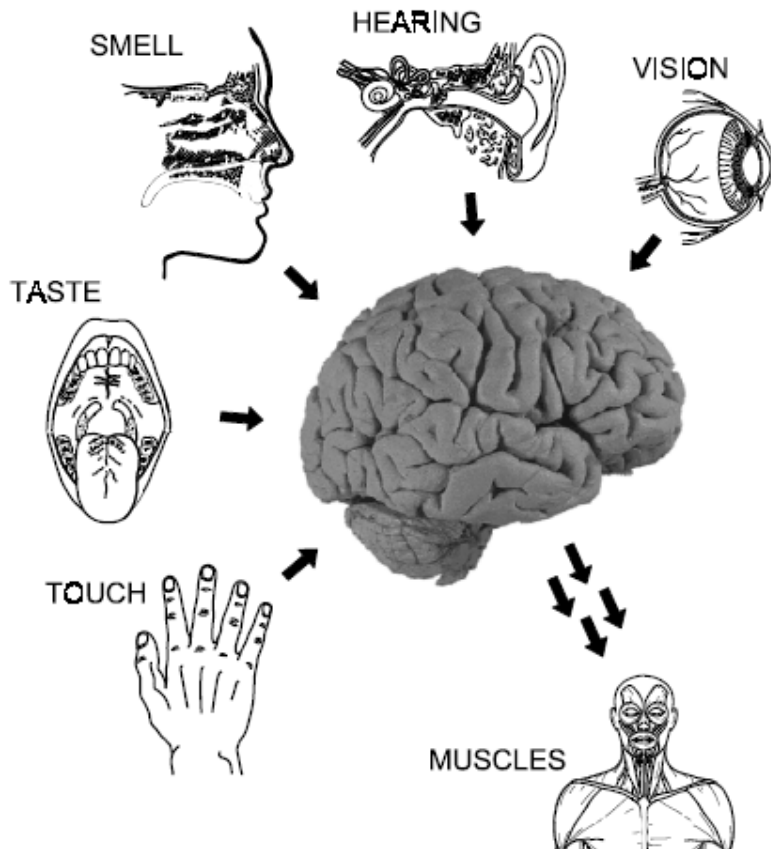


აკაკი ფალავა
ბიოსიგნალების დამუშავების საფუძვლები
(პირვალი ნაწილი - ანალოგური მეთოდები)



საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

თბილისი

2011

შესავალი

1. ბიოსამედიცინო სიგნალების ზოგადი მიმოხილვა - 3
 - 1.1 ბიოსიგნალების ნაირსახეობ
 - 1.2 სიგნალების ზოგადი თეორიის ელემენტები - 4
 - 1.3 სიგნალების აღწერა მათემატიკური მოდელების საშუალებით - 6
 - 1.4 დეტერმინირებული სიგნალების კლასიფიკაცია - 8
 - 1.5 შემთხვევითი სიგნალების კლასიფიკაცია - 12
 - 1.6 ერთგანზომილებიანი და მრავალგანზომილებიანი სიგნალები - 13
 - 1.7 ციფრული სიგნალები -15
- II. სიგნალების ზოგადი თეორიის ელემენტები
 - 2.1 სიგნალების დინამიური წარმოდგენა - 16
 - 2.2 განზოგადოებული ფუნქცია როგორც სიგნალების მათემატიკური მოდელი -21
 - 2.3 გეომეტრიული მეთოდები სიგნალების თეორიაში -23
 - 2.4 ორთოგონალური სიგნალების თეორია - 27
 - 2.5 ორთოგონალური სიგნალები და განზოგადოებული ფურიეს მწკრივები - 29
 - 2.6 ფურიეს განზოგადოებული მწკრივით წარმოდგენილი სიგნალის ენერგია -30
 - 2.7 სიგნალის ორთოგონალური დაშლის აპარატურული რეალიზაცია -31
- III. სიგნალების სპექტრალური წარმოდგენა -32
 - 3.1 პერიოდული სიგნალები და ფურიეს მწკრივები -32
 - 3.2 კოეფიციენტების გამოანგარიშება -34
 - 3.3 გამოთვლების სქემა, როდესაც ორდინატთა რიცხვი ოთხის ჯერადია -39
 - 3.4 თორმეტი ორდინატის შემთხვევა -41
 - 3.5 ფურიეს მწკრივების კომპლექსური ფორმა -46
 - 3.6 პერიოდული სიგნალის ასახვა კომპლექსურ სიბრტყეზე -47
 - 3.7 არაპერიოდული სიგნალების სპექტრალური ანალიზი ფურიეს გარდაქმნა -48
 - 3.8 სიგნალის სპექტრალური სიმკვრივის ცნება -49
 - 3.9 ფურიეს უკუგარდაქმნა -50
 - 3.10 მართკუთხა ვიდეოიმპულსის სპექტრალური სიმკვრივე
 - 3.11 ექსპონენციალური ვიდეოიმპულსის სპექტრალური სიმკვრივე -51
 - 3.12 დელტა-ფუნქციის სპექტრალური სიმკვრივე - 52
 - 3.13 კავშირი იმპულსის ხანგრძლივობასა და მის სპექტრს შორის -52
 - 3.14 ფურიეს გარდაქმნის ძირითადი თვისებები -53
 - 3.15 არაინტეგრირებადი სიგნალების სპექტრალური სიმკვრივე -58
 - 3.16 ლაპლასის გარდაქმნა -64
- IV. სიგნალების ენერგეტიკული სპექტრი. კორელაციური ანალიზის პრინციპები -66
 - 4.1 სიგნალის ენერგეტიკული სპექტრი -68
 - 4.2 ენერგის განაწილება მართკუთხა ვიდეოიმპულსის სპექტრში
 - 4.3 სიგნალების კორელაციური ანალიზი.
დროში წანაცვლებული სიგნალების შედარება -70

- 4.4 სიგნალების ავტოკორელაციური ფუნქცია -71
- 4.5 დროში შეზღუდული სიგნალის ავტოკორელაციური ფუნქცია - 73
- 4.6 კავშირი სიგნალის ენერგეტიკულ სპექტრს და მის ავტოკორელაციურ ფუნქციას შორის -74
- 4.7 სიგნალის ავტოკორელაციური ფუნქციის შეზღუდვები - 76
- 4.8 ორი სიგნალის ურთიერთკორელაციური ფუნქცია - 76
- 4.9 ურთიერთკორელაციური ფუნქციის ზოგიერთი თვისება - 77
- 4.10 კავშირი ურთიერთკორელაციური ფუნქციასა და ურთიერთსპექტრალურ სიმკვრივეს შორის -78
- V. კორელაციური ანალიზის გამოყენება სიგნალების დამუშავებაში - 78
 - 5.1 ელექტრონული კორელომეტრები - 79
 - 5.2 ხმაურის ფონზე პერიოდული სიგნალების აღმოჩენა ავტოკორელაციით - 81
 - 5.3 ხმაურის ფონზე ცნობილი პერიოდიანი სიგნალების აღმოჩენა - 82
 - 5.4 წრფიული სისტემების დინამიური მახასიათებლების გამოკვლევა - 82
 - 5.5 შედარება პირდაპირ იმპულსურ მეთოდთან - 83
 - 5.6 სისტემის შესწავლა მუშაობის პროცესში -84
 - 5.7 სისტემის შესწავლა მუშაობის პროცესში გარე შემფოთების ზემოქმედებისას - 85
 - 5.8 ელექტრონული სპექტრალური ანალიზატორები - 86
 - 5.9 ელექტრონული ანალიზატორები, დაფუძნებული ფილტრაციის მეთოდზე- 86
 - 5.10 ანალიზატორები სიხშირის განშლით -87
 - 5.11 ავტომატური კორელომეტრები გამოსაკვლევი სიგნალის ხაზზე - 88
 - 5.12 რეალური დროის ავტომატური კორელომეტრები -90
 - 5.13 სპექტრალური ანალიზატორები დროის შეკუმშვით - 90
 - 5.14 სიგნალი ექსტრემალური მნიშვნელობების განსაზღვრა ანალოგური სქემა -92
- VI. ანალოგური ფილტრები -94
 - 6.1 სიხშირული ფილტრები -96
 - 6.2 დაბალი სიხშირის ფილტრები -97
 - 6.3 ფილტრების რეალიზაცია -100
 - 6.4 მაღალსიხშირული ფილტრის რეალიზაცია -104
 - 6.5 ზოლოვანი ფილტრების რეალიზაცია -105

შესავალი

„ყველა შემთხვევაში არსებობს სწორი კამათის მხოლოდ ერთი ხერხი: უპირველესყოვლისა უნდა კარგად გავიგოთ, რაზე მიდის კამათი.“

პლატონი

თანამედროვე სამედიცინო პრაქტიკა წარმოდგენილია სამკურნალო-დიაგნოსტიკური ხელსაწყოების გამოყენების გარეშე. ეს განპირობებულია იმით, რომ თანამედროვე ექიმის დიაგნოსტიკური და სამკურნალო ტაქტიკა განისაზღვრება ამ ხელსაწყოების მონაცემებით. ამიტომ, სანამ განვიხილავდეთ ამ ხელსაწყოებს და მათი პროექტირების საფუძვლებს, განვიხილოთ სამკურნალო-დიაგნოსტიკური პროცესის ზოგიერთი ასპექტები და ვცადოთ გამოვარკვიოთ, თუ რატომ და რამდენად არის სამკურნალო-დიაგნოსტიკური პროცესის ეფექტურობა დამოკიდებული ხელსაწყოებსა და აპარატებზე.

სამედიცინო პრაქტიკა შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც მრავალეტაპიანი მრავალჯერადად განმეორებადი სამკურნალო-დიაგნოსტიკური პროცესი. მის ამოცანას წარმოადგენს დაავადების სიმპტომების გამოვლენა და მათი აღმოფხვრა. ჩვეულებრივ ასეთი პროცესი ხორციელდება ერთი ან მრავალი სპეციალისტის მიერ და მოიცავს შემდეგ ეტაპებს: მონაცემთა მიღება, მონაცემთა ანალიზი, გადაწყვეტილების მიღება, მკურნალობა და ყველა ამ ეტაპის ან ზოგიერთის განმეორება შედეგისა და გარემოებების მიხედვით.

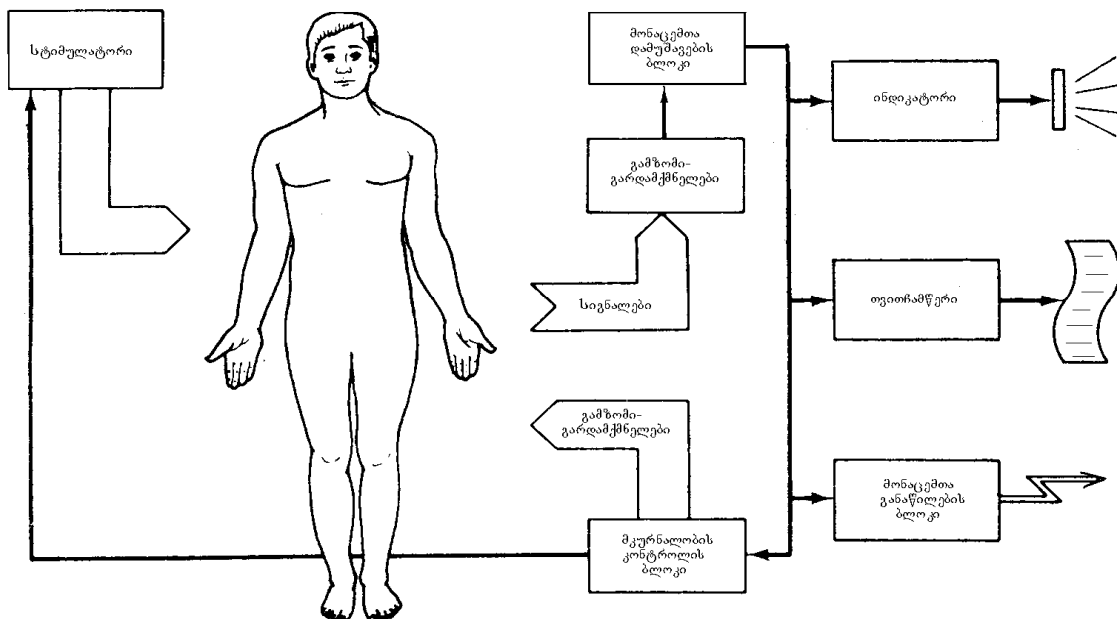
აღსანიშნავია, რომ ცნება ჯანმრთელი – ფარდობითია და დამოკიდებულია მრავალ სუბიექტურ და ობიექტურ გარემოებაზე და განსაზღვრებაზე. პაციენტის ჯანმრთელობის შეფასებაში დიდ როლს თამაშობს დღეისთვის შექმნილი და განვითარებადი მონაცემთა ბაზა (ცოდნის ბაზა) ნორმასა და პათოლოგიებზე. უპირველესყოვლისა სამკურნალო-დიაგნოსტიკური პროცესის ეფექტურობა განისაზღვრება იმ მონაცემთა ბაზით, რომელიც მიღებული აქვს ექიმს უწყვეტი განათლების შედეგად (როგორც პათოლოგიებზე და მათი მკურნალობის, ასევე სწრაფი და ეფექტური კვლევის მეთოდებზე). დღეისთვის შექმნილია მრავალი ინფორმაციული ბაზა ცალკეული მიმართულებებით (კარდიოლოგიური, ფარმაცევტიკული და ა.შ.), მაგრამ მათი პრაქტიკული გამოყენება მრავალი მიზეზის გამო ძალიან შეზღუდულია. დაავადებათა დიაგნოსტიკის და მკურნალობის რთულ შემთხვევებში დღეისათვის ისევ გამოიყენება კონსილიუმები, რის შედეგადაც ცხადია, მონაცემთა ბაზა გაიზრდება.

მონაცემთა შეგროვების ეტაპი გულისხმობს პაციენტის ჯანმრთელობის მდგომარეობაზე მაქსიმალურად შესაძლო ინფორმაციის მიღებას. ექიმს თვითონ შეუძლია იმსჯელოს ავადმყოფის მდგომარეობაზე მხოლოდ დაავადების გარეგანი გამოვლინებებით. მაგალითად, ავადმყოფის ზოგადი შეხედულება, კანის მდგომარეობა, ხველების ხასიათი, ჭრილობათა ლოკალიზაცია და ა.შ. მაგრამ ხშირ შემთხვევაში

დიაგნოზის დასასმელად და მკურნალობის დასანიშნად ექიმის გძნობის ორგანოები არ არის საკმარისად მგრძნობიარე და ზუსტი. ზუსტად ამ შემთხვევაში ეხმარება ექიმს შესაბამისი ხელსაწყოები და აპარატები და ამღევენ საშუალებას მიიღოს ავადმყოფის მდგომარეობის უფრო სრული სურათი. ასეთი ხელსაწყოების მაგალითებია: მატევი თერმომეტრები, სისხლის წნევის მანომეტრები, სპირომეტრები, pH – მეტრები და სხვ. და უფრო რთული ელექტრონული, მიკროპროცესორული და კომპიუტერული სისტემები - კარდიომონიტორები, ექოსკანერები, ტომოგრაფები და ა.შ.

მონაცემთა ანალიზის ეტაპი ასევე გულისხმობს სხვადასხვა ხელსაწყოს ფართო გამოყენებას, ძირითადად მიკროპროცესორულს და კომპიუტერულს. მაგალითისათვის, ამ ეტაპზე საჭიროა შეიქმნას მონაცემთა სტატისტიკური დამუშავება, მონაცემთა ბაზასთან შედარება და ა.შ., რაც გაამარტივებს და დააჩქარებს სწორი გადაწყვეტილების მიღებას, შეამცირებს სუბიექტივიზმს. რაც შეეხება მკურნალობის ეტაპს, ამ შემთხვევაში მექანიკური და ელექტრული საშუალებების გამოყენება მოითხოვს სპეციალურ მომზადებას და ცოდნას. ამიტომ ხელსაწყოების დახმარებით მკურნალობის ეტაპის პირდაპირმა კონტროლმა არ ჰპოვა ფართო გამოყენება. მაგრამ ისეთ „მარტივ დავალებას“, როგორცაა წამლების დანიშვნა, სულ უფრო ხშირად ანდობენ კომპიუტერს.

ნახ.1 მოყვანილია სამკურნალო-დიაგნოსტიკური კომპლექსის ბლოკ-სქემა, რომელიც საშუალებას იძლევა მთლიანობაში ნათლად აღვიქვათ სამკურნალო– დიაგნოსტიკური პროცესი.



ნახ. 1. სამკურნალო-დიაგნოსტიკური კომპლექსის ბლოკ-სქემა.

სტიმულატორი წარმოადგენს სტიმულების წყაროს. სიგნალ-რეაქციების გარდაქმნა ელექტრულ სიგნალებად ხორციელდება გამზომი-გარდამქმნელების მეშვეობით. გარდაქმნილი სიგნალები მიეწოდება დამუშავების ბლოკს, რომლის დანიშნულებაცაა ამ სიგნალების გაძლიერება, ფილტრაცია და ანალიზი ე.ც.გ.-ის მეშვეობით. შემდეგ ინფორმაცია გადაეცემა დისფლუის, თვითჩამწერს და მონაცემთა განაწილების ბლოკს და შესაბამისად შეიძლება წარმოდგენილი იყოს ეკრანზე, ჩაწერილი იყოს ქაღალდზე ან დამამახსოვრებელ მოწყობილობაზე. საჭიროების შემთხვევაში ინფორმაცია შეიძლება გადაცემულ იქნას დიდ მანძილზე. დამუშავებული მონაცემები მიეწოდება მეხსიერების და მკურნალობის კონტროლის ბლოკს.

I. ბიოსამედიცინო სიგნალების ზოგადი მიმოხილვა.

1.1 ბიოსიგნალების ნაირსახეობა

ბიოსამედიცინო სიგნალები (შემგომში – ბიოსიგნალები) წარმოადგენენ სამედიცინო-ბიოლოგიური ინფორმაციის განმსაზღვრელ ნაწილს დიაგნოსტიკის პროცესში.

ბიოსიგნალები შეიძლება გავყოთ ორ დიდ ჯგუფად:

1. ბიოსიგნალები, რომელნიც მოიხსნებიან ბიოობიექტიდან პირდაპირ ელექტრული სახით (მაგ. კარდიოსიგნალი, მიოგრამა, ენცეფალოგრამა, რეოგრამა და ა.შ.).
2. ბიოსიგნალები, რომელნიც ასახავენ ბიოობიექტის ორგანოს (ორგანოების) მდგომარეობას გამზომი-გარდამქმნელების დახმარებით (ბიოობიექტის ფუნქციონირების პარამეტრის ცვლილება: წნევა, სიმკვრივე, ტემპერატურა და ა.შ. გარდაიქმნება ელექტრული პარამეტრის ცვლილებად).

ორივე შემთხვევაში ბიოსიგნალი შეიძლება შეიცავდეს როგორც ბიოლოგიურ, ასევე ტექნიკურ არტეფაქტებს, რაც დიდ გავლენას ახდენს სწორ დიაგნოსტიკაზე. ამიტომ სამედიცინო-ბიოლოგიური აპარატურის დამუშავების პროცესში ადექვატური სიგნალის მიღება წარმოადგენს ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს ამოცანას. ამ ამოცანის გადასაწყვეტად გამოიყენება ტექნიკაში გამოცდილი მრავალი მეთოდი, დაფუძნებული მათემატიკის, ფიზიკის და სხვა მეცნიერებათა მიღწევებზე.

იმისათვის, რომ თვალნათლივ წარმოვიდგინოთ, თუ რა პრობლემებთან გვაქვს საქმე, გავიხსენოთ დღეისთვის სამედიცინო-ბიოლოგიურ კვლევის პრაქტიკაში გავრცელებული სიგნალები და მათი განმარტებანი.

1. ენცეფალოგრამა – თავის ტვინის ელექტრული აქტივობის ამსახველი მრუდები.
2. აუდიოგრამა – სმენის უნარიანობის ამსახველი მრუდები.
3. რეტინოგრამა - მხედველობის ორგანოს გაღიზიანებაზე რეაქციის ამსახველი მრუდები.
4. კარდიოგრამა – მიოკარდის უბნების აღზნების პოტენციალის დროში ცვლილების მრუდი.
5. რეოგრამა – ორგანოების ელექტრული წინაღობის დროში ცვლილების ამსახველი მრუდი. (რეოენცეფალოგრამა, რეოკარდიოგრაფია, ღვიძლის და კიდურების რეოგრაფია).
6. პლექტიზმოგრაფია – ორგანოების ან სხეულის ნაწილის მოცულობის ცვლილების რეგისტრაცია. ძირითადად გამოიყენება სისხლძარღვთა ტონუსის შესაფასებლად.

7. სფიგმოგრაფია – სისხლძარღვთა კედლების მექანიკური რხევების გარდაქმნა ელექტრულ სიგნალებად. გამზომ–გარდამქმნელებად გამოიყენება ტენზო – ტევადური, ინდუქციური ან პიეზოგარდამქმნელები.
 8. ფონოკარდიოგრაფია – გულის ტონების და ხმაურების რეგისტრაცია და დიაგნოსტიკური ინტერპრეტაცია.
 9. ვექტორკარდიოგრაფია - ახასიათებს გულის ორ გამომყვანას შორის ვექტორის სიბრტყეზე პროექციის დინამიკას ერთი ციკლის განმავლობაში.
 10. გულის რითმოგრაფია – გულის რითმის სტატისტიკური და სპექტრალური ანალიზი.
 11. გულის რითმის ფაზური ანალიზი – იძლევა საშუალებას შევაფასოთ მიოკარდის კუმშვადი ფუნქცია.
 12. თერმოდელუცია - სისხლმიმოქცევის მოცულობის გაზომვა სისხლის ტემპერატურის ცვლილების მრუდის ანალიზის მეშვეობით სისხლმიმოქცევის სისტემაში გარკვეული მოცულობის ცივი სითხის შე.ვანით (გამოიყენება 3–5 მილილიტრი 18–20 გრადუსიანი გლუკოზის ან ფიზიოლოგიური ხსნარი).
 13. კორონაროგრაფია – სისხლძარღვთა სისტემის გამოკვლევა რენტგენოკონტრასტული სითხის კონცენტრაციის მრუდის სიჩქარის ცვლილების მიხედვით.
 14. სპიროგრაფია – ფილტვების მოცულობის ცვლილების ამსახველი მრუდი. ამ მრუდის მეშვეობით განისაზღვრება სასუნთქი ორგანოების მრავალი სტატიკური და დინამიური პარამეტრი.
 15. რადიოგრაფია – სასუნთქი ორგანოების კვლევის რადიოიზოტოპური მეთოდები.
 16. რენოგრაფია – თირკმელების ფუნქციონირების ამსახველი მრუდი, რომელიც დაფუძნებულია გამა–გამოსხივების სცინტილაციურ თვლაზე.
 17. ენდორადიოზონდირება – იძლევა საშუალებას მივიღოთ კვების ტრაქტში წნევის, ტუტემჟავიანობის და ტემპერატურის დროში ცვლილების შესაბამისი მრუდები.
- თანამედროვე სამედიცინო პრაქტიკაში ინტენსიურად და ეფექტურად გამოიყენება რენტგენო, ექო, ტომო და თერმოგრაფიის მეთოდები, რომლებიც აგრეთვე წარმოადგენენ სიგნალთა ნაკრებს. ამ მეთოდებით მიღებული ინფორმაცია ექიმთან სადიაგნოსტიკოდ მოხვედრამდის ექვემდებარება დამუშავებას. ამ დამუშავების მეთოდებიც თავის საფუძველში არ განსხვავდება ზემოთგანხილული სიგნალების დამუშავების მეთოდებისაგან.
- უფრო დაწვრილებით კვლევის ამ მეთოდებს შეიძლება გავეცნოთ სპეციალიზირებულ ლიტერატურაში.

1.2 სიგნალების ზოგადი თეორიის ელემენტები

სიგნალების დამუშავების თეორიის დამფუძნებლის ნორბერტ ვინერის განსაზღვრებით– ძნამდვილი ცხოვრება - ეს არის ცხოვრება ადექვატური ინფორმაციის პირობებში”.

ტერმინს „სიგნალი” ძალიან ხშირად აიგივებენ „მონაცემის” (data) და “ინფორმაციის” (information) ცნებასთან. სინამდვილეში ეს ცნებები ურთიერთდაკავშირებულია და არ არსებობენ ერთმანეთის გარეშე, მაგრამ მიეკუთვნებიან სხვადასხვა კატეგორიებს.

