,$ განმსაზღვრელია ფორმულა:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta.$$

თუ ინტეგრების არე $D$ შემოსაზღვრულია $\theta=\alpha$, და $\theta=\beta$ სხივებით $(\alpha<\beta)$, რომ-ლებიც გამოდიან პოლუსიდან, და ორი $\rho=\rho_1(\theta)$ და $\rho=\rho_2(\theta)$ მრუდებით. სადაც $\rho_1(\theta)$ და $\rho_2(\theta)$- ცალსახა ფუნქციებია, როცა $\alpha\le\theta\le\beta$ და $\rho_1(\theta)\le\rho_2(\theta)$ , მაშინ ორჯერადი ინტეგრალი გამოითვლება ფორმულით:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_\alpha^\beta d\theta\int\limits_{p_1(\theta)}^{p_2(\theta)}F(\rho,\theta)\rho d\rho,$$

სადაც $F(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$ , ამასთან ჯერ გამოითვლება $\int\limits_{p_1(\theta)}^{p_2(\theta)}F(\rho,\theta)\rho d\rho,$ ინტეგრალი , სადაც $\theta$ ითვლება მუდმივ სიდიდედ.

### 2.ორჯერადი ინტეგრალი მრუდწირულ კორდინატებში

ვთქვათ ორჯერადი ინტეგრალი მართკუთხოვანი $(x,y)$ კორდინატებიდან გარდაიქმნებიან $u,v$ მრუდწირულ კორდინატებში , შემდეგი თანაფარდობით $x=x(u,v),\ y=y(u,v)$. სადაც $x(u,v),$ და $y(u,v)$ ფუნქციებს გააჩნიათ უწყვეტი კერძო წარმოებულები $uO'v$ სიბრტყის $D'$ არეში და გარდაქმნის იაკობიანი $D'$ არეში არ უდრის ნოლს:

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\ne 0.$$

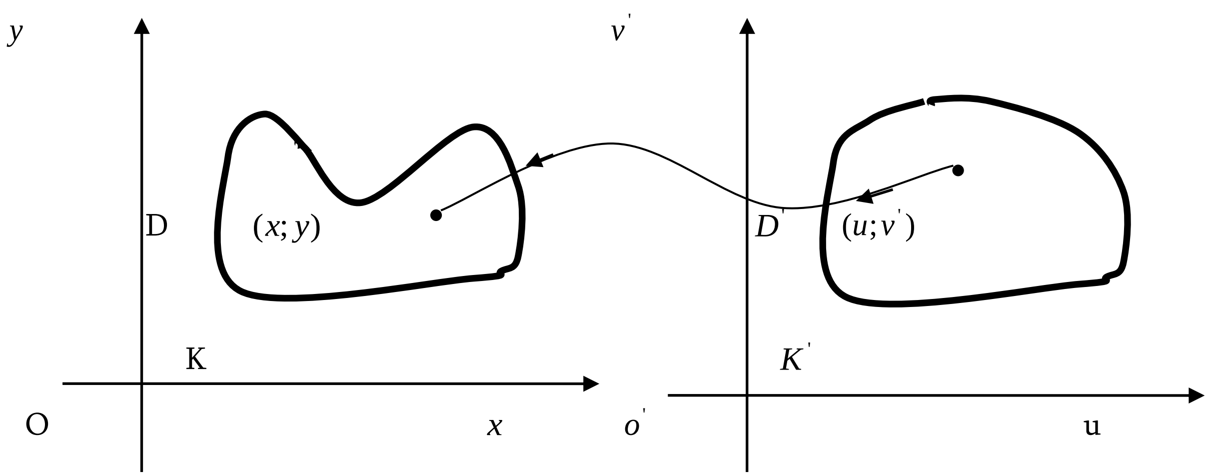
ამასთან ხორციელდება ურთიერთცალსახა და ორივე მხარეს უწყვეტი თანადობა $xOy$ სიბრტყის $D$ არის და $uO'v$ სიბრტყის $D'$ არის წერტილებს შორის. (იხ. ნახ.4.)

ამ შემთხვევაში ორჯერადი ინტეგრალის გარდაქმნა მიიღებს სახეს:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D} f[x(u,v), y(u,v)]|J|dudv.$$

პოლარული კორდინატების შემთხვევაში

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$




ნახ.4

განვიხილოთ რამოდენიმე მაგალითი.

**მაგალითი 1.** გადავიდეთ პოლარულ კორდინატებზე და გამოვთვალოთ

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

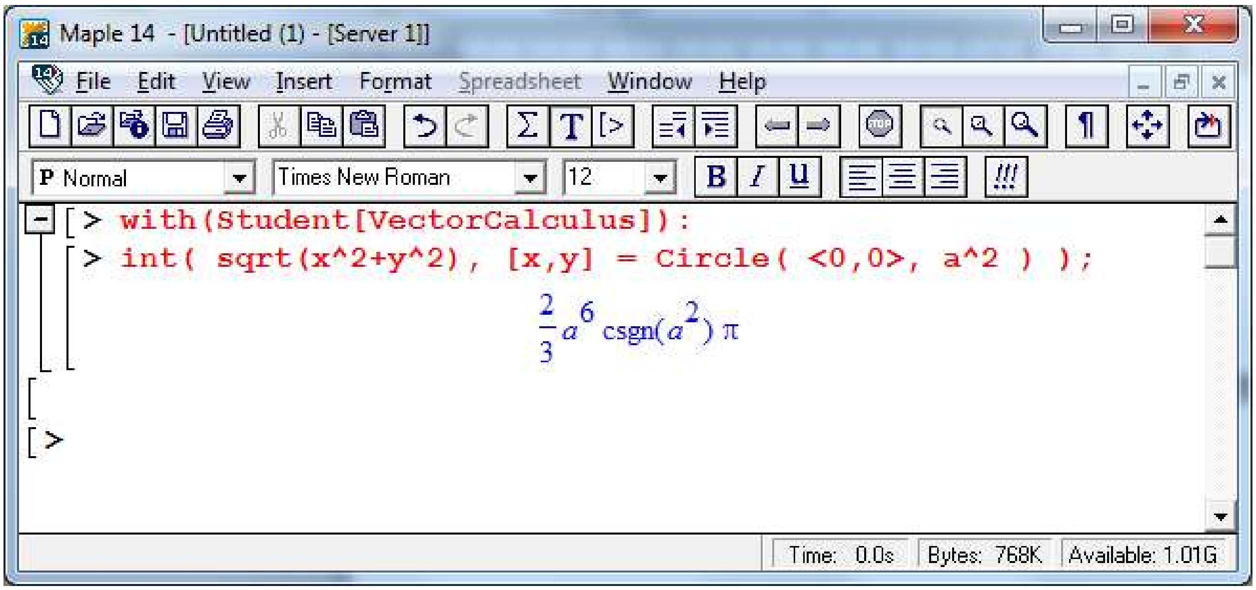
თუ $D$ არის $x^2+y^2 \le a^2$ წრის პირველი მეოთხედი.

**ამოხსნა.** შემოვიტანოთ აღნიშვნები $x=\rho\cos\theta,\ \ y=\rho\sin\theta,$ მაშინ მივიღებთ

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_D \sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}\,\rho d\rho d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a \rho^2 d\rho =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \rho^3\Big|_0^a d\theta = \frac{a^2}{3}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi a^3}{6}.$$

ეს ინტეგრალი Maple-ში გამოითვლება შემდეგნაირად: (ნახ.11.31)

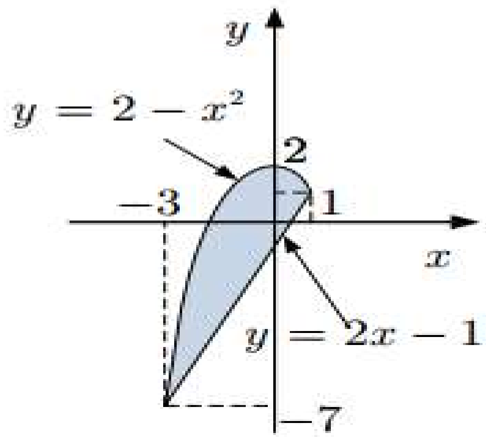



ნახ.11.31

ახლა განვიხილოთ ორჯერადი ინტეგრალის გამოთვლა ფუნქცია int() - ის საშუალებით. ეს ფუნქცია წარმოადგენს Maple-ს საბაზისო ფუნქციას და არ საჭიროებს, სხვა რომელიმე დამატებით პროგრამული პაკეტების მიერთებას. მისი გამოყენება შესაძლებელია, როდესაც ინტეგრალი მიყვანილია ორჯერად სახემდე.

**მაგალითი 2.**გამოვთვალოთ ორჯერადი ინტეგრალი $\iint_D (x-y)dxdy$ , სადაც არე D შემოსაზღვრულია შემდეგი წირებით $y=2-x^2, y=2x-1$ .

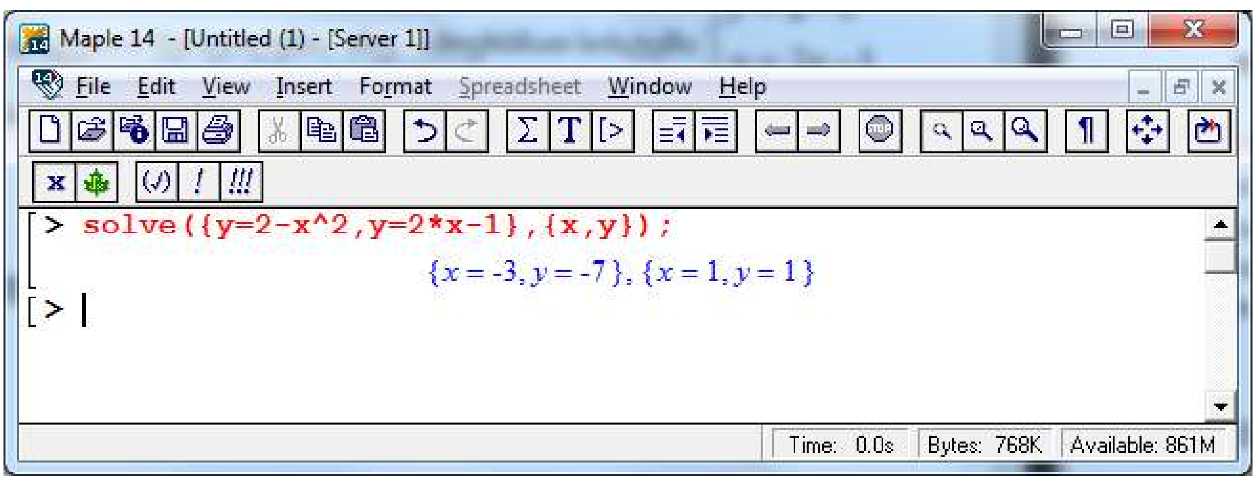
**ამოხსნა.** თავიდან განვსაზღვროთ ინტეგრირების არე (ნახ.4) ამისათვის მოვძებნოთ




ნახ.12.4  ინტეგრირების არე

მოცემული წირების გადაკვეთის წერტილები, ანუ  ამოვხსნათ სისტემა: $\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

Maple-ში სისტემის ამოსახსნას ექნება სახე (ნახ.11.32)

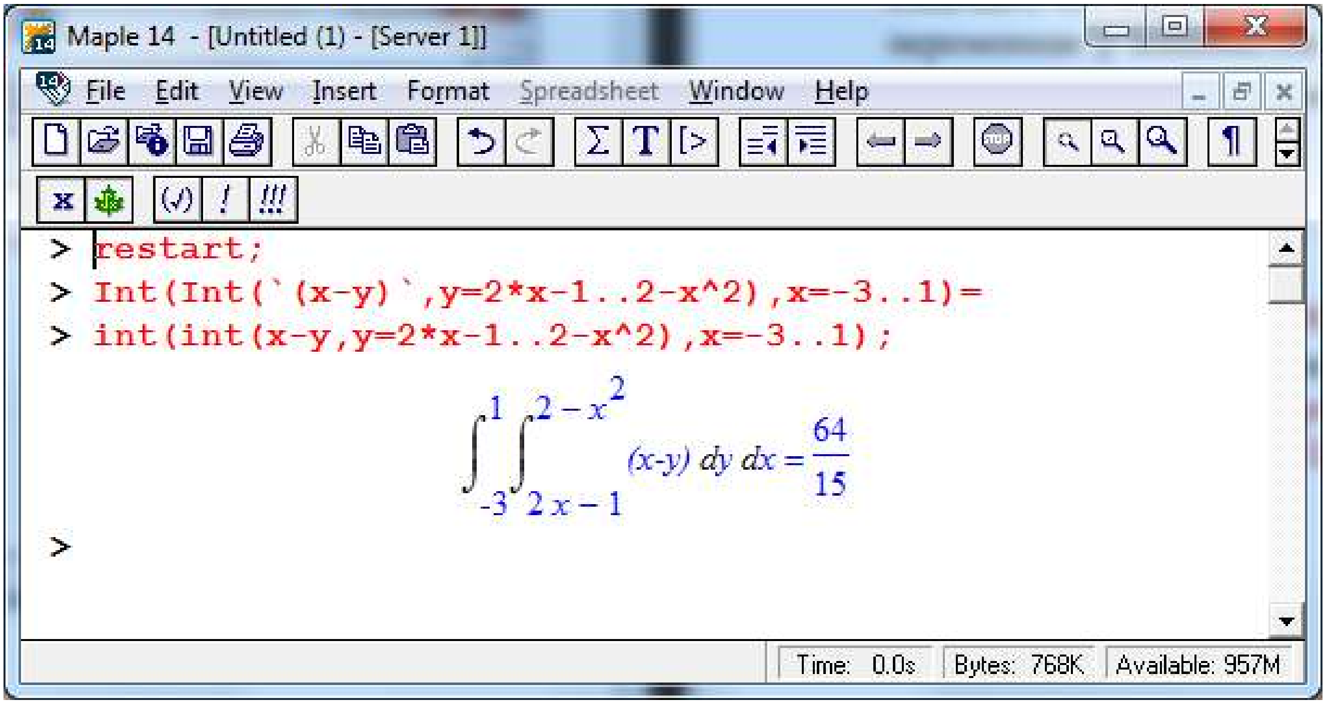



ნახ.11.32

მაშასადამე , წირების გადაკვეთის წერტილებია : $\{x = -3, y = -7\}$,{x=1,y=1}.  ეს ნიშნავს, რომ ცვლადი $x$ იცვლება $x = -3$ დან $x = 1$ მდე, ხოლო ცვლადი $y$ იცვლება $y = 2x - 1$ ფუნქციიდან $y = 2 - x^2$ ფუნქციამდე. შესაბამისად მოცემულ არეზე განსაზღვრული ორჯერადი ინტეგრალი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\iint_D (x - y)dxdy = \int_{-3}^{1} dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (x - y)dy.$$

Maple-ში ინტეგრალის ამოსახსნას ექნება სახე (ნახ.11.33)

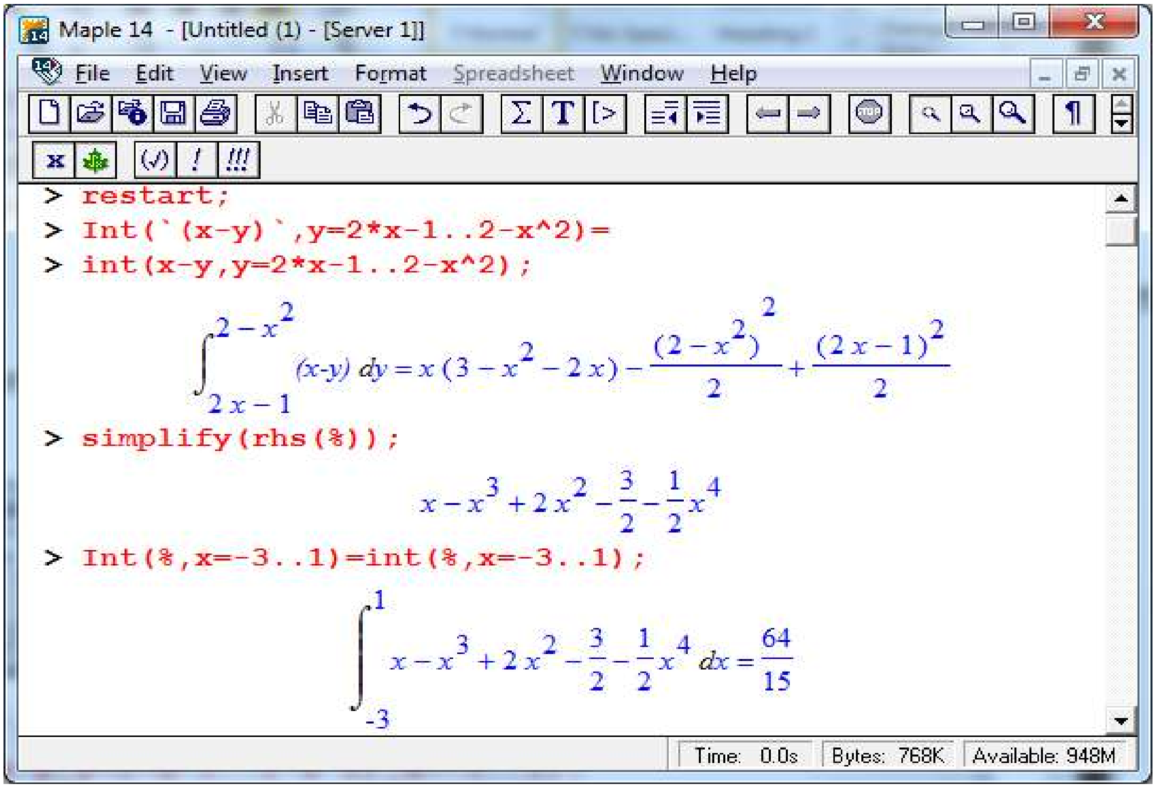



ნახ.11.33

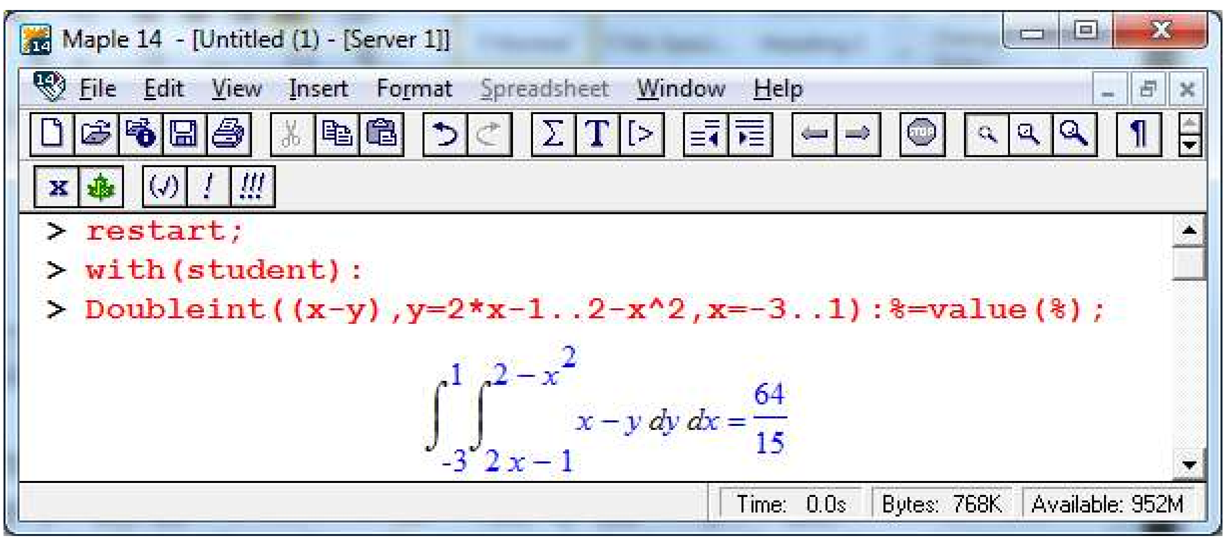
11.33 სურათზე ინტეგრალის გამოთვლის პროცესი არ ჩანს. ჩვენ კი პროგრამა Maple-ში შეგვიძლია ეს პროცესი თანმიმდევრობით გამოვაჩინოთ, თუ ჯერ შიგა ინტეგრალს, ხოლო შემდეგ გარე ინტეგრალებს გამოვთვლით ასე (ნახ.11.34):

გარდა ზემოთ გამოყენებული ფუნქციებისა Maple-ში ორჯერადი ინტეგრალის გამოსათვლელად აგრეთვე გამოიყენება ფუნქცია **Doubleint(),** რომელიც იტვირთება პაკეტ **student** - თან ერთად, ხოლო არგუმენტებად ამ ფუნქციაში გამოიყენებიან, იგივე ფუნქციები დეა ცვლადები, რომლებიც გამოიყენებიან ინტეგრალის გამოთვლის პროცესში.

მაგალითი 2.- ში მოცემული ინტეგრალი **Doubleint(),** ფუნქციის გამოყენებით პროგრამა Maple-ში მიიღებს სახეს (სურ 11.35)



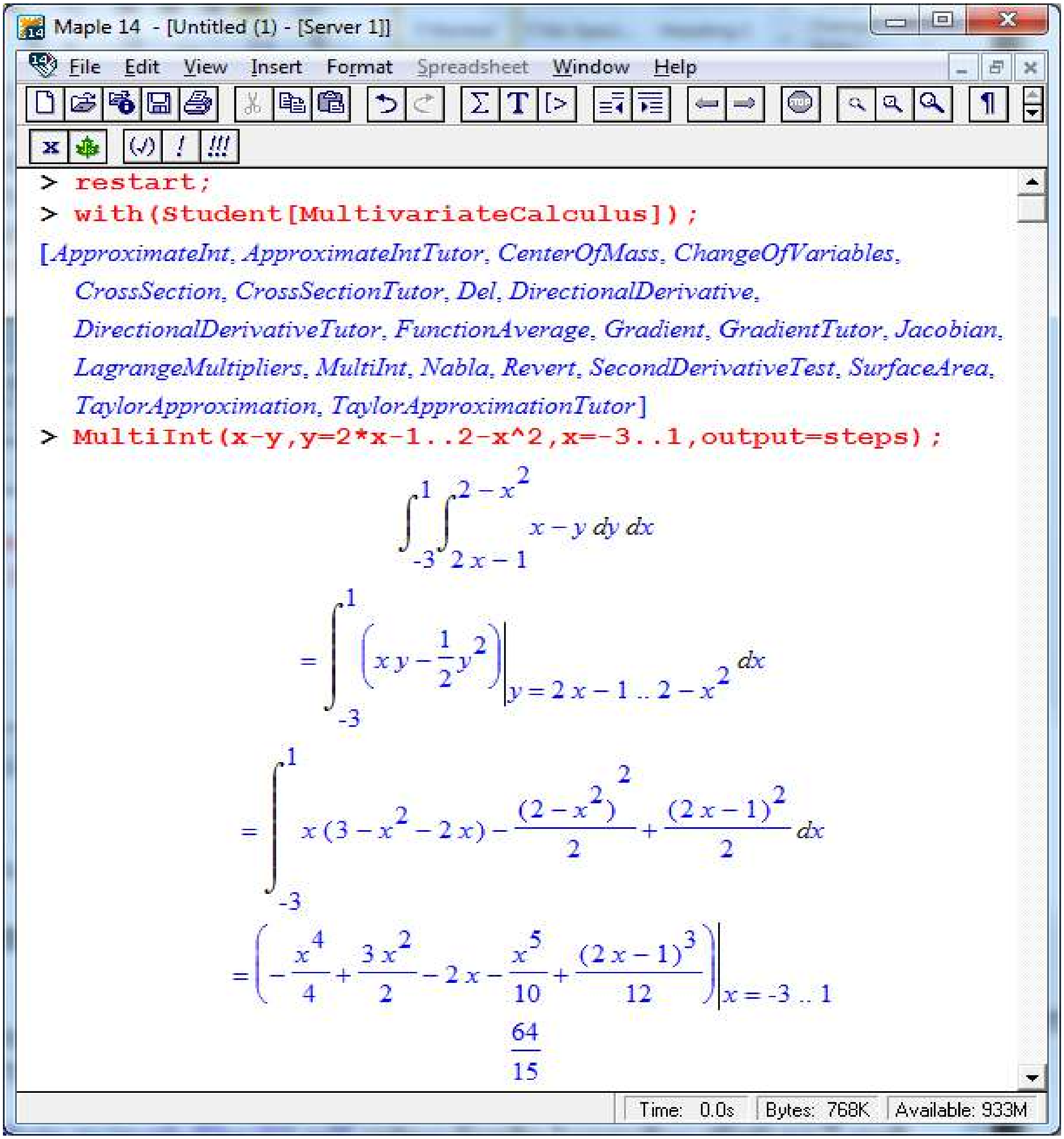

ნახ.11.34




სურ 11.35

იგივე ინტეგრალი გამოვთვალოთ **MultiInt()** ფუნქციის საშუალებით, რომელიც წარმოდგენილია ქვეპაკეტ **MultivariateCalculus**-ში.

მაგალითი 2.- ში მოცემული ინტეგრალი **MultiInt()**, ფუნქციის გამოყენებით პროგრამა Maple-ში მიიღებს სახეს (სურ 11.36)


Maple 14 - [Untitled (1) - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
> restart;
> with(Student[MultivariateCalculus]);
[ApproximateInt, ApproximateIntTutor, CenterOfMass, ChangeOfVariables, CrossSection, CrossSectionTutor, Del, DirectionalDerivative, DirectionalDerivativeTutor, FunctionAverage, Gradient, GradientTutor, Jacobian, LagrangeMultipliers, MultiInt, Nabla, Revert, SecondDerivativeTest, SurfaceArea, TaylorApproximation, TaylorApproximationTutor]
> MultiInt(x-y,y=2*x-1..2-x^2,x=-3..1,output=steps);
$$\int_{-3}^{1}\int_{2x-1}^{2-x^2} x-y\,dy\,dx$$
$$=\int_{-3}^{1}\left.\left(x\,y-\frac{1}{2}y^2\right)\right|_{y=2x-1\,..\,2-x^2}dx$$
$$=\int_{-3}^{1} x\,(3-x^2-2x)-\frac{(2-x^2)^2}{2}+\frac{(2x-1)^2}{2}\,dx$$
$$=\left.\left(-\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}-2x-\frac{x^5}{10}+\frac{(2x-1)^3}{12}\right)\right|_{x=-3\,..\,1}$$
$$\frac{64}{15}$$
Time: 0.0s Bytes: 768K Available: 933M

სურ 11.36

განვიხილოთ კიდევ ერთი ფუნქცია, მრავალჯერადი ინტეგრალების გამოთვლისათვის. ეს არის ჩვენთვის უკვე ნაცნობი ფუნქცია **Int()** პაკეტი **VectorCalculus** -დან. ეს მეთოდი განსაკუთრებით მაშინ, როცა ინტეგრების არეს აქვს სტანდარტული სახე და შემომსაზღვრელი წირების განტოლებების გამოტანა არ არის აუცილებელი.

განვსაზღვროთ ინტეგრირების სტანდარტული არეები

1) სამკუთხედი,რომელიც მოცემულია წვეროების კორდინანტების მიხედვით.

**[ x,y]=Triangle(<0,0>,<1,0>, <0,1>);**

2) მართკუთხედის შემთხვევაში.

**[x,y]=Rectangle(0..Pi/2, 0..Pi/2);**

3) წრეწირის შემთხვევაში.

**[x,y]=Circle(<0,0>,r);**

4) ელიფსის შემთხვევაში.

**[x,y]=Ellipse(x^2/4+y^2/9-1);**

5) სექტორის შემთხვევაში

**[x,y]=Sector(Circle(<0,0>,r),0,Pi)** ან

**[x,y]=Sector(Ellipse(x^2/4+y^2/9-1),0,Pi/2);**

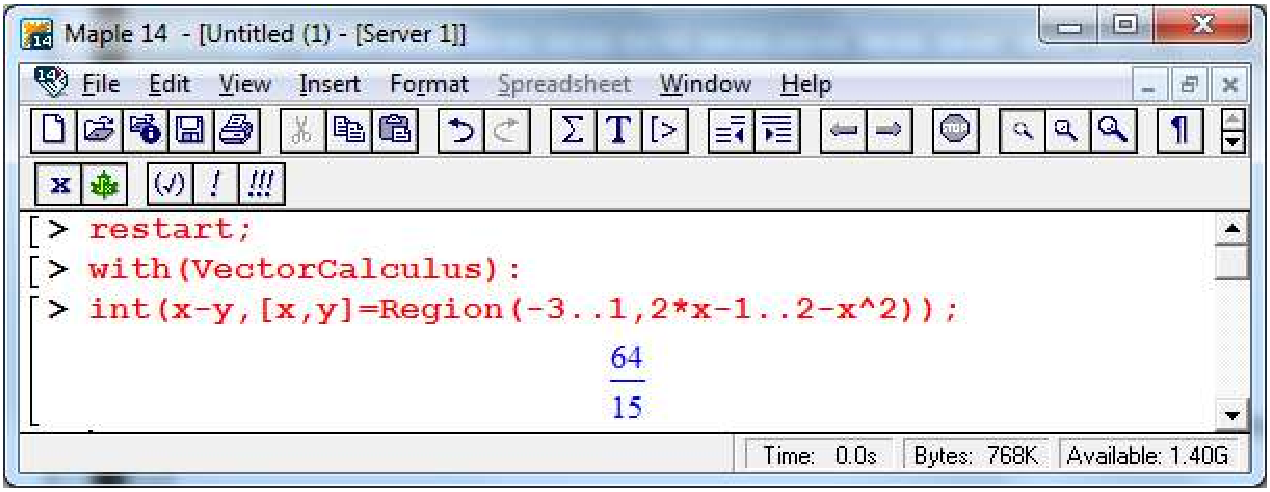
ზოგად შემთხვევაში ფუნქცია **Int()**პაკეტი **VectorCalculus** -დან ინტეგრირების არე მოიცემა **[x,y]=Region(0..1,x^2..x).** სახით

ახლა ზემოთ მოცემული ინტეგრალი გამოვთვალოთ ფუნქცია **Int()** პაკეტი **VectorCalculus** -დან, საშუალებით(ნახ.11.37).

ე.ი. **გამოვთვალოთ ინტეგრალი**

$$\iint_D (x-y)dxdy = \int_{-3}^{1} dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (x-y)dy.$$

**ამოხსნა.**

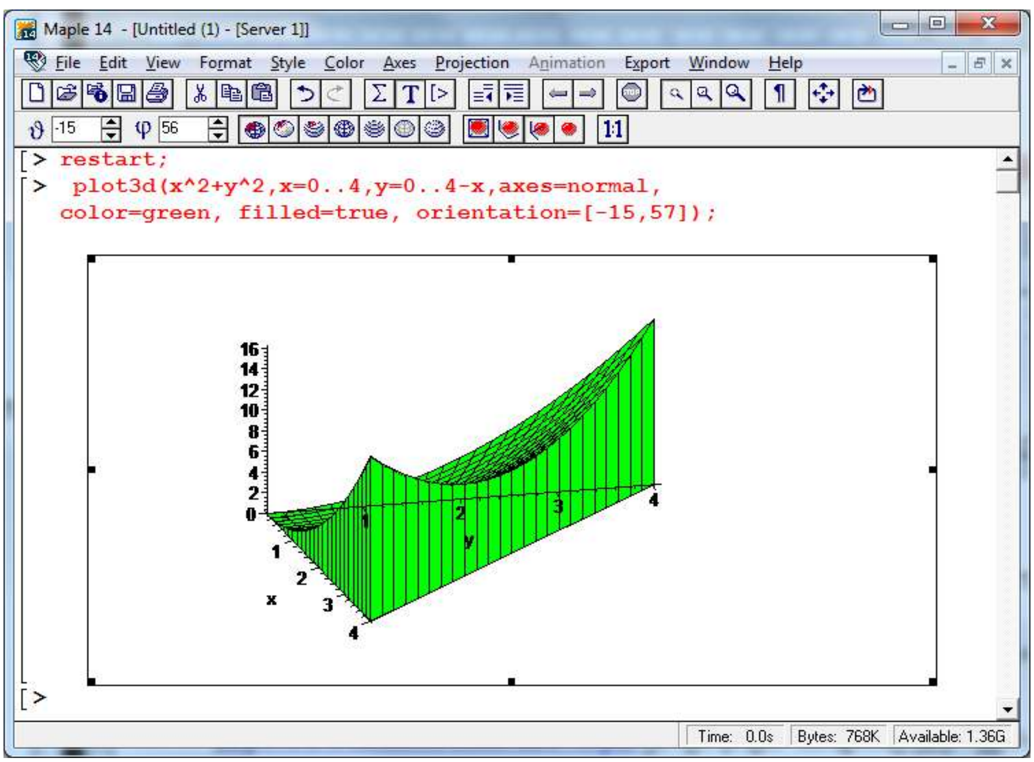



სურ 11.37

ახლა მოვახდინოთ მაგალითის კომპლექსურად გამოთვლა.

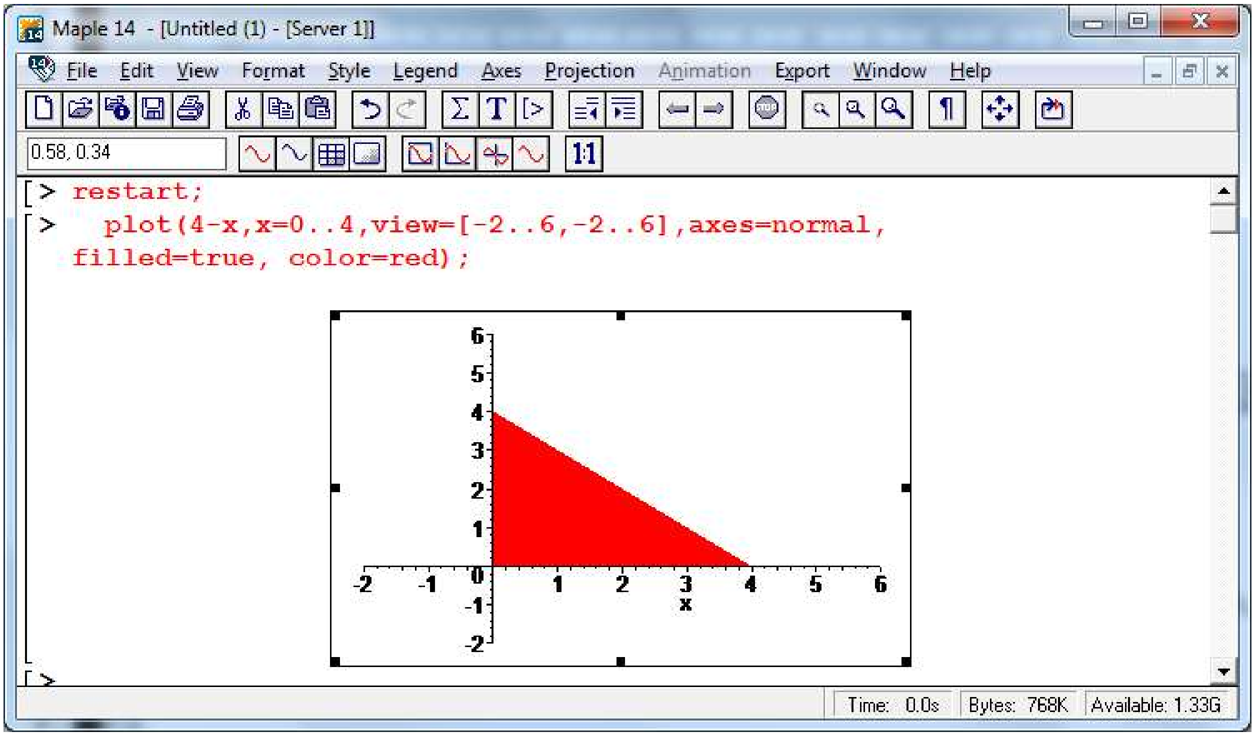
**მაგალითი 1.** გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $z = x^2 + y^2, x + y = 4, x = 0, y = 0, z = 0.$ ზედაპირებით

**ამოხსნა.** ჯერ ავაგოთ მოცემული ფიგურის და Oxy სიბრტყეზე მისი პროექცია. ეს გავაკეთოთ პროგრამა Maple-ში (სურ 11.38).



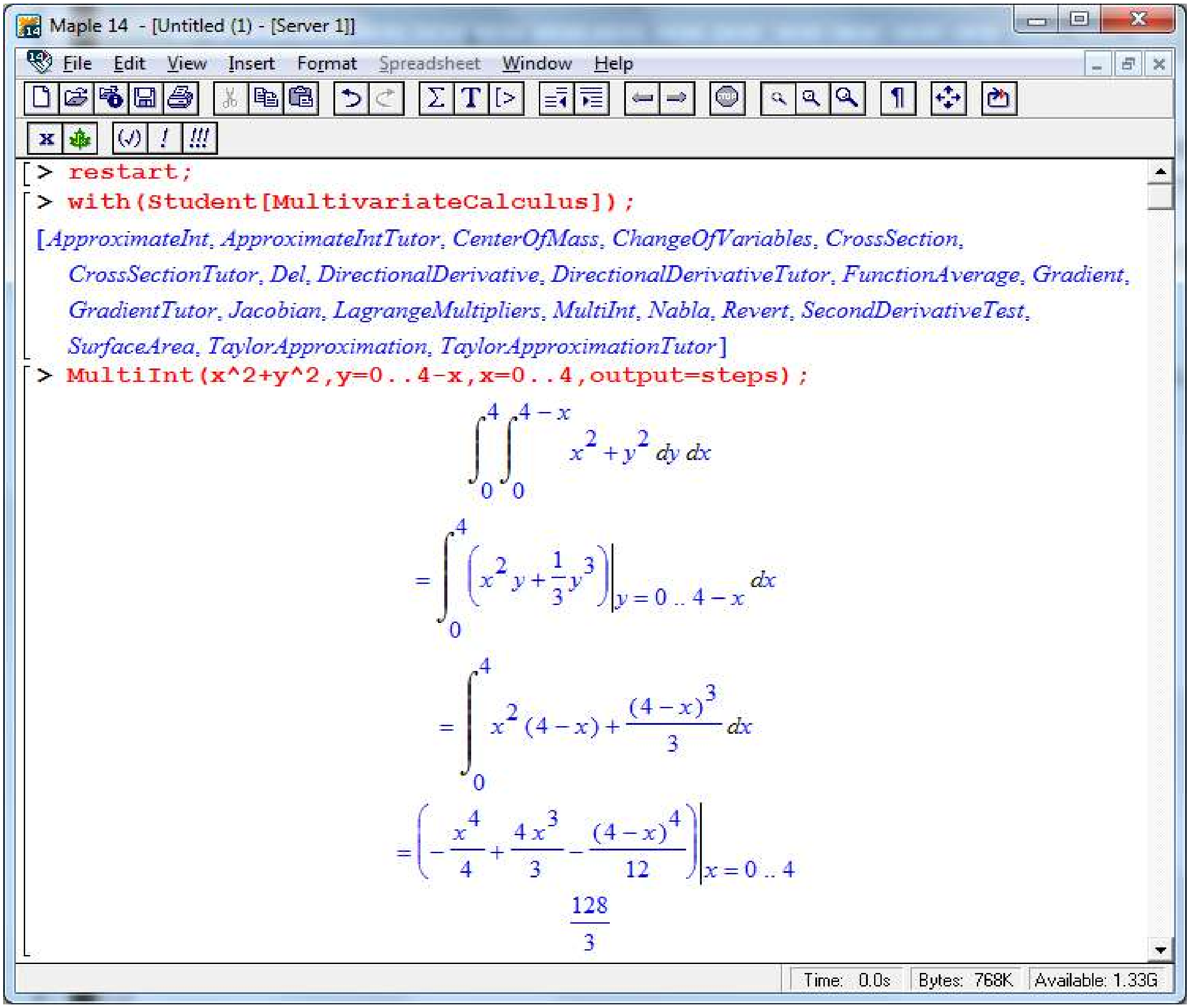

ნახ.11.38 ზედაპირის სახე

ახლა ავაგოთ ამ ზედაპირის პროექცია Oxy სიბრტყეზე პროგრამა Maple-ში (სურ 11.39) .




ნახ.11.39 ზედაპირის პროექცია Oxy სიბრტყეზე.

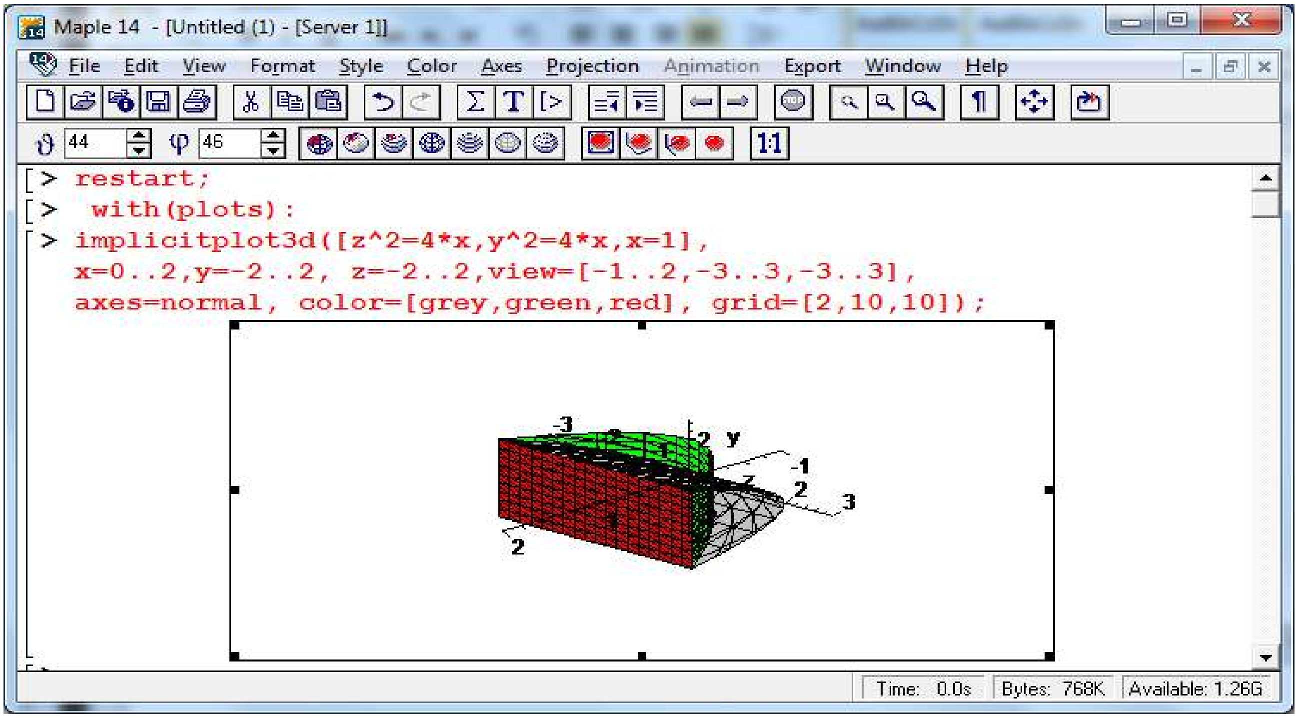
მაშასადამე, ზედაპირის პროექცია არის სამკუთხედი, სადაც x იცვლება 0 დან 4 მდე, y კი იცვლება 0 დან 4-x მდე. ჩავწეროთ ინტეგრალი ფიგურის მოცულობის გამოდსათვლელად იხ. სურ 11.40




ნახ. 11.40

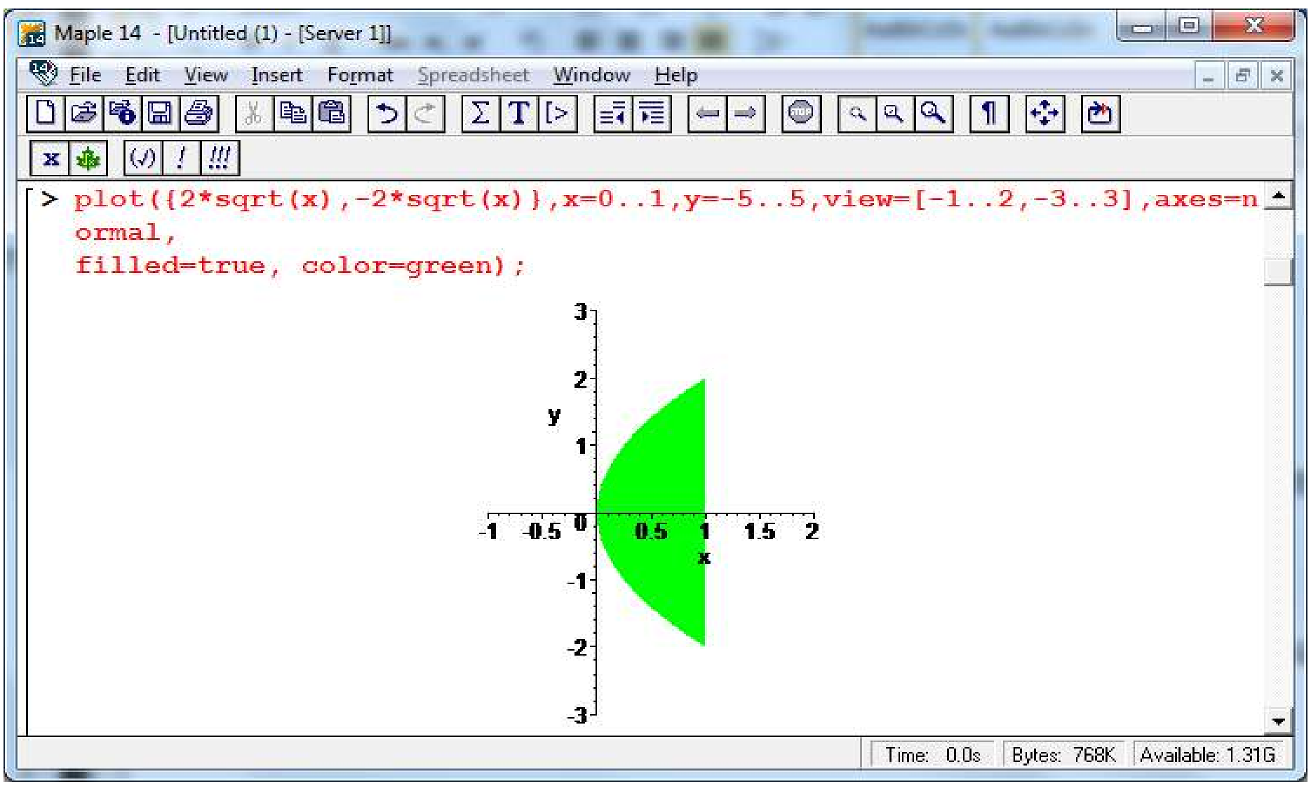
**მაგალითი 2**. გამოვთვალოთ $z^2 = 4x$ ზედაპირის ფართობი, რომელიც ამიჭრილია $y^2 = 4x$ ცილინდრით და $x = 1$ სიბრტყით.

**ამოხსნა**. ჯერ ავაგოთ მოცემული ზედაპირი (ნახ.11.41)




ნახ.11.41

ახლა ავაგოთ ამ ფიგურის პროექცია Oxy სიბრტყეზე (სურ 11.42).

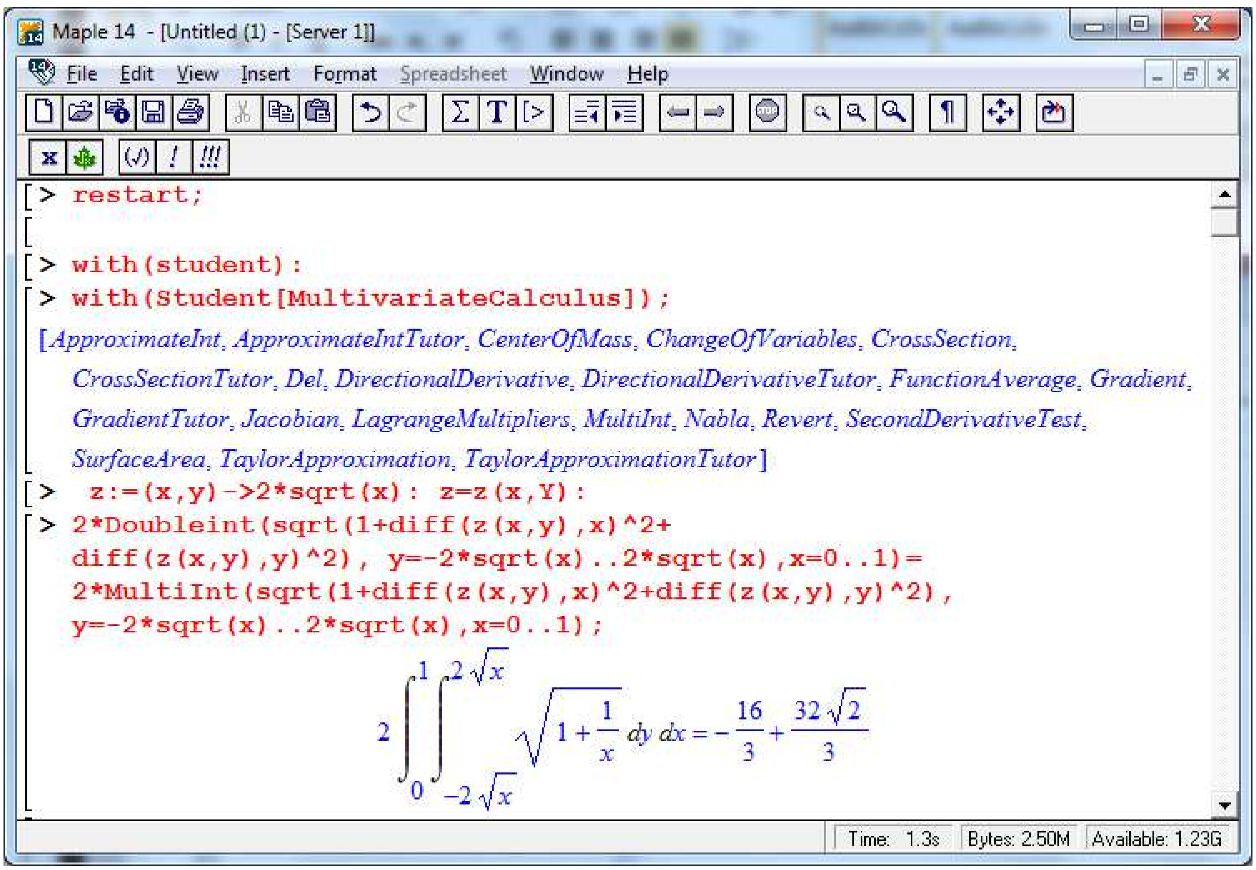



ნახ.11.42

როგორც სურათებიდან (11.41 და 11.42) მოჩანს ფიგურა და მისი პროექცია. ამ ფიგურის ფართობს ვითვლით შემდეგი ფორმულით:

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\ dxdy.$$

იმის გამო, რომ ზედაპირი განლაგებულია Oxy სიბრტყის ზედა და ქვედა ორივე მხარეს, ამიტომ ჯერ გამოვთვალოთ ინტეგრალი, ჩავსვათ $z=\sqrt{4x}=2\sqrt{x}$ ზედაპირის ზედა ნახევრისათვის, ხოლო მიღებული შედეგი გავამრავლოთ 2-ზე.პროგრამა Maple-ში ამას ექნება სახე; (ნახ. 11.43)




ნახ.11.43

**პასუხი:** $S=\frac{16}{3}(2\sqrt{2}-1).$

## 11.7. სამჯერადი ინტეგრალების ამოხსნა Maple-ში

სამმაგი ინტეგრალის სამჯერად ინტეგრალამდე დაყვანის შემდეგ ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ფუნქცია **Int()** გამეორებული სამჯერ. განვიხილოთ მაგალითი

**მაგალითი**: გამოვთვალოთ სამმაგი ინტეგრალი

$$\iiint\limits_{(V)} x^2 y^2 z^2 dxdydz$$

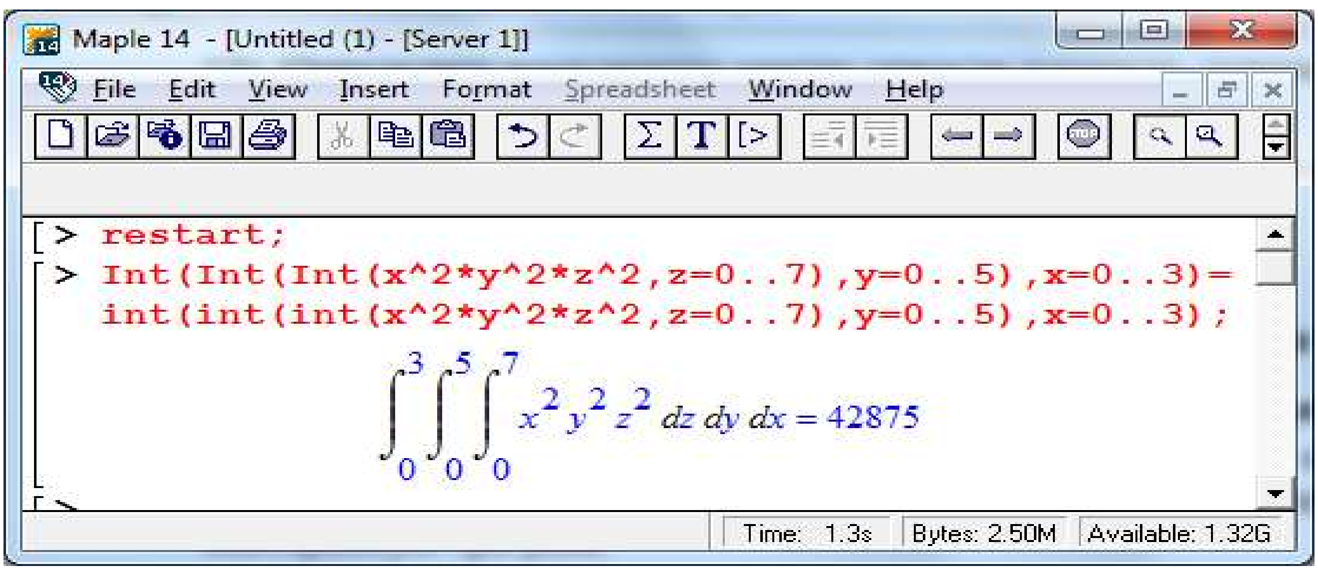
თუ (V) არე წარმოადგენს პარალელეპიპედს

$$0 \le x \le 3, 0 \le y \le 5 \ 0 \le z \le 7.$$

**ამოხსნა.** მოცემული ინტეგრალი ჩავწეროთ სამჯერადი ინტეგრალის სახით:

$$\iiint\limits_{(V)} x^2 y^2 z^2 dxdydz = \int_0^3 dx \int_0^5 dy \int_0^7 x^2 y^2 z^2 dz.$$

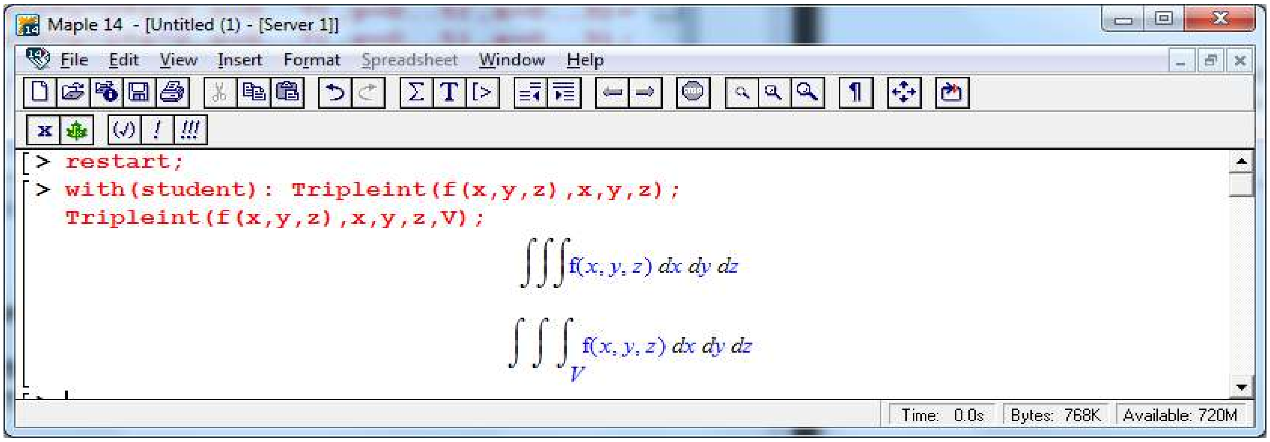
მაშინ Maple-ში ამ ინტეგრალის ამოხსნას მიეცემა შემდეგი სახე (იხ. ნახ.11.44)