ინფორმაციის ცნებას მრავალი განსაზღვრება აქვს ყველაზე ფართოდან (ინფორმაცია არის რეალური სამყაროს ფორმალიზირებული ასახვა) პრაქტიკულამდე (ინფორმაცია წარმოადგენს შეტყობინებებს და მონაცემებს, რომლებიც არიან შენახვის, გადაცემის, გარდაქმნის, აღთქმის და მართვის ობიექტები). დღეისთვის მსოფლიო მეცნიერება თანდათან თანხმდება იმაზე, რომ მატერიასა და ენერგიასთან ერთად ინფორმაცია მიეკუთვნება ბუნებისმეტყველების ფუნდამენტალურ ფილოსოფიურ კატეგორიებს. ვინერის განსაზღვრებით „ინფორმაცია არის ინფორმაცია, და არა მატერია ან ენერგია.“ ამ პოზიციიდან იგი შეიძლება მივაკუთვნოთ ობიექტური სამყაროს ერთ-ერთ მართალია რამდენადმე სპეციფიურ თვისებას.

რაც შეეხება მონაცემებს (ლათინურად datum - ფაქტი), ეს არის დაკვირვებათა შედეგების, რაღაც ობიექტთა გაზომვის, მატერიალური სამყაროს მოვლენების და პროცესების ფაქტორთა ერთობლიობა, რომელნიც წარმოადგენილია ფორმალიზირებული სახით რაოდენობრივ ან თვისობრივ ფორმაში. იგი არის ატრიბუტი, ნედლეული, რომლის შესაბამისი გადამუშავების და ინტერპრეტაციის შედეგად მიიღება ინფორმაცია.

სიგნალი ეწოდება რომელიმე ობიექტის ფიზიკური მდგომარეობის ამსახველი პარამეტრის დროში ცვლილების პროცესს, რომელიც გამოიყენება შეტყობინების ასახვის, რეგისტრაციისა და გადაცემისათვის.

ცოცხალ ბუნებაში შეიძლება ვიხილოთ სიგნალების გადაცემის და დამუშავების მრავალი ბრწყინვალე მაგალითი. მაგალითად, როდესაც ღამურა ნადირობს თავის მსხვერპლზე, იგი გამოსცემს ულტრაბგერით ტალღებს. მსხვერპლისგან არეკვლილ ტალღებს იგი იღებს შესაბამისი სენსორებით და დამუშავების შედეგად ზუსტად განსაზღვრავს მის კოორდინატებს და გადაადგილების ტრაექტორიას. ინფორმაციის სწორი დამუშავების შედეგად იგი მიიღებს საკვებს ან გადაურჩება მტერს. წინააღმდეგ შემთხვევაში ის დაიღუპება.

ასეთივე მრავალი ბრწყინვალე მაგალითი შეიძლება მოვიყვანოთ ადამიანის ორგანიზმის ფუნქციონირებიდან: ადამიანის გრძნობის ორგანოები სიგნალების მეშვეობით ტვინისაკენ გადასცემენ უამრავ ინფორმაციას. ამ ინფორმაციის სწორი დამუშავება განაპირობებს ადამიანის ადექვატურ ფუნქციონირებას გარემოში. აქვე დავაზუსტოთ, რომ სიგნალი არის ინფორმაციის გადაცემის საშუალება. ამიტომ, მიუხედავად იმისა, რომ ადამიანის ორგანოებიდან ყველა მნიშვნელოვანია, მთავარი ტვინია, მისი აზროვნება, სადაც მიდის მიღებული ინფორმაციის გადამუშავება და ადექვატური გადაწყვეტილების მიღება. ადამიანისთვის ძალიან მნიშვნელოვანია აგრეთვე გრძნობის ორგანოები, რომლებიც გვაწვდიან ინფორმაციას გარემოზე. მთავარი მათ შორის მხედველობაა, რომლის მეშვეობითაც მიიღება გარე ინფორმაციის 90%. მეორე ადგილზეა სმენა, რომელიც გვაწვდის ინფორმაციის კიდევ 9%. მხოლოდ დარჩენილ 1% გვაწვდის ყნოსვის, გრძნობის და გემოვნების ორგანოები. როგორც ცნობილია, ეს ინფორმაცია სიგნალების სახით გამომუშავდება შესაბამის რეცეპტორებში და გადაეცემა ტვინს დამუშავებისა და ადექვატური რეაგირებისათვის. კორექტულობის მიზნით ავლნიშნოთ, რომ გარდა ამ სიგნალებისა, ტვინს იმავე დროს მიეწოდება მრავალი სიგნალი თვით ორგანიზმიდან (სისხლის წნევის შესახებ სისხლძარღვთა ბარორეცეპტორებიდან, ორგანიზმის სივრცულ მდგომარეობაზე ვესტიბულარული აპარატიდან და ა.შ.) და გადაწყვეტილების მიღების

პროცესში ეს სიგნალები თამაშობენ არანაკლებ როლს, ვიდრე გარედან მიღებული. აქვე დავამატოთ, რომ გადაწყვეტილების მიღების პროცესში არანაკლებ როლს თამაშობს მეხსიერებაში არსებული გენეტიკური და შეძენილი ინფორმაცია, რომელთანაც მიღებულის შედარება, როგორც თანამედროვე კვლევები უჩვენებენ, ხდება სიგნალების დონეზე.

ძალიან ზოგადი სახით სიგნალი – ეს არის ერთი სიდიდის დამოკიდებულება მეორეზე და მათემატიკური თვალსაზრისით წარმოადგენს ფუნქციას. სიგნალის ყველაზე გავრცელებული სახე არის ელექტრული და წარმოადგენს ძაბვის დამოკიდებულებას დროზე.

ტერმინი სიგნალი (signal წარმოქმნილია ლათინური signum - ნიშანიდან) ძალიან ხშირად გამოიყენება ფართო აზრობრივ დიაპაზონში მკაცრი ტერმინოლოგიის დაცვის გარეშე.

ზემოთ ამოყვანილი მიმოხილვის შედეგად შემოვიტანოთ სიგნალის კორექტული განმარტება: სიგნალი არის ინფორმაციული ფუნქცია, რომელსაც მოაქვს შეტყობინება რაიმე ფიზიკრი სისტემის, ობიექტის ან გარემოს ფიზიკრ თვისებებზე, მდგომარეობაზე ან ქცევაზე. სიგნალების დამუშავების ამოცანაა ამ სიგნალებში არსებული ინფორმაციული მონაცემების ამოღება (სასარგებლო ან მიზნობრივი) და ამ მონაცემების გარდაქმნა ალქმის და შემდგომი გამოყენებისთვის მოხერხებულ ფორმაში.

სიგნალის ანალიზის (analysis) ქვეშ იგულისხმება არა მარტო მათი მათემატიკური გარდაქმნა, არამედ ამ გარდაქმნების შედეგად დასკვნების გაკეთება შესაბამისი პროცესების და ობიექტების სპეციფიურ თვისებებზე. სიგნალების ანალიზის მიზნებია:

- სიგნალის რიცხვითი პარამეტრების განსაზღვრა ან შეფასება (ენერგია, საშუალო სიმძლავრე, საშუალო კვადრატული მნიშვნელობა და ა.შ.).
- სიგნალის დაშლა ელემენტარულ მდგენელებად სხვადასხვა სიგალების თვისებების შესადარებლად.
- სხვადასხვა სიგნალების მსგავსების, „ნათესაობის” განსაზღვრა, მათ შორის რაოდენობრივი შეფასება.

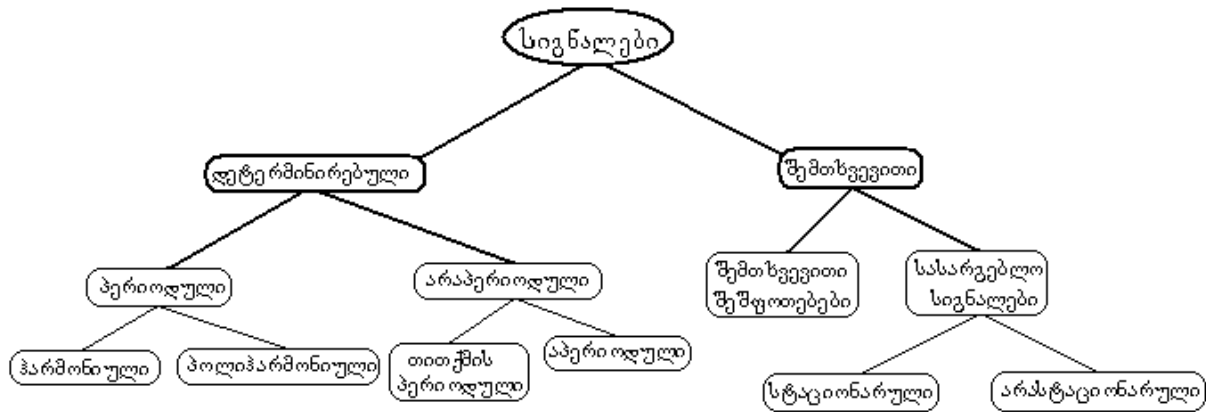
სიგნალების ანალიზის მათემატიკური აპარატი ძალიან მრავალფეროვანია და ფართოდ გამოიყენება პრაქტიკაში. ამ მათემატიკურ აპარატზე ეფუძნება სიგნალების კვლევის და ასახვის ელექტრონული (მიკროპროცესორული) აპარატურის დამუშავება შემდგომი წარმოებისათვის და გამოყენებისთვის.

სიგნალის ტერმინთან განუყოფლად არის დაკავშირებული სიგნალების რეგისტრაციის ტერმინი. ფართო გაგებით ამ ტერმინის ქვეშ იგულისხმება სიგნალის გამოყოფა და მისი გარდაქმნა გამოყენების, დამუშავების და ალქმისთვის ხელსაყრელ (ადვილ, მარტივ) ფორმაში. ქვემოთ რეგისტრაციის ქვეშ იგულისხმება მონაცემთა რეგისტრაცია (data logging) რომლებიც გადიან გარკვეულ სისტემაში ან მის კვანძში და გარკვეული სახით ფიქსირდებიან გარკვეულ მატერიალურ მატარებელზე ან სისტემის მეხსიერებაში.

უპირველეს ყოვლისა მოვახდინოთ სიგნალების კლასიფიკაცია, რათა დავადგინოთ განსაზღვრული ტერმინოლოგია და გამოვიმუშაოთ კლასიფიკაციის კრიტერიუმები .

1.3 სიგნალების აღწერა მათემატიკური მოდელების საშუალებით

სიგნალები, როგორც ფიზიკური პროცესები, შეიძლება შევისწავლოთ სხვადასხვა ხელსაწყოებითა და მოწყობილობებით - ელ. ოსცილოგრაფით, ვოლტმეტრით, სიხშირმზომით და ა.შ. ასეთ ემპირიულ მეთოდს გააჩნია მნიშვნელოვანი ნაკლი. მოვლენები, რომლებსაც აკვირდება ექსპერიმენტატორი, ყოველთვის ერთეულია და მოკლებულია განზოგადოების ისეთ ხარისხს, რომელიც მოგვცემდა საშუალებას გვემსჯელა მათ ფუნდამენტალურ თვისებებზე, გვეჩინასწარმეტყველა შედეგი.



სიგნალების კლასიფიკაცია

იმისათვის, რომ სიგნალები გავხადოთ თეორიული კვლევის და ანგარიშის ობიექტი, საჭიროა მოვებნოთ მათი მათემატიკური აღწერის გზები, ე.ი. შევქმნათ გამოსაკვლევ სიგნალის მათემატიკური მოდელი.

ფიზიკური პროცესების ანალიზის დროს სიგნალების მათემატიკური მოდელების შექმნისას არსებობს ორი მიდგომა.

პირველი მიდგომა ოპერირებს დეტერმინირებული სიგნალებით, რომელთა მნიშვნელობა დროის ნებისმიერ მომენტში ან სივრცის ნებისმიერ წერტილში აპრიორულად ცნობილია ან საკმაოდ ზუსტად შეიძლება იქნას განსაზღვრული (გამოთვლილი).

მეორე მიდგომა გულისხმობს სიგნალების შემთხვევით ხასიათს, რომლებიც იღებენ კონკრეტულ მნიშვნელობებს რაღაც ალბათობით და რომლებიც შეიძლება აღვწეროთ სტატისტიკური მახასიათებლების გამოყენებით.

სიგნალის მათემატიკური მოდელი შეიძლება იყოს ფუნქციონალური დამოკიდებულება, რომლის არგუმენტი დროა. როგორც წესი სიგნალის მათემატიკური მოდელი აღინიშნება ლათინური ალფაბეტის სიმბოლოებით: $f(t)$, $u(t)$ და ა.შ.

სიგნალის მათემატიკური მოდელი უპირველეს ყოვლისა ითვალისწინებს სიგნალის იმ თვისებებს, რომელნიც ძირითადად და უგულვებელყოფს მეორეხარისხოვნებს. უმეტეს შემთხვევაში რთულია შევირჩიოთ ისეთი ფუნქციონალური კავშირები, რომლებიც ზუსტად აღწერენ ექსპერიმენტის შედეგებს. ამიტომ მკვლევარი სიგნალების მათემატიკური მოდელირების არსენალიდან ირჩევს ისეთს, რომელიც კონკრეტულ სიტუაციაში უკეთესად და უმარტივესად აღწერს ფიზიკურ პროცესს.

ხშირ შემთხვევაში, როდესაც სიგნალის წარმოქმნის ბუნება არ ექვემდებარება თეორიულ დასაბუთებას ან მისი მათემატიკური გამოსახულება ძალზედ რთულია, მისი აღწერისთვის გამოიყენება მათემატიკაში საკმაოდ გავრცელებული მეთოდები: მწკრივებად დაშლა და აპროქსიმაცია.

სიგნალის აღმწერი ფუნქციები იღებენ როგორც ნამდვილ, ასევე წარმოსახვით მნიშვნელობებს. შესაბამისად ხშირად საქმე გვექნება როგორც ნამდვილ, ასევე წარმოსახვით სიგნალებთან. სიგნალის მათემატიკური მოდელი საშუალებას გვაძლევს შევადაროთ ისინი ერთმანეთს, დავადგინოთ მათი მსგავსება და განსხვავება, მოვახდინოთ მათი კლასიფიკაცია.

1.4 დეტერმინირებული სიგნალების კლასიფიკაცია

ჩვეულებრივ დეტერმინირებულ სიგნალებს ყოფენ ორ კლასად: პერიოდული და არაპერიოდული.

პერიოდულს მიაკუთვნებენ ჰარმონიულ და პოლიჰარმონიულ სიგნალებს. პერიოდული სიგნალები აკმაყოფილებენ პირობას

$$s(t) = s(t + kT)$$

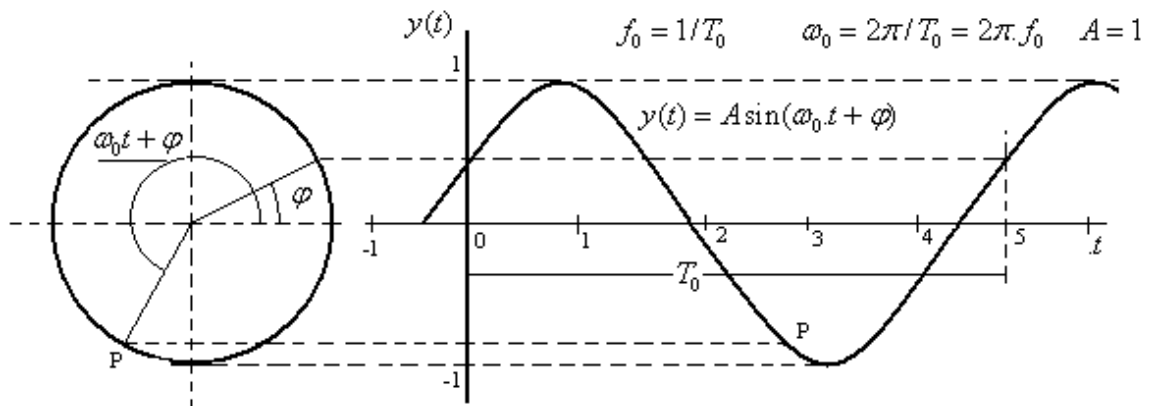
ჰარმონიული სიგნალები.

სადაც $k = 1, 2, 3, \dots$ – ნებისმიერი მთელი რიცხვია, ხოლო T – პერიოდია და წარმოადგენს დროის სასრულ მონაკვეთს.

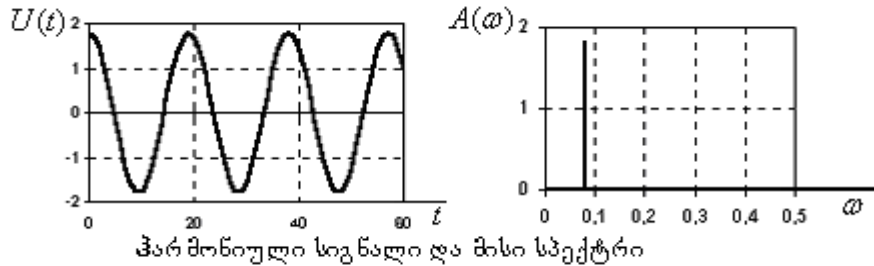
ნახაზზე მოყვანილია ჰარმონიული (სინუსოიდალური) სიგნალი, რომელიც აღიწერება განტოლებით

$$s(t) = A \sin(2\pi \cdot f_0 t + j) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{ან} \quad s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

სადაც $A, f_0, \omega_0, j, \varphi$ – მუდმივი სიდიდეებია. A – სიგნალის ამპლიტუდაა, f_0 – სიგნალის ციკლური სიხშირე ჰერცებში, $\omega_0 = 2\pi f_0$ – კუთხური სიხშირე რადიანებში, j და φ – საწყისი ფაზური კუთხეები რადიანებში. რხევის პერიოდი, $T = 1/f_0 = 2\pi/\omega_0$ როდესაც $j = \varphi - \pi/2$ სინუსური და კოსინისური ფუნქციები აღწერენ ერთსა და იმავე სიგნალს.



ამ სიგნალის ამპლიტუდური სიხშირული სპექტრი ნაჩვენებია ქვემოთამოყვანილ ნახაზზე.



პოლიჰარმონიული სიგნალები.

ეს სიგნალები წარმოადგენენ პერიოდული სიგნალების ყველაზე გავრცელებულ ჯგუფს და აღიწერებიან ჰარმონიული რხევების ჯამის სახით

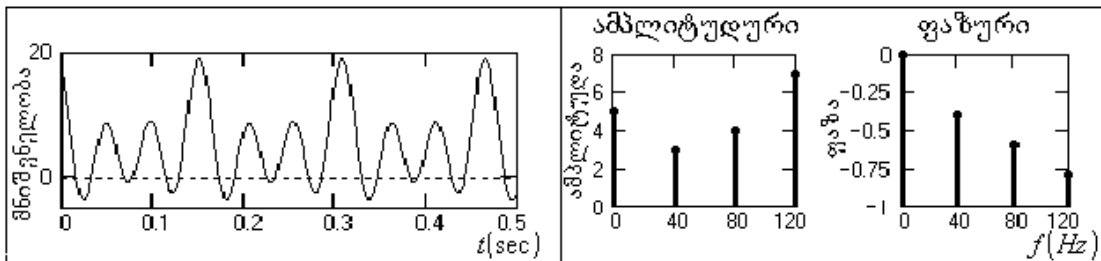
$$s(t) = \sum_{n=0}^N A_n \sin(\omega_n t + j_n)$$

ან პირდაპირი ფუნქციით

$$s(t) = y(t + nT)$$

სადაც $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, ხოლო T – სიგნალის სრული პერიოდი.

პოლიჰარმონიული სიგნალი წარმოადგენს მუდმივი მდგენელის და შესაბამისი ამპლიტუდით A_n და ფაზით j_n $f = 1/T$ – ს ჯერადი სიხშირის ჰარმონიული მდგენელების ჯამს. ნახაზზე მოყვანილია პოლიჰარმონიული სიგნალის მაგალითი ოთხი მდგენელით.



პოლიჰარმონიული სიგნალის დროითი მოდელი

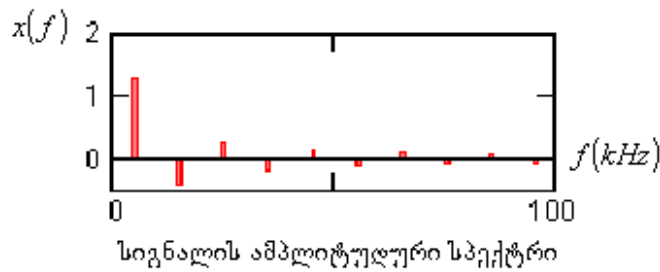
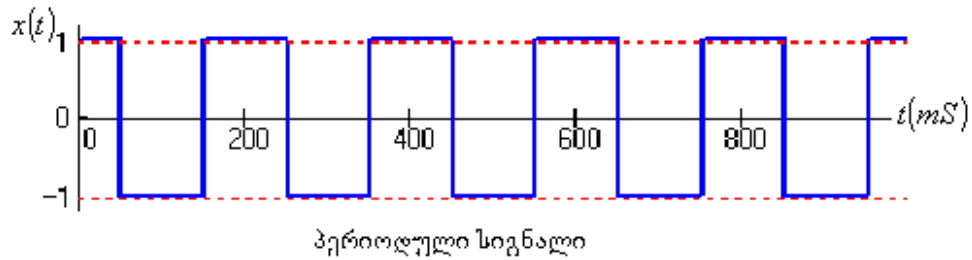
სიგნალის სპექტრი

ამ სიგნალის მათემატიკური მოდელი (ფორმულა) იქნება

$$s(t) = \sum_{n=0}^3 A_n \cos(2\pi f_n t + j_n)$$

სადაც $A_n = \{5, 3, 4, 7\}$ – ჰარმონიულების ამპლიტუდებია, $f = \{0, 40, 80, 120\}$ – ჰარმონიული მდგენელების სიხშირეებია, ხოლო $j_n = \{0, -0.4, -0.6, -0.8\}$ – შესაბამისი საწყისი ფაზური წანაცვლებები.

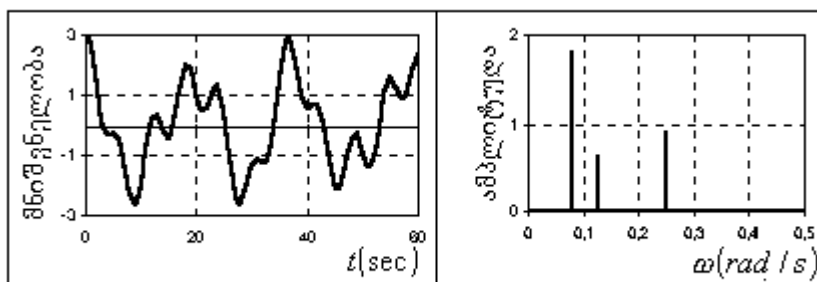
ნებისმიერი ფორმის სიგნალი შესაძლებელია წარმოვადგინოთ ძირითადი რხევის სიხშირის $w = 2\pi / T$ ჯერადი სიხშირეების ჰარმონიული რხევების ჯამით. ერთ-ერთი მაგალითი ნაჩვენებია ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე.



მივაქციოთ ყურადღება, რომ პერიოდული რხევების სპექტრი დისკრეტულია.

არაპერიოდულ სიგნალებს მიაკუთვნებენ თითქმის პერიოდულ და აპერიოდულ ან გარდამავალ სიგნალებს.

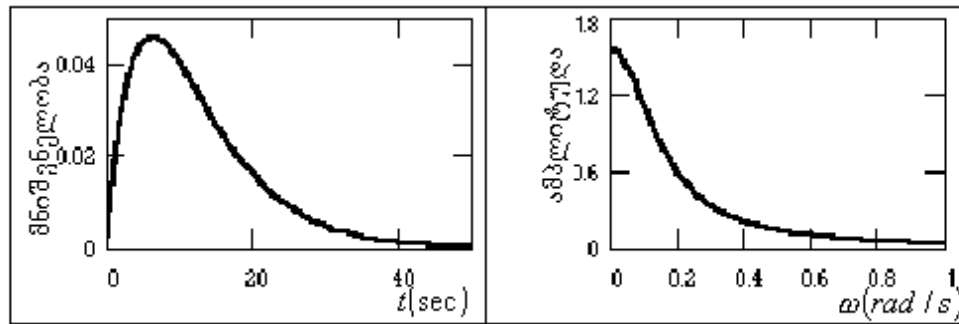
თითქმის პერიოდული სიგნალები თავისი ფორმით ძალიან ახლოს არიან პოლიჰარმონიულებთან. ისინი აგრეთვე წარმოადგენენ ორი ან მეტი ჰარმონიული სიგნალის ჯამს იმ განსხვავებით, რომ როგორც მინიმუმ ორი მდგენელის სიხშირეთა შეფარდება არ არის რაციონალური რიცხვი. ამის შედეგად ჯამურ რხევათა ფუნდამენტალური პერიოდი უსასრულოდ დიდია. როგორც წესი, თითქმის პერიოდული სიგნალები წარმოიქმნება ერთმანეთთან არდკავშირებული ფიზიკური პროცესებით. ასეთი სიგნალების სპექტრიც დისკრეტულია. ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე ნაჩვენებია ასეთი სიგნალი და მისი სპექტრი.