ნახ.11.44

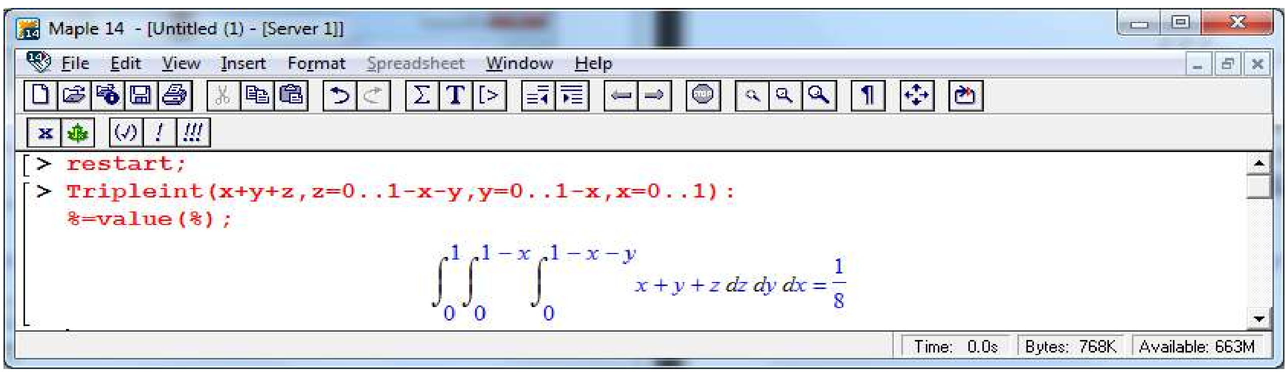
ახლა განვიხილოთ სამჯერადი ინტეგრალების გამოთვლა **student** პაკეტის **Tripleint** პროგრამით

პაკეტ-ში **student** სამჯერადი ინტეგრალის გამოთვლისათვის გამოიყენება ერთ-ერთი ფუნქცია **Tripleint ()** ამ ფუნქციით შესაძლებელია სამჯერადი ინტეგრალის ინერტული სახით ზღვრების გაწერის გარეშე მაგალითად (იხ. ნახ.11.45) :




ნახ.11.45

ამ ფუნქციით აგრეთვე შესაძლებელია სამჯერადი ინტეგრალის რიცხვითი მნიშვნელობის გამოთვლა თუ გამოვიყენებთ ფუნქცია value(), მაგალითად( ნახ. 11.46):




ნახ. 11.46

**გამოვთვალოთ სამჯერადი ინტეგრალი ფუნქცია MultiInt() საშუალებით,**

**Student[MultivariateCalculus] პაკეტიდან**

კიდევ ერთი ფუნქცია რომელიც გამოიყენება სამჯერადი ინტეგრალის გამოთვლისას ეს არის ფუნქცია **MultiInt()** რომელიც ჩაიტვირთება გამოსაყენებლად ბრძანებით **with(Student[MultivariateCalculus]):**

ამ ფუნქციას გამოსასვლელზე გააჩნია სამი პარამეტრი:

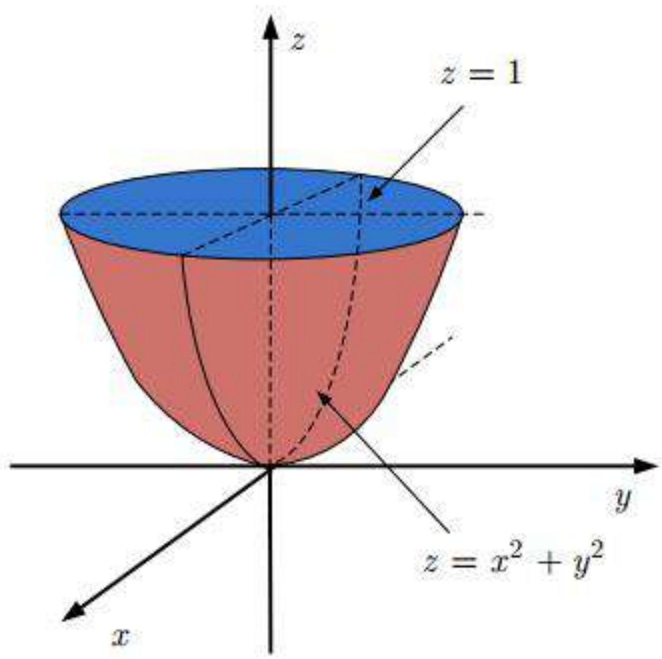
**output = value** – გამოიტანს ინტეგრალის მნიშვნელობას

**output = integral** – გამოიტანს ინტეგრალის ინერტული ფორმით

**output = steps** – გამოიტანს ინტეგრალის გამოთვლის პროცესს ნაბიჯ-ნაბიჯ. ვაჩვენოთ ამ ფუნქციის მოქმედება მაგალითზე:

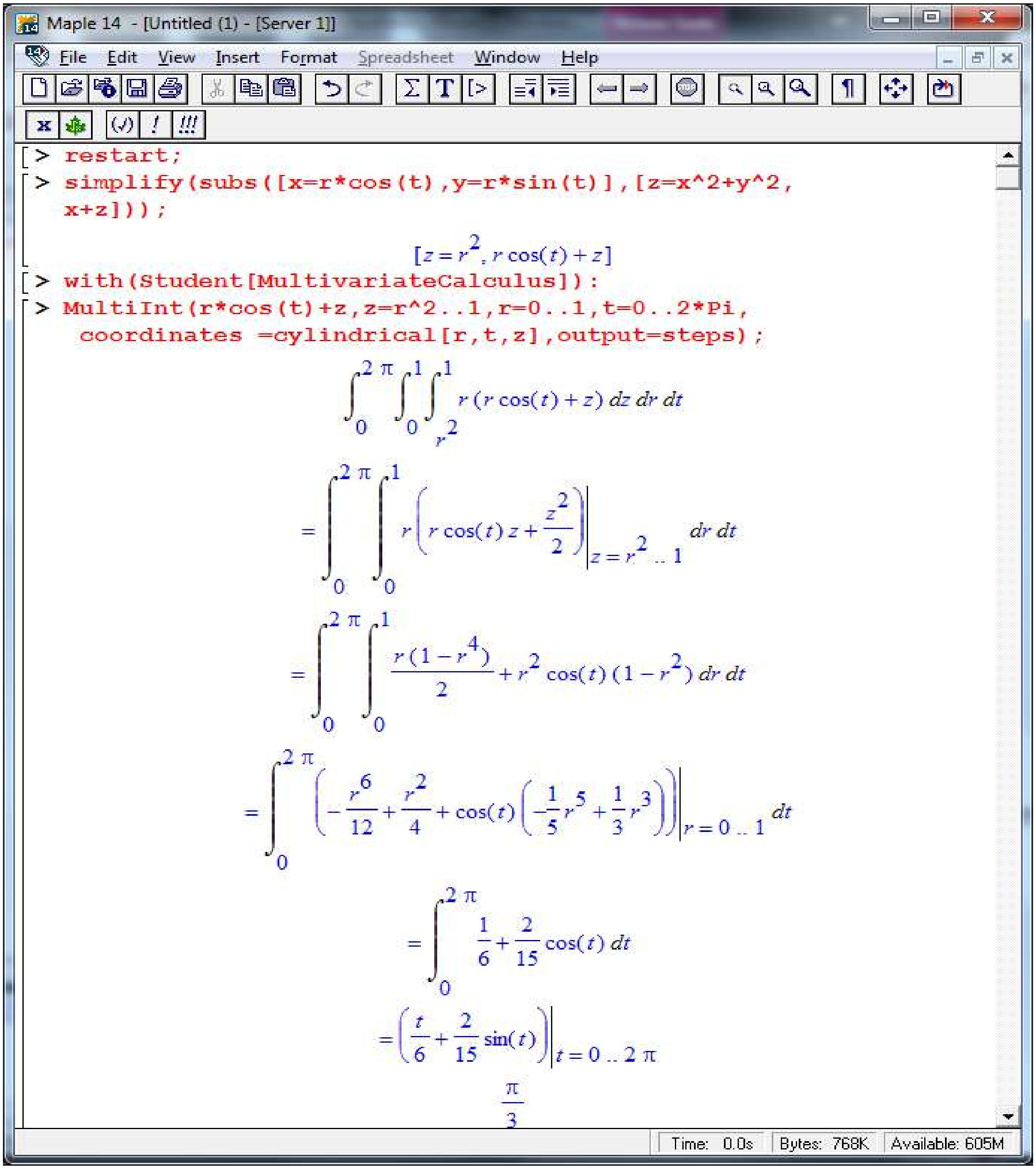
**მაგალითი.** გამოვთვალოთ სამჯერადი ინტეგრალი $\iiint\limits_{(V)}(x+z)dxdydz$, სადაც არე (V) შემოსაზღვრულია ორი ზედაპირით $z=x^2+y^2$ და $z=1$.

**ამოხსნა.** სანამ ამ ინტეგრალს ამოვხსნიდეთ განვიხილოთ მისი ნახაზი (ნახ.5)




ნახ.5 ინტეგრირების არე

იმის გამო, რომ ფიგურის პროექცია Oxy სიბრტყეზე არის ერთეულრადიუსიანი წრე, ამიტომ ჯობია ინტეგრალი გამოვთვალოთ კორდინატთა ცილინდრულ სისტემაში. ამისათვის გარდავქმნათ საზღვრები და ინტეგრალქვეშა ფუნქციები კორდინატთა ცილინდრულ სისტემაში და შემდეგ გამოვთვალოთ (იხ.ნახ.11.47)




ნახ.11.47

მივიღეთ პასუხი: $+ z)dxdydz=\frac{\pi}{3}$

**ახლა განვიხილოთ სამჯერადი ინტეგრალის გამოთვლა პაკეტი VectorCalculus ფუნქცია int() -ით**

პაკეტში **VectorCalculus** -ში **Maple**-ს პროგრამებისთვის არის კიდევ ერთი **int()** , ფუნქცია სამჯერადი ინტეგრალის გამოთვლისათვის. ამ ფუნქციას გააჩნია ის თავისებურება, რომ მისი საშუალებით შესაძლებელია ინტეგრირების სტანდარტული არეებისთვის ინტეგრალების გამოთვლა. ასეთ სტანდარტულ არეებს წარმოადგენენ:

**> [x,y,z]=Sphere( <0,0,0>, r )**

– r რადიუსიანი სფერო ცენტრით O(0; 0; 0) წერტილში;

**> [x,y,z]=Sphere( <0,0,0>, 1, [r, phi, theta])**

– **r = 1** რადიუსიანი სფერო ცენტრით O(0; 0; 0) წერტილში და სფერულ კორდინატებში $r, \varphi, \theta$;

**> [x,y,z]=Parallelepiped( 0..a, 0..b, 0..c)**

– მართკუთხა პარალელეპიპედი **a,b,c** წვეროებით ;

**> [x,y,z]=Tetrahedron( <0,0,0>, <a,0,0>, <0,b,0>, <0,0,c>)**

– პირამიდა წვეროებით O(0; 0; 0), A (a ; 0; 0), B (0; b; 0), C (0; 0;c) წერტილებში;

**> [x,y,z]=Region( 0..1, 0..1-x,0..1-x-y)**

– არე, რომელიც შემოსაზღვრულია შემდეგი საზღვრებით

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1 - x, \quad 0 \le z \le 1 - x - y.$$

განვიხილოთ **მაგალითი.**

გამოვთვალოთ სამჯერადი ინტეგრალი $\iiint\limits_{(V)} xyzdxdydz$ სადაც V არე შემოსაზრვრულია

$x = 0$ , $y = 0$ , $z = 0$ და $x + y + z = 1$.

**ამოხსნა.**

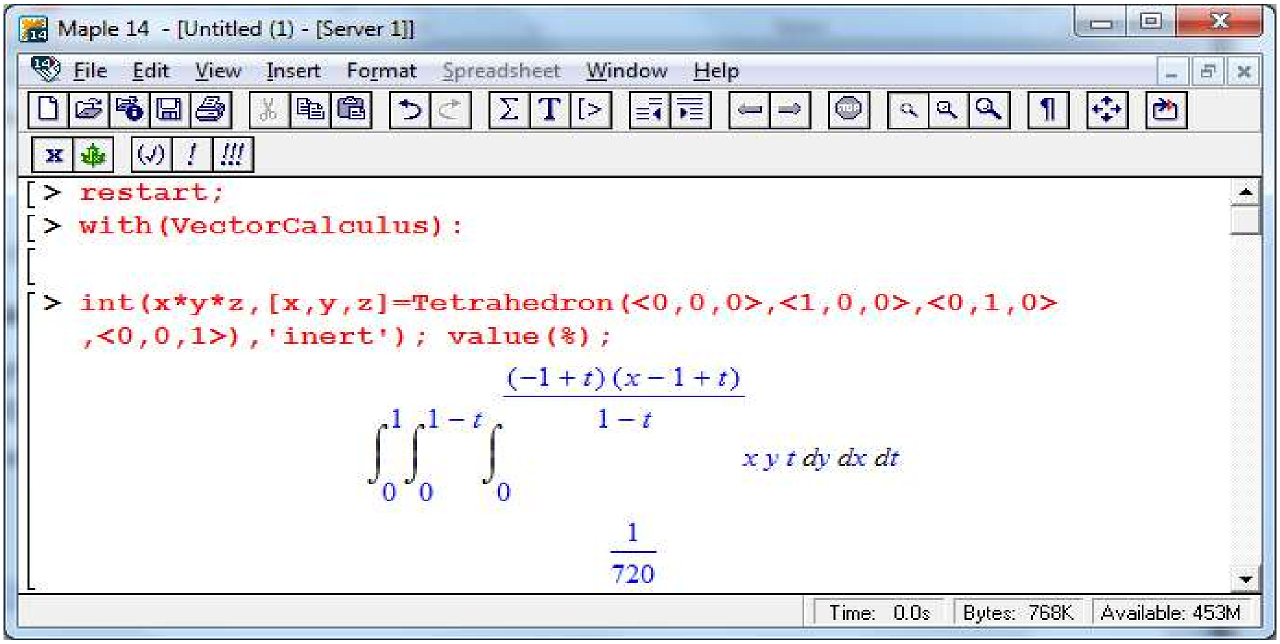
ინტეგრების არე წარმოადგენს პირამიდას რომლის წვეროებია

O(0; 0; 0), A (1 ; 0; 0), B (0; 1; 0), C c(0; 0;1)

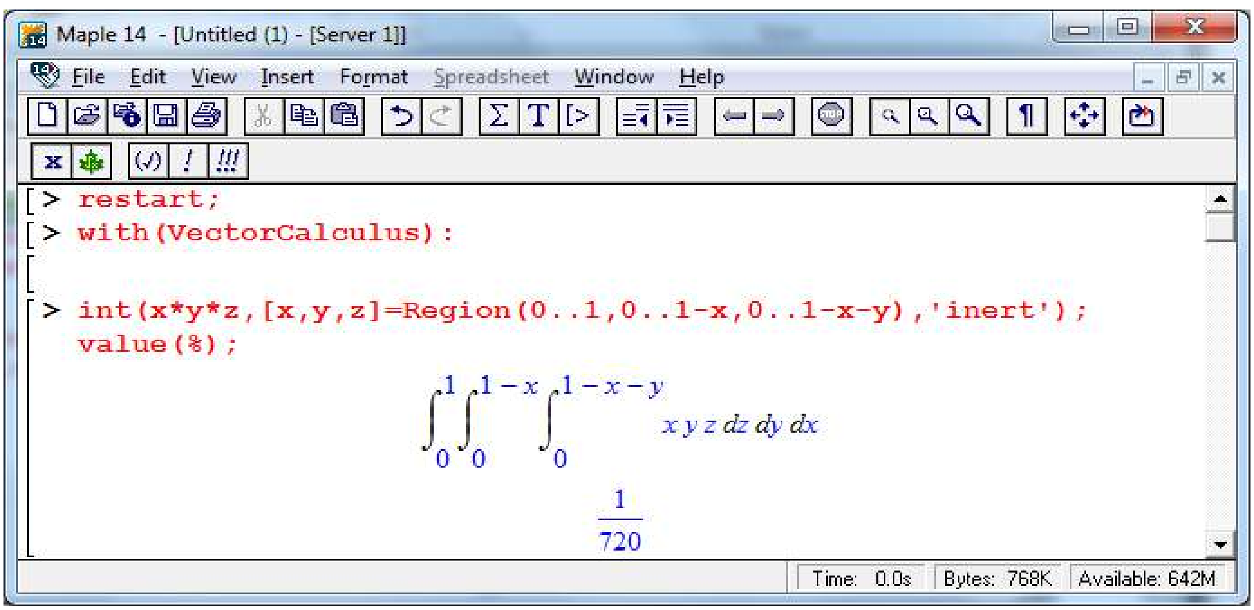
ამიტომაც ჩვენ გამოვიყენოთ ინტეგრების სტნდარტული არე **Tetrahedron( )**

(იხ. ნახ.11.48)

მეორედ იგივე ინტეგრალის ამოხსნა განვახორციელოთ ფუნქცია **Region()**-ით (იხ. ნახ.11.49)




ნახ.11.48




ნახ.11.49

ახლა განვიხილოთ მაგალითი ბირთვის სიმკვრივის მიხედვით ბირთვის მასის ცენტრის კორდინატების გამოთვლაზე.

**მაგალითი1.** ბირთვის სიკვრივე ბირთვის ნებისმიერ წერტილში ტოლია, ცენტრიდან ამ წერტილამდე მანძილის კვადრატისა . ვიპოვოთ ამ სფეროს მასის ცენტრის კორდინატები თუ სფეროს განტოლე $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$

**ამოხსნა .** $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$ უტოლობიდან მივიღოთ უტოლობა

$x^2+y^2+(z-R)^2\le R^2$ , სფეროს ექნება ცენტრი O(0;0;R) წერტილში R რადიუსით.

$\gamma=x^2+y^2+z^2$ რების სიმკვრივე სიმეტრიულია Oz ღერძის მიმართ, ამიტომ ციმძიმის ცენტრის კორდინატები $x_c=y_c=0.$ უნდა მოიძ $z_c$ ა კორდინატი . ამისათვის, ჯერ გამოვთვალოთ სხ ორც ინტეგრალი სი ავიდან.

**> m:=int(x^2+y^2+z^2,[x,y,z]=Sphere(<0,0,R>,R));**

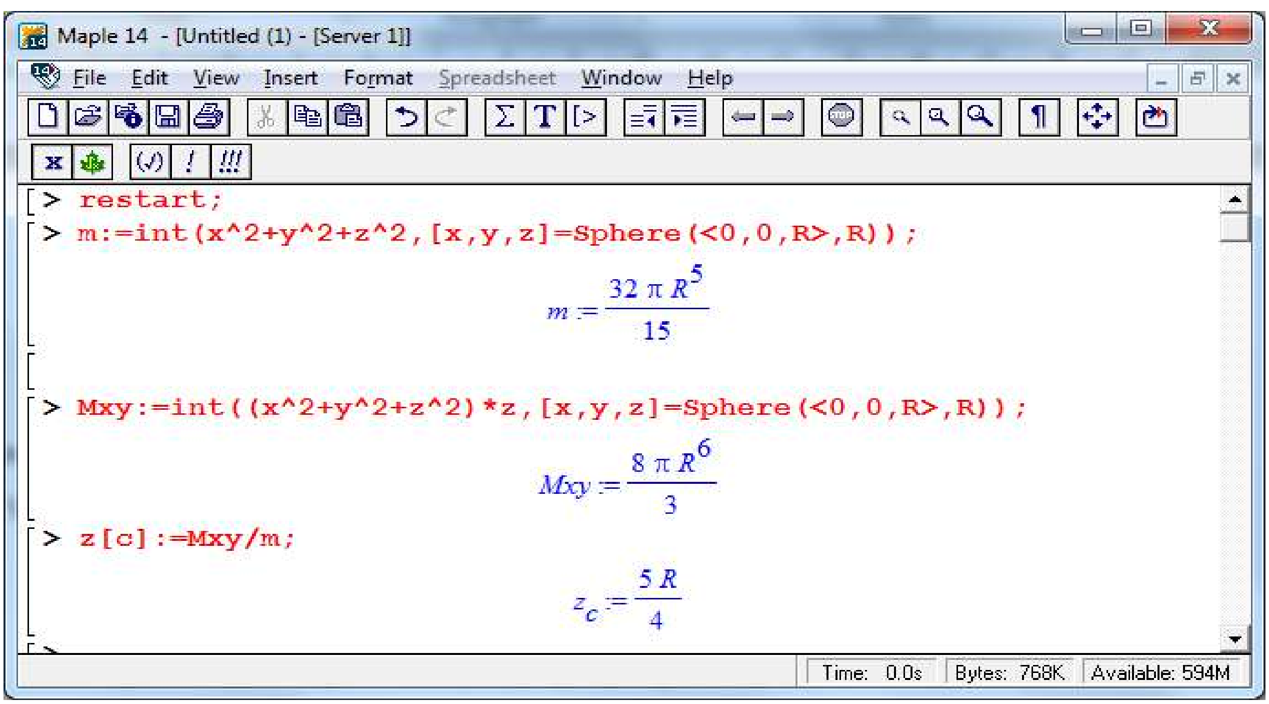
შემდეგ მოვძებნოთ Oxy სიბრტყის მიმართ სტატისტიკური მომენტი

**> Mxy:=int((x^2+y^2+z^2)*z,[x,y,z]=Sphere(<0,0,R>,R));**

და ბოლოს გამოვთვალოთ $z_c$ კორდინატი

**> z[c]:=Mxy/m;**

საბოლოოდ **Maple**-ში ამას ექნება სახე(იხ.ნახ.11.50):




ნახ.11.50

**პასუხი:** სიმძიმის ცენტრის კორდინატებია $\left(0;0;\frac{5R}{4}\right)$

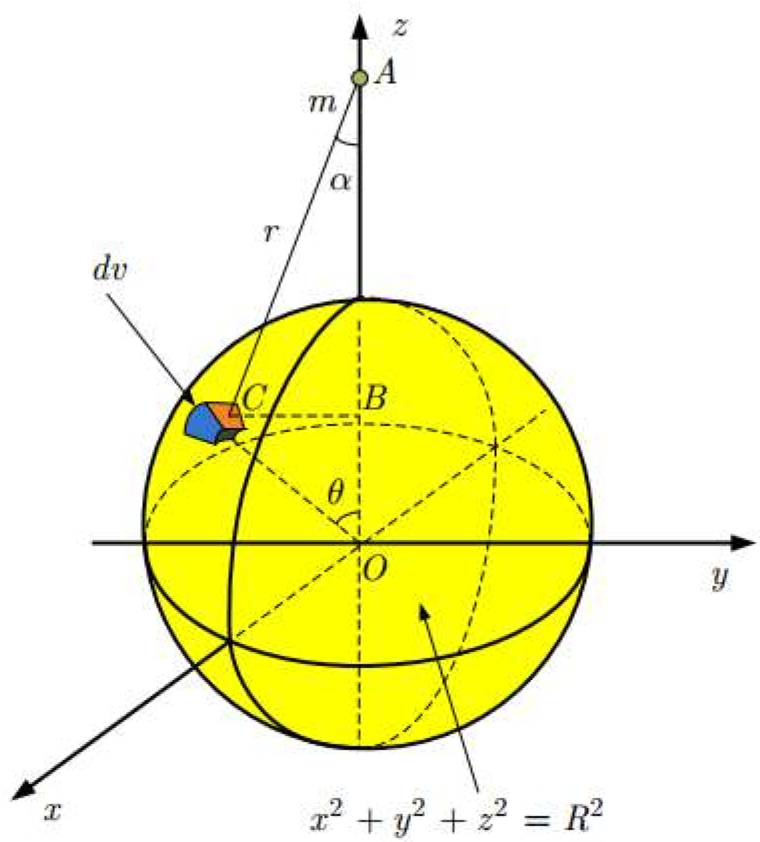
**მაგალითი 2.**

მოცემულია არაერთგვაროვანი გლუვი სფერო $x^2+y^2+z^2\le R^2$ რომლის სიმკვრივეც იცვლება $\gamma=\lambda z^2$ წესით. გამოვთვალოთ ის ძალა, რომლითაც ის მიიზიდავს m მასის იმ მატერიალურ წერტილს, რომელიც მოთავსებულია z ღერძზე სფეროს ცენტრიდან დაშორებულია 2R მანძილით.