თითქმის პერიოდული სიგნალი და მისი სპექტრი

აპერიოდული სიგნალები წარმოადგენენ არაპერიოდული სიგნალების ძირითად ჯგუფს და განისაზღვრებიან ნებისმიერი დროითი ფუნქციით. მაგალითისთვის ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე ნაჩვენებია დროით ინტერვალზე $(0, \infty)$ ფუნქციით

$s(t) = \exp(-at) - \exp(-bt)$ განსაზღვრული ფუნქცია, რომლისათვისაც მუდმივები $a = 0.15, b = 0.17$.

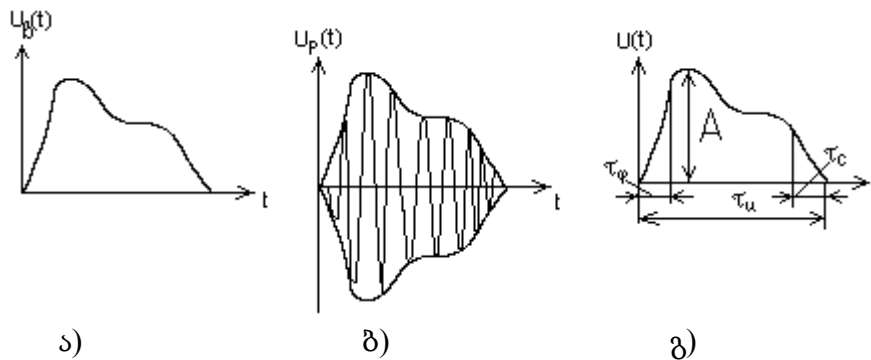


აპერიოდული სიგნალი და მისი სპექტრის მოდული

აპერიოდული სიგნალების სიხშირული სპექტრი უწყვეტია. მათ წარმოსადგენად სიხშირულ სივრცეში გამოიყენება ფურიეს ინტეგრალური გარდაქმნა, რომლითაც აისახება სიგნალის სპექტრალური სიმკვრივე.

აპერიოდულ სიგნალებს აგრეთვე მიეკუთვნებიან იმპულსური სიგნალები, რომლებიც, როგორც წესი, მარტივი ფორმის არიან და არსებობენ დროის ხანმოკლე მონაკვეთზე.

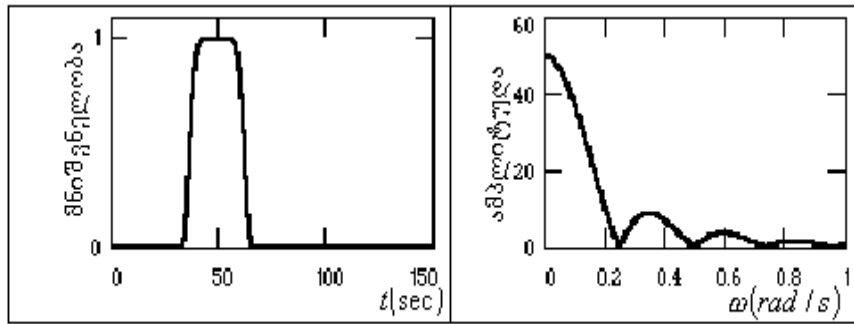
რადიოტექნიკაში განასხვავებენ რადიოიმპულსებს და ვიდეოიმპულსებს. თუ $u(t)$ – ვიდეოიმპულსია (ნახ 3.ა), $s(t) = u(t)\cos(2\pi ft + j_0)$ მისი შესაბამისი რადიოიმპულსის მათემატიკური მოდელია (ნახ. 3.ბ). ამ დროს $u(t)$ –ს ეწოდება რადიოიმპულსის მომვლელი, ხოლო ფუნქცია $\cos(\omega_0 t + j_0)$ - მისი შევსებაა



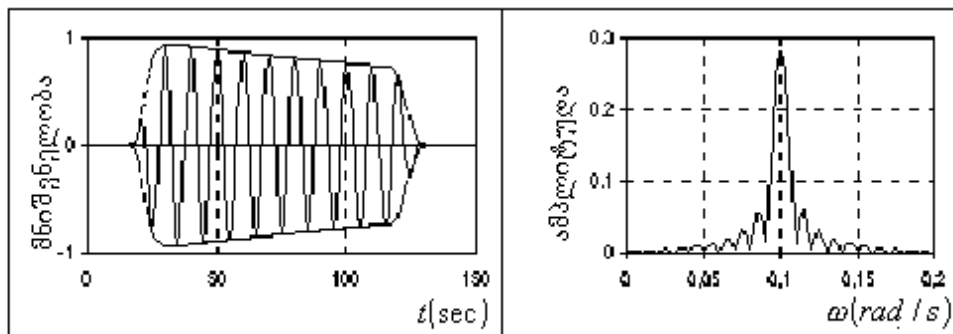
ნახ.3

იმპულსების აღწერისათვის გამოიყენება მათი ისეთი მნიშვნელოვანი პარამეტრები, როგორცაა ამპლიტუდა (A), იმპულსის ხანგრძლივობა (t_u) ფრონტის ხანგრძლივობა (t_j) და წაკვეთის ხანგრძლივობა (t_c).

ნახაზზე მოყვანილია ვიდეოიმპულსი და რადიოიმპულსი შესაბამისი სპექტრებით.



იმპულსური სიგნალი და მისი სპექტრის მოდული



რადიოიმპულსი და მისი სპექტრის მოდული

ენერგეტიკულ პოზიციებიდან სიგნალებს ყოფენ ორ კლასად: სასრული და უსასრულო ენერგიით.

სიგნალებისთვის სასრული ენერგიით (სიგნალებისთვის ინტეგრირებადი კვადრატით) უნდა სრულდებოდეს პირობა $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty$

როგორც წესი, ასეთ სიგნალების კლასს მიეკუთვნებიან აპერიოდული და იმპულსური სიგნალები, რომელთაც არ გააჩნიათ მეორე რიგის წყვეტა და გააჩნიათ შეზღუდული რაოდენობის პირველი რიგის წყვეტა და განსაკუთრებული წერტილები, რომელნიც მიისწრაფიან უსასრულობისკენ.

ნებისმიერი პერიოდული, პოლიჰარმონიული და თითქმის პერიოდული სიგნალები, ასევე სიგნალები მეორე რიგის წყვეტით და განსაკუთრებული წერტილებით, მიეკუთვნებიან სიგნალებს უსასრულო ენერგიით. მათი ანალიზისთვის გამოიყენება სპეციალური მეთოდები.

ზოგჯერ ცალკე კლასად გამოყოფენ სასრული ხანგრძლივობის იმპულსებს, რომლებიც ნოლისაგან განსხვავდებიან არგუმენტების შეზღუდულ ინტერვალზე. ასეთ სიგნალებს ფინიტურებს უწოდებენ.

1.5 შემთხვევითი სიგნალების კლასიფიკაცია.

შემთხვევითი სიგნალი ეწოდება დროით ფუნქციას, რომლის მნიშვნელობებიც წინასწარ არ არის ცნობილი და შეიძლება ვიწინასწარმეტყველოთ გარკვეული ალბათობით. შემთხვევითი სიგნალები ასახავენ შემთხვევით ფიზიკურ პროცესებს ან მოვლენებს, ანუ ერთჯერადად დაფიქსირებული სიგნალი შემთხვევითი სიგნალი არ აღწარმოვბდება შემდგომ დაკვირვებებში და არ შეიძლება იყოს აღწერილი ცხადი მათემატიკური დამოკიდებულებით. შემთხვევითი სიგნალის რეგისტრაციის დროს რეალიზდება შემთხვევითი პროცესის მხოლოდ ერთი შესაძლო ვარიანტი, ხოლო პროცესის საკმაოდ სრული და ზუსტი აღწერისთვის საჭიროა დაკვირვების მრავალჯერადი გამეორება და სიგნალის რეალიზაციის ანსამბლის გარკვეული სტატისტიკური მახასიათებლების განსაზღვრა. შემთხვევითი სიგნალის ძირითად სტატისტიკურ მახასიათებლებს წარმოადგენენ:

1. განსაზღვრულ მნიშვნელობათა ინტერვალში სიგნალის სიდიდის მდებარეობის ალბათობის განაწილების კანონი.

2. სიგნალის სიმძლავრის განაწილების სპექტრი.

შემთხვევითი სიგნალები შეიძლება იყოს სტაციონარული და არასტაციონარული. შემთხვევითი სტაციონარული სიგნალები ინარჩუნებენ თავის სტატისტიკურ მახასიათებლებს შემთხვევითი პროცესის მიმდევრობით რეალიზაციებში. არასტაციონარული შემთხვევითი სიგნალების შეთანხმებული კლასიფიკაცია არ არსებობს. როგორც წესი, მათგან გამოყოფენ სიგნალთა სხვადასხვა ჯგუფს არასტაციონარულობის თავისებურებებით.

1.6 ერთგანზომილებიანი და მრავალგანზომილებიანი სიგნალები

პოტენციალთა სხვაობა ბიოლოგიური სხეულის ზედაპირის ორ წერტილს შორის წარმოადგენს ტიპურ ბიოსიგნალს. სიგნალს, რომელიც წარმოადგენს დროის ერთ ფუნქციას, ერთგანზომილებიანი სიგნალი ეწოდება .

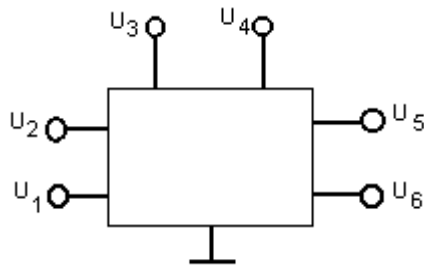
ზოგჯერ ხელსაყრელია განვიხილოთ მრავალგანზომილებიანი სიგნალები ანუ ვექტორული სიგნალები, რომლებიც ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\vec{V}(t) = \{v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)\}$$

იგი წარმოქმნილია ერთგანზომილებიანი სიგნალებისაგან. მთელ რიცხვს n -ს ეწოდება ასეთი სიგნალის განზომილება.

მრავალგანზომილებიან სიგნალს წარმოადგენს, მაგალითად, ძაბვათა სისტემა მრავალპოლუსას მომჭერებზე. ბიოლოგიურ მაგალითად შეიძლება მოვიყვანოთ ელექტროკარდიოსიგნალის განხრების ან ენცეფალოგრაფიული გამოკვლევის ჩანაწერები.

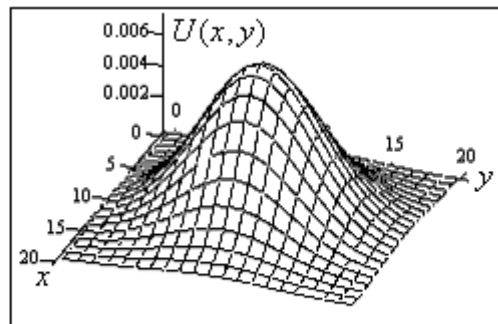
მრავალგანზომილებიანი სიგნალის მაგალითი ამოყვანილია ნახ.2 ზე.



ნახ.2.

აღსანიშნავია, რომ მრავალგანზომილებიანი სიგნალი - ეს არის ერთგანზომილებიანი სიგნალების მოწესრიგებული სიმრავლე. ამიტომ ზოგად შემთხვევაში მრავალგანზომილებიანი სიგნალები სიგნალთა სხვადასხვა მიმდევრობით არ უდრის ერთმანეთს $\{v_1, v_2\} \neq \{v_2, v_1\}$.

მრავალგანზომილებიანი სიგნალების მოდელები ძალზედ ხელსაყრელია იმ შემთხვევაში, როდესაც რთული სისტემების ანალიზი ხორციელდება ელექტრონული გამომთვლელი მანქანის დახმარებით.



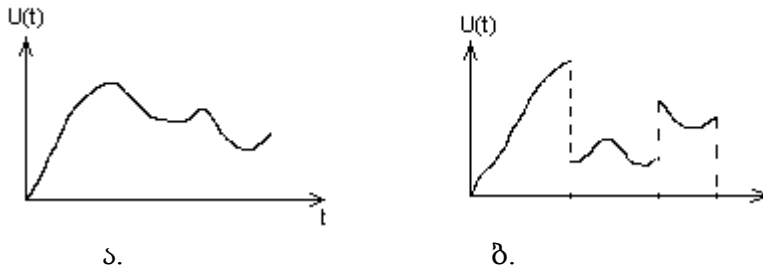
ორგანზომილებიანი სიგნალის მაგალითი

ანალოგური, დისკრეტული და ციფრული სიგნალები

ანალოგური სიგნალები.

ხშირად ფიზიკური პროცესი, რომელიც წარმოქმნის სიგნალს, დროში ისეთნაირად ვითარდება, რომ სიგნალის მნიშვნელობის გაზომვა შეიძლება დროის ნებისმიერ მომენტში. ამ კლასის სიგნალებს უწოდებენ ანალოგურებს (კონტინუალურებს). ტერმინი „ანალოგური სიგნალი“ (analog signal) ხაზს უსვამს იმ გარემოებას, რომ ასეთი სიგნალი მისი წარმომქმნელი პროცესის მსგავსია, მთლიანად „ანალოგურია“.

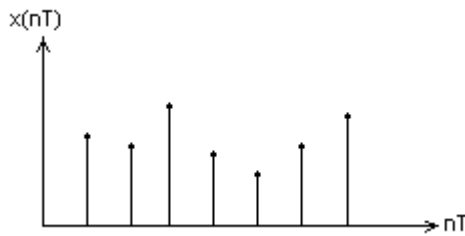
ერთგანზომილებიანი ანალოგური სიგნალი თვალსაჩინოდ წარმოდგენილია გრაფიკით (ოსცილოგრამით), რომელიც შეიძლება იყოს უწყვეტი (4.ა) და წვეტიან წერტილებით (4.ბ).



ნახ. 4

დისკრეტული სიგნალები.

ტექნიკის განვითარებასთან ერთად ანალოგური სისტემები თანდათან იცვლებიან დისკრეტული სისტემებით. დისკრეტული სისტემების მოქმედება დამყარებულია დისკრეტული სიგნალების (diskrete signal) გამოყენებაზე. დისკრეტული სიგნალი წარმოადგენს სიგნალების ანათვლების მნიშვნელობებს S_i^{\wedge} , რომელნიც შეესაბამებიან წერტილთა სასრულ სიმრავლეს დროით $\{t\}$ ღერძზე, როგორც წესი, დისკრეტიზაციის ბიჯი მუდმივია $T = t_{i+1} - t_i$ ყოველი მოცემული სიგნალისათვის. ინტუიციურად ცხადია, რომ რაც უფრო სწრაფად ცვლადია სიგნალი, მით უფრო მცირე უნდა იყოს დისკრეტიზაციის ბიჯი, რათა არ დავკარგოთ სიგნალის ინფორმაციული წერტილები. დისკრეტიზაციის ბიჯის განსაზღვრის საკითხი დაწვრილებით განხილული იქნება ქვემოთ.



ნახ.5

1.7 ციფრული სიგნალები.

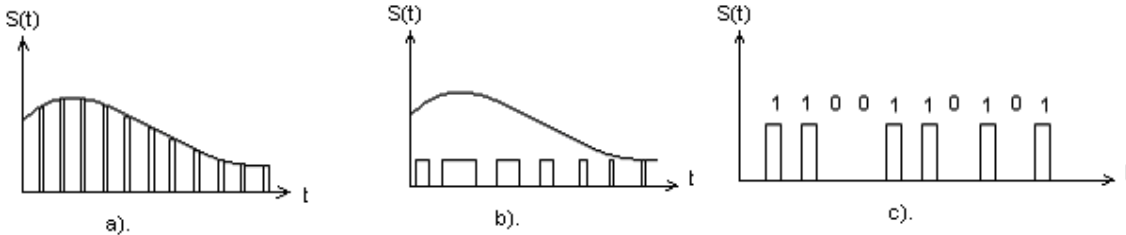
დისკრეტული სიგნალის ნაირსახეობას წარმოადგენენ ციფრული სიგნალები. მათთვის დამახასიათებელია, რომ დისკრეტული სიგნალი წარმოადგენილია ციფრების სახით. დამუშავების და რეალიზაციის სიმარტივისათვის ჩვეულებრივ გამოიყენებენ ორობით რიცხვებს განსაზღვრული მცირე თანრიგთა რაოდენობით. უკანასკნელ ხანში ციფრული სისტემები და შესაბამისად სიგნალები, სულ უფრო ვრცელ გამოყენებას ჰპოვებენ. ეს განპირობებულია მიკროელექტრონიკის და ინტეგრალური სქემოტექნიკის მძლავრი განვითარებით. ციფრული სიგნალის მაგალითი ნაჩვენებია ნახ.6-ზე.

·	·	·	·	·	·	·	·
1	1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0
·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·

ნახ.6

საჭიროა გვახსოვდეს, რომ ნებისმიერი დისკრეტული სიგნალი (თუ მასზე ვმსჯელობთ ფიზიკური პროცესის და არა მათემატიკური მოდელის თვალსაზრისით) ანალოგური სიგნალია. მაგალითად, დროში ნელა ცვლადი უწყვეტი სიგნალი შეიძლება წარმოვადგინოთ მისი დისკრეტული წარმოსახვით, რომელიც წარმოადგენს ერთნაირი ხანგრძლივობის მართკუთხა ვიდეოიმპულსების სიმრავლეს. ამ იმპულსების ამპლიტუდა $S(t)$ სიგნალის მნიშვნელობის პროპორციულია ათვლის წერტილებში (ნახ.7a) შეგვიძლია მოვიქცეთ სხვანაირადაც: იმპულსების ამპლიტუდა დავტოვოთ მუდმივი და ვცვალოთ მათი ხანგრძლივობა ანათვლების მნიშვნელობების შესაბამისად (ნახ.7b). ანალოგური სიგნალის დისკრედიტაციის ორივე განხილული მეთოდი ექვივალენტურია, რადგან დისკრედიტაციის წერტილებში ცალკეული ვიდეოიმპულსების ფართობი ანალოგური სიგნალის მნიშვნელობის პროპორციულია იმავე მომენტში.

ათვლილი მნიშვნელობების ფიქსირება ციფრული სახით ასევე ხორციელდება ვიდეოიმპულსების დახმარებით. ორობითი ათვლის სისტემა იდეალურად არის მორგებული ამ პროცედურისათვის (ნახ. 7c).



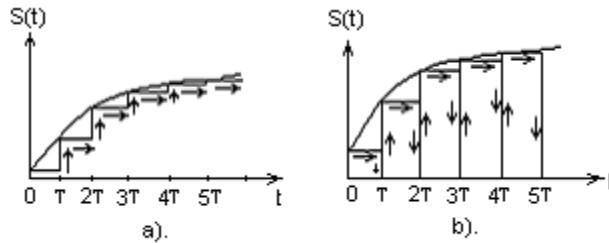
ნახ. 7.

2.1 სიგნალების დინამიური წარმოდგენა

რეალური სიგნალი დროის მომდევნო მომენტებში შეიძლება წარმოვიდგინოთ გარკვეული ელემენტარული სიგნალების ჯამის სახით. თუ ცალკეული ელემენტარული სიგნალების ხანგრძლივობას მივსწრაფავთ ნულისაკენ, ზღვარში მივიღებთ საწყისი სიგნალის ზუსტ გამოსახულებას. ასეთ ხერხს ეწოდება სიგნალების დინამიური წარმოდგენა. ამით ხაზს უსვამენ პროცესის დროში განვითარების ხასიათს.

ძირითადი გამოყენება ჰპოვა დინამიური წარმოდგენის ორმა ხერხმა. პირველში ელემენტარულ სიგნალად გამოიყენება საფეხურისებური ფუნქცია, რომელიც წარმოიქმნება დროის ერთნაირ T მონაკვეთებში. ყოველი ნახტომის სიმაღლე T ინტერვალში სიგნალის ნაზრდის ტოლია (ნახ.8a).

წარმოდგენის მეორე შემთხვევაში გამოიყენება მართკუთხა იმპულსები. ისინი ესაზღვრებიან ერთმანეთს და წარმოქმნიან მრუდით შემოსაზღვრულ ან მრუდის გასწვრივ შემოხაზულ მიმდევრობას (ნახ.8b).



ნახ. 8.

განვიხილოთ პირველ შემთხვევაში გამოყენებადი ელემენტარული სიგნალის თვისებები.

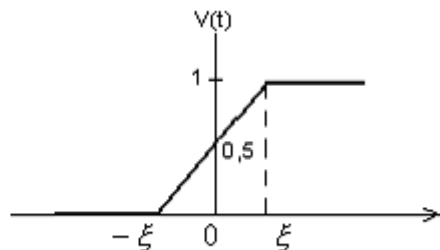
ჩართვის ფუნქცია. დავუშვათ მოცემულია სიგნალი, რომლის მათემატიკური მოდელი მოცემულია ტოლობათა სისტემით

$$V(t) = \begin{cases} 0, & t < x \\ \frac{1}{2}(t/x + 1), & -x \leq t \leq x \\ 1, & t > x \end{cases}$$

ეს ფუნქცია აღწერს ფიზიკური ობიექტის გადასვლას „ნულოვანიდან“ „ერთეულოვან“ მდგომარეობაში. გადასვლა ხორციელდება წრფიული კანონით $2x$ დროის მონაკვეთში. თუ პარამეტრ $x \rightarrow 0$, ზღვარში გადასვლა ერთი მდგომარეობიდან მეორეში ხორციელდება მყისიერად.

ასეთი ზღვრული ფუნქციის მათემატიკურ მოდელს ეწოდება ჩართვის ფუნქცია ან ხევესაიდის ფუნქცია:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

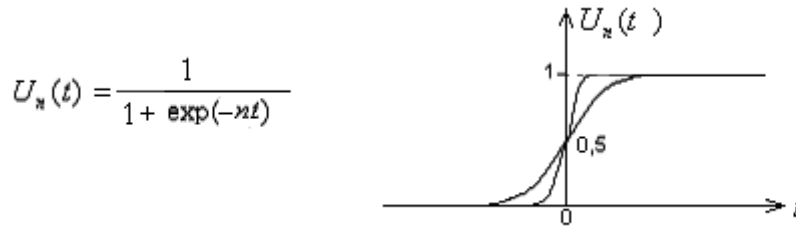


ნახ.9.

ზოგად შემთხვევაში ჩართვის ფუნქცია შეიძლება წანაცვლებული იყოს დროის ათვლის საწყისის მიმართ t_0 სიდიდით. წანაცვლებული ფუნქციის ჩაწერას ექნება სახე:

$$S(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1/2, & t = t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases}$$

ჩართვის ფუნქციას შეესაბამება სხვა მათემატიკური მოდელებიც. მაგალითად, ფუნქცია :

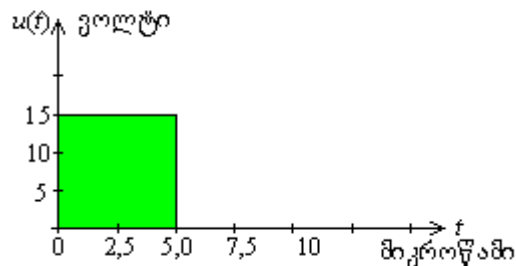


ნახ.10.

რთული არ არის დანახვა, რომ n -ს ზრდა კარგად აღწერს წყვეტად სიგნალს, რომელსაც გააჩნია ნახტომი $t = 0$ წერტილში.

მაგალითი. მართკუთხა ფორმის იმპულსურ სიგნალს u აქვს ამპლიტუდა 15 ვოლტი და ხანგრძლივობა 5 მიკროწამი. დროის ათვლის საწყისი ემთხვევა იმპულსის ფრონტს. ჩავწერთ ამ სიგნალის ანალიტიკური გამოსახულება.

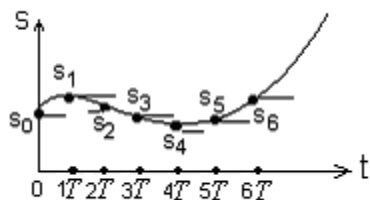
ამოხსნა. დონის ნახტომის ეფექტი $t = 0$ დროს აღიწერება ფუნქციით $u = 15S(t)$. იმისათვის, რომ სიგნალი დამთავრდეს $t_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ წამის შემდეგ, საჭიროა გამოვაკლოთ ამ დროის მონაკვეთით დაყოვნებული ასეთივე ჩართვის იმპულსი. აქედან გამომდინარე $u(t) = 15S(t) - 15S(t - 5 \cdot 10^{-6})$ ვოლტი შესაბამისი იმპულსი ნაჩვენებია ნახაზზე.



ნახ.11.

განვიხილოთ ხვევსაიდის ფუნქციის გამოყენება სიგნალის დინამიური წარმოდგენისათვის. განვიხილოთ ნებისმიერი სახის უწყვეტი სიგნალი $S(t)$.

დავუშვათ, რომ $S(t) = 0$, როცა $t < 0$. დავუშვათ, რომ $\{T, 2T, 3T, \dots\}$ დროის მომენტების მიმდევრობაა, რომლებსაც შეესაბამება სიგნალის მნიშვნელობათა მიმდევრობა $\{S_1, S_2, S_3, \dots\}$.



ნახ. 12

მაშინ სიგნალის მნიშვნელობა დროის ნებისმიერ მომენტში მიახლოებით უდრის ჯამს:

$$S(t) \approx S_0 S(t) + (S_1 - S_0) S(t - T) + (S_2 - S_1) S(t - 2T) + \dots = S_0 S(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (S_k - S_{k-1}) S(t - kT)$$

თუ $T \rightarrow 0, kT$ შეგვიძლია შევცვალოთ τ უწყვეტი ცვლადით. მაშინ მცირე ნაზრდი $(S_k - S_{k-1})$ გარდაიქმნება დიფერენციალში $dS = (dS/dt) dt$ და მივიღებთ სიგნალის დინამიური წარდგენის ფორმულას ხევესაიდის ფუნქციის საშუალებით:

$$S(t) = S_0 S(t) + \int_0^{\infty} \frac{ds}{dt} S(t-t) dt$$

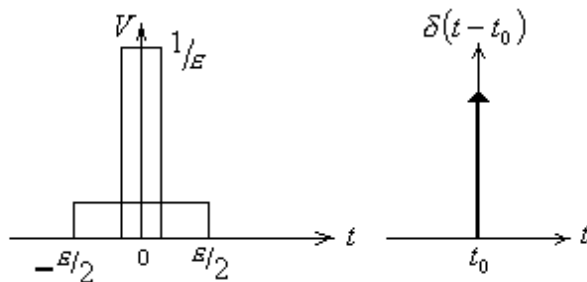
დელტა-ფუნქცია. სიგნალების დინამიური წარმოდგენისათვის მეორე ხერხით, როდესაც გამოიყენება იმპულსები, საჭიროა შემოვიტანოთ ახალი მნიშვნელოვანი ცნება - დელტა-ფუნქცია.

განვიხილოთ მართკუთხა ფორმის იმპულსი, რომელიც წარმოდგენილია შემდეგნაირად:

$$V(t; e) = \frac{1}{e} \left[S\left(t + \frac{e}{2}\right) - S\left(t - \frac{e}{2}\right) \right]$$

e - პარამეტრის ნებისმიერად ამორჩევის შემთხვევაში ამ იმპულსის ფართობი 1-ის ტოლია

$$\prod_v = \int_{-\infty}^{+\infty} v dt = 1$$



ნახ. 13

მაგალითად, თუ V –მაბვავა, მაშინ $\Pi_V = 1$ ვოლტი წამზე. როდესაც $\epsilon \rightarrow 0$, იმისათვის, რომ ფართობი დარჩეს უცვლელი, ამპლიტუდა უსაზღვროდ იზრდება. ასეთი ფუნქციის ზღვარს ეწოდება დელტა ანუ დირაკის ფუნქცია.

$$s(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} v(t, \epsilon)$$

დელტა-ფუნქცია საინტერესო მათემატიკური ობიექტია. მიუხედავად იმისა, რომ ყველგან $t = 0$ წერტილის გარდა იგი 0-ს ტოლია (ამბობენ, რომ იგი კონცენტრირებულია 0 წერტილში), მას გააჩნია ერთეულოვანი ინტეგრალი:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

ნახ.13-ზე მოყვანილია მისი სიმბოლური გამოსახულება. მათემატიკური მოდელირების კურსში ნაჩვენებია, რომ დელტა-ფუნქციის თვისებები გააჩნიათ მრავალი კლასიკური ფუნქციების ზღვრების მიმდევრობებს. მაგალითად,

$$S(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{-\frac{nt^2}{2}} \qquad S(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\sin nt / \Pi t]$$

დავუბრუნდეთ ნახ.11, სადაც ანალოგური სიგნალი აღიწერება ერთმანეთთან მომიჯნავე მართკუთხა იმპულსებით. თუ S_k სიგნალის მნიშვნელობაა k ანათვალზე, მაშინ ელემენტარული იმპულსი k ნომრით გამოისახება ასე:

$$h_k(t) = S_k [s(t - t_k) - s(t - t_k - T)]$$

სიგნალის დინამიური წარმოდგენის პრინციპის თანახმად S_k სიგნალი უნდა განვიხილოთ, როგორც ასეთი ელემენტარული მდგენელების ჯამი:

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k(t)$$

ამ ჯამში ნულისგან განსხვავებული იქნება მხოლოდ k ნომრიანი წევრები, რომლებიც პასუხობენ უტოლობას:

$$t_k < t < t_{k+1}$$

თუ $S(t)$ გამოსახულებაში გავითვალისწინებთ $h_k(t)$ გამოსახულებას და წინასწარ გავამრავლებთ და გავყოფთ ბიჯის T სიდიდით, მივიღებთ:

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k \frac{1}{T} [s(t-t_k) - s(t-t_k-T)] T$$

ზღვარზე გადასვლის დროს, როდესაც $T \rightarrow 0$ აჯამვას ვცვლით ინტეგრირების ფორმალური t ცვლადით, რომლის დიფერენციალიც dt შეესაბამება T სიდიდეს. რადგან

$$\lim_{T \rightarrow 0} [s(t-t_k) - s(t-t_k-T)] \frac{1}{T} = d(t-t)$$

მივიღებთ სიგნალის დინამიური წარმოდგენის ფორმულას

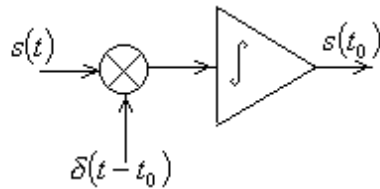
$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) d(t-t) dt$$

მნიშვნელოვანია ხაზი გავუსვათ დელტა-ფუნქციის ძირითად თვისებებს: მისი ფიზიკური განზომილება ისეთივეა, როგორც სიგნალის ხშირის, ე.ი. $t^{-1} S^{-1}$ (S -წამია).

აგრეთვე აღსანიშნავია, რომ ამ მეთოდით სიგნალის დინამიური წარმოდგენის დროს რომელიმე მყისიერი მნიშვნელობის მისაღებად აუცილებელია ვიცოდეთ სიგნალის ქცევის კანონი დროის მთელ ღერძზე.

ამრიგად, თუ უწყვეტ სიგნალს გავამრავლებთ დელტა-ფუნქციაზე და ნამრავლს გავაინტეგრირებთ დროით, შედეგი ტოლი იქნება უწყვეტი ფუნქციის მნიშვნელობის იმ წერტილში, სადაც კონცენტრირებულია იმპულსი. ამიტომ ამბობენ, რომ სწორედ ამაში მდგომარეობს დელტა-ფუნქციის მაფილტრირებელი თვისება.

ფორმულიდან გამომდინარეობს ანალოგიური $S(t)$ სიგნალის მყისიერი მნიშვნელობის გამზომი სისტემის სტრუქტურული სქემა (ნახ.14).



ნახ.14

ცხადია, რომ $S(t_0)$ -ის გაზომვა მით უფრო ზუსტი იქნება, რაც უფრო მოკლე იქნება ის რეალური სიგნალი (მაგ.: მართკუთხა ვიდეოიმპულსი), რომელიც მიახლოებით წარმოადგენს დელტა-ფუნქციას.

2.2 განზოგადოებული ფუნქცია როგორც სიგნალების მათემატიკური მოდელი

კლასიკურ მათემატიკაში გულისხმობენ, რომ ფუნქცია $S(t)$ იღებს გარკვეულ მნიშვნელობებს t ღერძის ნებისმიერ წერტილში. მაგრამ ზემოთგანხილული $d(t)$ ფუნქცია არ ეტევა ამ ჩარჩოებში. მისი მნიშვნელობა $t=0$ წერტილში საერთოდ არ არის

განსაზღვრული, მიუხედავად იმისა, რომ მისი ინტეგრალი ერთის ტოლია. აქ ცხადად ვხედავთ ფუნქციის, როგორც სიგნალის მათემატიკური მოდელის, ცნების გაფართოვების აუცილებლობას. ამ პრობლემის გადასაღებად შემოტანილია ახალი ცნება - განზოგადოებული ფუნქცია.

მის საფუძველში დევს მარტივი ინტუიციური მოსაზრება. როდესაც ხელში გვიჭირავს რაიმე საგანი, ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ მისი პროექციები მრავალ შესაძლო სიბრტყეზე. გამოსაკვლევი ფუნქციის $f(t)$ „პროექციების“ ანალოგად შეიძლება წარმოვიდგინოთ ინტეგრალი

$$(f, j) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)j(t)dt$$

ცნობილი $j(t)$ ფუნქციისთვის, რომელსაც ეწოდება „საცდელი ფუნქცია“. ყოველ ფუნქცია $j(t)$ -ს შეესაბამისება რაღაც კონკრეტული რიცხვითი მნიშვნელობა (f, j) . ამიტომ ამბობენ, რომ ეს ფორმულა განსაზღვრავს ფუნქციონალს საცდელ $j(t)$ ფუნქციათა სიმრავლეზე. ცხადია, რომ ეს ფუნქციონალი წრფივია, ე.ი.

$$(f, aj_1 + bj_2) = a(f, j_1) + b(f, j_2)$$

თუ ეს ფუნქციონალი ამავე დროს უწყვეტიცაა, ამბობენ რომ საცდელ ფუნქციათა $j(t)$ სიმრავლეზე განსაზღვრულია განზოგადოებული ფუნქცია $f(t)$.

აღსანიშნავია, რომ ინტეგრალი განტოლების მარჯვენა ნაწილში უნდა გვესმოდეს ფორმალურ-აქსიომატურად, და არა როგორც შესაბამისი ინტეგრალურ ჯამთა ზღვარი. ზუსტად ასეთი პოზიციიდან უნდა განიხილებოდეს დინამიური წარმოსახვის ფორმულა

$$s(t) = (d(t-t), s(t))$$

განზოგადოებულ ფუნქციას, გინდაც არ იყოს იგი წარმოდგენილი ცხადი სახით, გააჩნია კლასიკური ფუნქციების მთელი რიგი თვისებები. უპირველესყოვლისა, შესაძლებელია მისი დიფერენცირება. ამისათვის საჭიროა მხედველობაში მივიღოთ, რომ საცდელი ფუნქციები $j(t)$ იქცევიან ნულად მონაკვეთი $t_1 \leq t \leq t_2$ -ის გარეთ. მაშინ განზოგადოებული ფუნქციის $f(t)$ -ს წარმოებული $f' = df/dt$ გამოისახება ფუნქციონალით

$$(f', j) = f(t)j(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)j'(t)dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)j'(t)dt = -(f, j')$$

მაგალითისთვის ვიპოვოთ ხევესაიდის $s(t)$ ფუნქციის წარმოებული, განვიხილავთ რა უკანასკნელს როგორც განზოგადოებულ ფუნქციას. აქ

$$(s', j) = -(s, j') = - \int_0^{\infty} j'(t)dt = j(0) = (d, j)$$

ამიტომ

$$\frac{ds}{dt} = d(t)$$

მაგრამ ეს შედეგი გაგებული უნდა იყოს სწორად განზოგადოებული ფუნქციის თეორიის თვალსაზრისით, რადგან კლასიკური გაგებით წარმოებული $s'(t)$ წერტილში $t = 0$ უბრალოდ არ არსებობს.

იგივე გზით შეიძლება გავნსაზღვროთ დელტა-ფუნქციის წარმოებული

$$(d', j) = -(d, j') = -j'(0)$$

მიუხედავად იმისა, რომ $d'(t)$ -ის ფორმულა ცხადად არ არსებობს, ასეთი მათემატიკური ობიექტი არსებობს და მოქმედებს წესით - ყოველ კლასიკურ ფუნქციას $j(t)$ იგი უპირისპირებს რიცხვით მნიშვნელობებს მისი წარმოებულს ნულში ნიშნის სიზუსტით.

დღეისათვის განზოგადოებული ფუნქციების თეორიამ ჰპოვა ფართო და მრავალრიცხოვანი გამოყენებები. მის საფუძველზე შექმნილია პროცესების შესწავლის მათემატიკური მეთოდები, რომელთათვის კლასიკური ანალიზის ხერხები არ არის საკმარისი.

2.3 გეომეტრიული მეთოდები სიგნალების თეორიაში

სიგნალების დამუშავების ბევრი თეორიული და გამოყენებითი ამოცანის გადაწყვეტისას წარმოიშვება საკითხები: 1. რა აზრით შეიძლება ვილაპარაკოთ სიგნალის სიდიდეზე თუ ვამტკიცებთ, რომ ერთი სიგნალი გაცილებით აჭარბებს მეორეს. 2. შეიძლება თუ არა ობიექტურად შევაფასოთ, რამდენად არ „ჰგავს“ ერთმანეთს ორი განსხვავებული სიგნალი.

XX საუკუნეში შეიქმნა ფუნქციონალური ანალიზი - მათემატიკის განხრა, რომელიც განზოგადოებს ჩვენს ინტუიციურ წარმოდგენებს სივრცის გეომეტრიულ სტრუქტურაზე. აღმოჩნდა, რომ ფუნქციონალური ანალიზის იდეები საშუალებას იძლევა შევქმნათ სიგნალების მწყობრი თეორია, რომლის საფუძველშიც დევს სიგნალის კონცეფცია, როგორც ვექტორის სპეციალურად შექმნილ უსასრულო სივრცეში.

სიგნალების წრფიული სივრცე. დავუშვათ $M = \{s_1(t), s_2(t), \dots\}$ -სიგნალების სიმრავლეა. ამ ობიექტების გაერთიანების მიზეზია M სიმრავლის ყველა ელემენტისთვის ზოგიერთი საერთო თვისებების არსებობა.

სიგნალებით შემქმნელი ასეთი სიმრავლეების შესწავლა ხდება მით უფრო ნაყოფიერი, როდესაც შესაძლებელი ხდება სიმრავლის ერთი ელემენტების გამოსახვა მეორე ელემენტებით. ამ დროს ამბობენ, რომ სიგნალების სიმრავლეს გააჩნია გარკვეული სტრუქტურა. ამა თუ იმ სტრუქტურის არჩევანი განპირობებულია ფიზიკური მოსაზრებებით.

მაგალითად, თუ საქმე გვაქვს ელექტრულ რხევებთან, ცნობილია, რომ შესაძლებელია მათი შეკრება ან გამრავლება მასშტაბურ კოეფიციენტზე. ეს იძლევა საშუალებას სიგნალების სიმრავლეში შემოვიტანოთ წრფიული სივრცის სტრუქტურას.

სიგნალების სიმრავლე M ქმნიან ნამდვილ წრფიულ სიმრავლეს, თუ მართალია შემდეგი აქსიომები:

1. ნებისმიერი სიგნალი $u \in M$ ნებისმიერი t -თვის იღებს ნამდვილ მნიშვნელობებს.

2. ნებისმიერი $u \in M$ და $v \in M$ არსებობს მათი ჯამი $w = u + v$ ისე, რომ $w \in M$. აჯამვის ოპერაცია კომუტატიურია: $u + v = v + u$ და ასოციატიურია: $u + (v + x) = (u + v) + x$.

3. ნებისმიერი სიგნალისთვის $s \in M$ და ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვისთვის a განსაზღვრულია სიგნალი $f = as \in M$.

4. სიმრავლე M შეიცავს განსაკუთრებულ ნოლოვან ელემენტს Θ , ისეთს, რომ $u + \Theta = u$ ყველა $u \in M$.

თუ სიგნალის მათემატიკური მოდელები მიიღებენ კომპლექსურ მნიშვნელობებს, მაშინ აქსიომა 3 კომპლექსურ რიცხვზე გამრავლების დაშვებით მივდივართ კომპლექსურ წრფიულ სივრცის ცნებაზე.

წრფიული სივრცის სტრუქტურის შემოტანა არის პირველი ნაბიჯი სიგნალების გეომეტრიულ წარმოდგენის გზაზე. წრფიული სივრცის ელემენტებს ხშირად ვექტორებს უწოდებენ, რითიც ხაზს უსვამენ ამ ობიექტების და ჩვეულებრივი სამგანზომილებიანი ვექტორების ანალოგიას.

კოორდინატული ბაზისის ცნება. როგორც ჩვეულებრივ სამგანზომილებიან სივრცეში, სიგნალების წრფიულ სივრცეში შეიძლება გამოვყოთ სპეციალური ქვესიმრავლე, რომელიც თამაშობს კოორდინატული ღერძების როლს.

ამბობენ, რომ $\{e_1, e_2, e_3, \dots\} \in M$ სიმრავლე წრფიულად დამოუკიდებელია, თუ ტოლობა $\sum_i a_i e_i = \Theta$ შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც ყველა იქცევა a_i ნოლად.

წრფიულად დამოუკიდებელი ვექტორების სისტემა ქმნიან წრფიულ სივრცეში კოორდინატულ ბაზისს. თუ მოცემულია რომელიმე $s(t)$ სიგნალის დაშლა სახით $s(t) = \sum_i c_i e_i$, მაშინ რიცხვები $\{c_1, c_2, c_3, \dots\}$ წარმოადგენენ სიგნალ $s(t)$ -ს პროექციებს ამორჩეული ბაზისის მიმართ.

სიგნალების თეორიის ამოცანებში ბაზისური ვექტორების რაოდენობა განუსაზღვრელად დიდია. ასეთ წრფიულ სივრცეებს ეწოდებათ უსასრულოგანზომილებიანი. ცხადია, რომ ასეთი სივრცეების თეორია არ ჩაეტევა წრფიული ალგებრის ფორმალურ სქემაში, სადაც ბაზისური ვექტორების რაოდენობა ყოველთვის სასრულია.

ნორმირებული წრფიული სივრცე. სიგნალის ენერგია. შემოვიტანოთ ახალი ცნება, რომელიც შეესაბამება თავისი შინაარსით ვექტორის სიგრძეს. ეს არა მარტო დაგვიზუსტებს გამონათქვამს „პირველი სიგნალი მეორეზე მეტია“ არამედ მოგვცემს საშუალებას მიუთითოთ, რამდენით მეტია.

ვექტორის სიგრძეს მათემატიკაში უწოდებენ მის ნორმას. სიგნალების წრფიულ სივრცეს უწოდებენ L ნორმირებულს, თუ ყოველ ვექტორს $s(t) \in L$ ერთმნიშვნელოვნად მიესადაგება $\|s\|$ -ამ ვექტორის ნორმა და სრულდება ნორმირებული სივრცის შემდეგი აქსიომები:

1. ნორმა დადებითია, ე.ი. $\|s\| \geq 0$. ნორმა $\|s\| = 0$ მხოლოდ მაშინ, როდესაც $s = \Theta$.

2. ნებისმიერი a –თვის მართებულია ტოლობა $\|as\| = |a| \cdot \|s\|$.

3. თუ $s(t)$ და $p(t)$ ორი ვექტორია L –დან, სრულდება სამკუთხედის უტოლობა $\|s + p\| \leq \|s\| + \|p\|$.

შეიძლება შემოთავაზებული იქნას სიგნალის ნორმის შემოტანის რამდენიმე ხერხი. რადიოტექნიკაში უფრო ხშირად გულისხმობენ, რომ ნამდვილ ანალოგურ სიგნალებს აქვთ ნორმა

$$\|s\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt}$$

ფესვის ორი შესაძლო მნიშვნელობიდან ამოირჩევენ დადებითს. კომპლექსური სიგნალებისთვის ნორმა

$$\|s\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s^*(t)s(t) dt}$$

სადაც (*)- კომპლექსურად შეუღლების ნიშანია.

ნორმის კვადრატს სიგნალის ენერგია ეწოდება

$$E_s = \|s\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt$$

სწორად ასეთი ენერგია გამოიყოფა რეზისტორში 1 ომის წინაღობით თუ მის მომჭერებზე არსებობს ძაბვა $s(t)$.

მაგალითი. სიგნალი $s(t)$ წარმოადგენს სამკუთხა იმპულსს U ამპლიტუდით და t ხანგრძლივობით. ვიპოვოთ ამ სიგნალის ნორმა და ენერგია.

დროის ინტერვალზე $(0, t)$ სიგნალი აღიწერება ფუნქციით $s(t) = Ut/t$.

სიგნალის ენერგია

$$E_s = (U^2 / t^2) \int_0^t t^2 dt = U^2 t / 3$$

სიგნალის ნორმა

$$E_s = (U^2 / t^2) \int_0^t t^2 dt = U^2 t / 3$$

მაგალითი. გამოვიანგარიშოთ მართკუთხა რადიოიმპულსის ენერგია, თუ იგი არსებობს $(0, t)$ ინტერვალზე და აღიწერება ფუნქციით

$$s(t) = U_0 \cos(\omega t + j)$$

ფორმულის შესაბამისად

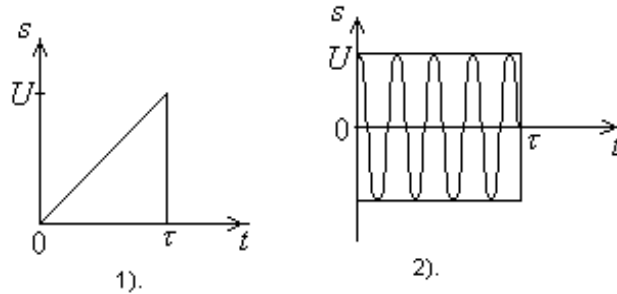
$$E_s = U_0^2 \int_0^t \cos^2(\omega t + j) dt = \frac{U^2}{\omega} \int_0^{\omega t + j} \cos^2 x dx$$

ინტეგრირების შედეგად მივიღებთ

$$E_s = \frac{U^2}{4\omega} [2(\omega t + j) + \sin 2(\omega t + j)]$$

თუ იმპულსის შიგნით შემავსებელი სიხშირე მაღალია ისე რომ $\omega t \gg 1$, მაშინ $E_s \approx U^2 t / 2$ და დამოკიდებულია ω, j -პარამეტრების ამორჩევაზე.

განხილული მაგალითების შესაბამისი ნახაზები ნაჩვენებია ნახაზზე.



ნახ.15.

ზემოთ მოყვანილი ფორმულით სიგნალის ნორმის განსაზღვრა მიზანშეწონილია შემდეგი მიზეზებით:

1. სიგნალის სიდიდეზე ხშირად მსჯელობენ ჯამური ენერგეტიკული ეფექტით, მაგალითად რეზისტორზე გამოყოფილი სითბოს რაოდენობით.

2. ენერგეტიკული ნორმა აღმოჩნდება „არამგრძობიარე“ სიგნალის ფორმის ცვლილების მიმართ, შეიძლება მნიშვნელოვანისაგ კი, მაგრამ დროის მოკლე ინტერვალზე.

წრფიული ნორმირებული სივრცე ფორმულით გამოსახული ნორმის სასრული სიდიდით იწოდება ინტეგრირებადი კვადრატის ფუნქციათა სივრცედ და შემოკლებით აღინიშნება L_2 .

მეტრიკული სივრცე. შემოვიტანოთ კიდევ ერთი ფუნდამენტალური ცნება, რომელიც განავრცობს ჩვენს ჩვეულებრივ წარმოდგენას სივრცეში ორ წერტილს შორის მანძილზე.

ამბობენ, რომ წრფიული სივრცე ხდება მეტრიკული სივრცე, თუ ელემენტთა $u, v \in L$ ყოველ წყვილს შეეპირისპირება დადებითი რიცხვი $r(u, v)$, რომელიც იწოდება მეტრიკად ან მანძილად ამ ელემენტებს შორის. მეტრიკა განსაზღვრის მიუხედავად უნდა ექვემდებარებოდეს მეტრიკული სივრცის აქსიომებს:

1. $r(u, v) = r(v, u)$ -მეტრიკის რეფლექსიურობა
2. $r(u, u) = 0$ ნებისმიერი $u \in L$
3. როგორც არ უნდა იყოს ელემენტი $w \in L$, ყოველთვის $r(u, v) \leq r(u, w) + r(w, v)$

ჩვეულებრივ მეტრიკას განსაზღვრავენ როგორც ორი სიგნალის სხვაობის ნორმას:

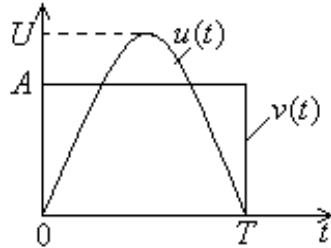
$$r(u, v) = \|u - v\|.$$

ნორმა შეიძლება გავიგოთ როგორც მანძილი სივრცის არჩეულ ელემენტებსა და ნულოვან ელემენტს შორის:

$$\|u\| = r(u, \Theta).$$

თუ ვიცით მეტრიკა, შეიძლება ვიმსჯელოთ, მაგალითად, თუ რამდენად კარგად ხდება ერთი სიგნალის მიერ მეორის აპროქსიმაცია.