**ამოხსნა.** სფეროში გამოვყოთ რომელიმე ელემენტი $dv$ მოცულობით:

$$\rho_0\le\rho\le\rho_0+\Delta\rho\ ,\ \ \varphi_0\le\varphi\le\phi_0+\Delta\varphi\ ,\ \theta_0\le\theta\le\theta_0+\Delta\theta\,.$$

ელემენტის მასა ტოლი იქნება $dM=\gamma dv\approx\lambda\rho_0^2\cos^2\theta_0 dv.$




ნახ. 6. სფეროსა და წერტილის ურთიერთქმედება

სფეროს ამ წერტილის ურთიერთქმედება მატერიალურ წერტილთან განისაზღვრება

$$dF=k\frac{mdM}{r^2}$$

მიზიდულობის კანონით . იმის გამო, რომ სფერული

ელემენტების მასა სიმეტრიული Oz ღერძისა, ერთნაირია, რეზულტატური ძალა ტოლი იქნება ყველა ელემენტის z ღერძზე პროექციათა ჯამისა. განვახორციელოთ გამოთვლები ნახ.6 - დან ვპოულობთ, რომ $Oc=\rho, OA=2R, OB=\rho\cos\theta,$

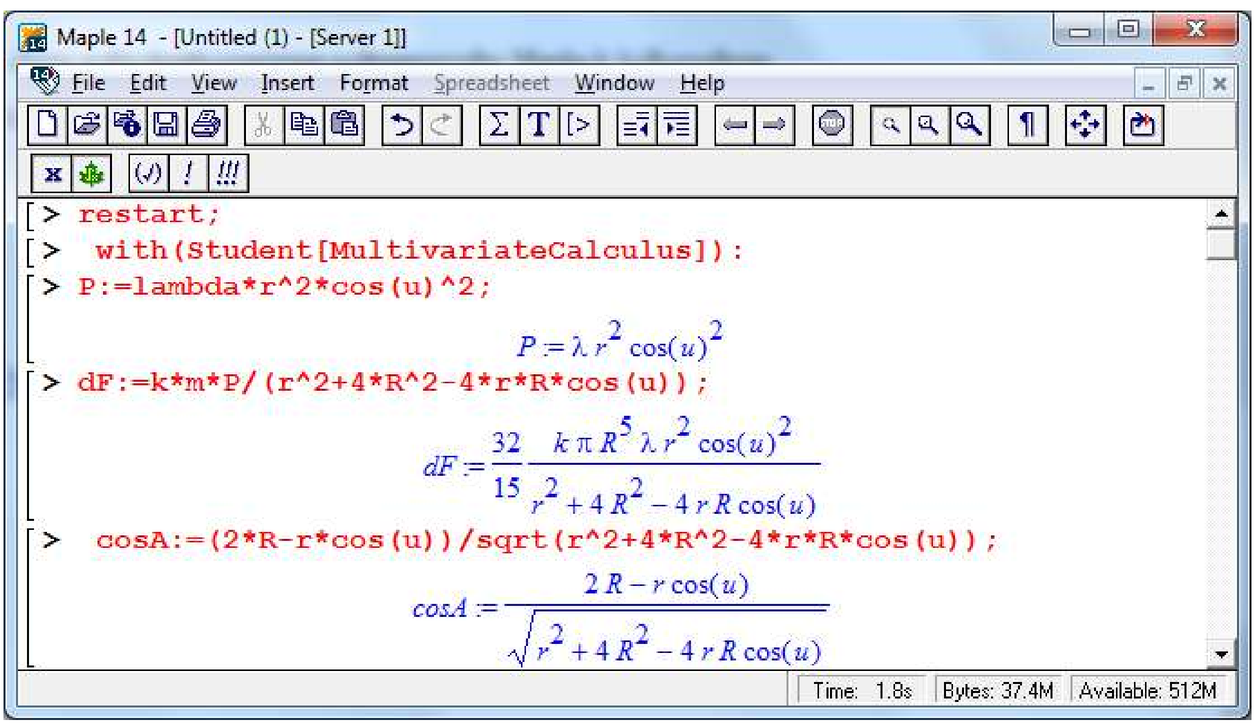
მაშინ $:\rho^2+4R^2-4R\rho\cos\theta, AB=2R-\rho\cos\theta$

$$AB=r\cos\alpha, \qquad \cos\alpha=\frac{AB}{r}=\frac{2R-\rho\cos\theta}{\sqrt{\rho^2+4R^2-4R\rho\cos\theta}}.$$

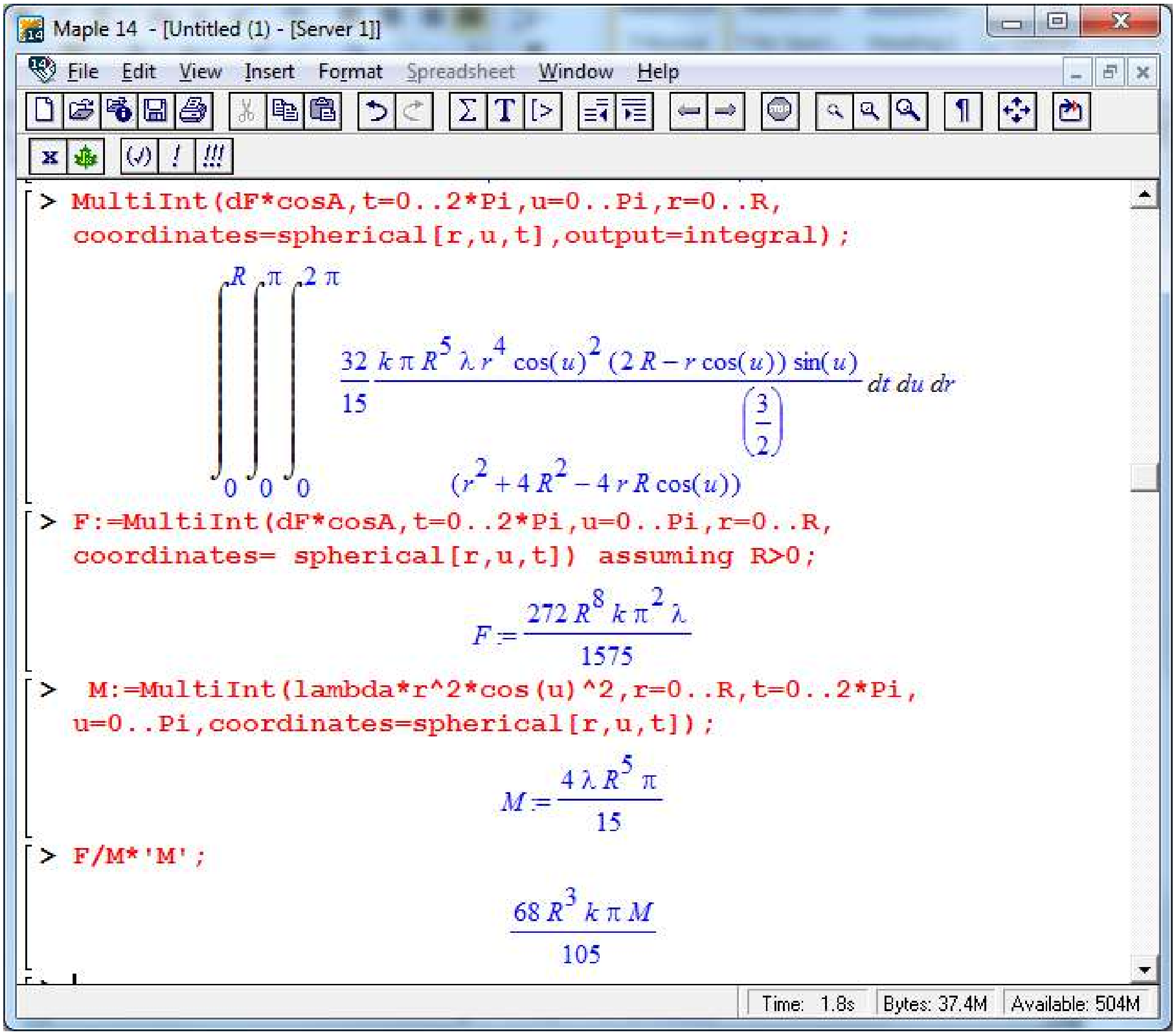
ამის გამო ძალის პროექცია ტოლი იქნება

$$dF\cos\alpha=k\frac{mdM}{r^2}\cos\alpha=k\frac{m\lambda\rho^2\cos^2\theta(2R-\rho\cos\theta)}{(\rho^2+4R^2-4R\rho\cos\theta)^{3/2}}dv.$$

ახლა განვახორციელოთ გამოთვლები Maple-ს საშალებით, სადაც P არის სიმკვრივე dF ძალის კოეფიციენტი სფერული ელემენტისთვის.იხ. ნახ.11.51 და ნახ.11.52




ნახ.11.51




ნახ.11.52

პასუხი: $\frac{68R^3k\pi M}{105}$

# 12.ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა Maple-ში

## 12.1.ბერნულის ფორმულები და მისი ანგარიში Maple-ში

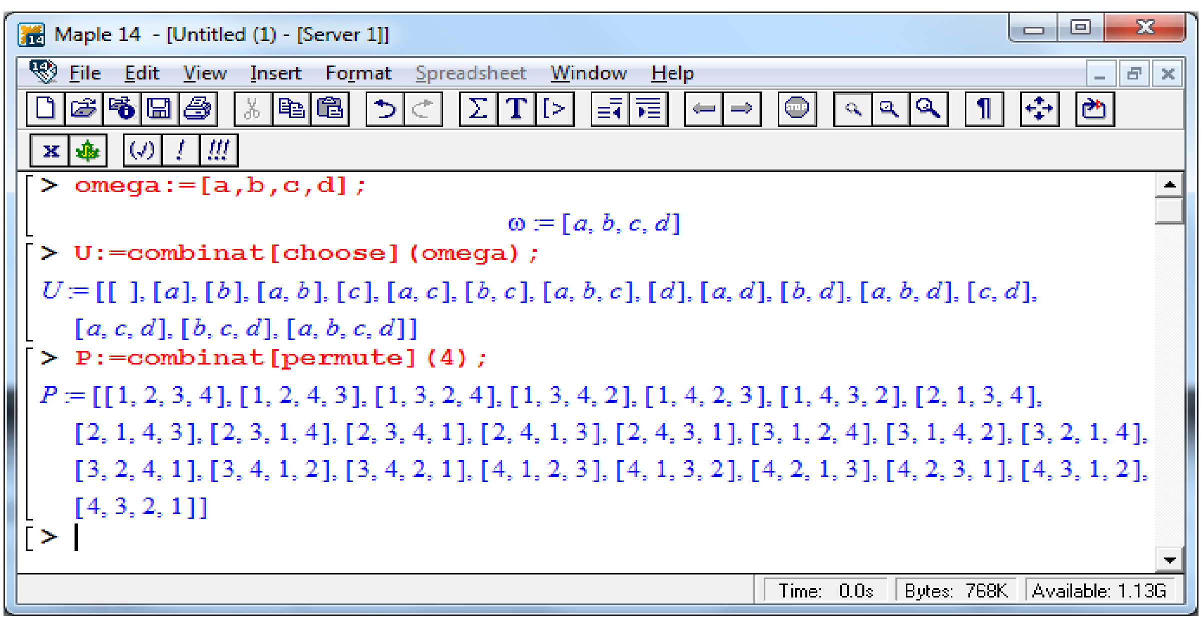
სანამ ალბათობის თეორიის ძირითად საკითხებზე გადავალთ, მანამდე მოკლედ მიმოვიხილოთ ალბათობის თეორიის ძირითადი ცნებები.

დავუშვათ ცდის(ექსპერიმენტის) შედეგად ვიღებთ რამოდენიმე ერთმანეთის გამომრიცხავ ელემენტარულ ხდომილებებს მოცემული ექსპერიმენტისას. შედეგები იგულისხმება, რომ ერთმანეთისგან დამოუკიდებელი არიან. მაშინ ვამბობთ,რომ მოცემული ექსპერიმენტი სრულდება მხოლოდ ერთი რომელიმე შედეგით.

ელემენტარული ხდომილობების(შედეგების) სივრცის (Ω) ცნების ქვეშ , ჩვენ ვაერთიანებთ ყველა ელემენტარულ ხდომილებას.

ელემენტარული ხდომილობების(შედეგების) სივრცის (Ω) ქვესიმრავლე არის შემთხვევითი ხდომილებები.

განვიხილოთ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე Omega=[a,b,c,d]. იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ მოვლენათა რაოდენობა მოვლენათა სივრცეში გამოვიყენოთ Maple-ს combinat ბიბლიოთეკიდან choose ბრძანება . ამ პროცედურას Maple-ში ექნება შემდეგი სახე (სურ.12.1)




**სურ.12.1**

ანუ სურ. 12.1 ბოლოს მივიღეთ 4!=24. ამ გადაადგილებათა რიცხვს მივიღებთ ბრძანებით
>**combinat[numbperm]**

## 12.2. კომბინატორიკის ზოგიერთი ფორმულები

**კომბინატორიკა-** ეს არის მათემატიკის დარგი, რომელიც სწავლობს ობიექტების კომბინაციათა სახეებს. კომბინატორიკის მეთოდები გამოიყენებიან ალბათობის თეორიაში, **მათემატიკურ პროგრამირებაში, გამოთვლით მათემატიკაში, ექსპერიმენტის დაგეგმვაში და** სხვა.

კომბინატორიკის ელემენტარული ოპერაციები Maple-ში განთავსებულია პროგრამული ბიბლიოთეკის სტანდარტულ პაკეტში **combinat.** მისი ამოქმედებისათვის ვიყენებთ ბრძანებას **> with(combinat);** შემდგომ ამისა ამ პაკეტის ბრძანებებთან მიმართვა შესაძლებელია სახელით მაგალითად **command (args),**

ანდა პაკეტის პრეფიქსის მითითებით ბრძანების წინ ასე:

**combinat[command](args).**

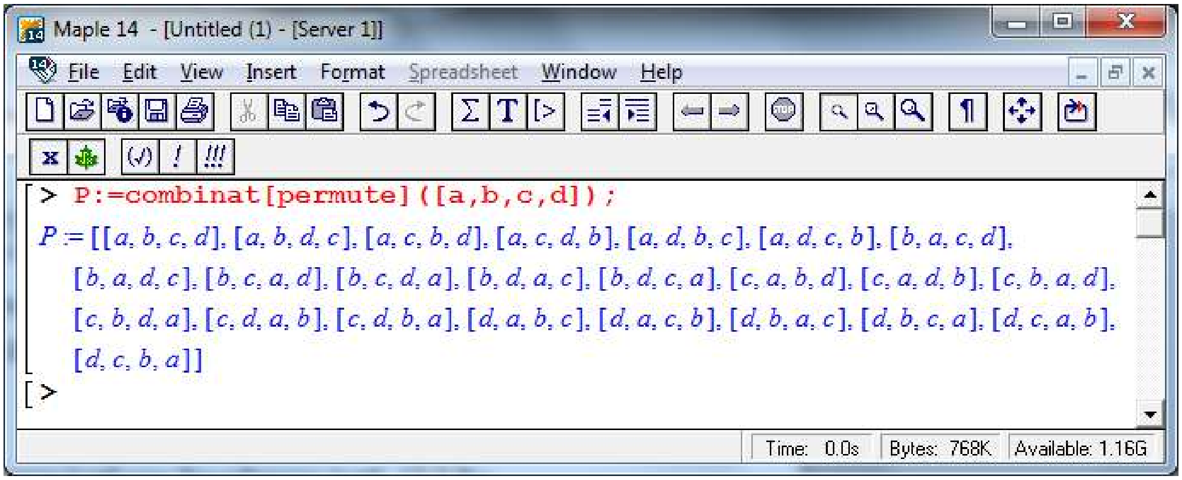
**მაგალითი.** ვთქვათ მოცემული გვაქვს შემთხვევითი მიმდევრობით ამოწერილი ოთხი ელემენტი a,b,c,d. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ a და b ელემენტები იქნებიან ერთად.

ამ ოთხი a,b,c,d ელემენტის ყველა შესაძლო გადაადგილებები მოიცემიან ფორმულით
$P_m = 4! = 24.$ Maple-ში ეს გამოითვლება ასე:

**>combinat[numbperm](4);**

**24**

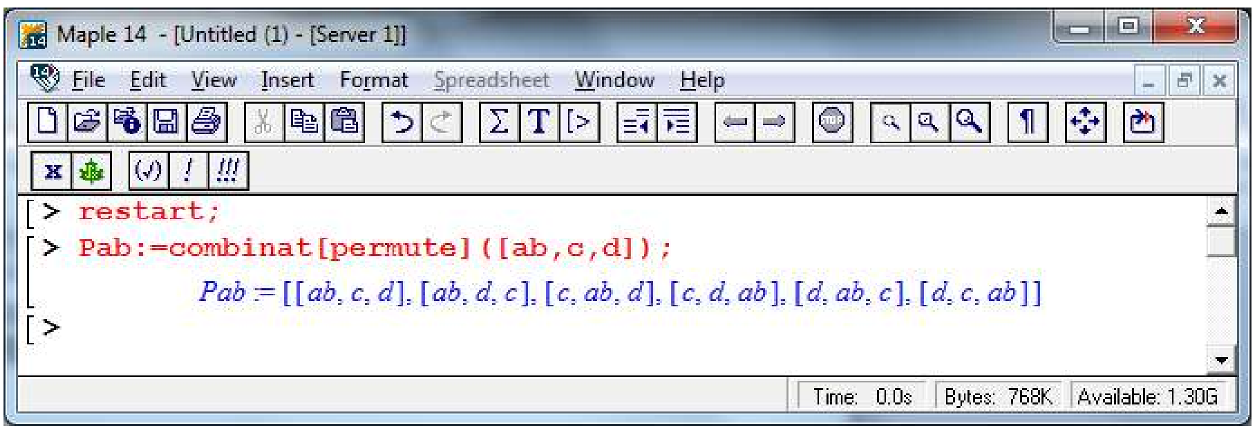
ხოლო თვითონ გადაადგილებათა სრული სურათი მოცემულია სურ. 12.2-ზე.




სურ.12.2

ხოლო დასმულ ამოცანას კი გადავწყვეტთ ასეთი ბრძანებით:

>**Pab:=combinat[permute]([ab,c,d]);** რაც საბოლოოდ გამოვა სურ.12.3 სახით.




სურ. 12.3

შედეგად გამოვიდა 6 ელემენტი $P_3 = 3! = 6$.

## წყობა

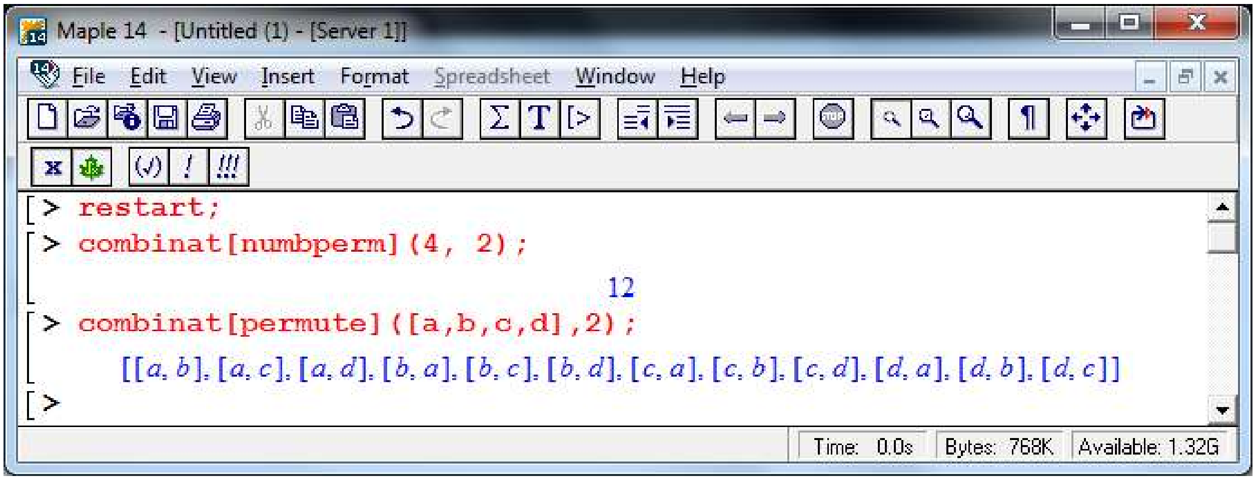
**განსაზღვრება**: n ელემენტიანი სიმრავლის ნებისმიერ m ელემენტიან დალაგებულ ქვესიმრავლეს ($m \le n$) ეწოდება წყობა n ელემენტისაგან m ად.

წყობას შეესაბამება საბოლოო ფორმულა: $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

მაგალითად $A_4^2 = \dfrac{4!}{(4-2)!} = \dfrac{24}{2} = 12.$

Maple-ში წყობის გამოსათვლელად გამოიყენება ოპერატორი:

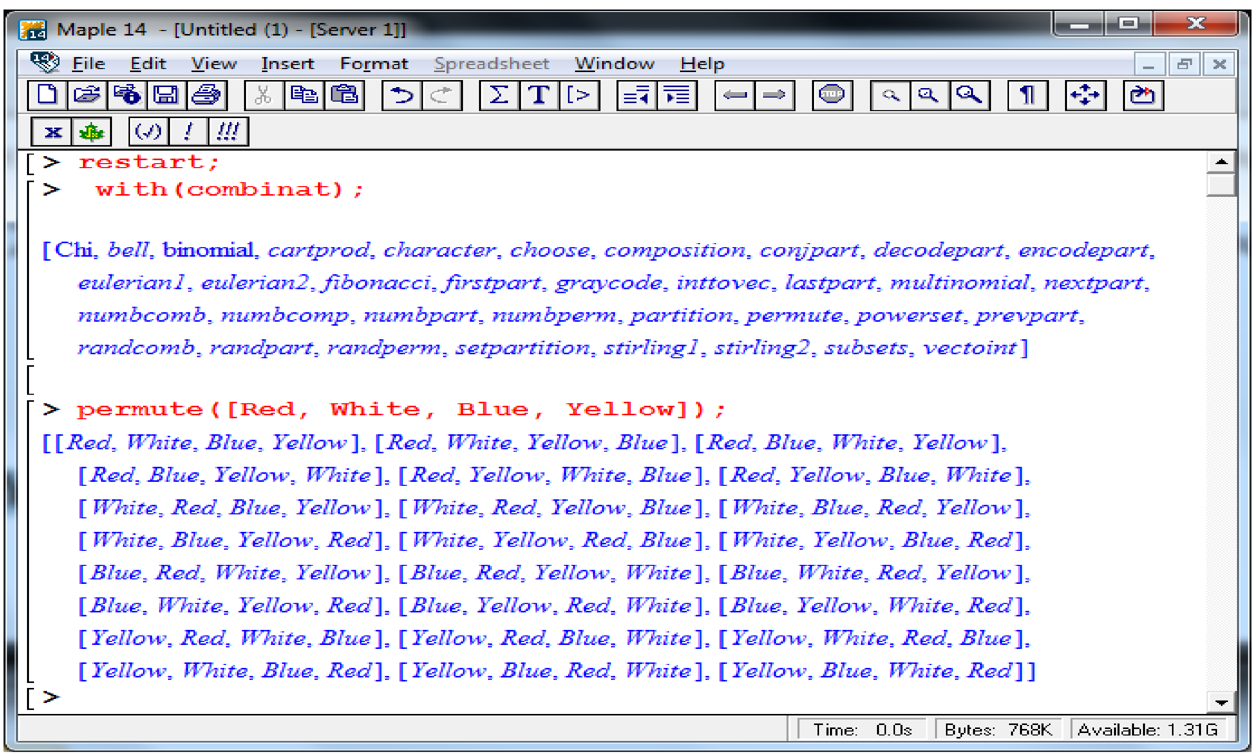
> **combinat[numbperm](4, 2);** იხ. სურ. 12.4



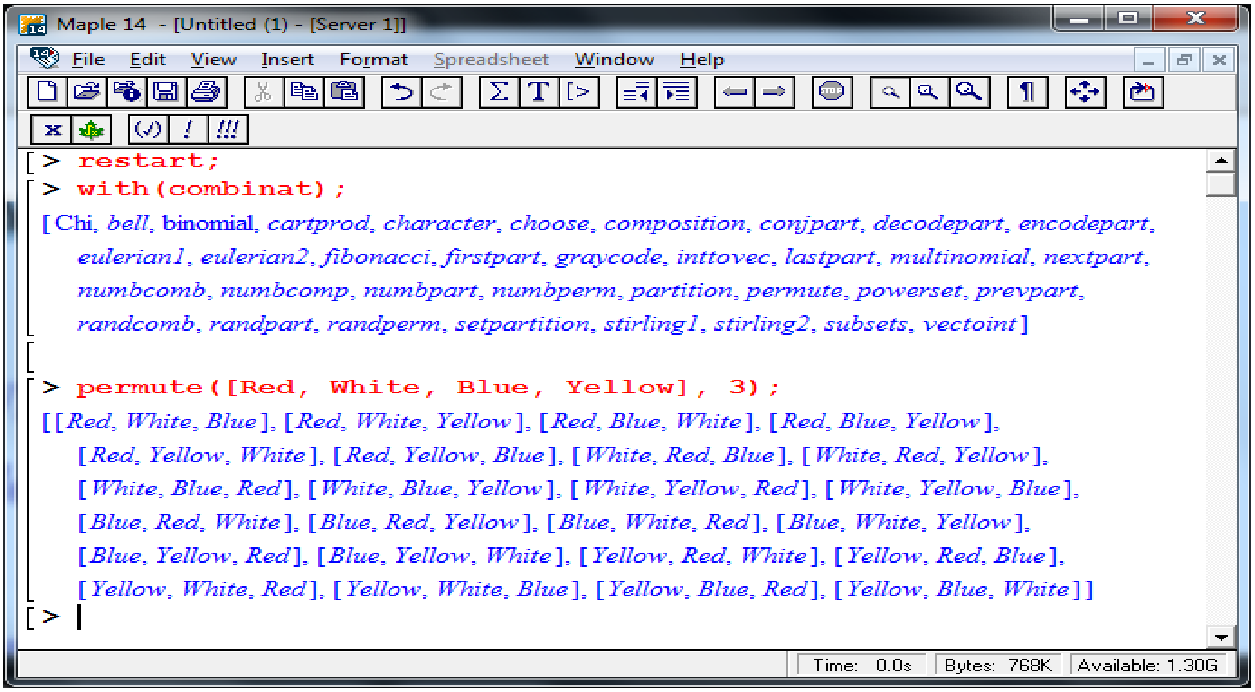

სურ. 12.4

**მაგალითი.** ჩამოვთვალოთ ოთხი მოცემული (წითელი,თეთრი,ლურჯი და ყვითელი) ფერის გადანაცვლებათა ( $P_4 = 4! = 24$ ) 1. ყველა შესაძლო გადანაცვლება. 2. წყობა 4 დან სამ-სამად ( $A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{24}{1} = 24$ ).

Maple-ში ეს გამოთვლები მიიღებს სახეს სურ.12.5 და სურ. 12.6



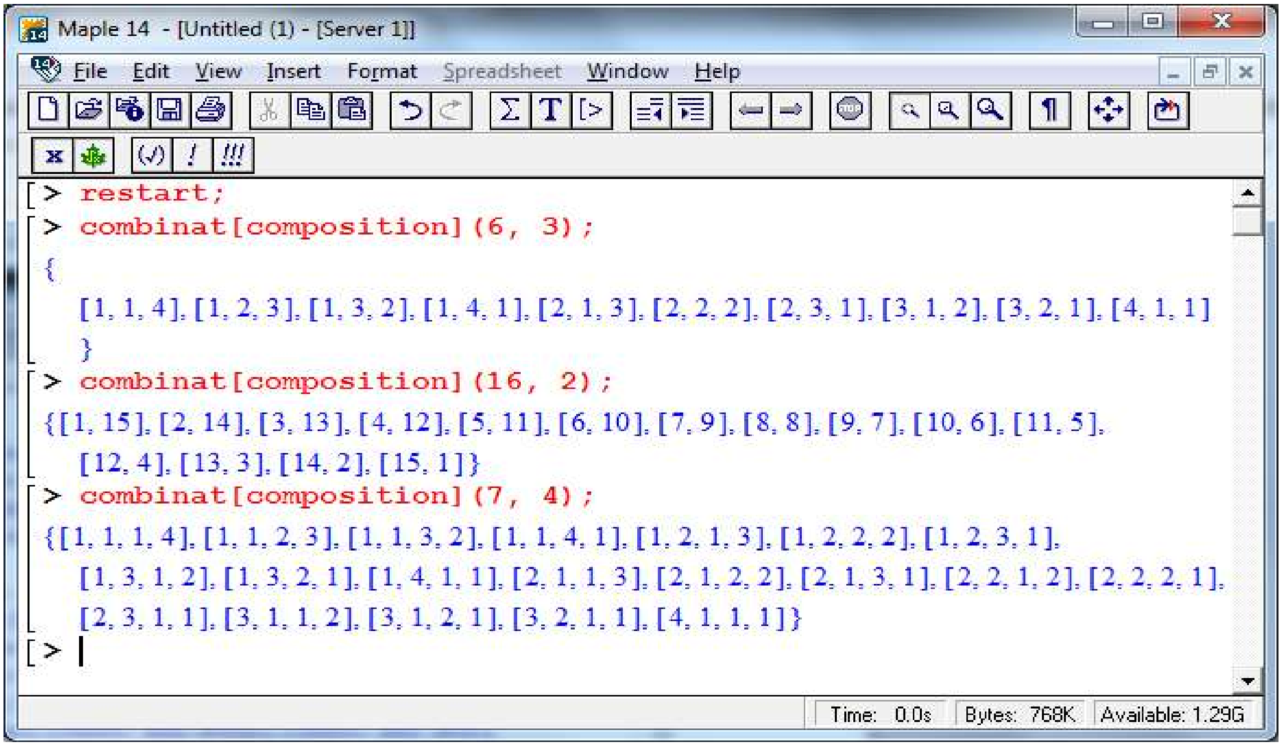

სურ.12.5




სურ. 12.6

## მთელი რიცხვის შესაკრებები

**მაგალითი.** ა) მოვძებნოთ რიცხვი 6-ის ყველა სამშესაკრებიანი ვარიანტი ბ)მოვძებნოთ რიცხვი 16-ის ყველა ორშესაკრებიანი ვარიანტი გ) მოვძებნოთ რიცხვი 7-ის ყველა ოთხშესაკრებიანი ვარიანტი. იხ. სურ. 12.7




სურ. 12.7

## ჯუფთება

**განსაზღვრება:** n ელემენტიანი სიმრავლის ნებისმიერ m ელემენტიან დალაგებულ ქვესიმრავლეს ($m \le n$) ეწოდება ჯუფთება n ელემენტისაგან m ად.

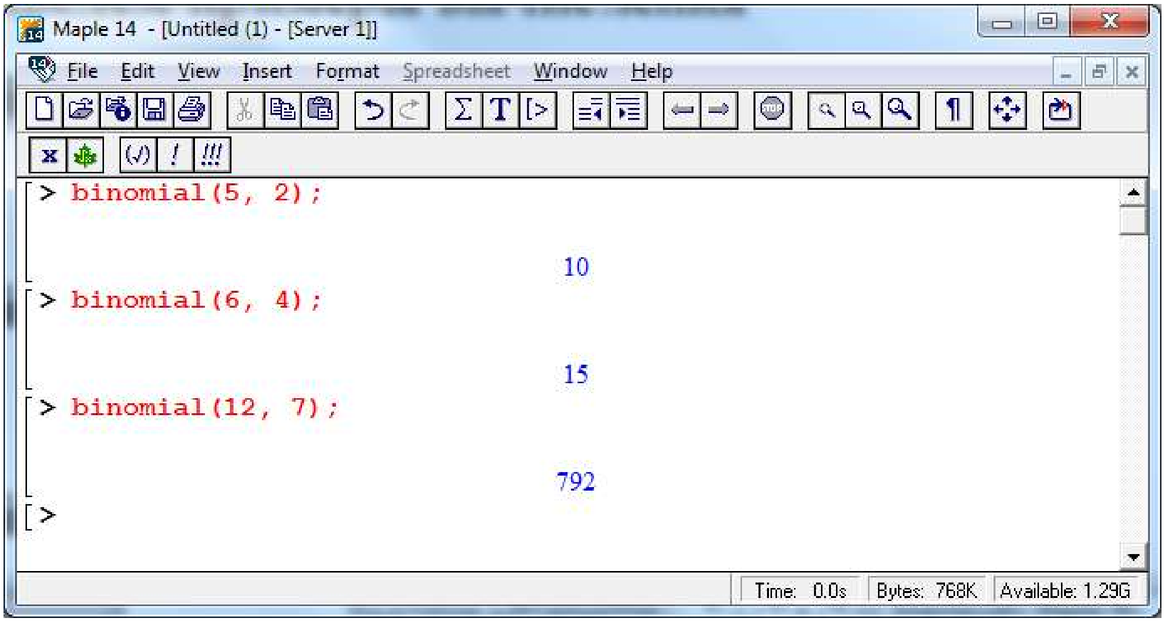
ჯუფთების ფორმულას ექნება სახე: $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

მაგალითად გამოვთვალოთ : $C_5^2, C_6^4, C_{12}^7$ სიდიდეები Maple-ში(სურ12.8).