მაგალითი. სიგნალი $u(t)$ წარმოადგენს სინუსოიდის ნაწილს, რომელიც იქცევა ნოლად მონაკვეთი $[0, T]$ -ს ბოლოებში. იმპულსის ამპლიტუდაა U . ვიპოვოთ იგივე ხანგრძლივობის მართკუთხა იმპულსის $v(t)$ -ს ამპლიტუდა A ისე, რომ მანძილი ამ ორ სიგნალს შორის იყოს მინიმალური.



ნახ.16.

სიგნალი $u(t)$ წარმოდგენილია ფორმულით

$$u(t) = U \sin \frac{pt}{T}, 0 \leq t \leq T$$

მანძილის კვადრატი სიგნალებს შორის

$$r^2(u, v) = \int_0^T (U \sin \frac{pt}{T} - A)^2 dt$$

ინტეგრირების შედეგად მივიღებთ

$$r^2(u, v) = U^2 T / 2 - 4AUT/p + A^2 T$$

თუ ამ გამოსახულებას შევისწავლით ექსტრემუმზე, დავრწმუნდებით, რომ მანძილის მინიმუმი გვექნება, როდესაც $A = 2U/p \approx 0.637U$. ამ დროს

$$r_{\min}^2 = U^2 T (1/2 - 4/p^2) \approx 0.095U^2 T$$

$$r_{\min} = 0,308U\sqrt{T}$$

ავღნიშნოთ, რომ სინუსოიდალური იმპულსის ენერგია

$$E_u = U^2 \int_0^T \sin^2 \frac{pt}{T} dt = \frac{U^2 T}{2}$$

მისი ნორმა $\|u\| = 0,707U\sqrt{T}$.

ამრიგად, ამორჩეული მეტრიკისთვის მინიმალური მიღწევადი მანძილი განხილვად სიგნალებს შორის შეადგენს 44% სინუსოიდალური იმპულსის ნორმიდან.

2.4 ორთოგონალური სიგნალების თეორია

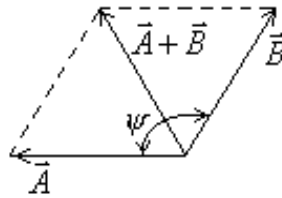
მას შემდეგ, რაც სიგნალების სიმრავლეში შევიტანეთ წრფიული სივრცის სტრუქტურა, გავსაზღვრეთ ნორმა და მეტრიკა, ჩვენ მაინც მოკლებულნი ვართ საშუალებას ვიანგარიშოთ ისეთი მახასიათებელი, როგორცაა კუთხე ორ ვექტორს შორის. ამას

შევძლებთ, თუ გავნსაზღვრავთ წრფიული სივრცის ელემენტების სკალარული ნამრავლის ცნებას.

სიგნალების სკალარული ნამრავლი. გავიხსენოთ, რომ თუ ჩვეულებრივ სამგანზომილებიან სივრცეში ცნობილია ორი ვექტორი \vec{A} და \vec{B} , მათი ჯამის მოდულის კვადრატი

$$|\vec{A} + \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2(\vec{A}, \vec{B})$$

სადაც $(\vec{A}, \vec{B}) = |\vec{A}||\vec{B}|\cos y$ - ამ ვექტორების სკალარული ნამრავლი, რომელიც დამოკიდებულია მათ შორის y კუთხეზე.



ნახ.17.

ანალოგიურად გამოვიანგარიშოთ ორი სიგნალის u - ს და v -ს ჯამის ენერგია:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} (u + v)^2 dt = E_u + E_v + 2 \int_{-\infty}^{\infty} uv dt$$

თვით სიგნალებისაგან განსხვავებით მათი ენერგიები არაადიტიურია - ჯამური სიგნალის ენერგია შეიცავს ე.წ. ურთიერთენერგიას

$$E_{uv} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} uv dt$$

თუ შევადარებთ საწყის და საბოლოო ფორმულებს, გავნსაზღვროთ ნამდვილი სიგნალების u და v სკალარული ნამრავლი:

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t) dt$$

და მათ შორის კუთხის კოსინუსი:

$$\cos y = \frac{(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

სკალარულ ნამრავლს გააჩნია თვისებები:

1. $(u, u) \geq 0$
2. $(u, v) = (v, u)$
3. $(|u, v) = |u| |v| \cos y$, სადაც $|$ - ნამდვილი რიცხვია
4. $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$

წრფიული სივრცე ასეთი სკალარული ნამრავლით სრული იმ აზრით, რომ იგი შეიცავს თავის თავში ამ სივრცის ყველა კრებადი ვექტორებს მიმდევრობების ზღვრულ წერტილებს, იწოდება ჰილბერტის ნამდვილ სივრცედ და აღინიშნება H - ით.

მართებულია კომპი-ბუნიაკოვსკის ფუნდამენტალური უტოლობა

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

თუ სიგნალები მიიღებენ კომპლექსურ მნიშვნელობებს, შეგვიძლია გავნსაზღვროთ ჰილბერტის კომპლექსური სივრცე, მასში სკალარული ნამრავლის შემოტანით ფორმულით

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v^*(t)dt$$

ისეთი, რომ $(u, v) = (v, u)^*$.

მაგალითი. გვაქვს დროში წანაცვლებული ორი ექსპონენციალური სიგნალი:

$$u_1(t) = 5 \exp(-10^5 t) \mathcal{S}(t)$$

$$u_2(t) = 5 \exp[-10^5(t - 2 \cdot 10^{-6})] \mathcal{S}(t - 2 \cdot 10^{-6})$$

ვიპოვოთ ამ სიგნალების სკალარული ნამრავლი და კუთხე მათ შორის.

ამ სიგნალების ენერგია ერთნაირია:

$$\|u_1\|^2 = \|u_2\|^2 = 25 \int_0^{\infty} e^{-2 \cdot 10^5 t} dt = 1,25 \cdot 10^{-4} B^2 \cdot c$$

სკალარული ნამრავლი

$$(u_1, u_2) = 25 \int_0^{\infty} e^{-10^5 t} e^{-10^5(t+2 \cdot 10^{-6})} dt = 1,023 \cdot 10^{-4} B^2 \cdot c$$

აქედან $\cos y = 0,819 \rightarrow y = 35^\circ$.

2.5 ორთოგონალური სიგნალები და განზოგადოებული ფურიეს მწკრივები

ორი სიგნალი u და v ორთოგონალურებია, თუ მათი სკალარული ნამრავლი და შესაბამისად ურთიერთენერგია ნოლის ტოლია

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)dt = 0$$

დავუშვათ H – ჰილბერტის სივრცეა სიგნალების ენერგიის სასრული მნიშვნელობით. ეს სიგნალები განსაზღვრულია სასრულ ან უსასრულო $[t_1, t_2]$ ინტერვალზე. დავუშვათ, რომ ამავე მონაკვეთზე მოცემულია ერთმანეთთან ორთოგონალური ფუნქციათა უსასრულო სისტემათა $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$, რომელთაც გააჩნიათ ერთეულოვანი ნორმები

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

ამ დროს ამბობენ, რომ სიგნალთა სისტემაში მოცემულია ორთონორმირებული ბაზისი.

დავშალოთ ნებისმიერი სიგნალი $s(t) \in H$ მწკრივად:

$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i u_i(t)$$

ასეთ წარმოდგენას ეწოდება $s(t)$ სიგნალის ფურიეს განზოგადოებული მწკრივი ამორჩეულ ბაზისში.

ამ მწკრივის კოეფიციენტებს პოულობენ შემდეგნაირად. ავირჩიოთ ბაზისური ფუნქცია u_k ნებისმიერი k ნომრით და გადავამრავლოთ მასზე ტოლობის ორივე მხარე, შემდეგ კი გავაინტეგრიროთ დროით

$$\int_{t_1}^{t_2} s(t)u_k(t)dt = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \int_{t_1}^{t_2} u_i u_k dt$$

ბაზისის ორტონორმირების გამო ტოლობის მარჯვენა ნაწილში დარჩება ჯამის მხოლოდ $i = k$ ნომრიანი წევრი. ამიტომ

$$c_k = \int_{t_1}^{t_2} s(t)u_k(t)dt = (s, u_k)$$

სიგნალების წარმოდგენის საშუალება ფურიეს განზოგადოებული მწკრივით არის პრინციპიალურად მნიშვნელოვანი ფაქტი. იმის მაგივრად, რომ შევისწავლოთ ფუნქციონალური კავშირი წერტილთა უსასრულო სიმრავლეში, ჩვენ ვიღებთ საშუალებას დავახასიათოთ ეს სიგნალები ფურიეს განზოგადოებული მწკრივის კოეფიციენტების c_k სასრული სისტემით.

ორტონორმირებული ბაზისის მაგალითებია ჰარმონიული და უოლშის ფუნქციები. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების სისტემა $[0, T]$ მონაკვეთზე ჯერადი სიხშირეებით დამატებული მუდმივი სიგნალით

$$\begin{aligned} u_0 &= 1/\sqrt{T} \\ u_1 &= \sqrt{2/T} \sin 2\pi t/T \\ u_2 &= \sqrt{2/T} \cos 2\pi t/T \\ &\dots \\ &\dots \\ u_{2m-1} &= \sqrt{2/T} \sin 2\pi m t/T \\ u_{2m} &= \sqrt{2/T} \cos 2\pi m t/T \\ &\dots \end{aligned}$$

ქმნიან ორტონორმირებულ ბაზისს.

2.6 ფურიეს განზოგადოებული მწკრივით წარმოდგენილი სიგნალის ენერგია

განვიხილოთ ორტონორმირებულ ბაზისური სისტემით დაშლილი სიგნალი $s(t)$

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u_k(t)$$

და გამოვიანგარიშოთ მისი ენერგია ამ მწკრივის შესაბამის ინტეგრალში ჩასმით

$$E_s = \int_{t_1}^{t_2} s^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_i c_j u_i u_j = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_i c_j \int_{t_1}^{t_2} u_i u_j dt$$

რადგან ფუნქციათა ბაზისური სისტემა ორთონორმირებულია, ამ ჯამში ნოლისაგან განსხვავებული აღმოჩნდება მხოლოდ წევრები ნომრებით $i = j$. აქედან მივიღებთ მნიშვნელოვან შედეგს:

$$E_s = \sum_{i=0}^{\infty} c_i^2$$

ამ ფორმულის არსი შემდეგია: სიგნალის ენერგია არის ყველა კომპონენტის ენერგიების ჯამი, რომლისგანაც შედგება ფურიეს განზოგადოებული მწკრივი.

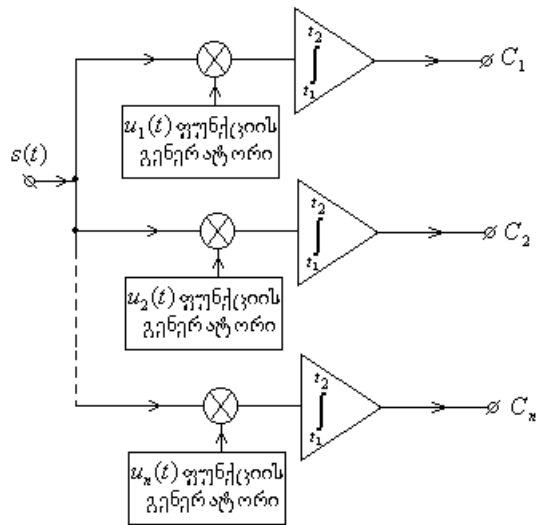
2.7 სიგნალის ორთოგონალური დაშლის აპარატურული რეალიზაცია

განვიხილოთ ანალოგური სიგნალის მოცემულ ორთონორმირებულ ბაზისური ფუნქციების ფურიეს განზოგადოებულ მწკრივში დაშლის კოეფიციენტების ექსპერიმენტალური განსაზღვრის მოწყობილობის სტრუქტურული სქემა.

აქ ძირითად ელემენტებს წარმოადგენს იმ ბაზისური ფუნქციების გენერატორები, რომელთა მიხედვითაც ხორციელდება დაშლა. ანალიზირებადი სიგნალი აგრეთვე მიეწოდება გამამრავლებელ კვანძებს, რომელიც ანხორციელებს ამ სიგნალის და შესაბამისი ბაზისური ფუნქციის გადამრავლებას.

გამამრავლებლების გამოსასვლელიებიდან სიგნალები მიეწოდება ინტეგრატორებზე. ასეთი მეთოდის დროს ინტეგრირების პერიოდის დასასრულს მიიღება დროში უცვლელი დონე, რომლის სიდიდეც ზემოთმოყვანილი ფორმულის შესაბამისად ზუსტად უდრის ფურიეს განზოგადოებული მწკრივის ამა თუ იმ კოეფიციენტს.

ცხადია, რომ სისტემის მუშაუნარიანობა დამოკიდებული იქნება იმაზე, თუ რამდენად ზუსტად იქნება გენერირებული ბაზისური ფუნქციები და რამდენად სტაბილურად მუშაობენ ინტეგრატორები და გამამრავლებლები.



ნახ.18.

ნახაზზე ნაჩვენებია სისტემა მნიშვნელოვანია, როგორც გამოყენებითი ხასიათით, ასევე თეორიულად. მისი ანალიზი გვიჩვენებს, რომ სიგნალში არსებული ინფორმაცია შეიძლება იყოს წარმოდგენილი უსასრულო, მაგრამ დათვლად რიცხვთა ნაკრებით.

III. სიგნალების სპექტრალური წარმოდგენა

ორთოგონალური სიგნალების სიმრავლიდან განსაკუთრებული ადგილი უკავია ჰარმონიულ (სინუსოიდალურ და კოსინუსოიდალურ) სიგნალებს. ეს განპირობებულია რამოდენიმე პირობით:

1. ჰარმონიული სიგნალები ინვარიანტიულია გარდაქმნების მიმართ სტაციონარულ წრფიულ ელექტრულ წრედებში. ე.ი. თუ წრედის შესასვლელზე მიეწოდება ჰარმონიული სიგნალი, გამოსასვლელზე იქნება იგივე სიხშირის ჰარმონიული სიგნალი შეცვლილი ამპლიტუდით და წანაცვლებული ფაზით.

2. ჰარმონიული სიგნალების გენერირების ტექნიკა საკმაოდ მარტივია.

თუ რომელიმე სიგნალი წარმოდგენილია სხვადასხვა სიხშირის ჰარმონიული რხევების ჯამის სახით, ამბობენ რომ განხორციელებულია ამ სიგნალის სპექტრალური დაშლა. სიგნალის ცალკეული ჰარმონიული კომპონენტები ქმნიან მის სპექტრს.

3.1 პერიოდული სიგნალები და ფურიეს მწკრივები

დავუშვათ დროში განმეორებადი პროცესის მათემატიკური მოდელია პერიოდული სიგნალი

$$S(t) = S(t \pm nT), n = 1, 2, 3, \dots$$

სადაც T – სიგნალის პერიოდია.

ვიპოვოთ ამ სიგნალის სპექტრალური დაშლა.

ფურიეს მწკრივი. შევარჩიოთ დროით მონაკვეთზე $[-T/2, T/2]$ ჯერად სიხშირეებიანი ჰარმონიული ფუნქციებით წარმოქმნილი ორთონორმირებული ბაზისი

$$u_0 = 1/\sqrt{T}, u_1 = \sqrt{2/T} \sin(2\pi t/T), u_2 = \sqrt{2/T} \cos(2\pi t/T)$$

$$u_3 = \sqrt{2/T} \sin(4\pi t/T), u_4 = \sqrt{2/T} \cos(4\pi t/T), u_5 = \sqrt{2/T} \sin(6\pi t/T)$$

ნებისმიერი ფუნქცია u_m ამ ბაზისიდან პასუხობს პერიოდულობის პირობას. ამიტომ თუ ამ ბაზისში განვახორციელებთ $S(t)$ ფუნქციის დაშლას, ე.ი. ვიანგარიშებთ კოეფიციენტებს $c_m = (S, u_m)$, მივიღებთ სპექტრალურ დაშლას

$$S(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_m u_m$$

რომელიც მართებულია დროის უსასრულო ღერძზე. ამ სახის მწკრივს ეწოდება ამ სიგნალის ფურიეს მწკრივი.

შემოვიტანოთ მიმდევრობის ძირითადი სიხშირე $w = 2\pi/T$, რომელიც წარმოქმნის პერიოდულ სიგნალს. კოეფიციენტების გათვალისწინებით ჩავწეროთ პერიოდული სიგნალის ფურიეს მწკრივი

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

კოეფიციენტებით

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cos n\omega t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \sin n\omega t dt$$

ამრიგად პერიოდული სიგნალი შეიცავს მუდმივ მდგენელს და ჰარმონიული მდგენელების უსასრულო მწკრივს, ჰარმონიულებს, სიხშირეებით $w_n = n\omega$ $n = 1, 2, 3, \dots$

ყოველი ჰარმონიული შემდეგ ადწერილი იქნას მისი ამპლიტუდით A_n და საწყისი ფაზით j_n . ამისათვის ფურიეს კოეფიციენტები ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$a_n = A_n \cos j_n, b_n = A_n \sin j_n$$

ისე, რომ

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \operatorname{tg} j_n = b_n / a_n$$

თუ ამ გამოსახულებებს ჩავსვავთ პერიოდული სიგნალის ფურიეს მწკრივში, მივიღებთ ფურიეს მწკრივის ექვივალენტურ ფორმულას

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - j_n)$$

რომელიც ზოგჯერ უფრო ხელსაყრელია.

ამპლიტუდის A_n -ის და ფაზური წანაცვლების j_n -ის დამოკიდებულებას ფარდობით სიხშირეზე ω_n / ω ეწოდება პერიოდული სიგნალის სპექტრალური დიაგრამა.

მაგალიტი. ვიპოვოთ მართკუთხა ვიდეომპულსების ფურიეს მწკრივი, თუ ცნობილია მისი t, T, A და იგი ლუწია $t = 0$ წერტილის მიმართ (ნახ.19ა).

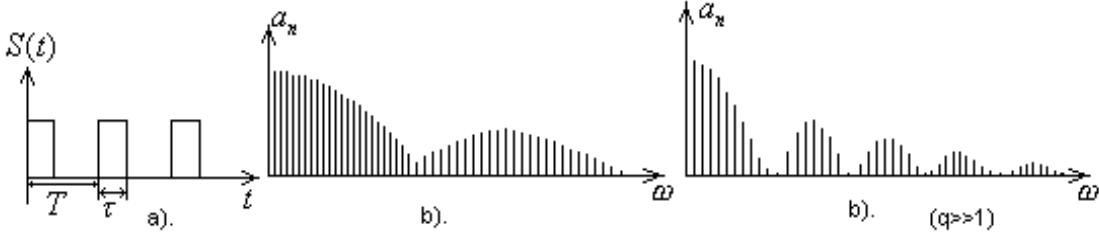
ამოხსნა. როგორც ცნობილია, იმპულსების მეჩხერიანობა $q = t / T$. ამის გათვალისწინებით ზემოთამოყვანილი ფორმულის მიხედვით ვპოულობთ

$$\frac{a_0}{2} = \frac{A}{q} * a_n = \frac{2A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos n\omega t dt = \frac{2A}{n\pi} \sin \frac{n\omega T}{2}$$

საბოლოოდ ფურიეს მწკრივს ექნება სახე

$$S(t) = \frac{A}{q} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi / q)}{n\pi / q} \cos n\omega t \right]$$

შესაბამისი ამპლიტუდური სპექტრალური დიაგრამა ნაჩვენებია ნახ.19.ბ -ზე.



ნახ.19.

3.2 კოეფიციენტების გამონაგარიშება

განვიხილოთ, თუ როგორ ხდება კოეფიციენტების გაანგარიშება იმ შემთხვევაში, როდესაც ფუნქცია მოცემულია გრაფიკულად ან ცხრილის სახით. დავუშვათ, რომ პერიოდი 0-დან 2π -დე გაყოფილია k ტოლ ნაწილად წერტილებით $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$, სადაც $x_a = 2\pi a/k$. ცნობილია აგრეთვე ფუნქციის მნიშვნელობები ამ წერტილებში $y_0, y_1, y_2, \dots, y_k$. რადგან ფუნქცია პერიოდულია, $y_0 = y_k$.

საჭიროა ეს ფუნქცია წარმოვადგინოთ რაც შეიძლება ზუსტად პოლინომის სახით $g(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots + a_n \cos nx + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx$ ცხადია, რომ ამ ამოცანას აზრი აქვს მხოლოდ მაშინ, როდესაც $k > 2n$.

მოცემული მნიშვნელობებისთვის $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ ეს გამოსახულება გვაძლევს

$$g(x_1) = a_0 + a_1 \cos x_1 + a_2 \cos 2x_1 + \dots + a_n \cos nx_1 + b_1 \sin x_1 + b_2 \sin 2x_1 + \dots + b_n \sin nx_1$$

$$g(x_2) = a_0 + a_1 \cos x_2 + a_2 \cos 2x_2 + \dots + a_n \cos nx_2 + b_1 \sin x_2 + b_2 \sin 2x_2 + \dots + b_n \sin nx_2$$

$$g(x_3) = a_0 + a_1 \cos x_3 + a_2 \cos 2x_3 + \dots + a_n \cos nx_3 + b_1 \sin x_3 + b_2 \sin 2x_3 + \dots + b_n \sin nx_3$$

$$\dots \dots \dots (4.2)$$

$$g(x_a) = a_0 + a_1 \cos x_a + a_2 \cos 2x_a + \dots + a_n \cos nx_a + b_1 \sin x_a + b_2 \sin 2x_a + \dots + b_n \sin nx_a$$

$$\dots \dots \dots g(x_k) = a_0 + a_1 \cos x_k + a_2 \cos 2x_k + \dots + a_n \cos nx_k + b_1 \sin x_k + b_2 \sin 2x_k + \dots + b_n \sin nx_k$$

ამოვირჩიოთ კოეფიციენტები $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ * $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$. ისე, რომ ნაანგარიშები $g(x)$ -ის მნიშვნელობებისაგან მოცემულ ფუნქციათა მნიშვნელობების გადახრების კვადრატების ჯამი შესაბამისი არგუმენტებისთვის იყოს მინიმალური.

ამგვარად ჩვენ უნდა ვეძებოთ შემდეგი გამოსახულების მინიმუმი

$$U = [y_1 - g(x_1)]^2 + [y_2 - g(x_2)]^2 + \dots + [y_k - g(x_k)]^2$$

როგორც ცნობილია, მინიმუმის არსებობის პირობაა

$$\frac{\partial U}{\partial a_0} = 0 \quad * \quad \frac{\partial U}{\partial a_1} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad \frac{\partial U}{\partial a_n} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial b_1} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial b_2} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad \frac{\partial U}{\partial b_n} = 0$$

ამის გათვალისწინებით

$$[y_1 - g(x_1)] \frac{\partial g(x_1)}{\partial a_0} + [y_2 - g(x_2)] \frac{\partial g(x_2)}{\partial a_0} + \dots + [y_k - g(x_k)] \frac{\partial g(x_k)}{\partial a_0} = 0$$

$$[y_1 - g(x_1)] \frac{\partial g(x_1)}{\partial a_1} + [y_2 - g(x_2)] \frac{\partial g(x_2)}{\partial a_1} + \dots + [y_k - g(x_k)] \frac{\partial g(x_k)}{\partial a_1} = 0$$

.....

$$[y_1 - g(x_1)] \frac{\partial g(x_1)}{\partial a_n} + [y_2 - g(x_2)] \frac{\partial g(x_2)}{\partial a_n} + \dots + [y_k - g(x_k)] \frac{\partial g(x_k)}{\partial a_n} = 0 \quad (4.3)$$

$$[y_1 - g(x_1)] \frac{\partial g(x_1)}{\partial b_1} + [y_2 - g(x_2)] \frac{\partial g(x_2)}{\partial b_1} + \dots + [y_k - g(x_k)] \frac{\partial g(x_k)}{\partial b_1} = 0$$

.....

$$[y_1 - g(x_1)] \frac{\partial g(x_1)}{\partial b_n} + [y_2 - g(x_2)] \frac{\partial g(x_2)}{\partial b_n} + \dots + [y_k - g(x_k)] \frac{\partial g(x_k)}{\partial b_n} = 0$$

ცხრილში მოყვანილია $\frac{\partial g}{\partial a}, \frac{\partial g}{\partial b}$ წარმოებულების მნიშვნელობები

	$\frac{\partial g}{\partial a_0}$	$\frac{\partial g}{\partial a_m}$	$\frac{\partial g}{\partial b_m}$
$g(x_1)$	1	$\cos mx_1$	$\sin mx_1$
$g(x_2)$	1	$\cos mx_2$	$\sin mx_2$
.....
$g(x_\alpha)$	1	$\cos mx_\alpha$	$\sin mx_\alpha$
.....
$g(x_k)$	1	$\cos mx_k$	$\sin mx_k$

თუ ჩავსვავთ მიღებულ მნიშვნელობებს განტოლებათა სისტემაში, პირველი განტოლებისთვის მივიღებთ

$$\sum_{a=1}^k [y_a - g(x_a)] = 0$$

ყოველ შემდეგ განტოლებას მეორედან $n + 1$ -ის ჩათვლით ექნებათ ფორმა

$$\sum_{a=1}^k [y_a - g(x_a)] \cos mx_a = 0$$

სადაც $m = 1, 2, 3, \dots, n$. ყოველ განტოლებას $n + 2$ -დან ბოლომდე ექნება სახე

$$\sum_{a=1}^k [y_a - g(x_a)] \sin mx_a = 0$$

განვაცალკევოთ ნაჩვენები ჯამები ორად. მივიღებთ

$$\sum_{a=1}^k g(x_a) = \sum_{a=1}^k y_a \quad (4.4)$$

$$\sum_{a=1}^k g(x_a) \cos mx_a = \sum_{a=1}^k y_a \cos mx_a \quad (4.5)$$

$$\sum_{a=1}^k g(x_a) \sin mx_a = \sum_{a=1}^k y_a \sin mx_a \quad (4.6)$$

იმისათვის, რომ მივიღოთ პირველი განტოლების მარცხენა ნაწილი, საჭიროა შევკრიბოთ სისტემის მარჯვენა ნაწილები. შევკრიბოთ სვეტების მიხედვით და გავიტანოთ საერთო მამრავლები. გვექნება

$$ka_0 + a_1 \sum_{a=1}^k \cos x_a + a_2 \sum_{a=1}^k \cos 2x_a + \dots + a_n \sum_{a=1}^k \cos nx_a + b_1 \sum_{a=1}^k \sin x_a + \dots + b_n \sum_{a=1}^k \sin nx_a$$

ამ ჯამის მისაღებად საჭიროა გამოვიანგარიშოთ ცალკეული ჯამების მნიშვნელობები

$$\sum_{a=1}^k \cos mx_a \text{ და } \sum_{a=1}^k \sin mx_a$$

რადგან $x_a = 2pa/k$, პირველ ჯამს ექნება სახე

$$\cos \frac{2pm}{k} + \cos \frac{4pm}{k} + \cos \frac{6pm}{k} + \dots + \cos \frac{2(k-1)pm}{k} + \cos \frac{2kpm}{k}$$

ავლნიშნოთ ეს ჯამი S – ით და გავამრავლოთ ის $2 \sin \frac{pm}{k}$ -ზე. მივიღებთ

$$2S \sin \frac{pm}{k} = 2 \cos \frac{2pm}{k} \sin \frac{pm}{k} + 2 \cos \frac{4pm}{k} \sin \frac{pm}{k} + \dots + 2 \cos \frac{2kpm}{k} \sin \frac{pm}{k}$$

რადგან

$$2 \sin \frac{pm}{k} \cos \frac{2pm}{k} = \sin \frac{3pm}{k} - \sin \frac{pm}{k}$$

$$2 \sin \frac{pm}{k} \cos \frac{4pm}{k} = \sin \frac{5pm}{k} - \sin \frac{3pm}{k}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$2 \sin \frac{pm}{k} \cos \frac{2kpm}{k} = \sin \frac{(2k+1)pm}{k} - \sin \frac{(2k-1)pm}{k}$$

აჯამვის შედეგად მივიღებთ

$$2S \sin \frac{pm}{k} = \sin \frac{(2k+1)pm}{k} - \sin \frac{pm}{k} = 2 \sin pm \cos \frac{(k+1)pm}{k} = 0$$

რადგან

$$\sin \frac{pm}{k} \neq 0, \left(m < \frac{1}{2}k \right),$$

მაშინ

$$S = \sum_{a=1}^k \cos mx_a = 0 \tag{4.7}$$

ასევე შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$\sum_{a=1}^k \sin mx_a = 0 \tag{4.8}$$

ამგვარად პირველი განტოლების მარცხენა ნაწილი უდრის ka_0 , შესაბამისად

$$ka_0 = \sum_{a=1}^k y_a \tag{4.9}$$

გარდავექმნათ (4.5) განტოლებათა ჯგუფის n განტოლების მარცხენა ნაწილი, რომლებიც მიიღება $m = 1, 2, 3, \dots, n$ მნიშვნელობებისთვის. დავუშვათ, ჩვენ გავდარქმნით ამ განტოლებებიდან m – ურს.

იმისათვის, რომ მივიღოთ ამ განტოლების მარცხენა ნაწილი, გავამრავლოთ (4.2) განტოლებების მარჯვენა ნაწილები (პირველი - $\cos mx_1$ – ზე, მეორე - $\cos mx_2$ – ზე,,

ბოლო - $\cos mx_k$ -ზე) და ავჯამოთ მიღებული გამოსახულებები. ავჯამოთ სვეტების მიხედვით და გავიტანოთ საერთო მამრავლები ჯამის ნიშნის გარეთ. მივიღებთ

$$a_0 \sum \cos mx_a + a_1 \sum \cos mx_a \cos x_a + a_2 \sum \cos mx_a \cos 2x_a + \dots + a_m \sum \cos^2 mx_a +$$

$$+ a_n \sum \cos nx_a \cos mx_a + b_1 \sum \cos mx_a \sin x_a + b_2 \sum \cos mx_a \sin 2x_a + \dots + b_n \sum \cos mx_a \sin nx_a$$

რადგან

$$\cos(mx)\cos(px) = \frac{1}{2}\cos(m+p)x + \frac{1}{2}\cos(m-p)x$$

$$\cos(mx)\sin(px) = \frac{1}{2}\sin(m+p)x - \frac{1}{2}\sin(m-p)x$$

მაშინ

$$\sum_{a=1}^k \cos mx_a \cos px_a = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^k \cos(m+p)x_a + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^k \cos(m-p)x_a$$

$$\sum_{a=1}^k \cos mx_a \sin px_a = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^k \sin(m+p)x_a - \frac{1}{2} \sum_{a=1}^k \sin(m-p)x_a$$

როდესაც $m \neq p$ ეს ჯამები (4.7) და (4.8) საფუძველზე ნოლის ტოლია. მეორე ჯამი $m = p$ დროსაც უდრის ნოლს, რადგან $\sin 0x = 0$. პირველი ჯამი არ უდრის ნოლს $m = p$ -თვის. ამ შემთხვევაში ყოველი შესაკრები

$$\cos(m-p)x_a = \cos 0 = 1$$

და, შესაბამისად, მთელი ჯამი იქცევა $\sum_{a=1}^k \cos^2 mx_a$, ტოლია $k/2$. ამგვარად, (4.5) განტოლებების ჯგუფიდან განხილულ განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{k}{2} a_m = \sum_{a=1}^k y_a \cos mx_a \quad (4.10)$$

თუ მივანიჭებთ $m = 1, 2, 3, \dots, n$, გავნსაზღვრავთ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

გვრჩება განსახილველი (4.6) ჯგუფის ბოლო n განტოლება. ამ განტოლების გარდაქმნას ვანხორციელებთ ისევე, როგორც წინას. გარდა ჩვენს მიერ განსაზღვრული ჯამების, ამ განტოლებაში ჩვენ შევხვდებით კიდევ ასეთს

$$\sum_{a=1}^k \sin mx_a \sin px_a$$

როდესაც $m \neq p$

$$\sum_{a=1}^k \sin mx_a \sin px_a = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^k \cos(m-p)x_a - \frac{1}{2} \sum_{a=1}^k \cos(m+p)x_a = 0$$

როდესაც $m = p$, მივიღებთ

$$\sum_{a=1}^k \sin^2 mx_a = \frac{k}{2}$$

ამის შემდეგ ყოველი განტოლება (4.6) შეიძლება დავიყვანოთ შემდეგ სახემდე

$$\frac{k}{2} b_m = \sum_{a=1}^k y_a \sin mx_a \quad (4.11)$$

ბოლო n განტოლება $m = 1, 2, 3, \dots, n$ -თვის მოგვცემს $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ კოეფიციენტებს.

3.3 გამოთვლების სქემა, როდესაც ორდინატა რიცხვი ოთხის ჯერადია

ამ ჯამების გამონაგარიშება ძალიან გამარტივდება, თუ ორდინატა რიცხვი k აიღება ოთხის ჯერადი. დავუშვათ, რომ $k = 4g$.

პრაქტიკაში ჩვეულებრივ კოეფიციენტთა რაოდენობა აიღება ორდინატთა რაოდენობის ტოლი, ე.ი. პერიოდული ფუნქცია წარმოდგენილია პოლინომით

$$g(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_{2g-1} \cos(2g-1)x + a_{2g} \cos 2gx + \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_{2g-1} \sin(2g-1)x$$

ყველა კოეფიციენტები a_i, b_i , გარდა a_{2g} -სი, გამოითვლება ფორმულებით (4.9), (4.10) და (4.11). ჩვენ ვნახეთ, რომ ჯამი

$$\sum_{a=1}^k \cos mx_a \cos px_a$$

გარდაიქმნება

$$\sum_{a=1}^k \cos mx_a \cos px_a = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^k \cos(m+p)x_a + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^k \cos(m-p)x_a$$

როდესაც $m = p = 2g$ არცერთი შესაკრები არ იქცევა ნოლად, რადგან

$$\cos(m+p)x_a = \cos 4g \frac{2pa}{4g} = 1 \quad \text{და} \quad \cos(m-p)x_a = \cos 0 = 1$$

შესაბამისად

$$\sum_{a=1}^k \cos^2 2gx_a = k$$

ამგვარად a_{2g} კოეფიციენტის განსასაზღვრავად გვაქვს

$$ka_{2g} = \sum_{a=1}^k y_a \cos 2gx_a$$

იმიტომ, რომ

$$\cos 2gx_a = \cos 2g \frac{2pa}{4g} = \cos pa = (-1)^a$$

გვეყენება

$$ka_{2g} = \sum_{a=1}^k (-1)^a y_a$$

დავაჯგუფოთ მიღებული ფორმულები კოეფიციენტების განსასაზღვრავად შემთხვევისთვის, როდესაც $k = 4g$

$$ka_0 = \sum_{a=1}^k y_a * ka_{2g} = \sum_{a=1}^k (-1)^a y_a \quad (4.12)$$

$$\frac{k}{2} a_m = \sum_{a=1}^k y_a \cos mx_a * \frac{k}{2} b_m = \sum_{a=1}^k y_a \sin mx_a$$

უკანასკნელ ორ ფორმულაში $m = 1, 2, 3, \dots, (2g-1)$. ადვილად შევამჩნევთ, რომ

$$\cos mx_{k-a} = \cos \frac{m2p(4g-a)}{4g} = \cos \left(2mp - \frac{2pam}{4g} \right) = \cos \frac{2pam}{4g} = \cos mx_a \quad \text{ხოლო}$$

$\sin mx_{k-a} = -\sin mx_a$, ე.ი. პერიოდის ბოლოებიდან ერთნაირათადაშორებული ყოველი ორი წერტილი შეიძლება ერთმანეთთან შევაერთოთ.

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$s_0 = y_{4g}, s_{2g} = y_{2g}, s_a = y_a + y_{4g-a}, d_a = y_a - y_{4g-a}$$

მაშინ ზემოთ მოყვანილი ფორმულები მიიღებენ სახეს

$$ka_0 = \sum_{a=0}^{k/2} s_a * ka_{2g} = \sum_{a=1}^{k/2} (-1)^a s_a \quad (4.13)$$

$$\frac{k}{2} a_m = \sum_{a=1}^{k/2} s_a \cos mx_a * \frac{k}{2} b_m = \sum_{a=1}^{k/2} d_a \sin mx_a$$

შესაკრებთა რაოდენობა ყოველ ჯამში შემცირდა ორჯერ. s_a და d_a გამოსაანგარიშებლად ორდინატებს განალაგებენ შემდეგნაირად

		y_1	y_2	y_3	y_{2g-1}	y_{2g}
	y_{4g}	y_{4g-1}	y_{4g-2}	y_{4g-3}	y_{2g+1}	
ჯამები	s_0	s_1	s_2	s_3	s_{2g-1}	s_{2g}
სხვაობები		d_1	d_2	d_3	d_{2g-1}	

შესაძლებელია კიდევ შევამციროთ შესაკრებთა რაოდენობა ფორმულებში. თუ m ლუწია

$$\cos mx_a = \cos mx_{2g-a} \quad \text{და} \quad \sin mx_a = -\sin mx_{2g-a}$$

ხოლო კენტებისთვის

$$\cos mx_a = -\cos mx_{2g-a} \quad \text{და} \quad \sin mx_a = \sin mx_{2g-a}$$

ამგვარად ბოლო ფორმულებში ერთნაირად დაშორებული წევრები შეგვიძლია შევაერთოთ, თუ შემოვიტანთ სიდიდეებს

$$c_g = s_g, S_g = d_g, c_a = s_a + s_{2g-a}, d_a = s_a - s_{2g-a}, S_a = d_a + d_{2g-a}, d_a = d_a - d_{2g-a}$$

სადაც $a = 0, 1, 2, \dots, (g-1)$

საბოლოოდ საანგარიშო ფორმულები მიიღებენ სახეს

$$ka_0 = \sum_a c_a \quad ka_{2g} = \sum_a (-1)^a c_a$$

$$\frac{k}{2} a_m = \sum_a c_a \cos mx_a \quad \text{როდესაც } m \text{ ლუწია} \quad (4.14)$$

$$\frac{k}{2} b_m = \sum_a d_a \sin mx_a$$

$$\frac{k}{2} a_m = \sum_a \partial_a \cos mx_a \quad \text{როდესაც } m \text{ კენტია}$$

$$\frac{k}{2} b_m = \sum_a s_a \sin mx_a$$

სიდიდეები $c_a, \partial_a, s_a, d_a$ ხელსაყრელია ვიანგარიშით შემდეგნაირად:

	s_0	s_1	s_2	s_{g-1}	s_g
	s_{2g}	s_{2g-1}	s_{2g-2}	s_{g+1}	
ჯამები	c_0	c_1	c_2	c_{g-1}	c_g
სხვაობები	∂_0	∂_1	∂_2	∂_{g-1}	
	d_1	d_2	d_3	d_{g-1}	d_g
	d_{2g-1}	d_{2g-2}	d_{2g-3}	d_{g+1}	
ჯამები	σ_1	σ_2	σ_3	σ_{g-1}	σ_g
სხვაობები	δ_1	δ_2	δ_3	δ_{g-1}	

3.4 ჰორმეტი ორდინატის შემთხვევა

თუ გავითვალისწინებთ (4.14) ფორმულებს, გამოვიანგარიშებთ

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6		
	y_{12}	y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7		
ჯამები	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	
სხვაობები		d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	
	s_0	s_1	s_2	s_3		d_1	d_2	d_3
		s_6	s_5	s_4		d_5	d_4	
ჯამები	c_0	c_1	c_2	c_3	ჯამები	σ_1	σ_2	σ_3
სხვაობები	∂_0	∂_1	∂_2		სხვაობები	δ_1	δ_2	

ამის შემდეგ გვექნება:

$$\begin{aligned}
12a_0 &= c_0 + c_1 + c_2 + c_3 \\
12a_6 &= c_0 - c_1 + c_2 - c_3 \\
6a_1 &= \partial_0 + \partial_1 \cos 30^\circ + \partial_2 \cos 60^\circ \\
6a_2 &= c_0 + c_1 \cos 60^\circ + c_2 \cos 120^\circ + c_3 \cos 180^\circ \\
6a_3 &= \partial_0 + \partial_1 \cos 90^\circ + \partial_2 \cos 180^\circ \\
6a_4 &= c_0 + c_1 \cos 120^\circ + c_2 \cos 240^\circ + c_3 \cos 360^\circ \\
6a_5 &= \partial_0 + \partial_1 \cos 150^\circ + \partial_2 \cos 300^\circ \\
6b_1 &= s_1 \sin 30^\circ + s_2 \sin 60^\circ + s_3 \sin 90^\circ \\
6b_2 &= d_1 \sin 60^\circ + d_2 \sin 120^\circ \\
6b_3 &= s_1 \sin 90^\circ + s_2 \sin 180^\circ + s_3 \sin 270^\circ \\
6b_4 &= d_1 \sin 120^\circ + d_2 \sin 240^\circ \\
6b_5 &= s_1 \sin 150^\circ + s_2 \sin 300^\circ + s_3 \sin 450^\circ
\end{aligned}$$

ამ ფორმულებში შემავალი ყველა ტრიგონომეტრიული სიდიდეები შეგვიძლია დავიყვანოთ $\sin 30^\circ = 0.5, \sin 60^\circ = 0.866, \sin 90^\circ = 1$ მნიშვნელობებამდე. მაშინ ზემოთაღნიშნულ გამოსახულებებს ექნებათ სახე

$$\begin{aligned}
12a_0 &= c_0 + c_1 + c_2 + c_3 \\
12a_6 &= c_0 - c_1 + c_2 - c_3 \\
6a_1 &= \partial_0 + \partial_1 \cos 30^\circ + \partial_2 \sin 30^\circ & 6b_1 &= s_1 \sin 30^\circ + s_2 \sin 60^\circ + s_3 \\
6a_2 &= c_0 + c_1 \cos 60^\circ - c_2 \sin 30^\circ - c_3 & 6b_2 &= d_1 \sin 60^\circ + d_2 \sin 60^\circ \\
6a_3 &= \partial_0 - \partial_2 & 6b_3 &= s_1 - s_3 \\
6a_4 &= c_0 - c_1 \sin 30^\circ - c_2 \sin 30^\circ + c_3 & 6b_4 &= d_1 \sin 60^\circ - d_2 \sin 60^\circ \\
6a_5 &= \partial_0 - \partial_1 \sin 30^\circ + \partial_2 \sin 30^\circ & 6b_5 &= s_1 \sin 30^\circ - s_2 \sin 60^\circ + s_3
\end{aligned}$$

კოსინუსის კოეფიციენტებისთვის ეს გამოთვლები ხელსაყრელი ჩავატაროთ შემდეგი სქემით

$\sin 30^\circ = 0.5$ $\sin 60^\circ = 0.866$ $\sin 90^\circ = 1$ $\sin 90^\circ = 1$			∂_2		$-c_2$	c_1		
	c_0	c_1	∂_0	∂_1	c_0	$-c_3$	∂_0	∂_2
ჯამები	I	II	I	II	I	II	I	II
ჯამები I+II	$12a_0$		$6a_1$		$6a_2$			
სხვაობები I-II	$12a_6$		$6a_5$		$6a_4$		$6a_3$	

ბოლო სინუსების კოეფიციენტებისთვის

$\sin 30^\circ = 0.5$ $\sin 60^\circ = 0.866$ $\sin 90^\circ = 1$	σ_1							
		σ_2	δ_1	δ_2				
	σ_3				σ_1	σ_3		
ჯამები	I	II	I	II	I	II	I	II
ჯამები I+II	$12b_1$		$6b_2$					
სხვაობები I-II	$12b_3$		$6b_4$		$6b_5$			

ყოველი ინდექსი, რომელიც დგას სვეტებში, მრავლდება სინუსის კუთხეზე, რომელიც ამ სტრიქონშია. მაგალითად ∂_2 პირველ სტრიქონში მრავლდება $\sin 30^\circ$ – ის მნიშვნელობაზე. სვეტები აიჯამება. ბოლო ორ ჰორიზონტალურ სტრიქონში ნაჩვენებია, როგორ მიიღება შესაბამისი კოეფიციენტები.

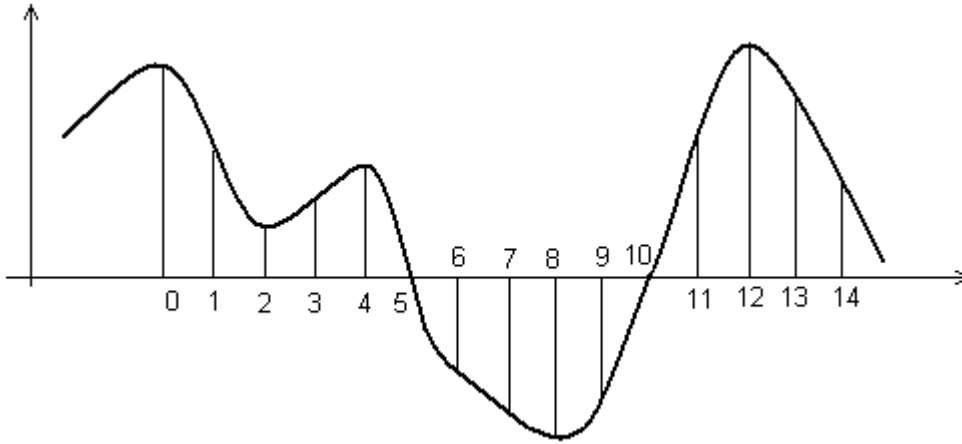
მაგალითად, $12a_0$ ტოლია პირველი და მეორე სვეტების ჯამის

$$12a_0 = c_0 + c_2 + c_1 + c_3$$

ბოლო

$$6a_4 = -c_2 \sin 30^\circ + c_0 - c_1 \sin 30^\circ + c_3$$

მაგალითი. შევისწავლოთ გრაფიკულად მოცემული მრუდი



გამოვყოთ პერიოდი და გავყოთ თორმეტ ტოლ ნაწილად და ავიღოთ ანათვლები. ანათვლების მნიშვნელობები არის

38,12,4,14,4,-18,-23,-27,-24,8,32,38

განვალაგოთ გამოთვლები როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები.