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{3!*4*5}{2!*3!} = 10 \quad C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{4!*5*6}{4!*2!} = \frac{30}{2} = 15.$$

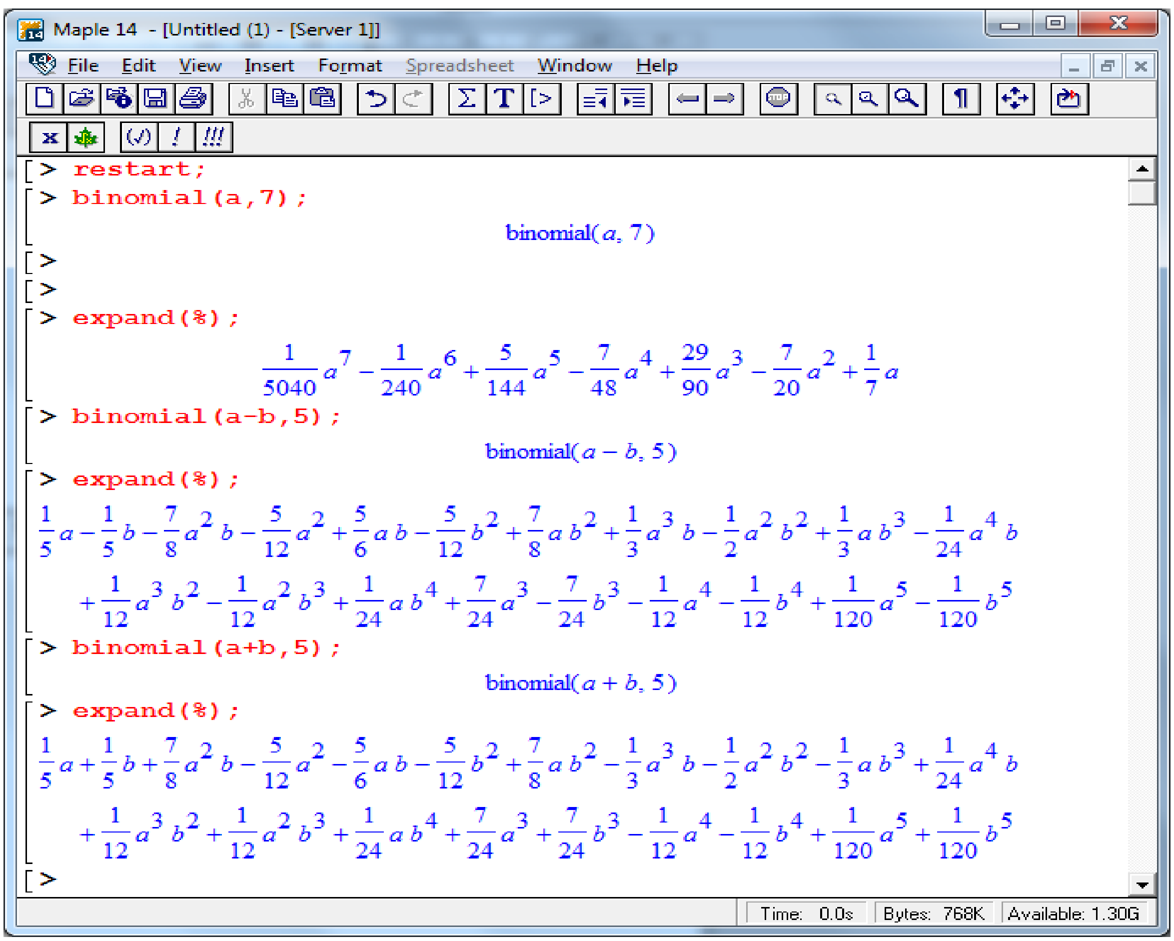
$$C_{12}^7 = \frac{12!}{7!(12-7)!} = \frac{7!*8*9*10*11*12}{7!*5!} = \frac{8*9*10*11*12}{120} = 8*9*11 = 792$$

Maple-ში(სურ12.8).




სურ. 12.8

Maple-ს ფუნქცია **binomial** გამოიყენება ბინომად გაშლის დროსაც იხ. სურ. 12.9




სურ. 12.9

## 12.3. ალბათობების შეკრება და გამრავლება.

**განსაზღვრება.** A და B ხდომილებათა ჯამის ქვეშ გვესმის A+B ხდომილება, რომელიც შეიძლება დადგეს მაშინ, როდესაც ადგილი აქვს ან ხდომილებას A -ს ან - B-ს.

**განსაზღვრება.** A და B ხდომილებათა ნამრავლის ქვეშ გვესმის A*B ხდომილება, რომელიც შეიძლება დადგეს მაშინ, როდესაც ადგილი აქვს ხდომილებას A -ს და - B-ს. ანუ ეს ხდომილებები უნდა დადგნენ ერთდროულად.

### ბაიესის ფორმულა.

ვთქვათ A ხდომილება დადგება ერთი და მხოლოდ ერთი მოვლენის შედეგად მოვლენათა სიმრავლიდან $\{H_i\}$ i=1,2,...,n . ხდომილებათა სიმრავლე $H_1, H_2, \ldots, H_n$ ქმნიან სრულ ხდომილებათა ჯგუფს და იწოდებიან ამ შემთხვევაში **ჰიპოთეზებად.**
ადგილი აქვს ხდომილობათა შესაბამისად ალბათობის ფორმულას: $P(A/H_k)$ და ეს ფორმულა იწოდება **სრული ალბათობის** ფორმულად. აუცილებელია შევაფასოთ ცდის შედეგად მიღებული ჰიპოთეზების ალბათობები. ეს მიიღწევა **ბაიესის** ფორმულის მეშვეობით:

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{k = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A/H_k)}.$$

### ბერნულის სქემა. ბერნულის ფორმულა

ვთქვათ გამეორებადი დამოუკიდებელი ცდების შედეგად ხდომილება A დგება ერთი და იგივე ალბათობით (არადამოკიდებულით ცდის ნომერზე). ანუ $P(A) = p$ . ასეთი გვარის ცდათა სერია იწოდებიან **ბერნულის** სქემებად. ვთქვათ აგრეთვე, რომ $q$ ეს არის არის A ხდომილების საწინააღმდეგო ხდომილება $\overline{A}$. მაშინ $q = 1 - p.$ ბერნულის სქემის პირობებში, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ხდომილება A, n ცდის პირობებში დადგება m ჯერ. ამ ხდომილების ალბათობას ავღნიშნავთ $P_n(m)$.
ამ ალბათობას გამოითვლიან შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad \text{სადაც} \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

ეს ფორმულები იწოდებიან **ბერნულის** ფორმულებად.
განვიხილოთ მაგალითები:
**მაგალითი 1.**

ხორციელდება მიზანში სროლა n დამოუკიდებელი გასროლის შედეგად. ერთი გასროლის შედეგად ჭურვის მოხვედრის ალბათობაა p. თუ მიზანში მოხვდა m ჭურვი (m=1,2,...,n), მაშინ სამიზნის დაზიანების პირობითი ალბათობა გამოისახება ფორმულით: $P(A|m)=1-s^m$, სადაც $0<s<1$. განვსაზღვროთ სამიზნის დაზიანების სრული ალბათობა.

**ამოხსნა.**

ჰიპოთეზა $H_m$ - სამიზნეს მოხვდა m ჭურვი (m=1,2,...,n).

$$P(A)=\sum_{m=1}^{n}P(H_m)P(A|m)=\sum_{m=1}^{n}C_n^m P^m(1-p)^{n-m}(1-s^m).$$

გავამარტივოთ ეს გამოსახულება; რადგან $1-s^0=0,$ მაშინ გვაქვს

$$P(A)=\sum_{m=0}^{n}C_n^m P^m(1-p)^{n-m}(1-s^m)=\sum_{m=0}^{n}C_n^m(1-p)^{n-m}-$$
$$\sum_{m=0}^{n}C_n^m(ps)^m(1-p)^{n-m},$$

მაგრამ $\sum_{m=0}^{n}C_n^m(ps)^m(1-p)^{n-m}=1;$

შემდეგ ბინომის ფორმულის გამოყენებით გვექნება:

$$\sum_{m=0}^{n}C_n^m(ps)^m(1-p)^{n-m}=[ps+1-p]^n=[1-p(1-s)]^n;$$

ამიტომაც $P(A)=1-[1-p(1-s)]^n.$

## 12.4. შემთხვევითი სიდიდეები

**განსაზღვრება.** სიდიდეს ეწოდება შემთხვევითი, თუ იგი იღებს მნიშვნელობებს მხოლოდ ცდების შედეგების მიხედვით. შემთხვევითი სიდიდე თითოეული ელემენტარული ხდომილობისთვის იღებს ერთადერთ მნიშვნელობას. შემთხვევითი სიდიდეები, როგორც წესი გამოისახებიან დიდი ლათინური ასოებით X,Y,... . განასხვავებენ **დისკრეტულ** და **უწყვეტ** შემთხვევით სიდიდეებს.

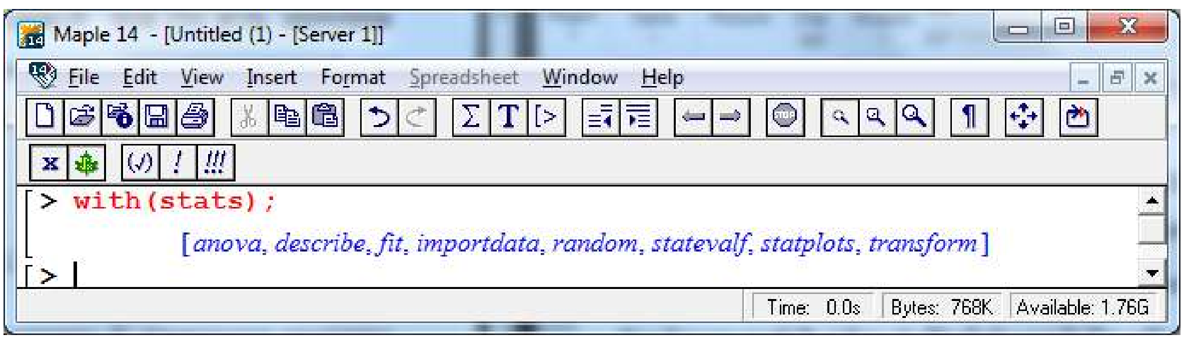
განასხვავებენ დისკრეტულ და უწყვეტ შემთხვევით სიდისეებს. თუ შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობათა სიმრავლე სასრულია, მაშინ ასეთ შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება **დისკრეტული.** ხოლო თუ შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობები ავსებენ რიცხვით ღერძს (ანუ ეს მნიშვნელობები უწყვეტად ავსებენ ამ რიცხვით ღერძს), მაშინ ასეთ შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება **უწყვეტი.**

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები

$p_i = P(X = x_i)$, სადაც $(i = 1,2,\ldots,n)$.

აქ $p_i$ - არის ალბათობა იმისა, რომლითაც შემთხვევითი სიდიდე X იღებს $x_i$ მნიშვნელობებს.

პროგრამათა პაკეტი, რომელიც გამოიყენება ალბათობის თეორიასა და მათემატიკურ სტატისტიკაში, არის პაკეტი "stats". მასთან მიმართვა ხორციელდება შემდეგნაირად:




განაწილების პარამეტრები მოიცემა კვადრატულ ფრჩხილებში. პროგრამა Maple-ში ინტეგრალური ფუნქცია,დიფერენციალური ფუნქცია(განაწილების კანონი) და და დისკრეტული განაწილების კვანტილი შესაბამისად აღინიშნებიან **dcdf, pf, icdf.** უწყვეტი განაწილებისათვის აღინიშნებიან **cdf , pdf, icdf.** ფუნქცია შეიძლება მოცემულ იქნას ორი სახით და $x = t$ :

1) **statevalf**[ფუნქციის სახე,განაწილების კანონი](არგუმენტი),

**Statevalf**[ფუნქციის სახე,განაწილების კანონი](არგუმენტი)(t)

2) **X:=RandomVariable**(განაწილების კანონი);

**ProbabilityFunction(X,x);**

**ProbabilityFunqtion(X,t);**

Evald(%)

## დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეები

## განაწილების ცხრილური კანონი

**განსაზღვრება.** დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი ეწოდება შესაბამისობას შემთხვევითი სიდიდის ყველა შესაძლო მნიშვნელობასა და მათ ალბათობებს შორის, რომელითაც იღებს შესაბამის მნიშვნელობებს შემთხვევითი სიდიდე.

როგორც წესი დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდის დროს განაწილების კანონი მოიცემა შემდეგი ცხრილის სახით:

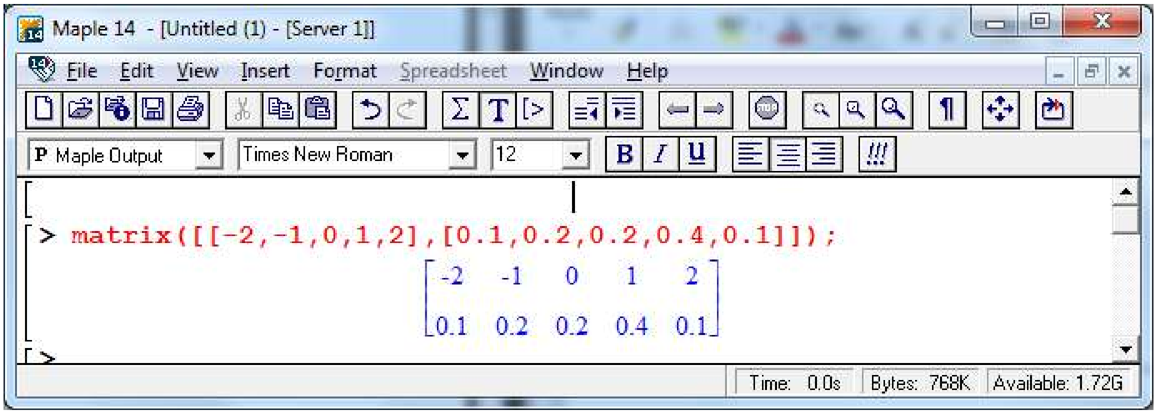
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
| $p$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

**X** შემთხვევითი სიდიდის ყველა შესაძლო $x_i$ (i=1,2,...,n) მნიშვნელობები სრულ ჯგუფს. ამიტომ გვაქვს

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$$

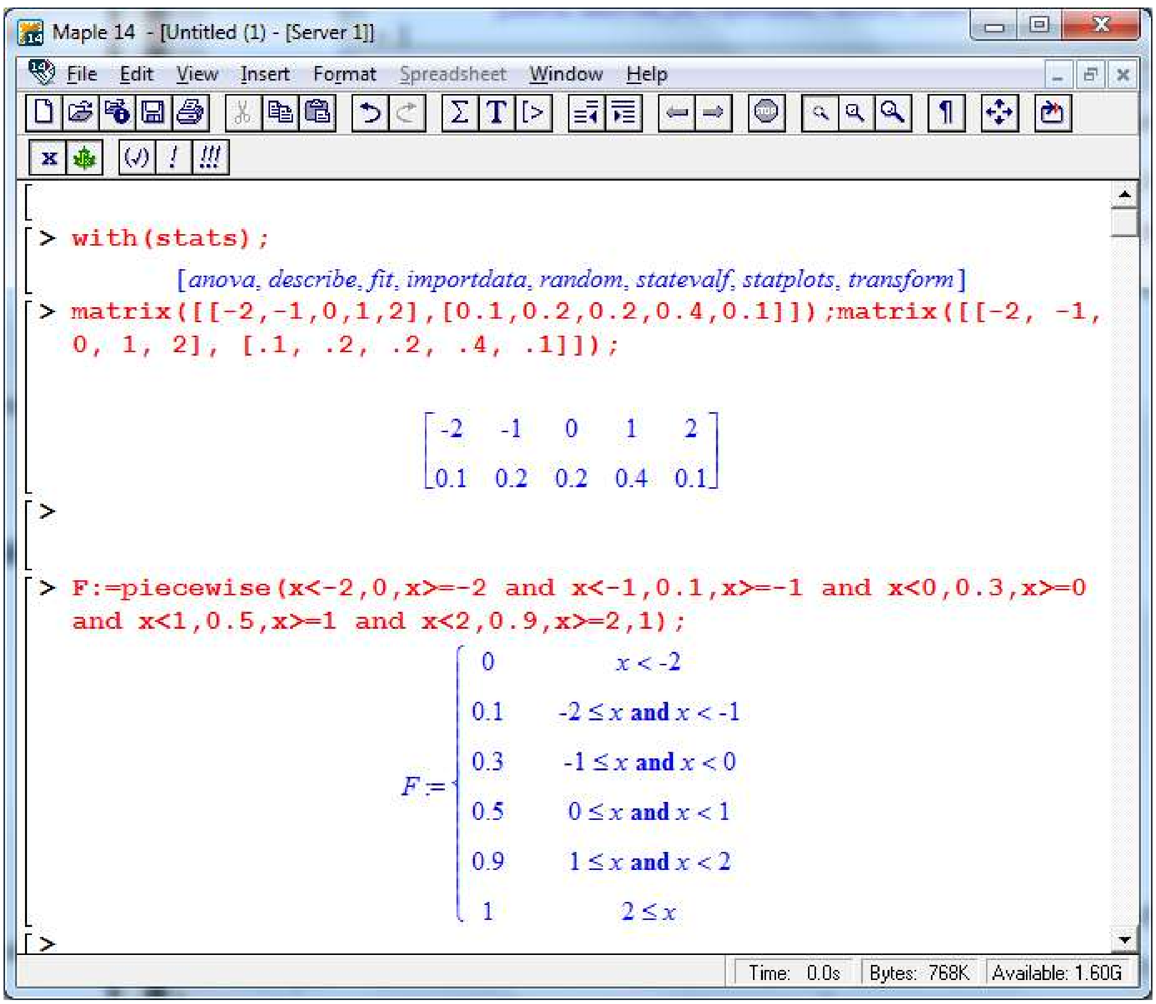
განვიხილოთ მაგალითი.

**მაგალითი.** ვთქვათ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი მოცემულია შემდეგი სახით:



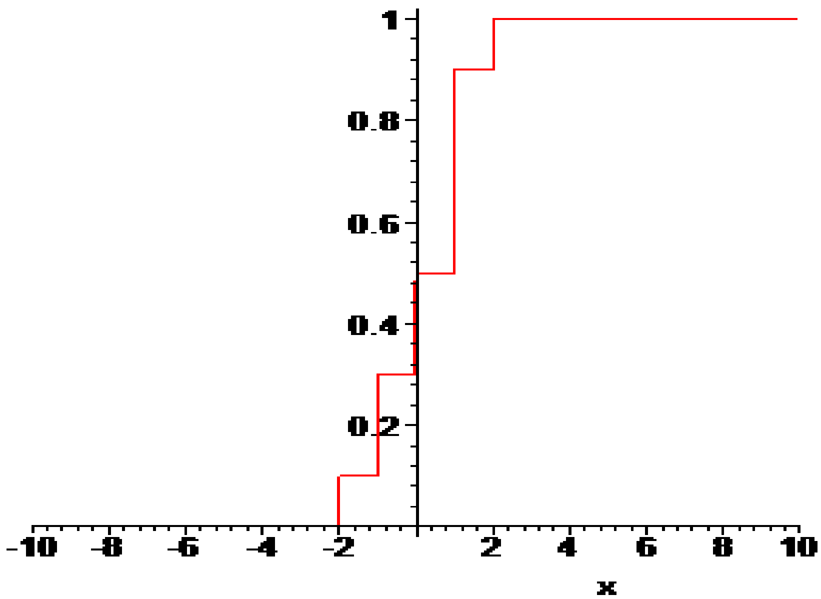

მოვძებნოთ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია და განვსაზღვროთ ამ შემთხვევითი სიდიდის [-1,2] შუალედში მოხვედრის ალბათობა.

**ამოხსნა.**

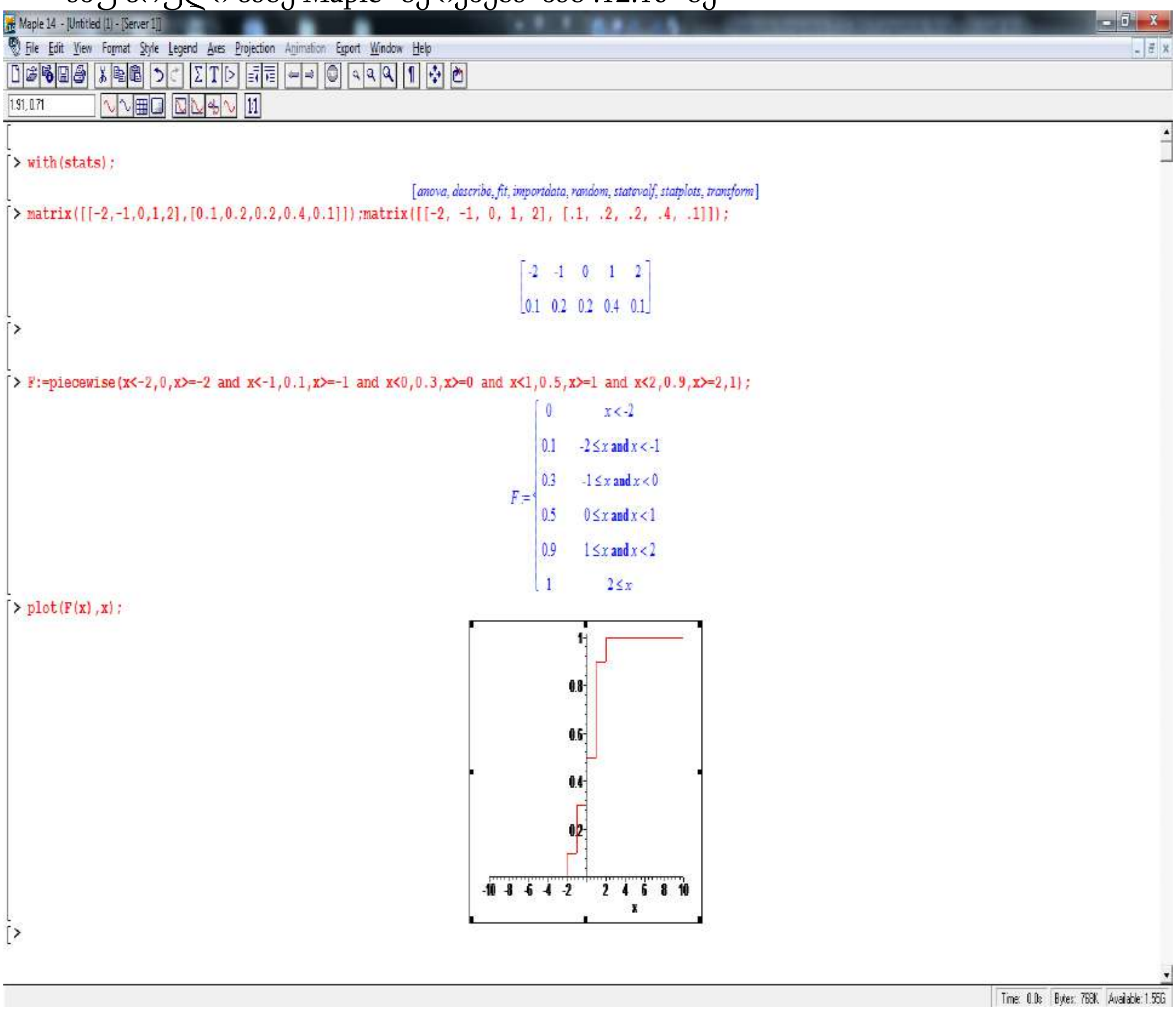



განაწილების ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად ვისარგებლოთ სტანდარტული ბრძანებით:

```
> plot(F(x),x);
```

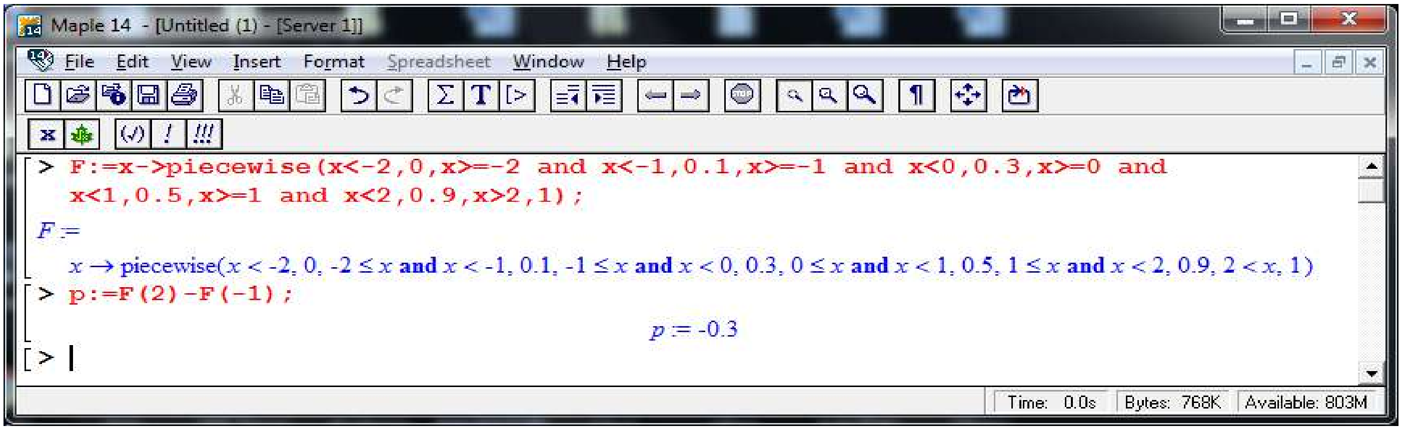



ანუ სრული სახე Maple-ზე იქნება ნახ .12.10-ზე




ნახ.12.10

იმისათვის ,რომ გამოვთვალოთ შემთხვევითი სიდიდის [-1;2] შუალედში მოხვედრის ალბათობა ვისარგებლოთ შმდეგი პროცედურით:




ნახ.12.11

დავასახელოთ ძირითადი განაწილებები და მათ აღნიშვნები Maple-ში.