		38	12	4	14	4	-18	
		38	32	8	-24	-27	-23	
ჯამები	38	70	20	-20	-13	-19	-18 s_i
სხვაობები		6	4	28	41	27	 d_i
			38	70	20	-20		
			-18	-19	-13			
		ჯამები	20	51	7	-20 c_i	
		სხვაობები	56	89	33 t_i		
	6	4	28					
	27	41						
ჯამები	33	45	28 u_i				
სხვაობები	-21	-37 v_i					

გამოვიანგარიშოთ კოეფიციენტები კოსინუსებთან:

$\sin 30^\circ = 0.5$	—	—	33	—	-7	51	—	—
$\sin 60^\circ = 0.866$	—	—	—	89	—	—	—	—
$\sin 90^\circ = 1$	20	51	56	—	20	20	56	33
$\sin 90^\circ = 1$	7	-20	—	—	—	—	—	—
ჯამები	27 I	31 II	72,5 I	77,1 II	16,5 I	45,5 II	56 I	33 II
ჯამები I+II	58		149,6		62		—	
სხვაობები I-II	-4		-4,6		-29		23	

გვექნება:

$$12a_0 = 58 \dots\dots\dots a_0 = 4,83$$

$$12a_6 = -4 \dots\dots\dots a_6 = -0,33$$

$$6a_1 = 149,6 \dots\dots\dots a_1 = 24,93$$

$$6a_2 = 62 \dots\dots\dots a_2 = 10,33$$

$$6a_3 = 23 \dots\dots\dots a_3 = 3,83$$

$$6a_4 = -29 \dots\dots\dots a_4 = -4,83$$

$$6a_5 = -4,6 \dots\dots\dots a_5 = -0,77$$

გამოვიანგარიშოთ კოეფიციენტები სინუსებთან:

$\sin 30^\circ = 0.5$	33	-	-	-	-	-	-	-
$\sin 60^\circ = 0.866$	-	45	-21	-37	-	-	-	-
$\sin 90^\circ = 1$	28	-	-	-	-	-	-	-
ჯამები	44,5 I	39 II	-18,2 I	-32 II	33 I	28 II	— I	— II
ჯამები I+II	83,5		-50,2		—		—	
სხვაობები I-II	5,5		13,8		5		—	

გვექნება:

$$6b_1 = 83,5 \dots\dots\dots b_1 = 13,91$$

$$6b_2 = -50,2 \dots\dots\dots b_2 = -8,37$$

$$6b_3 = 5 \dots\dots\dots b_3 = 0,833$$

$$6b_4 = 13,8 \dots\dots\dots b_4 = 2,30$$

$$6b_5 = 5,5 \dots\dots\dots b_5 = 0,92$$

ამგვარად

$$g(x) = 4,83 + 24,93 \cos x + 10,33 \cos 2x + 3,83 \cos 3x - 4,83 \cos 4x - 0,77 \cos 5x - 0,33 \cos 6x + 13,91 \sin x - 8,37 \sin 2x + 8,33 \sin 3x + 2,3 \sin 4x + 0,92 \sin 5x$$

ეს გამოსახულება მარტივი გარდაქმნით შეიძლება წარმოვიდგინოთ სინუსების ჯამის სახით. ამისათვის გარდავქმნათ გამოსახულება

$$a_m \cos mx + b_m \sin mx$$

თუ ამ გამოსახულებას გადავამრავლებთ და გავყოფთ $\sqrt{a_m^2 + b_m^2}$ -ზე, მივიღებთ

$$\sqrt{a_m^2 + b_m^2} \left(\frac{a_m}{\sqrt{a_m^2 + b_m^2}} \cos mx + \frac{b_m}{\sqrt{a_m^2 + b_m^2}} \sin mx \right)$$

ავღნიშნოთ

$$\frac{a_m}{\sqrt{a_m^2 + b_m^2}} = \sin \varphi \quad \text{და} \quad \frac{b_m}{\sqrt{a_m^2 + b_m^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{a_m}{\sqrt{a_m^2 + b_m^2}} \right)^2} = \cos \varphi$$

ეს გამოსახულება შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ ასე:

$$\sqrt{a_m^2 + b_m^2} (\sin \varphi \cos mx + \cos \varphi \sin mx) = \sqrt{a_m^2 + b_m^2} \sin(mx + \varphi)$$

თუ ჩავატარებთ ამგვარ გარდაქმნებს, $g(x)$ შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$g(x) = 4,83 + 28,55 \sin(x + \varphi_1) + 13,3 \sin(2x + \varphi_2) + 3,92 \sin(3x + \varphi_3) + 5,35 \sin(4x + \varphi_4) + 1,2 \sin(5x + \varphi_5)$$

სადაც φ – თვის $\sin \varphi$ -ას მიხედვით, $\cos \varphi$ – ას ნიშნის გათვალისწინებით, გავნსაზღვრავთ მნიშვნელობებს:

$$\varphi_1 = 60^{\circ} 83' \wedge \varphi_2 = 129^{\circ} 00' \wedge \varphi_3 = 77^{\circ} 74' \wedge \varphi_4 = 295^{\circ} 45' \wedge \varphi_5 = 320^{\circ} 09'$$

3.5 ფურიეს მწკრივების კომპლექსური ფორმა

პერიოდული სიგნალის სპექტრალური დაშლისთვის გამოვიყენოთ ბაზისურ ფუნქციებად ექსპონენტები წარმოსახვითი მაჩვენებლით

$$\{u_k\} = \left\{ \frac{\exp(jk\omega t)}{\sqrt{T}} \right\}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

როგორც ვხედავთ, ამ ფუნქციათა სისტემა პერიოდულია T პერიოდით და ორთონორმირებულია მონაკვეთზე $[-T/2, T/2]$, რადგან

$$(u_m, u_n) = \int_{-T/2}^{T/2} u_m u_n^* dt = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p e^{j(m-n)x} dx = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

პერიოდული სიგნალის ფურიეს მწკრივი ამ შემთხვევაში მიიღებს სახეს

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}$$

კოეფიციენტებით

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) e^{-jn\omega t} dt$$

ჩვეულებრივ გამოიყენება ჩაწერის შემდეგი ფორმა

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega t}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) e^{-jn\omega t} dt$$

უკანასკნელი გამოსახულება წარმოადგენს პერიოდული სიგნალის ფურიეს მწკრივის კომპლექსურ ფორმაში.

როგორც ვხედავთ, სიგნალის სპექტრი შეიცავს კომპონენტებს უარყოფით ნახევარღერძზე, თანაც $C_{-n} = C_n^*$.

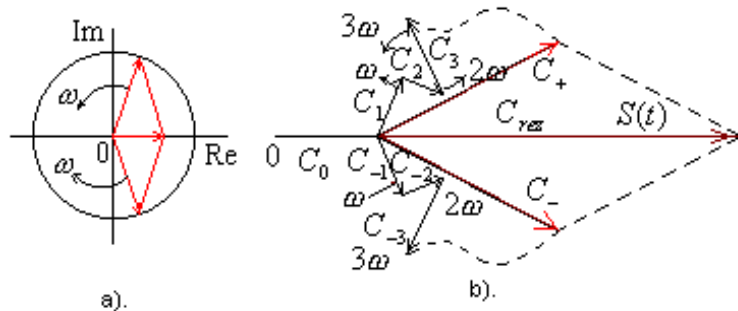
ამ მწკრივში მდგენელები დადებითი და უარყოფითი სიხშირეებით ერთიანდებიან წყვილებში. მაგალითად

$$C_n e^{jn\omega t} + C_{-n} e^{-jn\omega t} = |C_n| e^{j(n\omega t + \phi_n)} + |C_n| e^{-j(n\omega t + \phi_n)} = 2|C_n| \cos(n\omega t + \phi_n)$$

ამგვარად, უარყოფითი სიხშირე არის არა ფიზიკური, არამედ მათემატიკური ცნება, რომელიც გამომდინარეობს კომპლექსური რიცხვების წარმოდგენიდან.

3.6 პერიოდული სიგნალის ასახვა კომპლექსურ სიბრტყეზე

ფურიეს მწკრივის სტრუქტურა საშუალებას იძლევა ავსახოთ პერიოდული სიგნალი კომპლექსურ სიბრტყეზე მბრუნავი ვექტორების უსასრულო ჯამით.



ნახ.20.

ნახ. 20ა-ზე ნაჩვენებია ვექტორის აგება კომპლექსურ სიბრტყეზე. დადებით სიხშირეს შეესაბამება ვექტორის ბრუნვა საათის ისრის საწინააღმდეგოდ, ხოლო უარყოფითს-პირიქით.

ნახ. 20ბ-ზე ნაჩვენებია ფურიეს მწკრივის ასახვა კომპლექსურ სიბრტყეზე. აგება ხორციელდება შემდეგი მიმდევრობით: კომპლექსური სიბრტყის საწყისიდან აიგება ნამდვილი ვექტორი C_0 , რომელიც ასახავს $n=0$ ნომრიან წევრს. შემდეგ დაუშვებენ $t=0$ და ააგებენ ვექტორთა ჯამს

$$C_+ = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$$

$$C_- = C_{-1} + C_{-2} + C_{-3} + \dots$$

როგორც ზემოთ ავღნიშნეთ, ფურიეს მწკრივის კოეფიციენტები დადებითი და უარყოფითი სიხშირით კომპლექსურად შეუღლებულნი არიან. შესაბამისად $C_- + C_+$ ყოველთვის ნამდვილია. თუ მას დავუმატებთ მუდმივ მდგენელს C_0 , მივიღებთ ვექტორს, რომლის სიგრძეც უდრის $S(0)$ -სიგნალის მნიშვნელობას დროის საწყის მომენტში.

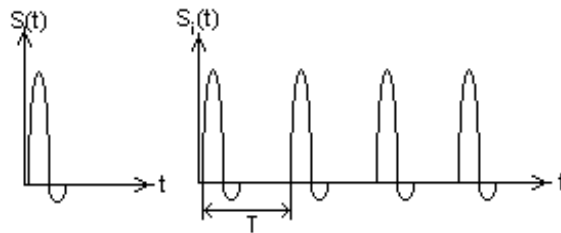
შემდგომში სურათი ტრანსფორმირება-ვექტორები C_1, C_2, C_3, \dots , რომელნიც შეესაბამისებიან დადებით სიხშირეებს, ბრუნავენ კუთხური სიხშირეებით $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ ფაზური კუთხის გაზრდის მიმართულებით, ხოლო $C_{-1}, C_{-2}, C_{-3}, \dots$ ბრუნავენ საწინააღმდეგო მიმართულებით. რეზულტიური ვექტორის ბოლო დროის ნებისმიერ მომენტში განსაზღვრავს სიგნალის მიმდინარე მნიშვნელობას.

3.7 არაპერიოდული სიგნალების სპექტრალური ანალიზი ფურიეს გარდაქმნა

ფურიეს მწკრივების მეთოდი იძლევა უფრო ღრმა და ნაყოფიერი განზოგადოების საშუალებას, რაც გვაძლევს არაპერიოდული სიგნალების სპექტრალურ ანალიზის საშუალებას. ამ უკანასკნელთა შორის დიდ ინტერესს იწვევს იმპულსური სიგნალები.

იმპულსის პერიოდული გაგრძელება. დავუშვათ $S(t)$ -სასრული ხანგრძლივობის ერთეულოვანი იმპულსია. თუ დროით ღერძზე T ინტერვალით წარმოვიდგენთ ასეთივე იმპულსებს, მივიღებთ ადრე შესწავლილ პერიოდულ მიმდევრობას, რომელიც შეიძლება იყოს წარმოდგენილი ფურიეს მწკრივის კომპლექსური სახით

$$S_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega t} \quad \text{კოეფიციენტებით} \quad C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) e^{-jn\omega t} dt$$



ნახ.3

იმისათვის, რომ დავბრუნდეთ ერთეულოვან იმპულსზე, საკმარისია $T \rightarrow \infty$. ამ დროს, ნათელია:

1. მეზობელი ჰარმონიულების სიხშირეები $n\omega$ და $(n+1)\omega$ აღმოჩნდება საკმაოდ ახლოს, ისე რომ ზემოთამოყვანილ ფორმულებში დისკრეტული ცვლადი $n\omega$ შეიცვლება უწყვეტი ცვლადით ω - მიმდინარე სიხშირით.

2. ამპლიტუდური კოეფიციენტები C_n უსასრულოდ შემცირდება, რადგან ფორმულის მნიშვნელშია.

3.8 სიგნალის სპექტრალური სიმკვრივის ცნება.

ვისარგებლოთ იმით, რომ ფურიეს მწკრივის კოეფიციენტები კომპლექსურად შეუღლებული წყვილებია:

$$C_n = A_n e^{jn}, C_{-n} = A_n e^{-jn}$$

ყოველ ასეთ წყვილს პასუხობს ჰარმონიული რხევა

$$A_n e^{j(n\omega t + \phi)} + A_n e^{-j(n\omega t + \phi)} = 2A_n \cos(n\omega t + \phi)$$

კომპლექსური ამპლიტუდით $2A_n e^{jn} = 2C_n$.

განვიხილოთ სიხშირეთა მცირე ინტერვალი $\Delta\omega$ ამორჩეული ω_0 სიხშირის ირგვლივ. ამ ინტერვალის ზღვრებში გვექნება $N = \Delta\omega / \omega = \Delta\omega T / (2\pi)$ სპექტრალური მდგენელების ცალკეული წყვილი, რომელთა სიხშირეც ძალიან მცირედ განსხვავდება. ამიტომ მდგენელები შეიძლება შევკრიბოთ ისე, თითქოს მათ ყველას აქვთ ერთი და იგივე სიხშირე და ხასიათდება ერთნაირი კომპლექსური ამპლიტუდით

$$2C_n = \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{j\omega t} dt$$

შედეგად ვპოულობთ ექვივალენტური ჰარმონიული სიგნალის კომპლექსურ ამპლიტუდას, რომელიც ასახავს ყველა სპექტრალური მდგენელის წილს $\Delta\omega$ ინტერვალში:

$$\Delta A_\omega = \frac{2N}{T} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{\Delta\omega}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt$$

ფუნქციას

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt$$

სიგნალ $S(t)$ –ს სპექტრალური სიმკვრივე ეწოდება. ეს ფორმულა ახორციელებს ამ სიგნალის ფურიეს გარდაქმნას.

3.9 ფურიეს უკუგარდაქმნა.

ამოვხსნათ სიგნალების სპექტრალური თეორიის უკუამოცანა: ცნობილი სპექტრალური სიმკვრივით ვიპოვოთ საწყისი სიგნალი.

ისევ დავუშვათ, რომ რომ არაპერიოდული სიგნალი მიიღება პერიოდულსაგან, როდესაც პერიოდი მიისწრაფის უსასრულობისაკენ. თუ ვისარგებლებთ წინა თავის ფორმულებით, შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$S(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} S(nW) e^{jnWt}$$

ამ ფორმულაში შემავალი კოეფიციენტი $1/T$ მეზობელი ჰარმონიულების სიხშირეების სხვაობის პროპორციულია

$$\frac{1}{T} = \frac{W}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} [nW - (n-1)W]$$

ნებისმიერი მთელი n – თვის. ამგვარად

$$S(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(nW) e^{jnWt} [nW - (n-1)W]$$

რადგან ზღვარში სიხშირული ინტერვალები მეზობელ ჰარმონიკებს შორის უსასრულოდ მცირდება, ჯამი შეიცვლება ინტეგრალით

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(W) e^{jWt} dW$$

მიღებულ ფორმულას ეწოდება სიგნალი $S(t)$ –ს ფურიეს უკუგარდაქმნის ფორმულა.

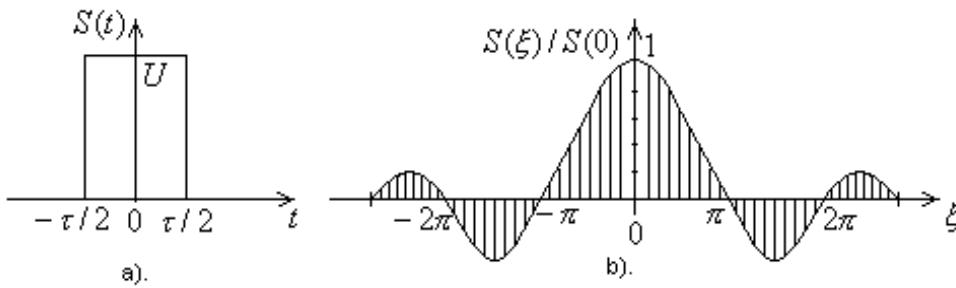
არსებობს სიგნალის სპექტრალური სიმკვრივის არსებობის პირობა: სიგნალ $S(t)$ –ს შეესაბამისება მისი სპექტრალური სიმკვრივე $S(W)$, თუ ეს სიგნალი აბსოლუტურად ინტეგრირებადია, ე.ი. არსებობს ინტეგრალი

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S(t)| dt < \infty$$

ეს პირობა საგრძნობლად ამცირებს დასაშვებ სიგნალების კლასს და ამ შემთხვევაში გამოიყენება სხვა მათემატიკური ხერხები, რომელნიც განიხილება სპეციალურ ლიტერატურაში.

3.10 მართკუთხა ვიდეოიმპულსის სპექტრალური სიმკვრივე

ავლნიშნოთ ამ სიგნალის ამპლიტუდა U – თი, ხოლო ხანგრძლივობა $-t$. იგი სიმეტრიულად არის განლაგებული დროის ღერძის მიმართ (ნახ.21.ა)



ნახ.21

მაშინ

$$S(\omega) = U \int_{-t/2}^{t/2} e^{j\omega t} dt = U \int_{-t/2}^{t/2} (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt = 2U \int_0^{t/2} \cos \omega t dt = \frac{2U}{\omega} \sin \frac{\omega t}{2}$$

განხილული სიგნალის სპექტრალური სიმკვრივე ამ გამოსახულების ნამდვილი ნაწილი. სიმარტივისთვის შემოვიტანოთ აღნშვნა $x = \omega t / 2$ და შედეგი წარმოვადგინოთ უფრო მარტივად

$$S(x) = Ut \frac{\sin x}{x} \quad (2.20)$$

აღსანიშნავია, რომ ნულოვან სიხშირეზე სპექტრალური სიმკვრივე უდრის იმპულსის ფართობს: $S(0) = Ut$. მართკუთხა ვიდეოიმპულსის სპექტრალური სიმკვრივე ნაჩვენებია ნახ.21.ბ-ზე.

3.11 ექსპონენციალური ვიდეოიმპულსის სპექტრალური სიმკვრივე

განვიხილოთ სიგნალი, რომელიც აღიწერება ფუნქციით $S(t) = U \exp(-a.t)S(t)$ დადებითი ნამდვილი პარამეტრი a -ს მნიშვნელობებისთვის.

ასეთი სიგნალი, მკაცრად, მხოლოდ პირობითათ არის იმპულსი როდესაც $T \rightarrow \infty$. მაგრამ რადგან $a > 0$, სიგნალი დროის ზრდისას ძალიან სწრაფად მცირდება. ამგვარი იმპულსების ეფექტურ ხანგრძლივობას განსაზღვრავენ იმპულსის ამპლიტუდის ათჯერადი შემცირების პირობიდან: $\exp(-a.t) = 0,1$, საიდანაც $t = 2,303a$.

ექსპონენციალური ვიდეოიმპულსის სპექტრალურ სიმკვრივე იქნება

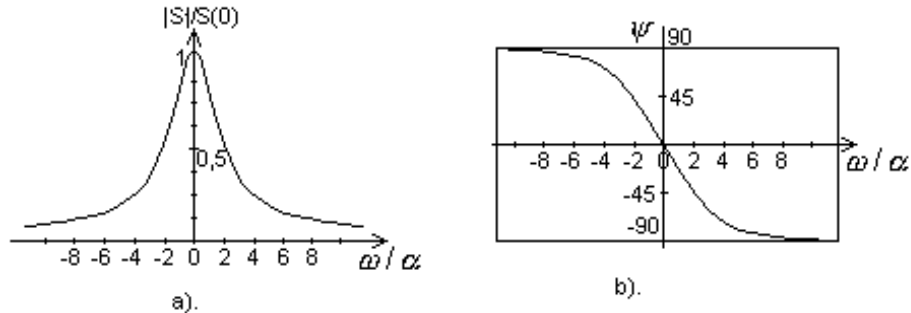
$$S(\omega) = U \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = -\frac{U}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_{t=0}^{t=\infty}$$

ზღვრების ჩასმის შედეგად მივიღებთ

$$S(\omega) = \frac{U}{a+j\omega}$$

შეიძლება ავლნიშნოთ ორი პრინციპიალური თავისებურება, რომელნიც განასხვავებენ ექსპონენციალური და მართკუთხა ვიდეოიმპულსების სპექტრებს:

1. ექსპონენციალური ვიდეოიმპულსის სპექტრი არცერთი სიხშირის მნიშვნელობისთვის არ ხდება ნული.
2. ექსპონენციალური ვიდეოიმპულსის სპექტრალური სიმკვრივის გამოსახულება არის კომპლექსური ფუნქცია $S(\omega) = |S(\omega)| \exp[j\psi(\omega)]$, რომლის მოდულიც არის $|S(\omega)| = U / \sqrt{a^2 + \omega^2}$ და არგუმენტი (ფაზური სპექტრი) $\psi(\omega) = -\arctg(\omega/a)$. შესაბამისი გრაფიკები ნაჩვენებია ნახ.22.



ნახ.22

3.12 დელტა-ფუნქციის სპექტრალური სიმკვრივე

დავუშვათ $S(t)$ სიგნალი წარმოადგენს მოკლე იმპულსს, რომელიც კონცენტრირებულია $t=0$ წერტილში და გააჩნია ფართობი A . ასეთი სიგნალის მათემატიკური მოდელი არის $S(t) = A \delta(t)$. ამ სიგნალის სპექტრალური სიმკვრივე

$$S(\omega) = A \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t) \delta(t) dt$$

დელტა-ფუნქციის მაფილტრებელი თვისების საფუძველზე ამ ფორმულაში შემავალი ინტეგრალი რიცხობრივად უდრის კლასიკური ფუნქციის მნიშვნელობას წერტილში, სადაც კონცენტრირებულია განზოგადოებული ფუნქცია. ამიტომ

$$S(\omega) = A = const$$

ამრიგად, დელტა-ფუნქციას გააჩნია თანაბარი სპექტრი ყველა სიხშირეზე.

3.13 კავშირი იმპულსის ხანგრძლივობასა და მის სპექტრს შორის

თუ გავანალიზებთ ზემოთგანხილულ კერძო შემთხვევებს, შეგვიძლია გავაკეთოთ ძალიან მნიშვნელოვანი დასკვნა: რაც უფრო მცირეა იმპულსის ხანგრძლივობა, მით უფრო ფართოა მისი სპექტრი.

სპექტრის სიგანის ქვეშ აქ და მომავალში ვგულისხმობთ სიხშირეთა ინტერვალს, რომლის საზღვრებშიც სპექტრალური სიმკვრივის მოდული არ არის წინასწარ დაშვებულ დონეზე ნაკლები, მაგალითად იცვლება $|S|_{\max}$ –დან $|0,1 * S|_{\max}$ –მდე.

განვიხილოთ მართკუთხა ვიდეოიმპულსი და დავუშვათ რომ მისი სპექტრის ზედა ზღვრული ზღვარი w_0 შეესაბამება სპექტრალური სიმკვრივის პირველ ნულს. აქედან გამომდინარეობს, რომ $w_0 t / 2 = p$ ან $f_0 t = 1$.

ექსპონენციალური ვიდეოიმპულსისთვის პირობითად შეიძლება დავუშვათ, რომ ზედა ზღვრულ სიხშირეზე სპექტრალური სიმკვრივის მოდული მცირდება თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობაზე 10-ჯერ. აქედან გამომდინარეობს, რომ $1 / \sqrt{1 + (w_0 / a)^2} = 0,1$. ე.ი. $w_0 = \sqrt{99} a$. ეს კი ნიშნავს, რომ $f_0 = w_0 / (2p) = 1,584 a$.

რადგან ექსპონენციალური იმპულსის ეფექტური ხანგრძლივობა $t = 2,303 a$, ნამრავლი $f_0 t = 3,647$.

საბოლოოდ, რადგან დელტა-იმპულსის ხანგრძლივობა ძალიან მცირეა, მისი სპექტრი უსასრულოდ გაჭიმულია.

ამრიგად, იმპულსის სპექტრის სიგანის ნამრავლი მის ხანგრძლივობაზე არის მუდმივი რიცხვი, დამოკიდებული მხოლოდ იმპულსის ფორმაზე და, როგორც წესი, ერთის ზომადია:

$$f_0 * t = 0(1)$$

ამ შეფარდებას ძალზედ დიდი მნიშვნელობა აქვს რადიოტექნიკაში იგი განსაზღვრავს რადიომოწყობილობების გატარების ზოლის მოთხოვნებს.

3.14 ფურიეს გარდაქმნის ძირითადი თვისებები

ფურიეს გარდაქმნის წრფიულობა. ამ უმნიშვნელოვანესი თვისების ფორმულირებაა შემდეგი: თუ გვაქვს სიგნალების სიმრავლე $S_1(t), S_2(t), \dots$ ისეთი, რომ $S_1(t) \leftrightarrow S_1(w), S_2(t) \leftrightarrow S_2(w), \dots$, მაშინ ნებისმიერი მთელი a –თვის

$$\sum_i a_i S_i(t) \leftrightarrow \sum_i a_i S_i(w) \quad (2.26)$$

სპექტრალური სიმკვრივის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილის თვისებები. დავუშვათ $S(t)$ – სიგნალია, რომელიც იღებს ნამდვილ მნიშვნელობებს. მისი სპექტრალური სიმკვრივე ზოგად შემთხვევაში კომპლექსურია

$$S(w) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos wt . dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin wt . dt = A(w) - jB(w)$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულება ფურიეს უკუგარდაქმნის ფორმულაში. მაშინ

$$s(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} [A(w) - jB(w)] (\cos wt + j \sin wt) dw$$

იმისათვის, რომ ასეთი ორმაგი გარდაქმნის შედეგად მიღებული სიგნალი იყოს ნამდვილი, აუცილებელია შესრულდეს ტოლობა

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(w) \sin wt .dw = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(w) \cos wt .dw = 0$$

ეს შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც სპექტრალური სიმკვრივის ნამდვილი ნაწილი $A(w)$ – ლუწი, ხოლო წარმოსახვითი ნაწილი $B(w)$ – კენტი სიხშირის ფუნქციაა:

$$A(w) = A(-w), B(w) = -B(-w) \tag{2.27}$$

დროში წანაცვლებული სიგნალის სპექტრალური სიმკვრივე. დაუშვათ, რომ $s(t)$ სიგნალისთვის ცნობილია მისი სპექტრი $s(t) \leftrightarrow S(w)$. განვიხილოთ ასეთივე სიგნალი, წარმოქმნილი t_0 წამის შემდეგ. მივიღოთ t_0 დროის ახალი ათვლის წერტილად და ახალი სიგნალი ავლნიშნოთ, როგორც $s(t - t_0)$. დავამტკიცოთ, რომ

$$s(t - t_0) \leftrightarrow S(w)e^{-jw t_0}$$

დამტკიცება ძალიან მარტივია. მართლაც, თუ მოვახდენთ ცვლადის შეცვლას $t - t_0 = x$,

$$s(t - t_0) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(t - t_0) e^{-jw t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-jw t_0} e^{-jw x} dx = S(w) e^{-jw t_0}$$

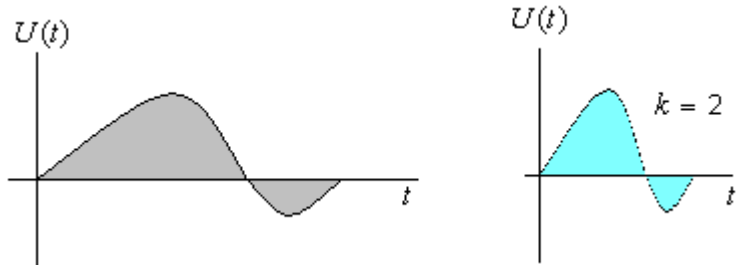
კომპლექსური რიცხვის $\exp(-jw t_0)$ მოდული ნებისმიერი t_0 –თვის ერთის ტოლია. ამიტომ ელემენტარული ჰარმონიული მდგენელების ამპლიტუდა, რომლისგანაც შედგება სიგნალი, არ არის დამოკიდებული ამ სიგნალის დროით ღერძზე მდგომარეობისაგან. ინფორმაცია სიგნალის ამ მახასიათებელზე დევს მისი სპექტრალური სიმკვრივის არგუმენტის სიხშირულ დამოკიდებულობაში (ფაზურ სპექტრში).