<u>დისკრეტული განაწილებები</u>

**binomiald[n,p]** **discreteuniform[a,b]**

**empirical[list_prob]** **hypergeometric[N1,N2,n]**

**negativebinomial[n,p]** **poisson[mu]**

### 12.5 ბინომიალური განაწილება

ბერნულის სქემის პირობებში n დამოუკიდებელი ცდის პირობებში, რომელთაგან თითოეული მათგანი მთავრდება ან „წარმატებით" ან „წარუმატებლად". ვთქვათ თითოეულ ცდაში A ხდომილების დადგომის ალბათობა( წარმატების ალბათობა) უდრის p-ს, ხოლო წარუმატებლობის ალბათობა q=1-p. A ხდომილების დადგომის რაოდენობა განიხილება , როგორც X შემთხვევითი სიდიდის სანაცვლოდ. ეს სიდიდე იღებს მნიშვნელობებს 0 დან n მდე. მის განაწილებას უწოდებენ ბინომიალურს. ამ შესაძლო k მნიშვნელობათა ალბათობა გამოითვლება ბერნულის ფორმულით. ბინომიალური განაწილების ყველა ალბათობების ჯამი არის ერთის ტოლი ,ანუ არის:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = p^n + np^{n-1}q + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + .. + q^n = 1$$

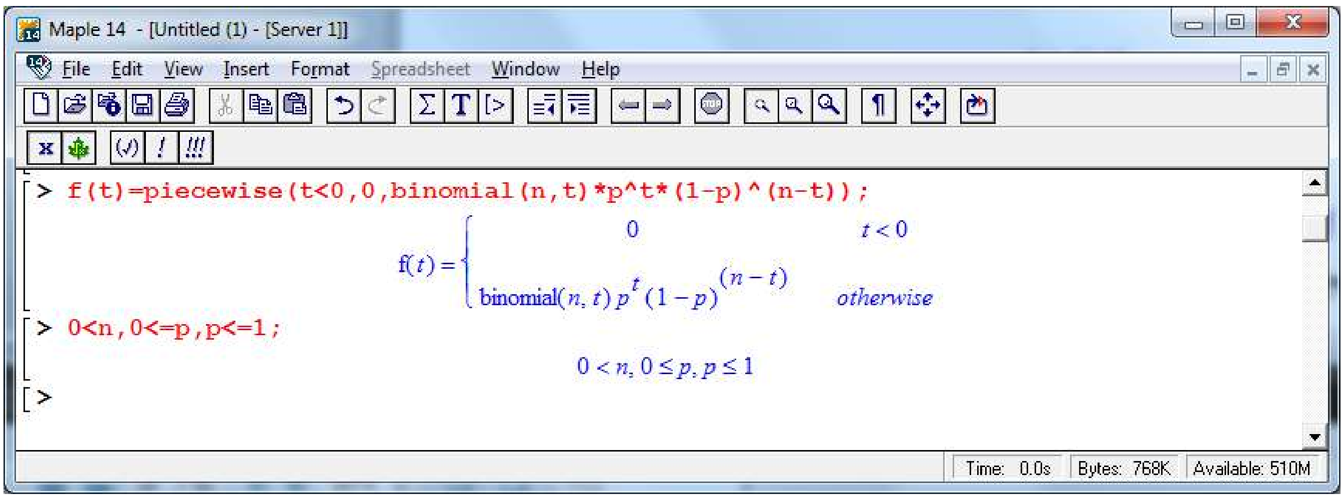
მოცემული მიმდევრობა შეიძლება მოცემულ იქნას შემდეგი სახით:

**Binomial(n,p); BinomialDistribution(n,p);**

სადაც **n**- არის ცდათა რაოდება , ხოლო **p** – წარმატების ალბათობა

ბინომიალური განაწილება აღიწერება შედეგნაირად:

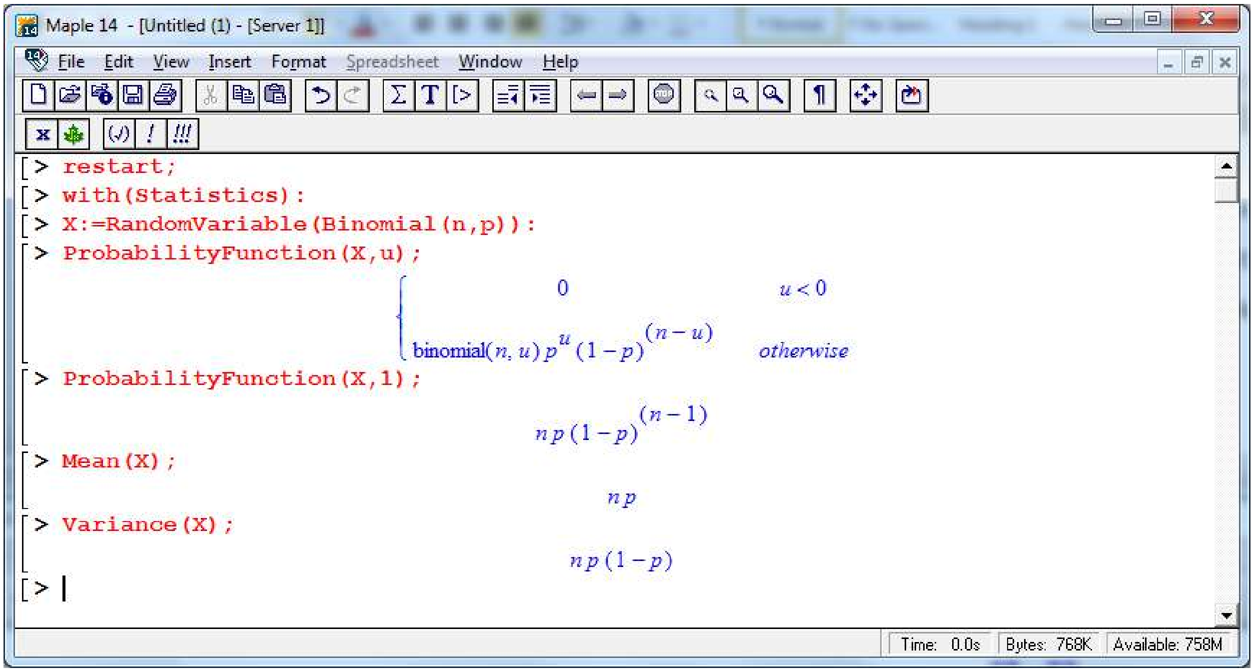
**>f(t)=piecewise(t<0,0,binomial(n,t)*p^t*(1-p)^(n-t));**




ნახ.12.12

ბინომიალური განაწილება გამოიყენება მხოლოდ ზოგიერთ შემთხვევებში წარმატების და წარუმატებლობის ალბათობათა შეფასების დროს. მიღებული სიდიდე მიუთითებს ბერნულის **n** მწკრივში წარმატებების თითოეულის **p** ალბაობას.

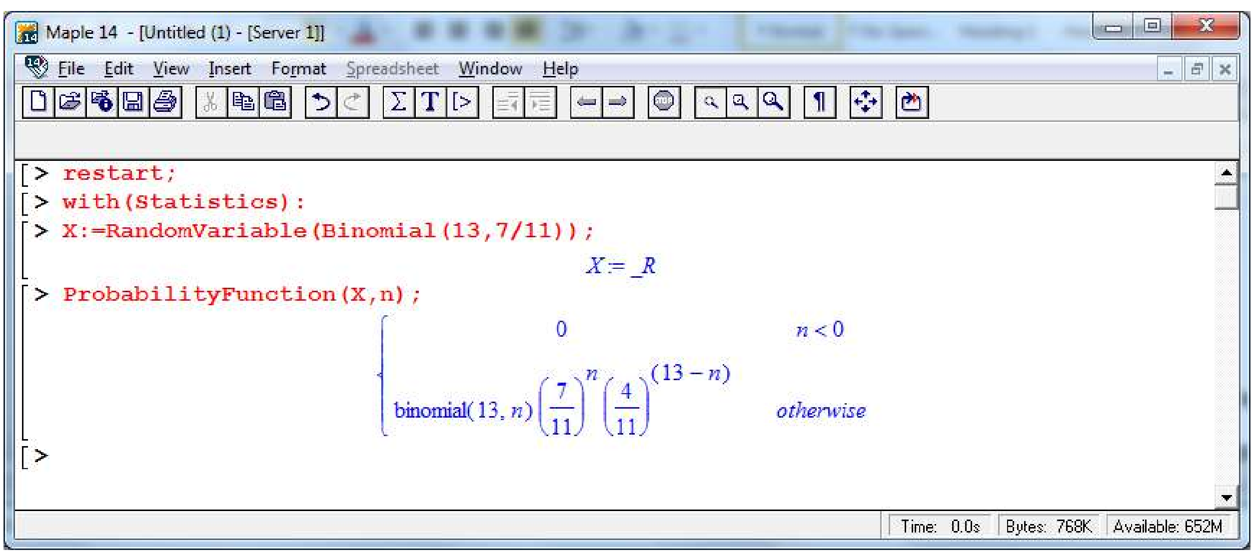
**მაგალითი 1** (იხ. ნახ. 12.13)




ნახ. 12.13

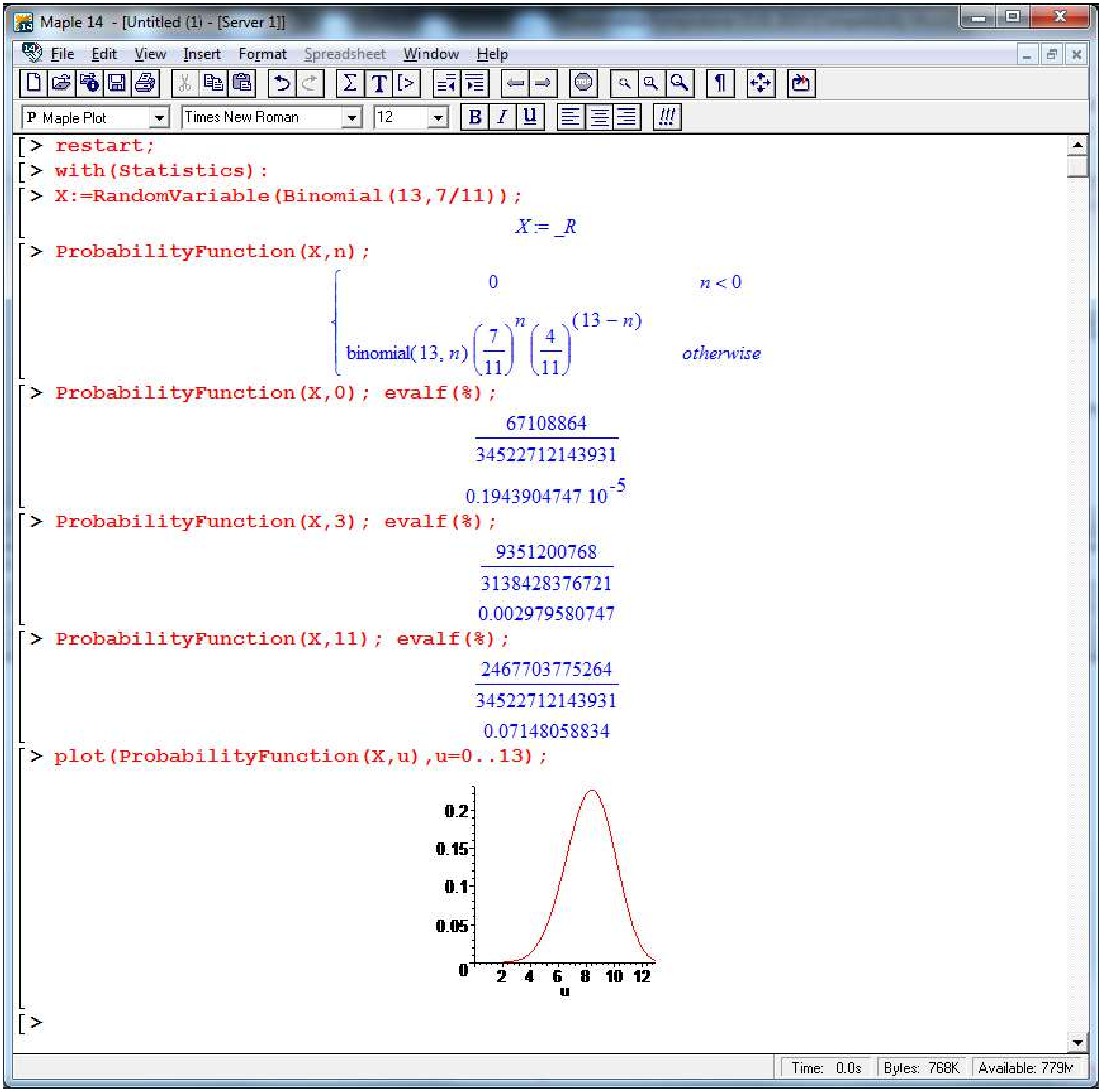
**მაგალითი. 2.**

ვთქვათ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე ექვემდებარება განაწილების ბინომიალურ წესს **n =13,** =7/11. მაშინ ალბათობათა განაწილების წესი მოიძებნება შემდეგნაირად (იხ. ნახ. 12.14)




ნახ. 12.14

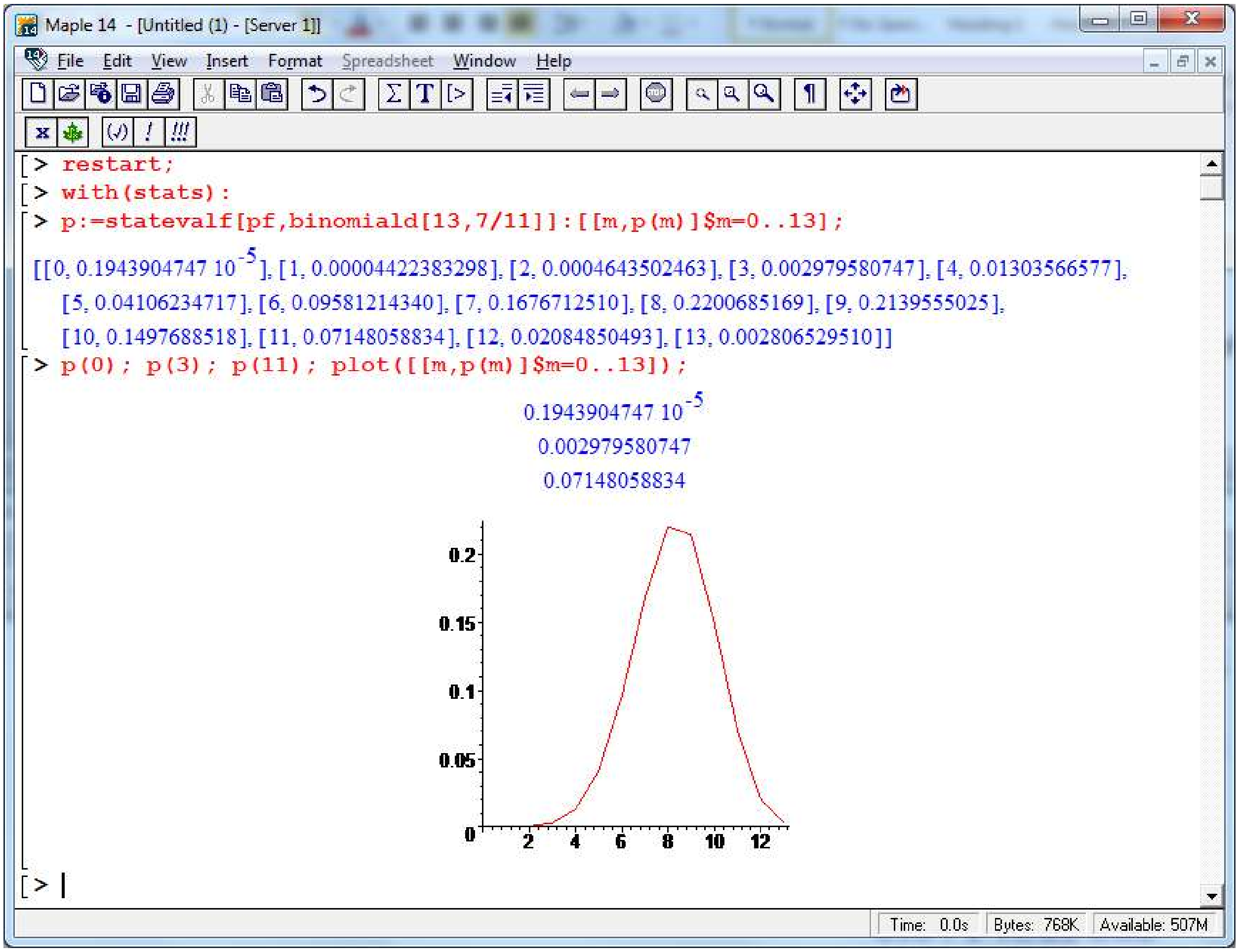
ახლა მოვძებნოთ მნიშვნელობები წერტილებში **0, 3, 11** და ავაგოთ მოცემული განაწილების გრაფიკი (იხ. ნახ. 12.15)




ნახ. 12.15

ალბათობათა განაწილების მოძებნის მეორე მეთოდი გამოიყურება შემდეგნაირად:

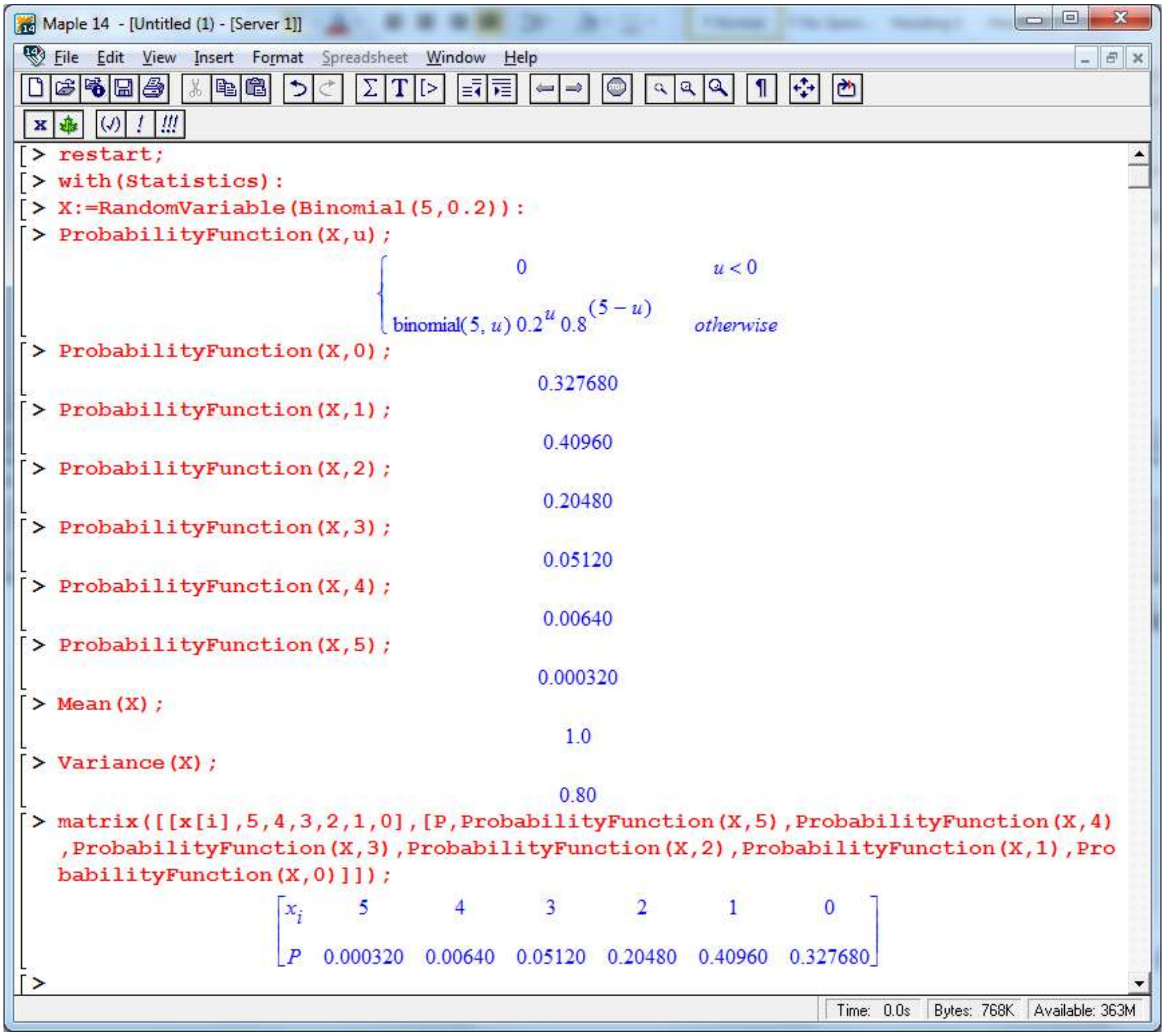
(იხ. ნახ. 12.16)




ნახ. 12.16

**ამოცანა.** ბანკმა გასცა 5 კრედიტი.კრედიტების არდაბრუნების ალბათობა არის 0,2 თითოეული კრედიტორისათვის. შევადგინოთ განაცილების ცხრილი კრედიტების ვადის ამოწურვის შემდეგ კრედიტების არ დამბრუნებელი კრედიტორების რაოდენობისა.

ამოხსნა(იხ. ნახ 12.17)




ნახ 12.17

## 12.6. პუასონის განაწილება

ხორციელდება $n$ ცდა, A ხდომილების დადგომის ალბათობა არის p . მაშინ, ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილება დადგება k ჯერ, მოიცემა ფორმულით, რომელიც წარმოადგენს მასიური და იშვიათი ხდომილებების **პუასონის** განაწილების კანონს, იმ პირობით, რომ ნამრავლი $n\,p$ წარმოადგენს მუდმივ სიდიდეს, ანუ $n\,p=\lambda$

$$p_n(k)=\frac{\lambda^k \ell^{-\lambda}}{k!}$$

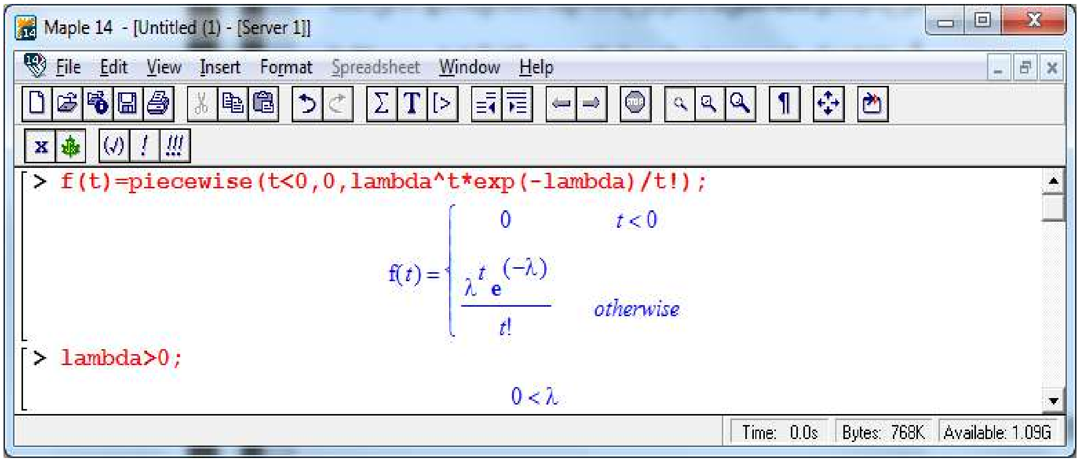
მოცემული მიმდევრობა შეიძლება ჩაიწეროს ასე:

## Poisson(lambda) ან PoissonDistribution(lambda)

სადაც **lambda** ეს არის ინტენსიურობის პარამეტრი.

Maple-ზე ამოხსნის აღწერას ექნება სახე:

>**f(t)=piecewise(t<0,0,lambda^t*exp(-lambda)/t!);**




ნახ.12.18

ყურადღება უნდა მივაქციოთ იმას,რომპუასონის ბრძანება არის ინერტული და საჭიროა მისი გამოყენება **RandomVariable** ბრძანებასთან ერთად.

ფუნქციები Quantile და CDF  პუასონის განაწილებაში გამოიყენებიან, როგორც გამეორებათა მიმდევრობა, რომ მივიღოთ სასურველი შედეგი. კომპანია Maple-ის მიერ გამეორებათა რაოდენობა (გაჩუმების წესით) წარმოადგენს 100, მაგრამ ეს რიცხვი შეიძლება შეცვლილ იქნას თუ გამოვიყენებთ ციკლურ ცვლადს EnvStatisticsIterations გამეორებათა სასურველ რიცხვთან.

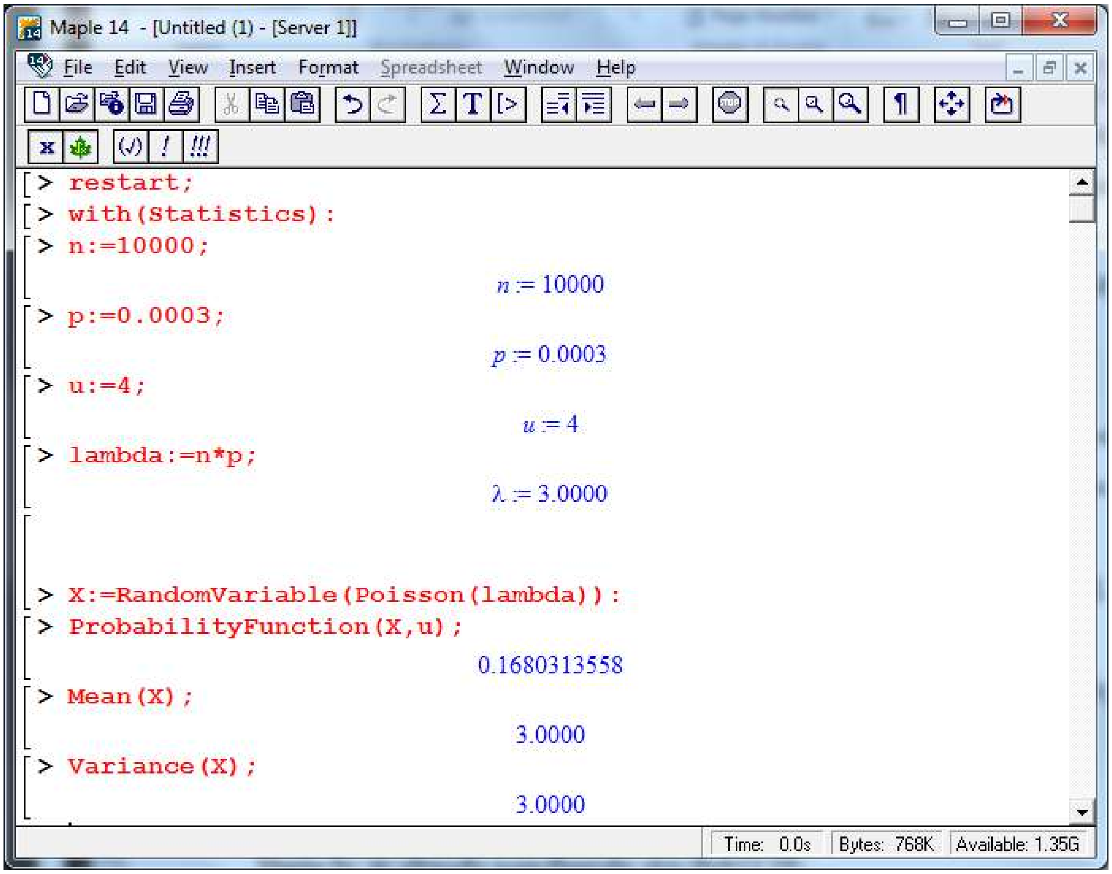
გამოთვლები ხორციელდება შემდეგნაირად (იხ. ნახ.12.19):

**ამოცანა.** სასაწყობო ბაზაზე გაგზავნილია 10 000  ნაკეთობა. ალბათობა იმისა , რომნაკეთობა გზაში დაზიანდებაუდრის 0,0003-ს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა,რომ ბაზაზე მოვა 4 დაზიანებული ნაკეთობა.

**ამოხსნა.** პირობის მიხედვით n=10 000, p=0,0003, k=4. ვპოულობთ $\lambda$ -ს, ხოლო შემდეგ ფორმულით $p_n(k) = \dfrac{\lambda^k \ell^{-\lambda}}{k!}$ და საძიებელი ალბათობას ვპოულობთ ასე:

$$\lambda = np = 10000 * 0{,}0003, \qquad p_{10000}(4) = \frac{3^4 \ell^{-3}}{4!}$$

Maple-ში ეს ამოცანა გადაწყდება ასე: (ნახ12.19)




ნახ.12.19

## 12.7. დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეების რიცხვითი მახასიათებლები

**განსაზღვრება.** დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური მოლოდინი ეწოდება მათი მნიშვნელობების მათსავე ალბათობებზე ნამრავლთა ჯამს:

$$M(x) = x_1 p_1 + x_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

**განსაზღვრება.** სხვაობა შემთხვევით სიდიდესა და მის მათემატიკურ მოლოდინს შორის ეწოდება **გადახრა:** X-M(X).

**განსაზღვრება.** გადახრის მათემატიკური მოლოდინის კვადრატს **დისპერსია** ეწოდება:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

დისპერსიის გამოთვლისას მოხერხებულია შემდეგი ფორმულის გამოყენება

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

**განსაზღვრება.** შეხვევითი სიდიდის დისპერსიიდან კვადრატულ ფესვს **საშუალო კვადრატული გადახრა** ეწოდება

$$\sigma(x) = \sqrt{D(X)}\ .$$

# უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეები

## ალბათობათა განაწილების სიმკვრივის ფუნქცია

ვთქავათ $X$ - არის უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდე, რომელთა მნიშვნელობები სრულად ავსებენ (a,b) ინტერვალს .

**განსაზღვრება.** შემთხვევითი $X$ სიდიდის განაწილების ფუნქცია ეწოდება ისეთ F(x) ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრავს იმის ალბათობას, რომ $X$ მიიღებს x -ზე ნაკლებ მნიშვნელობას

F(x)=P(X<x).

1. ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი სიდიდე $X$ იღებს $(\alpha, \beta)$ შუალედში მოთავსებულ მნიშვნელობებს, ტოლია განაწილების ფუნქციის ინტერვალის ბოლოებზე მისი მნიშვნელობების სხვაობას:

2. ალბათობა იმისა , რომ უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდე $X$ მიიღებს , ერთ, რომელიმე განსაზღვრულ მნიშვნელობა ფაქტიურად ნოლის ტოლია.

**განსაზღვრება.** განაწილების ფუნქციის წარმოებული იწოდება შემთხვევითი $X$ სიდიდის ალბათობათა განაწილების სიმკვრივედ:

$$f(x) = F^{`}(x)$$

ამ განსაზღვრებებიდან გამოდის, რომ განაწილების ფუნქცია წარმოადგენს განაწილების სიმკვრივის პირველყოფილს ანუ განუსაზღვრელ ინტეგრალს მისგან

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

**მაგალითი** 1. ვთქვათ შემთხვევითი სიდიდე მოცემულია განაწილების შემდეგი ფუნქციით:

```
>F:=piecewise(x<2,0,x>=2 and x<3,(x-2)^2,x>3,1);
```

ანუ

$$F := \begin{cases} 0 & x < 2 \\ (x-2)^2 & 2 \le x \textbf{ and } x < 3 \\ 1 & 3 < x \end{cases}$$

ვიპოვოთ f(x) ალბათობის სიმკვრივე ავაგოთF-ს და f-ის გრაფიკები. გამოვთვალოთ შემთხვევითი სიდიდის (1; 2.5) შუალედში მოხვედრის ალბათობა.

**ამოხსნა .** მოვძებნოთ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე:

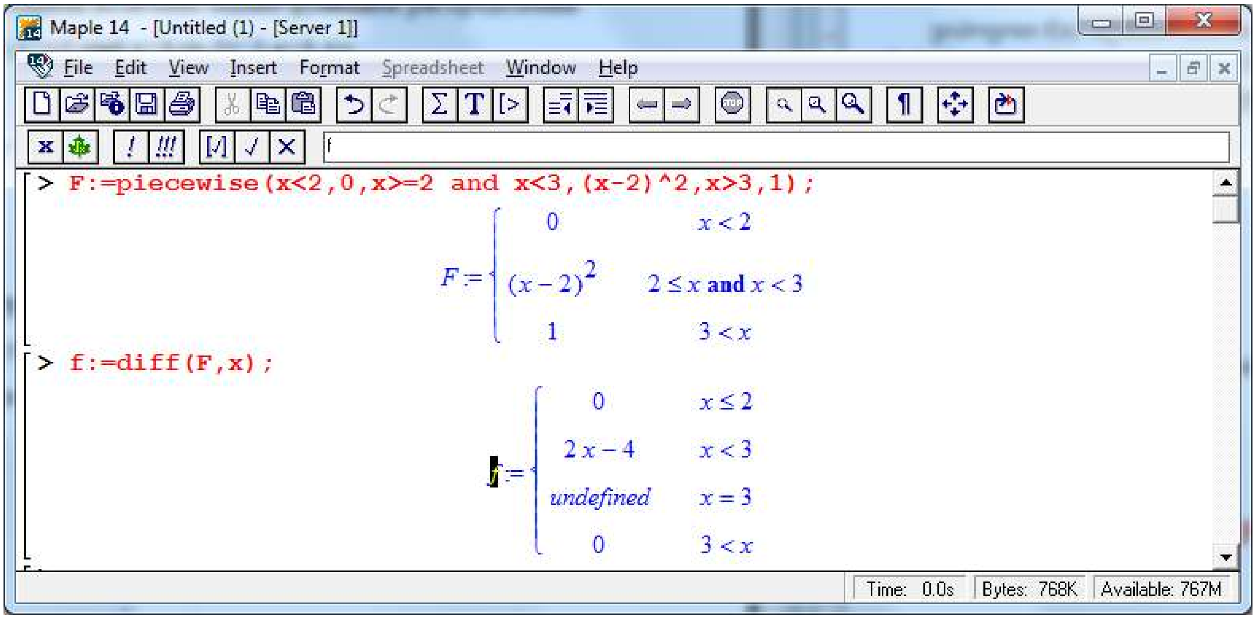
```
> f:=diff(F,x);
```

$$f := \begin{cases} 0 & x \le 2 \\ 2x-4 & x < 3 \\ undefined & x = 3 \\ 0 & 3 < x \end{cases}$$

შევნიშნოთ, რომ x=3 წერტილში F(x) ფუნქციის წარმოებული არ არსებობს

ახლა ვნახოთ ფუნქციის გრაფიკი

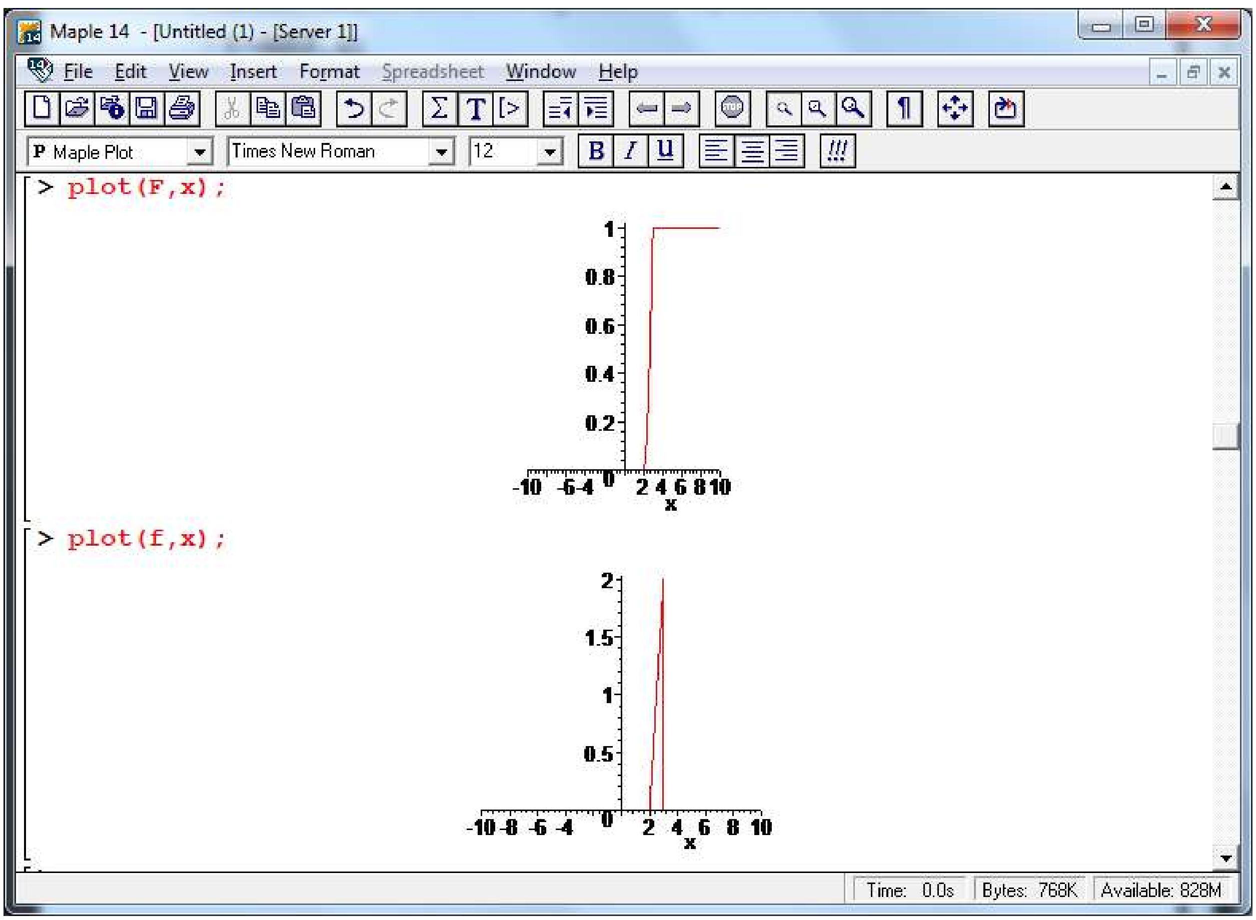
სრულად გაკეთებულ მაგალითს ექნება სახე(იხ. ნახ. 12.20)




ნახ. 12.20

ახლა ავაგოთ F(x) და f(x) ფუნქციების გრაფიკები.

მიიღებს შემდეგ სახეს (იხ. ნახ.12.21)




ნახ.12.21

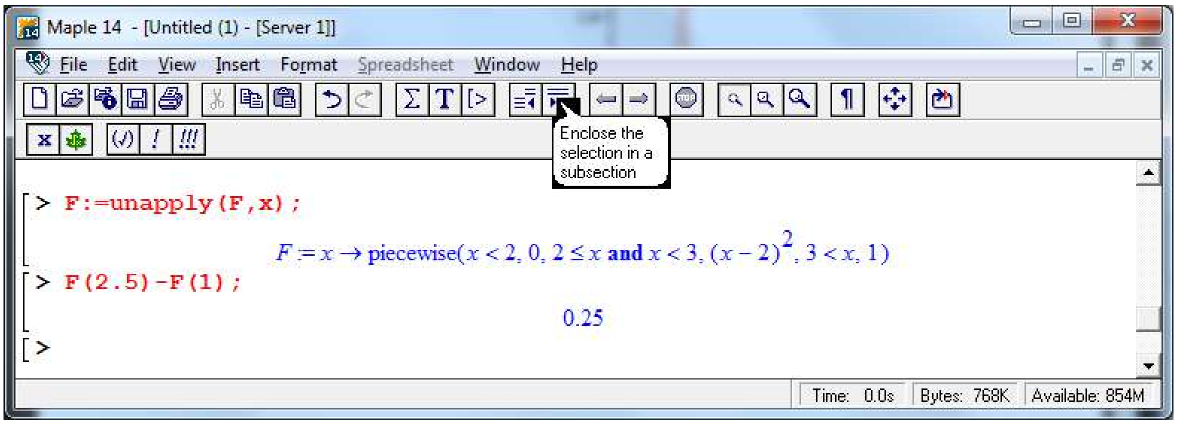
ახლა გამოვთვალოთ შემთხვევითი სიდიდის (1;2.5) ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა ამისათვის F(x) ფუნქცია გარდავქმნათ პროცედურა-ფუნქციად

**>F:=unapply(F,x);**

$$F := x \to \mathrm{piecewise}(x < 2,\, 0,\, 2 \le x \ \mathbf{and}\, x < 3,\, (x-2)^2,\, 3 < x,\, 1)$$

მაშინ საძიებელი ალბათობა მოიძებნება ასე (იხ.ნახ.12.22) :

>**F(2.5)-F(1);** 0.25




ნახ.12.21

## 12.9. უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლები

უწყვეტ და დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეების განსაზღვრებებს შორის განსხვავება მდგომარეობს იმაში, რომ დისკეტული შემთხვევითი სიდიდეების ფორმულებში იღება მათი ინტეგრალური ანალოგები (უწყვეტი შემთხვევით სიდიდეებისთვის). მათემატიკური მოლოდინისა და დისპერსიის გამოსათვლელ ფორმულებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$M(x) = \int_a^b x f(x) \quad , \quad D(x) = \int_a^b [x - M(x)]^2 f(x) dx$$

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრის სიდიდე როგორც დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის დროს განისაზღვრება ფორმულით:

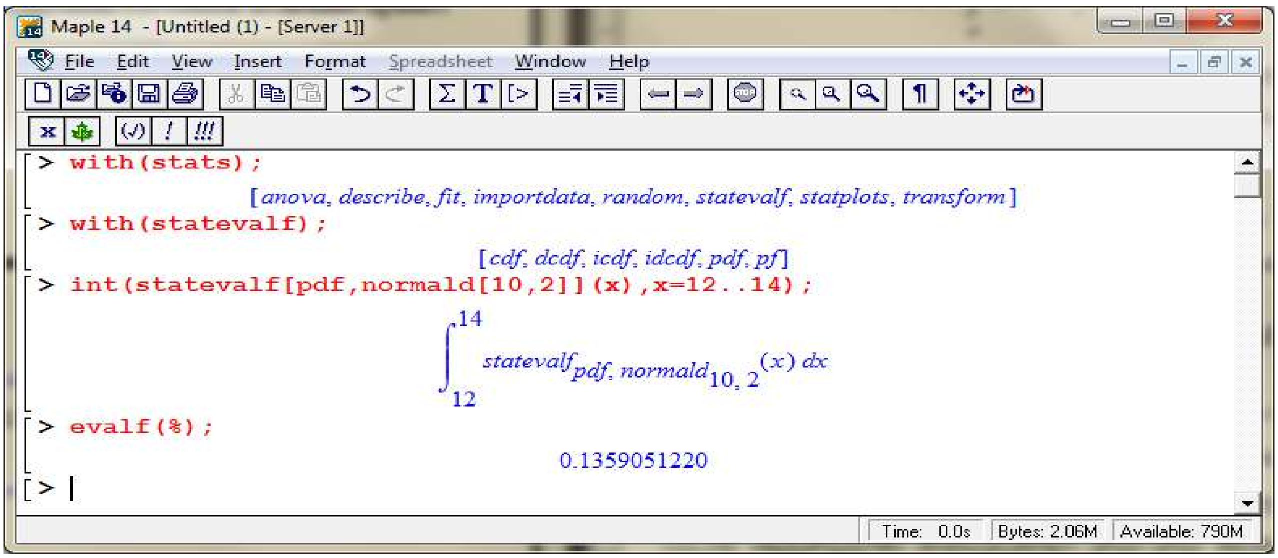
$$\sigma(X) = \sqrt{D(x)}$$

დისპერსიის გამოთვლის დროს გამოვიყენებთ ფორმულას, რომლითაც გაცილებით მოხერხებულია მოვძებნოთ რიცხვითი მნიშვნელობა

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - [M(x)]^2$$

**მაგალითი 1.** X ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური მოლოდინის და საშუალო კვადრატული გადახრის მნიშვნელობებია 10 და 2 შესაბამისად. გამოვთვალოთ ალბათობა იმისა, რომ ცდის შედეგად შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს (12,14) ინტერვალში მოთავსებულ ერთ-ერთ მნიშვნელობას.

**ამოხსნა. (იხ.ნახ.12.22)**




ნახ.12.22

## უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეების ძირითადი განაწილებები

ჩამოვთვალოთ Maple-ში უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციები:

**უწყვეტი განაწილება:**

| | | |
|---|---|---|
| **Beta[nu1,nu2]** | **cauchy[a,b]** | **chisquare[nu]** |
| **Gamma[a,b]** | **exponential[alha,a]** | **fratio[nu1,nu2]** |
| **Laplaced[a,b]** | **logistic[a,b]** | **logriormal[mu,sigma]** |
| **Normald[mu,sigma]** | **students[nu]** | **uniform[a,b]** |
| **Weibull[a,b]** | | |

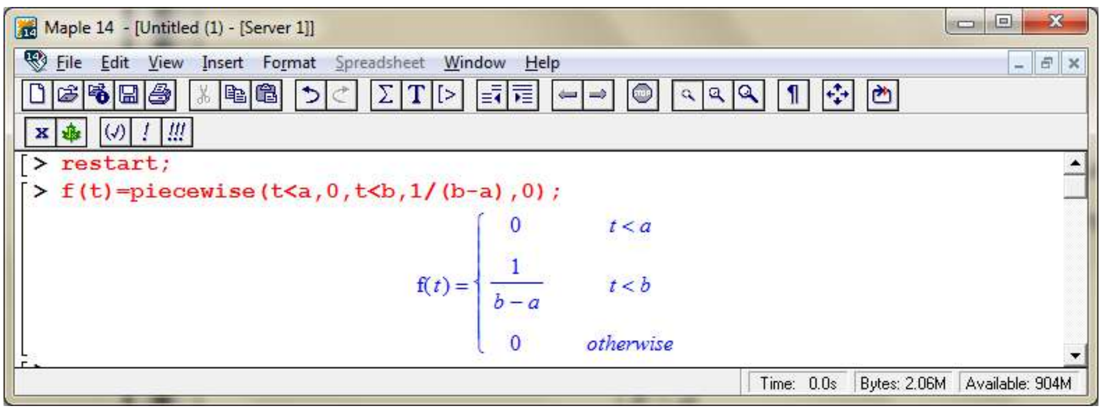
## 12.10 თანაბარი განაწილება

უწყვეტი შემთხვევითი X სიდიდის ყველა შესაძლო მნიშვნელობები ავსებენ სასრულ მონაკვეთს (a,b) , ეს შემთხვევითი სიდიდეები იწოდებიან თანაბრად განაწილებულად, თუ მათი ალბათობების განაწილების სიმკვრივე მუდმივია ამ შუალედზე. თანაბარი განაწილების სიმკვრივე მოიძებნება ფორმულით:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x \leq a \\ \dfrac{1}{b-a} & , \quad a \triangleleft x \leq b \\ 0 & , \quad x > b. \end{cases}$$

მოცემული განაწილება მოიცემა შემდეგი ბრძანებებით:

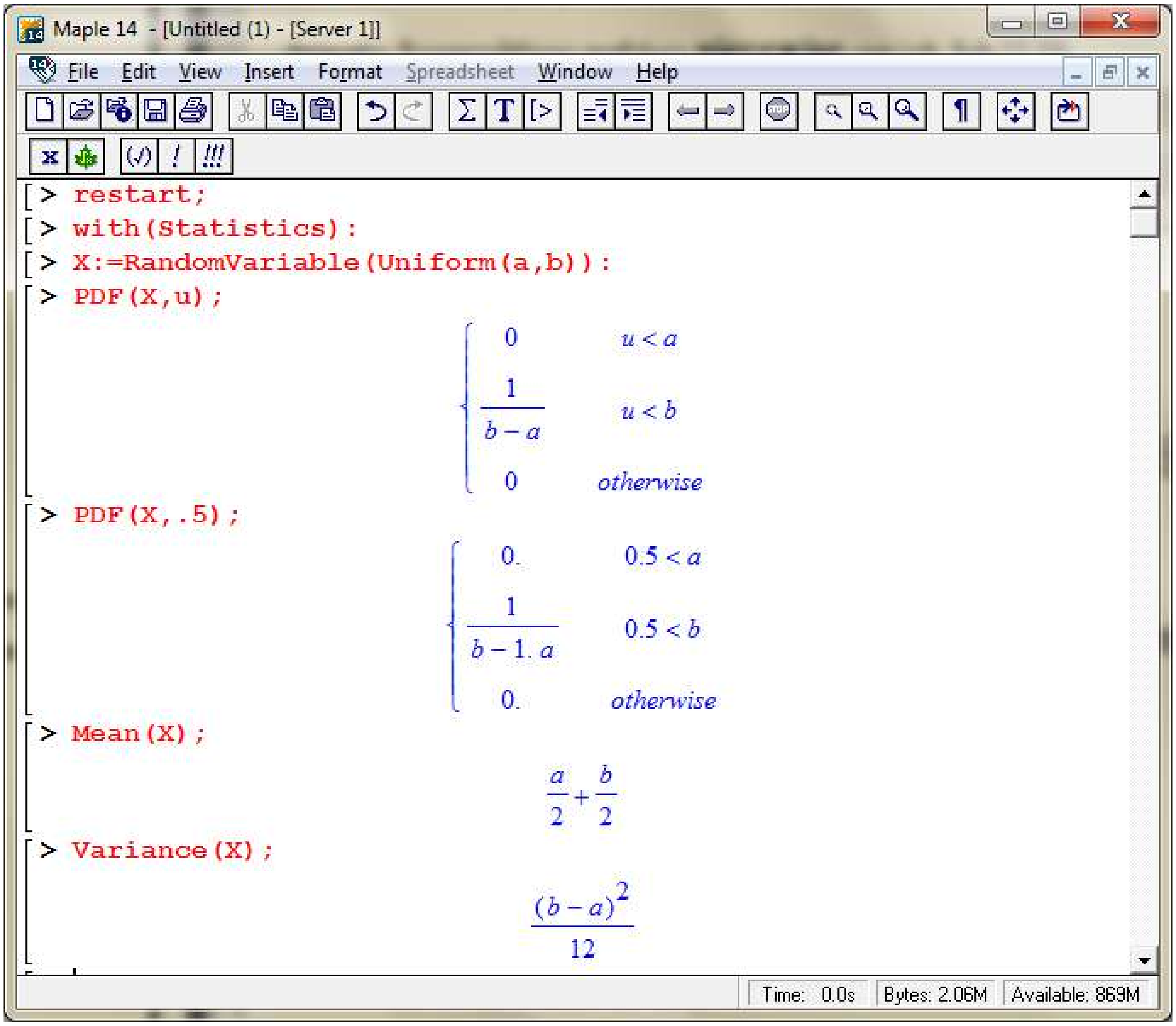
**Uniform(a,b)** ან **Uniformdistribution(a,b)** აგრეთვე მატ მოცემა შეიძლება როგორც ჩვეულებრივი ფუნქცია **piecewise**-ით (იხ. ნახ.12.23)




ნახ.12.23

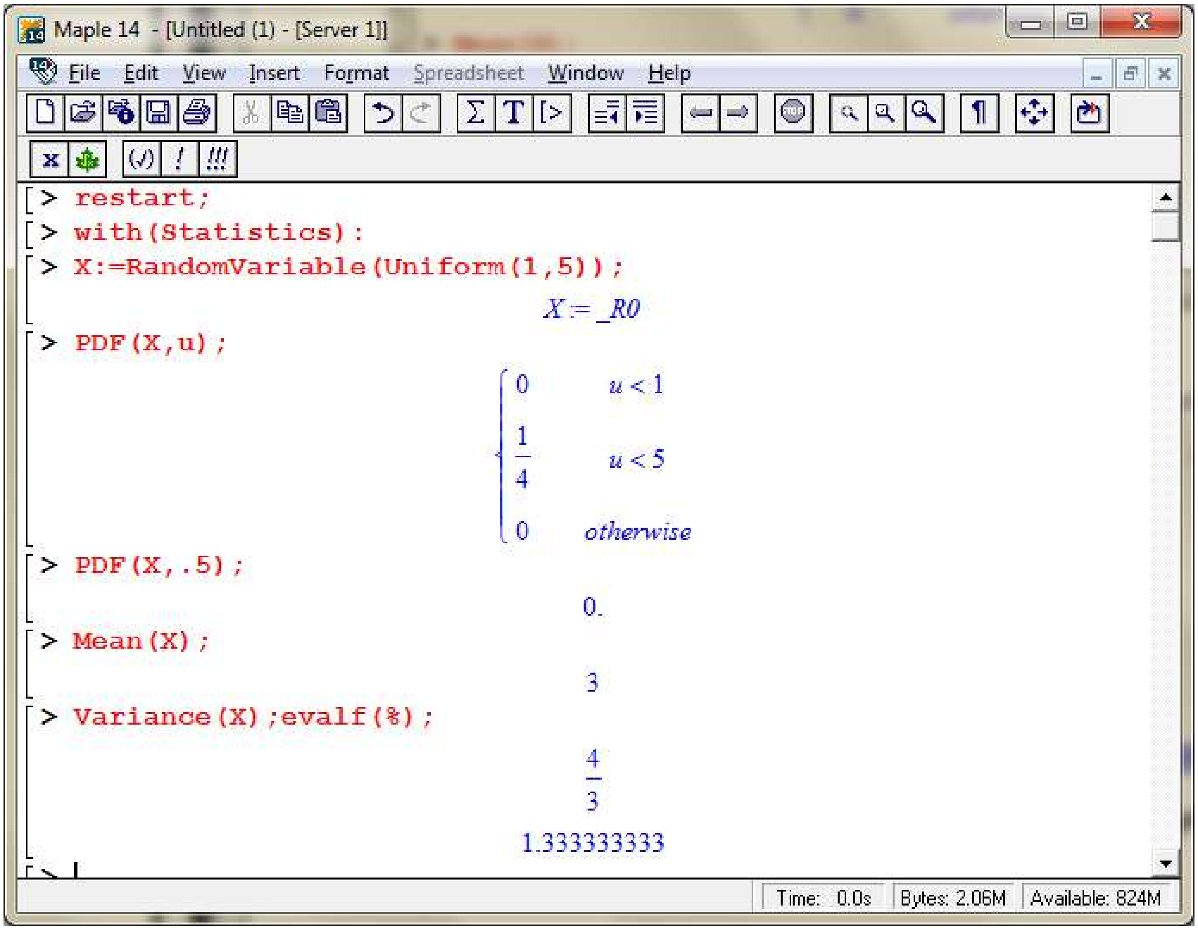
სადაც a<b.

ამოხსნა შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად(იხ.ნახ.12.24):

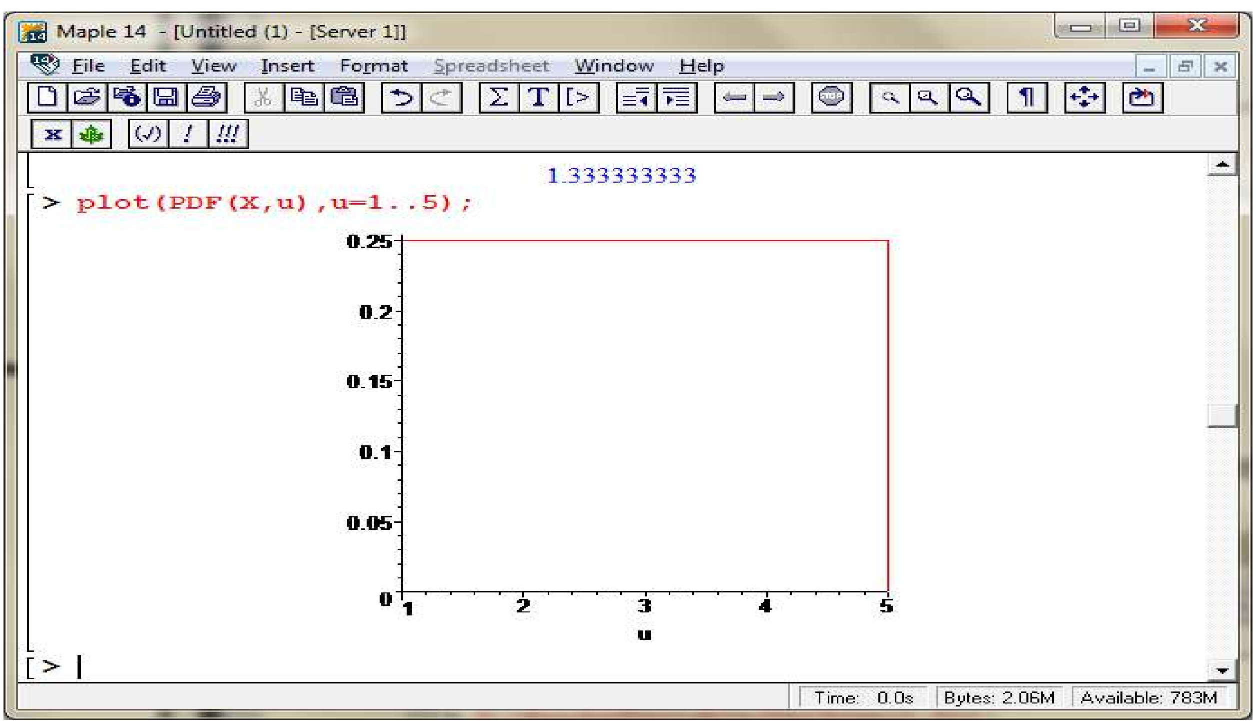



ნახ.12.24

**მაგალითი.** მოვძებნოთ მათემატიკური მოლოდინი, და დისპერსია თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი X სიდიდისა (1,5) ინტერვალზე. ავაგოთ მოცემული განაწილების გრაფიკი(იხ.ნახ.12.25). აქვე ავაგოთ მოცემული განაწილების გრაფიკი, რომელიც განთავსებულია ნახ.12.26-ზე




ნახ.12.25




ნახ.12.26

## 12.11. ნორმალური განაწილება

უწყვეტი შემთხვევითი X სიდიდის ალბათობების განაწილება იწოდება **ნორმალურად** თუ მისი განაწილების სიმკვრივე უდრის

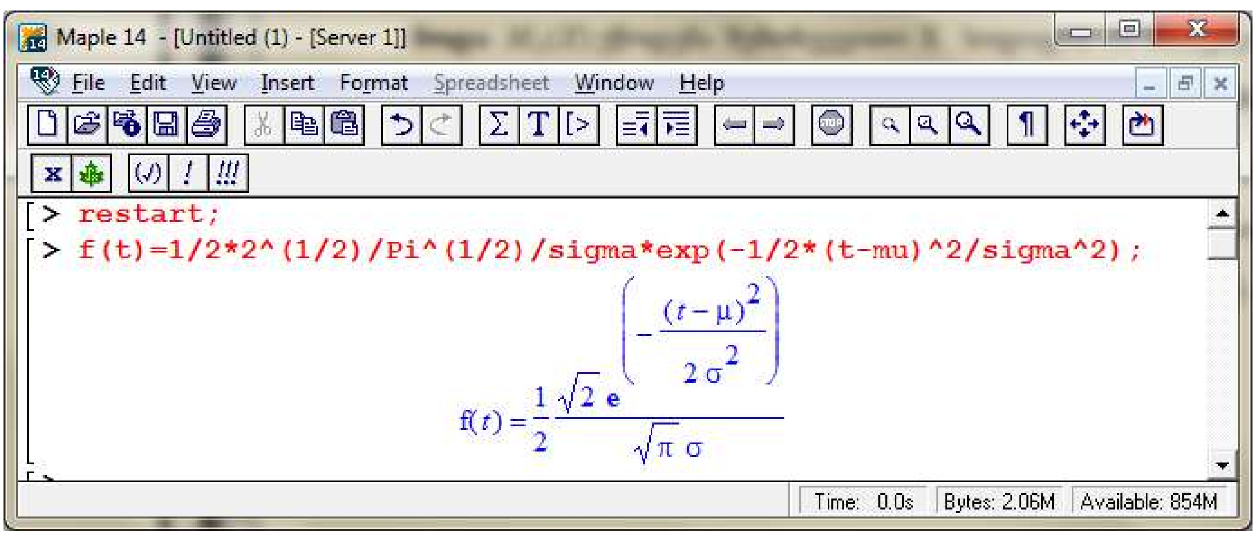
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

ნორმალური განაწილება მოიცემა ორი პარამეტრის საშუალებით: a და $\sigma$. რომლებიც შეიძლება გამოვსახოთ მათემატიკური მოლოდინისა და დისპერსიის საშუალებით.

$$M(X) = a \quad , \quad D(X) = \sigma^2 \quad , \quad \sigma(X) = \sigma.$$

**მოდა** $M_0(X)$ ეწოდება შემთხვევითი X სიდიდის იმ მნიშვნელობებს, რომელთა-თვისაც განაწილების სიმკვრივეს გააჩნია მაქსიმუმი. **მედიანა** $M_0(X)$ ეწოდება შემთხვევითი X სიდიდის იმ მნიშვნელობას, რომ ვერტიკალური წრფე $x = M_0(X)$ ყოფს შუაზე იმ სიბრტყეს, რომელიც შემოსაზღვრულია განაწილების სიმკვრივის მრუდით.

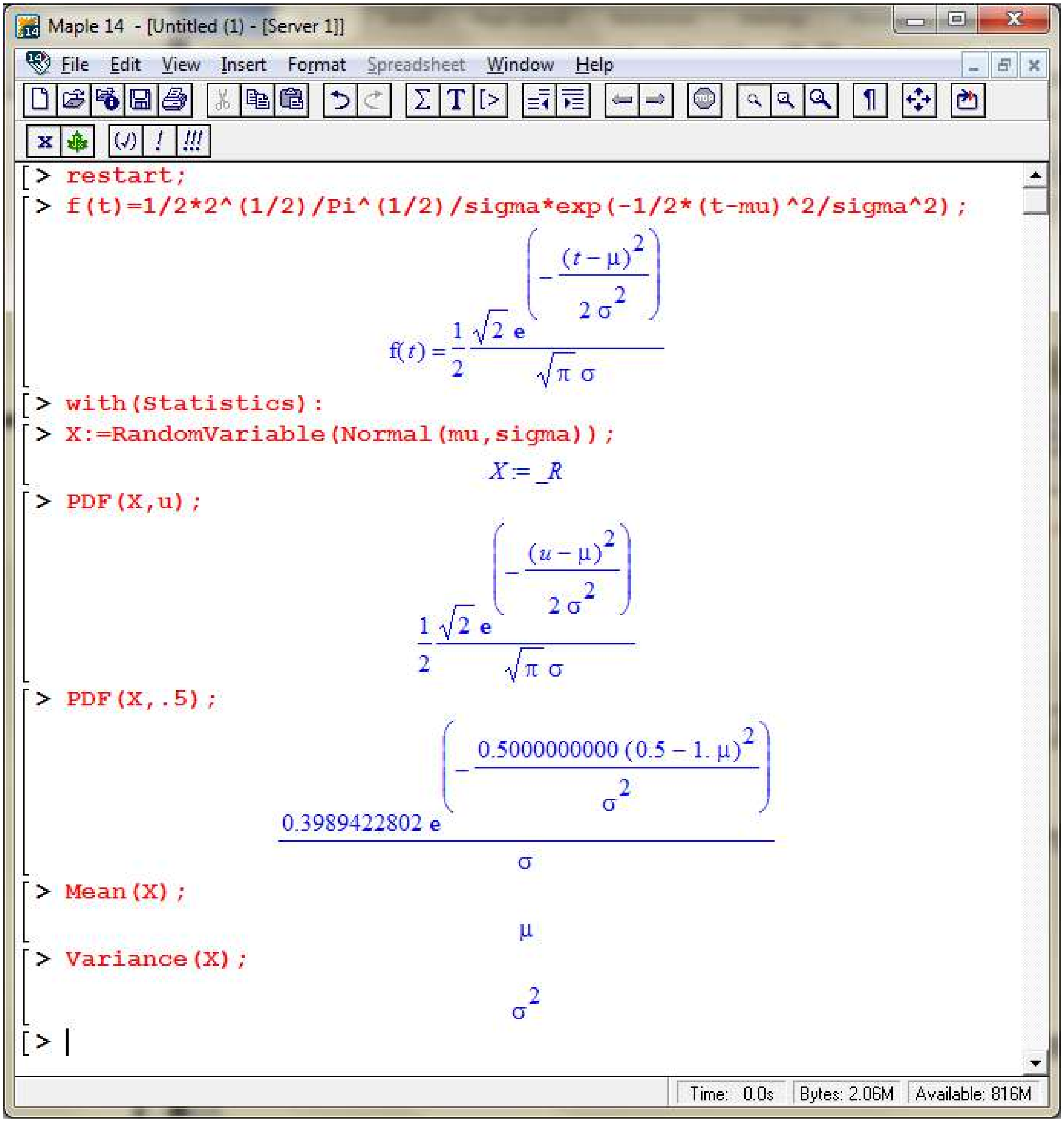
სადაც $\mu(mu)$ -არის მათემატიკური მოლოდინი, $\sigma(Sigma)$ - საშუალო კვადრა-ტული გადახრა. Maple-ში ეს განაწილება მოიცემა შემდეგი სახით(იხ.ნახ.12.27):




ნახ.12.27

სადაც $\mu(mu)$-მათემატიკური მოლოდინია, $\sigma(Sigma)$ - საშუალო კვადრატული გადახრა.

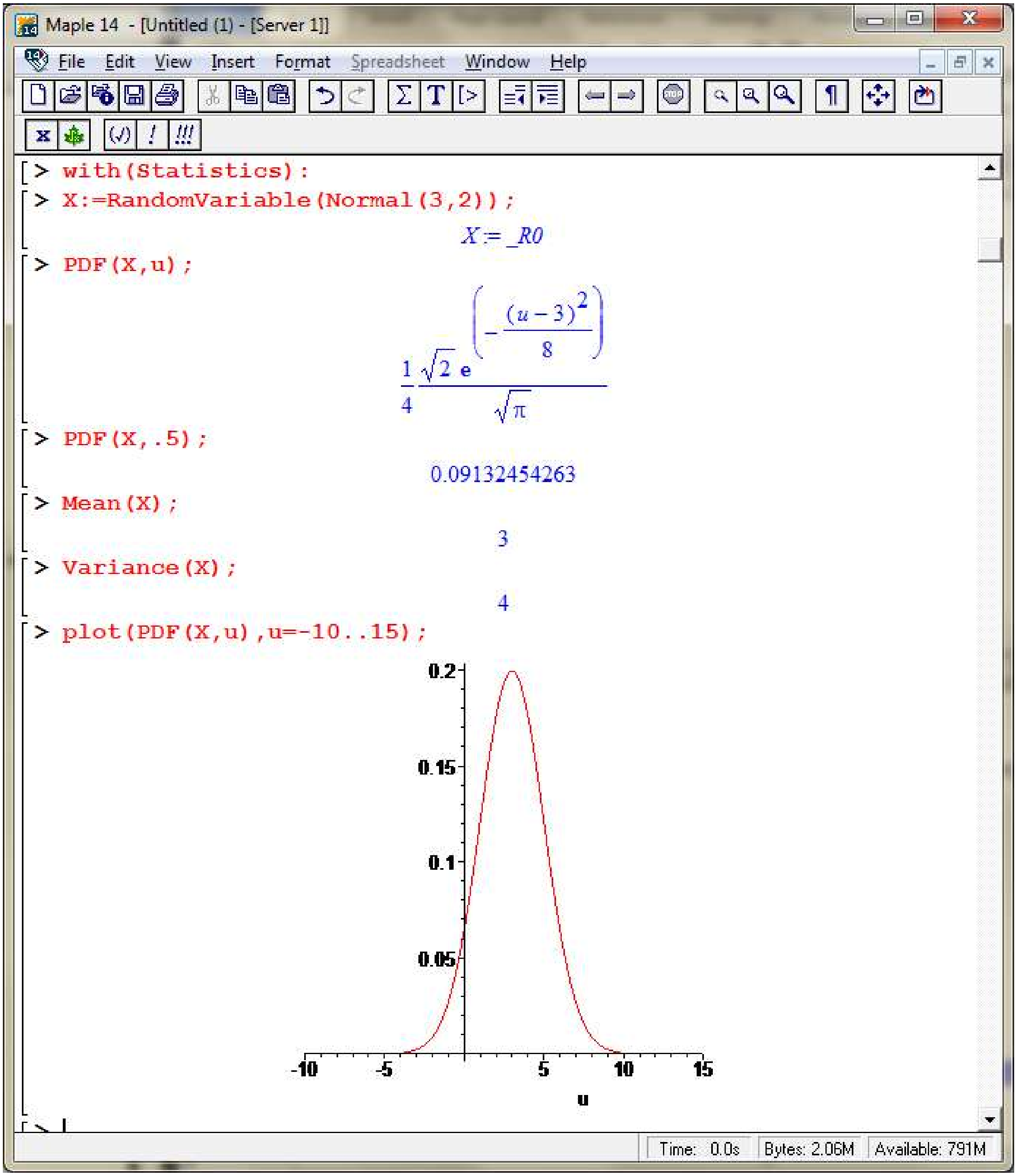
სტანდარტული აღწერით ის გამოითვლება ასე(იხ.ნახ.12.28):




ნახ. 12.28

**მაგალითი 1.** ავაგოთ ნორმალური გრაფიკი, თუ თამ. მოლოდინია 3, ხოლო დისპერსია 4.

**ამოხსნა.**(იხ.ნახ.12.29)



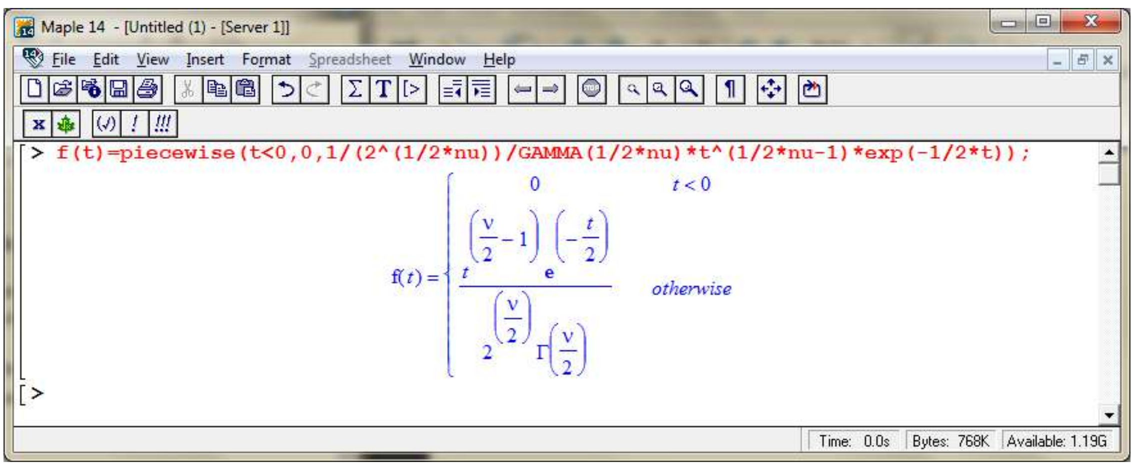

ნახ.12.29

# პირსონის $\chi^2$ განაწილება

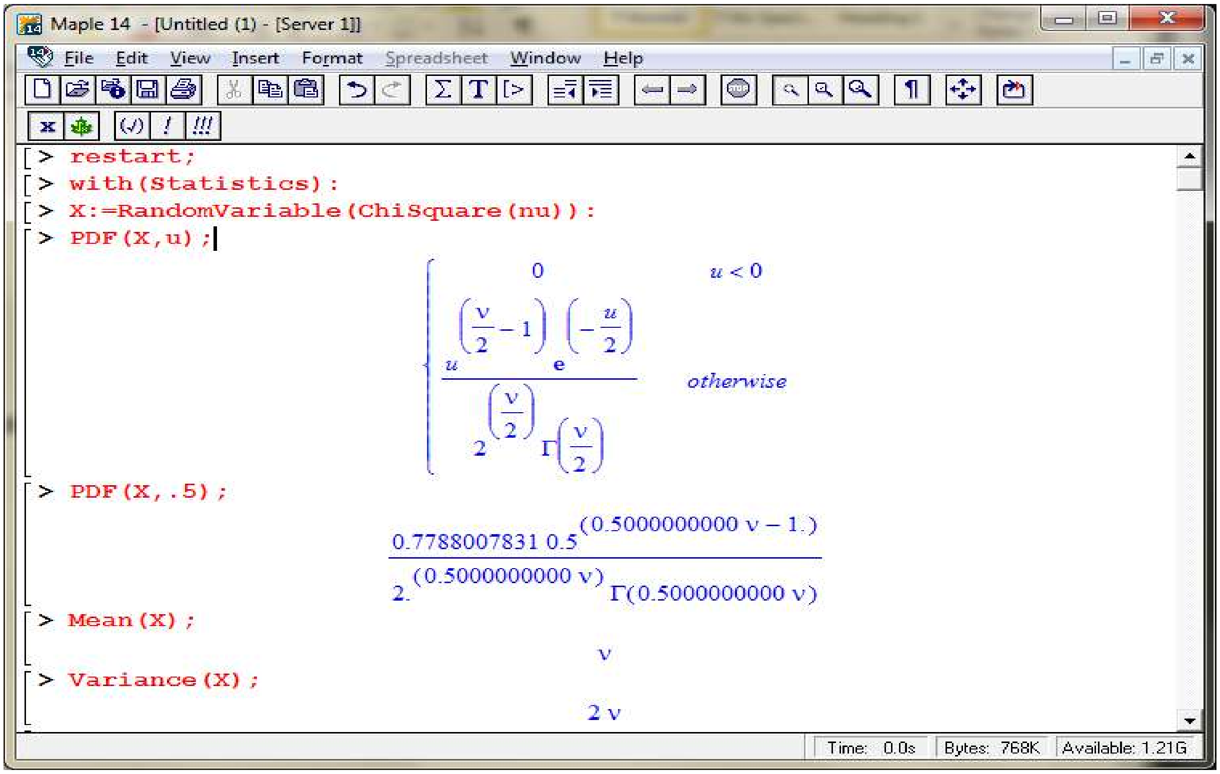
ვთქვათ მოცემულია დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდის ნორმალური განაწილება $X_1, X_2,..., X_n$ პარამეტრების $a=0$ და $\sigma=1$ მნიშვნელობებით. მაშინ მათი კვადრატების ჯამი $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2$ იწოდება $\chi^2$(„ხი კვადრატ“) განაწილებად n თავისუფლების ხარისხით. დამტკიცებულია, რომ ამ განაწილების სიმკვრივე გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$f(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad x \geq 0 \text{ , სადაც } \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-1} dt \text{ - არის „გამა“ ფუნქცია.}$$

პროგრამა Maple- ში პირსონის განაწილება მოიცემა შემდეგნაირად:
>f(t)=piecewise(t<0,0,1/(2^(1/2*nu))/GAMMA(1/2*nu)*t^(1/2*nu-1)*exp(-1/2*t));
და ვიღებთ შემდეგ შედეგს(იხ. ნახ.12.30):




ნახ.12.30

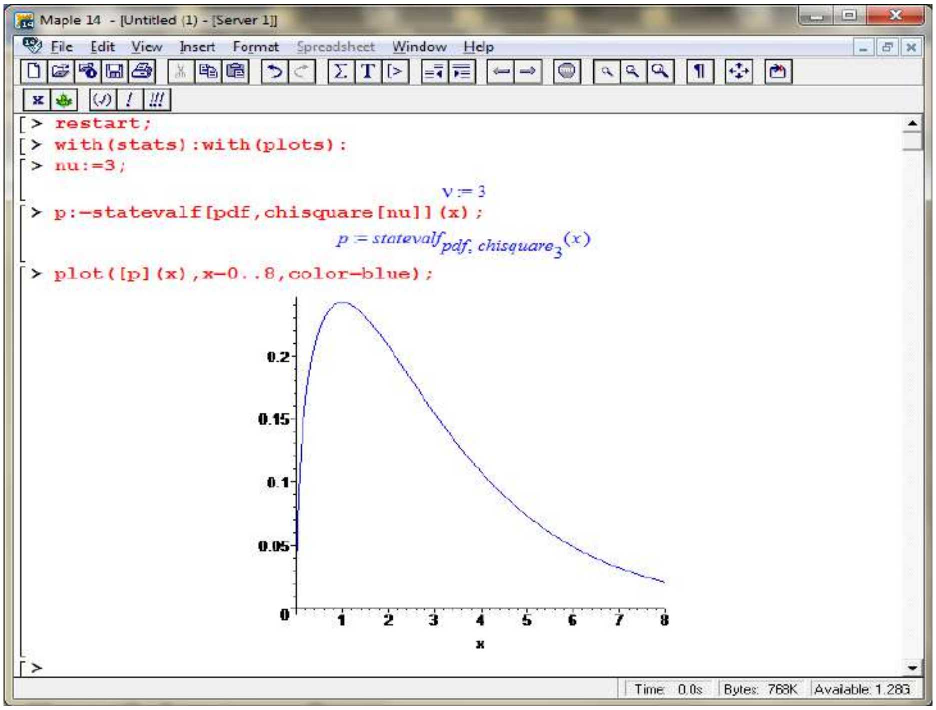



ნახ.12.31

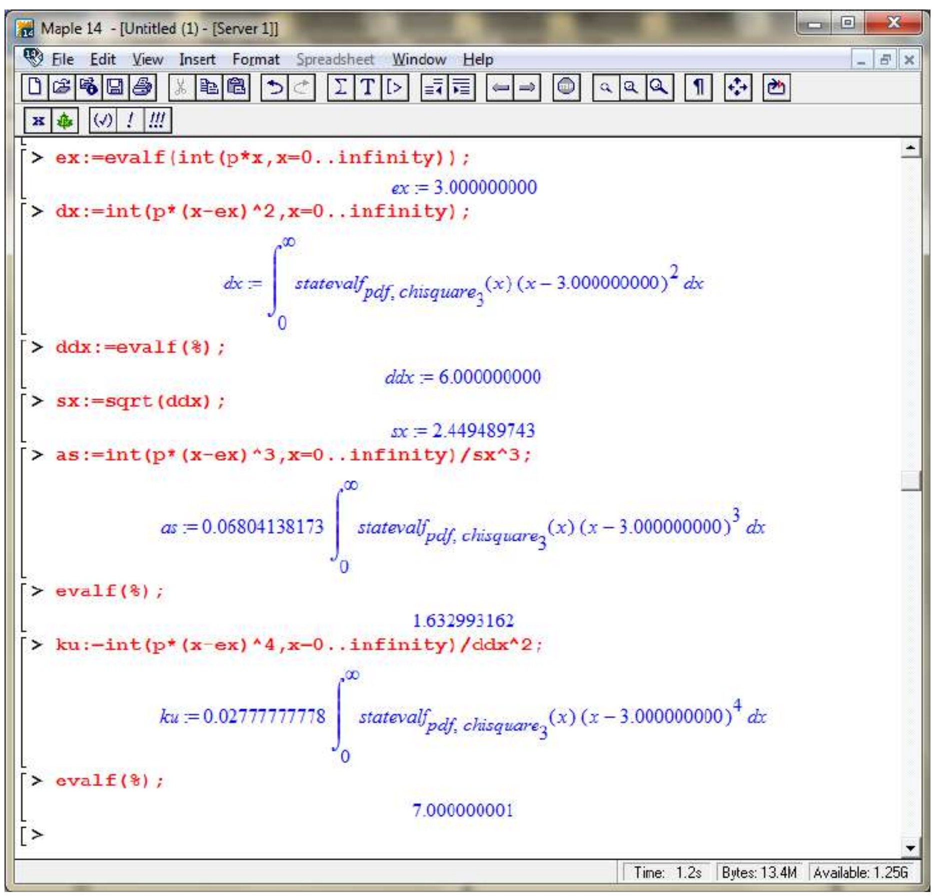
საბაზო ფუნქციას Maple-ში აქვს შემდეგი სახე **ChiSquare(nu)** ან **ChiSquareDistribution(nu).** გამოთვლები ხორციელდება შემდეგნაირად (იხ.ზემოთ ნახ.12.31)

განვიხილოთ მაგალითი 1: ავაგოთ „ხიკვადრატ“ განაწილება თავისუფლების ხარისხის მნიშვნელობით 3 და მოვძებნოთ მისი მახასიათებლები: საშუალო დისპერსია, ასიმეტრია და ექსცესი.

ამოხსნა იხილეთ ნახ.12.32 ,12.33




ნახ.12.32



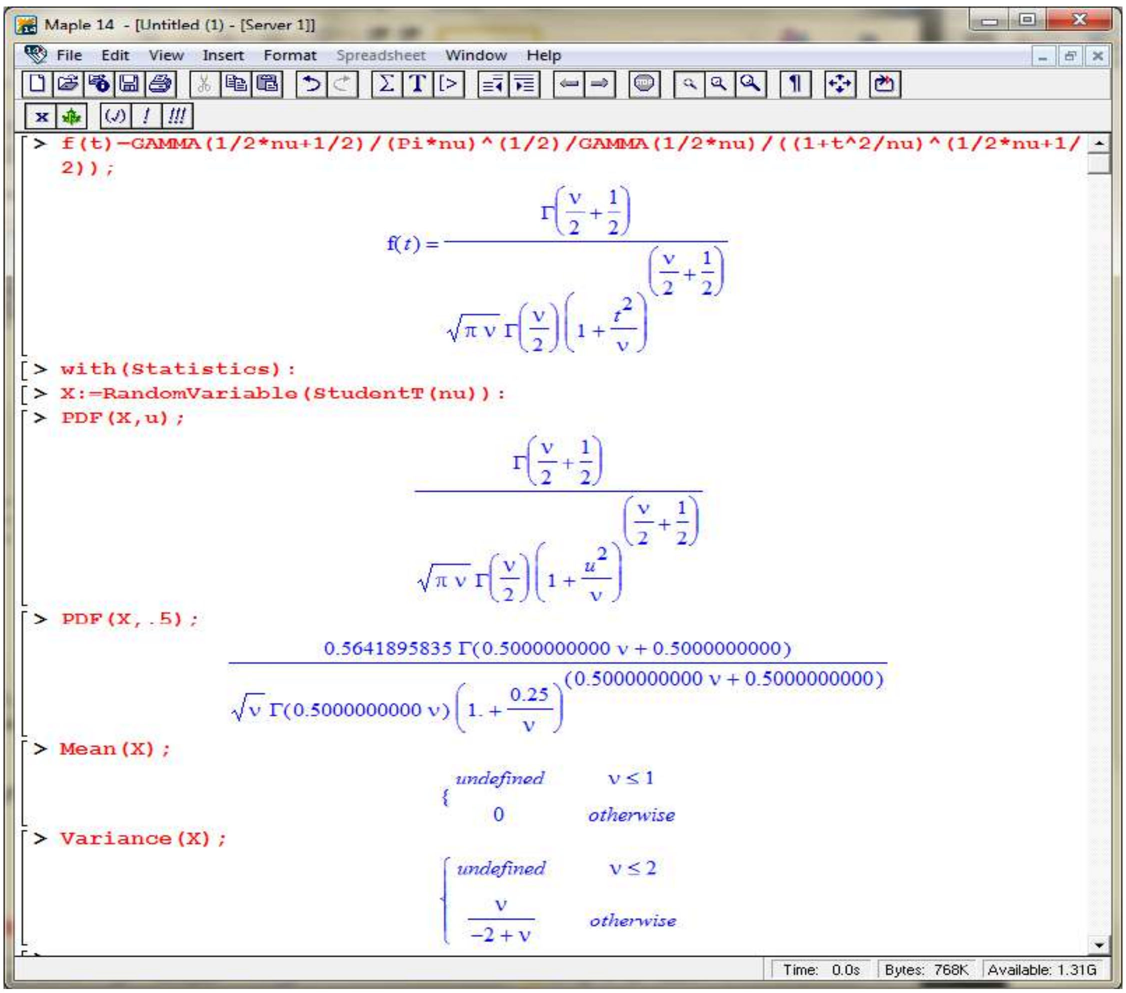

ნახ.12.33

## 12.13. სტიუდენტის განაწილება

ვთქვათ Z- არის ნორმალური შემთხვევითი სიდიდე პარამეტრებით $a=0$ და $\sigma=1$, ხოლო Y- არის Z გან დამოუკიდებელი სიდიდე, რომელიც განაწილებულია $\chi^2$ განაწილებით n თავისუფლების ხარისხით. მაშინ შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც განაწილებულია შემდეგი სახით:

$$T=\frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

იწოდება **სტიუდენტის განაწილებად** n თავისუფლების ხარისხით. n-ის გაზრდასთან ერთად სტიუდენტის განაწილება სწრაფად უახლოვდება ნორმალურს. ეს განაწილება Maple-ში წარმოდგენილია StudentT(nu) ან StudentTDistribution(nu) ბრძანებებით. ეს ყველაფერი განისაზღვრება ფუნქციების საშუალებით. (იხ. ნახ.12.34)




ნახ.12.34

დამხმარე სახელმძღვანელო პირველ ნაწილში მითითებულია კლასიკური უმაღლესი მათემატიკის მეთოდები, მათი თეორიული საფუძვლები, პრაქტიკული ამოხსნის გზები და კომპიუტერულ პროგრამა Maple- ში მათი გადაწყვეტის გზები.

სახელმძღვანელოს მეორე ნაწილში გათვალისწინებულია ოპტიმიზაციის მეთოდების, გამოთვლითი მათემატიკისა და თეორიული, პრაქტიკული და კომპიუტერული გადაწყვეყის გზები. გარდა ამისა მეორე ნაწილში განხილული იქნება Maple- ში გრაფიკული საშუალებები.

## გამოყენებული ლიტერატურა


1. ნატროშვილი დავით და სხვ. მათემატიკა ეკონომისტებისათვის. სტუ. 2008. 578 გვ.
2. *Дьяконов В. П.* Компьютерная математика. Теория и практика. М.: Нолидж, 2001.
3. *Дьяконов В. П.* Maple 7. Учебный курс. СПб.:ПИТЕР, 2002.«Вильямс», 2003.
4. *Сдвижков О. А.* Математика на компьютере: Maple 15. М.: СОЛОН-Пресс, 2015.
5. Maple 16 Getting Started Guide. Toronto: Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., 2016.
6. Maple 14 Learning Guide. Toronto: Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., 2014.
7. *Monagan, M. B et al.* Maple 14 Introductory Programming Guide. Toronto: Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., 2014.