სპექტრალური სიმკვრივის დამოკიდებულება დროის გაზომვის მასშტაბის ამორჩევაზე. დაუშვათ, რომ საწყისი სიგნალი $s(t)$ განიცდის დროის მასშტაბის ცვლილებას, ანუ t დროის როლს ითამაშებს ახალი დამოუკიდებელი ცვლადი kt . k -ნამდვილი რიცხვია. თუ $k > 1$ მაშინ ხდება საწყისი სიგნალის „შეკუმშვა“, ხოლო თუ $0 < k < 1$ საწყისი სიგნალი „იჭიმება“ დროში.

დავამტკიცოთ, რომ

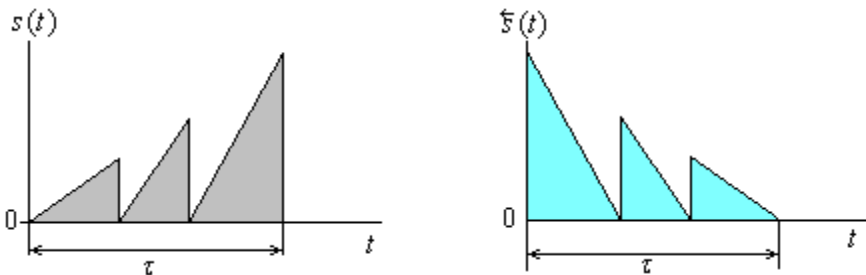
$$s(kt) \leftrightarrow \frac{1}{k} S\left(\frac{w}{k}\right) \tag{2.29}$$

მართლაც $s(kt) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(kt) e^{-jw t} dt = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-j\frac{w}{k} x} dx$ საიდანაც გამომდინარეობს (2.29).



აქედან გამომდინარეობს, რომ სიგნალის „შესაკუმშად“ მისი ფორმის დაუმახინჯებლად საჭიროა გავანაწილოთ იგივე სპექტრალური მდგენელები სიხშირეთა უფრო ფართე სპექტრში მათი შესაბამისი ამპლიტუდების პროპორციული შემცირებით.

ამავე ამოცანასთან ახლოს არის მეორე ამოცანა. დავუშვათ გვაქვს $s(t)$ იმპულსი დროით მონაკვეთზე $[0, t]$ სპექტრალური სიმკვრივით $S(w)$. საჭიროა ვიპოვოთ ამ იმპულსის მიმართ სარკისებურად შებრუნებალი იმპულსის სპექტრი.



ავლნიშნოთ შებრუნებალი იმპულსი $\bar{s}(t)$. რადგან ცხადია, რომ $\bar{s}(t) = s(t - t)$, მაშინ

$$\bar{S}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t - t) e^{-jw t} dt$$

როგორც წინა შემთხვევაში, განვახორციელოთ ცვლადის შეცვლა $x = t - t$ და მივიღებთ

$$\bar{S}(w) = e^{-jw t} \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{jw x} dx = e^{-jw t} S(-w) = e^{-jw t} S^*(w)$$

წარმოებულის და განუსაზღვრელი ინტეგრალის სპექტრალური სიმკვრივე. დავუშვათ ცნობილია სიგნალი $s(t)$ და მისი სპექტრალური სიმკვრივე $S(w)$. შევისწავლოთ სიგნალი $f(t) = ds/dt$ და ვიპოვოთ მისი სპექტრალური სიმკვრივე $F(w)$. განსაზღვრებით

$$f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{s(t) - s(t - t)}{t} \tag{2.31}$$

რადგან ფურიეს გარდაქმნა –წრფივი ოპერაციაა, მაშინ (2.31) მართებულია სპექტრალური სიმკვრივის მიმართაც. თუ გავითვალისწინებთ (2.28), მივიღებთ

$$F(w) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \exp(-jw t)}{t} S(w) \tag{2.32}$$

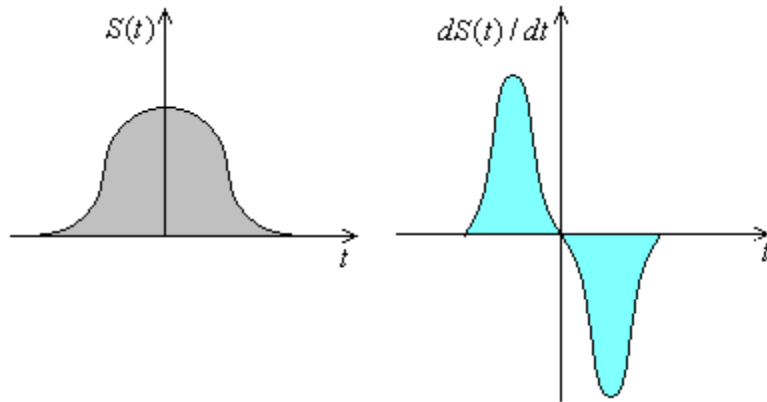
წარმოვადგინოთ ექსპონენციალური ფუნქცია ტეილორის მწკრივით: $\exp(-j\omega t) = 1 - j\omega t - (\omega t)^2 / 2 - \dots$ შემოვიფარგლოთ პირველი ორი წევრით და ჩავსვათ (2.32) -ში. მივიღებთ

$$F(\omega) = j\omega S(\omega) \tag{2.33}$$

დიფერენცირებისას სიგნალის სიჩქარე იზრდება, ე.ი. სპექტრალური სიმკვრივის მოდულიებიც მაღალ სიხშირეებზე იზრდება საწყის სიგნალთან შედარებით.

შესაძლებელია (2.33) ფორმულის განზოგადოება n -რი რიგის წარმოებულზე. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ თუ $g(t) = d^n s / dt^n$, მაშინ

$$G(\omega) = (j\omega)^n S(\omega) \tag{2.34}$$



ამგვარად, სიგნალის დიფერენცირება დროით ამ სიგნალის სპექტრალური სიმკვრივის $j\omega$ -ზე გამრავლების ექვივალენტურია.

განვიხილოთ ფუნქცია $s(t) = \int f(t)dt$, რომელიც პირვანდელია $f(t)$ -ს მიმართ. (2.33) -დან ფორმალურად გამომდინარეობს, რომ პირვანდელის სპექტრი

$$S(\omega) = F(\omega) / (j\omega) \tag{2.35}$$

ამგვარად, მამრავლი $1/(j\omega)$ ასრულებს ინტეგრირების ოპერატორის როლს სიხშირულ სივრცეში.

სიგნალის სპექტრალური სიმკვრივე ინტეგრატორის გამოსასვლელზე. ხშირად ტექნიკაში გამოიყენება მოწყობილობები-”ინტეგრატორები”, რომელთა გამოსასვლელი სიგნალი შესასვლელი სიგნალის ინტეგრალის პროპორციულია. ავლნიშნით შესასვლელი სიგნალი $s_{inp}(t)$, ხოლო გამოსასვლელი- $s_{out}(t)$. მაშინ

$$s_{out}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t s_{inp}(t)dt \tag{2.36}$$

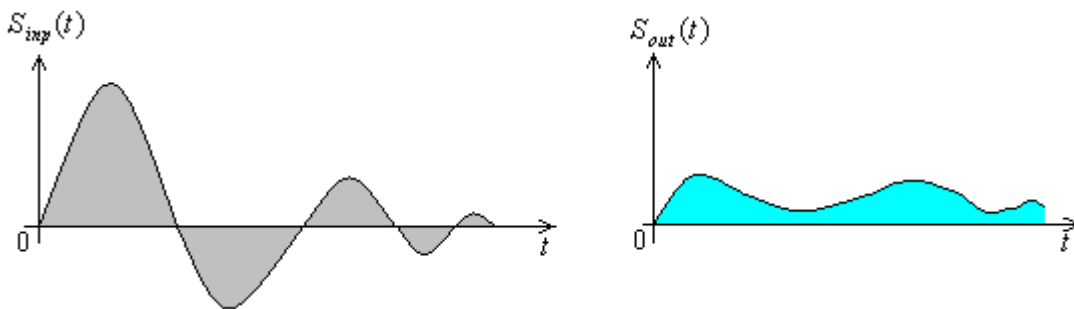
აქ $T > 0$ – ფიქსირებული პარამეტრია.

განსაზღვრული ინტეგრალი, რომელიც შედის (2.36) -ში, უდრის პირვანდელის ორი მნიშვნელობის სხვაობას. პირველი გამოიანგარიშება t არგუმენტისთვის, ხოლო მეორე-

$t - T$ -თვის. თუ გამოვიყენებთ (2.28) და (2.35) მივიღებთ შესასვლელი და გამოსასვლელი სიგნალების სპექტრების კავშირის ფორმულას

$$S_{out}(W) = \frac{S_{inp}(W)}{j\omega T} (1 - e^{-j\omega T}) \quad (2.37)$$

მამრავლი ფრჩხილებში ნებისმიერი სიხშირისთვის შეზღუდულია, ამ დროს მნიშვნელის მოდული სიხშირის ზრდისას წრფიულად იზრდება. ეს მიგვითითებს იმაზე, რომ ასეთი წრედი მოქმედებს როგორც დაბალსიხშირული ფილტრი.



სიგნალების ნამრავლის სპექტრალური სიმკვრივე. როგორც ცნობილია, სიგნალების შეკრების დროს მათი სპექტრები აიჯამება. ამისაგან განსხვავებით სიგნალების გამრავლებისას ნამრავლის სპექტრი არ უდრის სპექტრების ნამრავლს. იგი გამოისახება მამრავლების სპექტრებს შორის გარკვეული ინტეგრალური შეფარდებით.

დავუშვათ, გვაქვს ორი სიგნალი $u(t)$ და $v(t)$, რომელთაც შეესაბამება სპექტრები $u(t) \leftrightarrow U(W)$ და $v(t) \leftrightarrow V(W)$. ავღნიშნოთ მათი ნამრავლი $s(t) = u(t)v(t)$ და გამოვიანგარიშოთ მისი სპექტრალური სიმკვრივე. ზოგადი წესით

$$S(W) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.38)$$

გამოვიყენოთ ფურიეს უკუგარდაქმნა და გამოვსახოთ სიგნალი $v(t)$ მისი სპექტრალური სიმკვრივით. შედეგი ჩავსვათ (2.38) -ში.

$$S(W) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} V(x)e^{jx.t} dx \right] e^{-j\omega t} dt$$

შევცვალოთ ინტეგრირების რიგი

$$S(W) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j(\omega-x)t} dt \right] dx$$

საიდანაც

$$S(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(x)U(w-x)dx \quad (2.39)$$

ინტეგრალს, რომელიც მარჯვენა ნაწილშია, ფუნქციების U და V -ს ნაკეცი ეწოდება. შემდგომში ნაკეცის ოპერაცია სიმბოლურად აღინიშნება ასე

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(x)U(w-x)dx = V(w) * U(w)$$

ამგვარად, სიგნალების ნამრავლის სპექტრალური სიმკვრივე მუდმივი რიცხვითი მამრავლის სიზუსტით მამრავლების სპექტრალური სიმკვრივის ნაკეცის ტოლია

$$u(t)v(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} V(w) * U(w) \quad (2.40)$$

მარტივად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ ნაკეცის ოპერაცია კომუტატიურია

$$U(w) * V(w) = V(w) * U(w)$$

ზემოთ მოყვანილი თეორემა ნაკეცზე შეიძლება შევაბრუნოთ: თუ რომელიმე სიგნალის სპექტრალური სიმკვრივე შეიძლება წარმოვიდგინოთ ნამრავლის სახით $S(w) = S_1(w)S_2(w)$ და $S_1(w) \leftrightarrow s_1(t)$ და $S_2(w) \leftrightarrow s_2(t)$, მაშინ სიგნალი $s(t) \leftrightarrow S(w)$ არის სიგნალების $s_1(t)$ და $s_2(t)$ ნაკეცი არა სიხშირულ, არამედ დროით სივრცეში:

$$S(w) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t-x)s_2(x)dx \quad (2.41)$$

3.15 არაინტეგრირებადი სიგნალების სპექტრალური სიმკვრივე

ხშირად სიგნალების მათემატიკური მოდელები არ პასუხობენ ინტეგრირებადობის პირობებს. ამიტომ ფურიეს გარდაქმნის მეთოდი ჩვეულებრივი სახით ამ შემთხვევაში ვერ გამოიყენება. მაგრამ, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, თუ დავუშვებთ, რომ სპექტრალური სიმკვრივეები აღიწერებიან განზოგადოებული ფუნქციებით, შეიძლება ვიმსჯელოთ ასეთ სიგნალების სპექტრზე.

რელეის განზოგადოებული ფორმულა. დავამტკიცოთ მნიშვნელოვანი დამატებითი დებულება, რომელიც ეხება სიგნალების სპექტრალურ თვისებებს. დავუშვათ გვაქვს ორი სიგნალი $u(t)$ და $v(t)$, განსაზღვრული თავისი ფურიეს უკუგარდაქმნებით

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(w)e^{j\omega t} dw$$

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(w)e^{j\omega t} dw$$

გამოვსახოთ ერთ-ერთი მათგანი, მაგალითად $v(t)$, მისი სპექტრალური სიმკვრივით და ვიპოვოთ მათი სკალარული ნამრავლი

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} V^*(w)e^{-j\omega t} d\omega \right] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega V^*(w) \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j\omega t} dt$$

აქ შიდა ინტეგრალი, როგორც ჩანს, წარმოადგენს $u(t)$ სიგნალის სპექტრალურ სიმკვრივეს. ამიტომ

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(w)V^*(w)d\omega = \frac{1}{2\pi} (U, V) \quad (2.42)$$

მიღებულ შეფარდებას ეწოდება რელის განზოგადოებული ფორმულა. ამ ფორმულის ადვილად დასამახსოვრებელი არსი შემდეგია: ორი სიგნალის სკალარული ნამრავლი კოეფიციენტის სიზუსტით სპექტრალური სიმკვრივეების სკალარული ნამრავლის პროპორციულია.

სპექტრალური სიმკვრივის განზოგადოებული ცნება. ჩავთვალოთ, რომ $v(t)$ აბსოლუტურად ინტეგრირებადი სიგნალი სპექტრალური სიმკვრივით $V(w)$, რომელიც სიხშირის კლასიკური ფუნქციაა. სიგნალი $u(t)$ არაინტეგრირებადია და ჩვეულებრივ კლასიკურ ფორმაში ფურიეს გარდაქმნა $U(w)$ არ არსებობს. მაგრამ თუ გავაფართოვებთ სპექტრალური სიმკვრივის ცნებას და დავუშვებთ, რომ $U(w)$ არის განზოგადოებული ფუნქცია. გამოვიყენებთ რა რელის განზოგადოებულ ფორმულას, საკმარისია დავუშვათ რომ $U(w)$ არის ფუნქციონალი რომელიც მოქმედებს ცნობილ ფუნქცია $V(w)$ -ზე, მივიღებთ

$$(U, V) = 2\pi (u, v) \quad (2.43)$$

დროში მუდმივი სიგნალის სპექტრალური სიმკვრივე. უმარტივესი დროში არაინტეგრირებადი სიგნალია $u(t) = A = const$. დავუშვათ $v(t)$ არის აბსოლუტურად ინტეგრირებადი სიგნალი სპექტრალური სიმკვრივით $V(w)$. გამოვიყენებთ რა (2.43)-ს, მივიღებთ

$$(U, V) = 2\pi A \int_{-\infty}^{\infty} v(t)dt$$

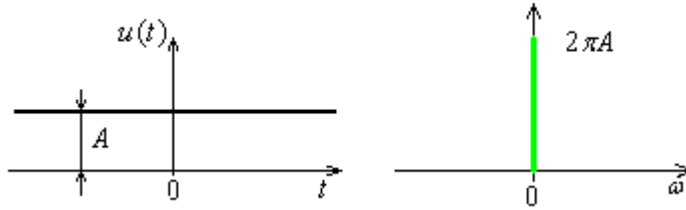
ადვილად შევამჩნევთ, რომ

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-j0t} dt = V(0)$$

გამოვიყენებთ რა დელტა-ფუნქციის მაფილტრირებელ თვისებას, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ (2.43) შესრულდება მხოლოდ მაშინ, თუ

$$U(w) = 2\pi A \delta(w)$$

მიღებული შედეგის ფიზიკური არსი ნათელია—დროში მუდმივ სიგნალს გააჩნია სპექტრალური მდგენელი მხოლოდ ნულოვან სიხშირეზე.



კომპლექსური ექსპონენციალური სიგნალის სპექტრალური სიმკვრივე. დავუშვათ $s(t) = \exp(jW_0 t)$ - კომპლექსური ექსპონენციალური სიგნალია მოცემული სიხშირით W_0 . ეს სიგნალი არ არის აბსოლუტურად ინტეგრირებადი, რადგან როდესაც $t \rightarrow \pm\infty$ ფუნქცია $s(t)$ არ მიისწრაფის არავითარი ზღვრისკენ. ამ სიგნალის ფურიეს გარდაქმნა $S(w)$, თუ მას განვიხილავთ განზოგადოებული სახით, უნდა აკმაყოფილებდეს შეფარდებას

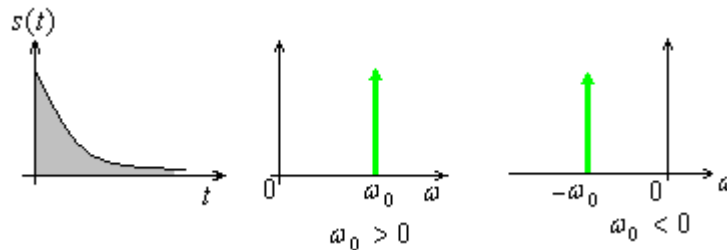
$$(S, V) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt = 2\pi V(w_0)$$

აქედან განსასაზღვრავი სპექტრალური სიმკვრივე $S(w)$ მიიღებს შემდეგ სახეს

$$S(w) = 2\pi d(w - w_0) \quad (2.45)$$

აღსანიშნავია:

1. კომპლექსური ექსპონენციალური სიგნალის სპექტრალური სიმკვრივე უდრის ნოლს ყველგან, გარდა $w = w_0$ წერტილისა, რომელშიც მას გააჩნია d - თავისებურება.
2. ამ სიგნალის სპექტრი არასიმეტრიულია $w = 0$ წერტილის მიმართ და კონცენტრირებულია ან დადებით, ან უარყოფით სიხშირეებზე.



ჰარმონული სიგნალის სპექტრალური სიმკვრივე. დავუშვათ $s(t) = \cos W_0 t$. ეილერის ფორმულის მიხედვით

$$s(t) = (e^{jW_0 t} + e^{-jW_0 t}) / 2$$

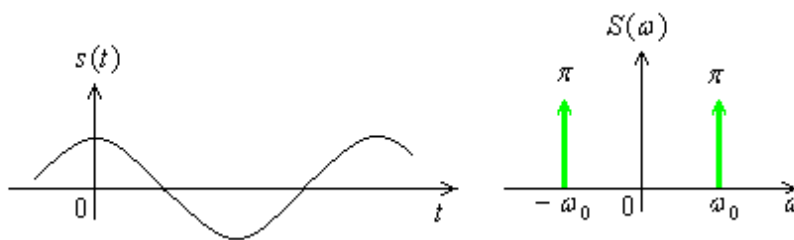
ზემოთმოყვანილი კომპლექსური ექსპონენციალური სიგნალის სპექტრის დახმარებით და ფურიეს გარდაქმნის წრფიულობის გათვალისწინებით პირდაპირ შეგვიძლია ჩავწეროთ კოსინუსოიდალური სიგნალის სპექტრის სიმკვრივის გამოსახულება

$$\cos w_0 t \leftrightarrow \pi [d(w - w_0) + d(w + w_0)] \quad (2.46)$$

ასევე მარტივად შეიძლება ვნახოთ, რომ სინუსოიდალური სიგნალისთვის მართებულია გამოსახულება

$$\sin w_0 t \leftrightarrow -j\pi [d(w - w_0) + d(w + w_0)] \quad (2.47)$$

აღსანიშნავია, რომ გამოსახულება (2.46) წარმოადგენს სიხშირის ლუწ ფუნქციას, ხოლო (2.47) სიხშირის კენტ ფუნქციას.

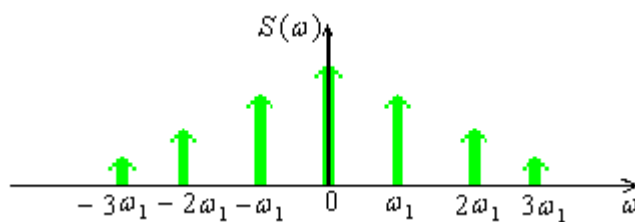


ნებისმიერი პერიოდული სიგნალის სპექტრალური სიმკვრივე. ზემოთ პერიოდული სიგნალები ჩვენ განვიხილეთ ფურიეს მწკრივების თეორიის მეთოდებით. ახლა ჩვენ შეგვიძლია გავაფართოვოდ წარმოადგენა მათ სპექტრალურ სიმკვრივის თვისებებზე, თუ პერიოდულ სიგნალებს ავღწერთ ფურიეს გარდაქმნის დახმარებით.

დავუშვათ $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}$ პერიოდული სიგნალია, წარმოდგენილი ფურიეს მწკრივით კომპლექსურ ფორმაში. (2.45) საფუძველზე ფურიეს გარდაქმნის წრფიულობის გათვალისწინებით მარტივად ვიღებთ ამ სიგნალის სპექტრალური სიმკვრივის გამოსახულებას:

$$S(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n d(\omega - n\omega_1) \quad (2.48)$$

სპექტრალური სიმკვრივის გრაფიკი კონფიგურაციით იმეორებს პერიოდული სიგნალის ჩვეულებრივ სპექტრალურ დიაგრამას. გრაფიკი წარმოქმნილია d – იმპულსებით სიხშირულ სივრცეში, რომელნიც მდებარეობენ წერტილებში $\pm n\omega_1$ კოორდინატებით.



ჩართვის სიგნალის სპექტრალური სიმკვრივე. გამოვთვალოთ ჩართვის სიგნალის $s(t)$ – ს სპექტრალური სიმკვრივე, რომელსაც სიმარტივისთვის გავნსაზღვრავთ ყველა წერტილში გარდა წერტილისა $t = 0$:

$$s(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

უპირველესყოვლისა ავლნიშნოთ, რომ ჩართვის ფუნქცია მიიღება ექსპონენციალური ვიდეოიმპულსიდან ზღვრული გადასვლით:

$$s(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ \lim_{a \rightarrow 0} \exp(-a \cdot t), t > 0 \end{cases}$$

ამიტომ ჩართვის ფუნქციის სპექტრალური სიმკვრივე შეიძლება მივიღოთ ექსპონენციალური ფუნქციის სპექტრალური სიმკვრივიდან თუ განვახორციელებთ $a \rightarrow 0$ ზღვრულ გადასვლას

$$s(t) \leftrightarrow \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a + j\omega}$$

პირდაპირი გადასვლა ზღვარზე, რომლის შესაბამისადაც $s(t) \leftrightarrow \frac{1}{(j\omega)}$ მართებულია ყველა სიხშირეზე გარდა $\omega = 0$, სადაც საჭიროა უფრო ყურადღებიანი განხილვა.

უპირველესყოვლისა ექსპონენციალური ფუნქციის სპექტრალური სიმკვრივიდან გამოვყოთ ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები

$$\frac{1}{a + j\omega} = \frac{a}{a^2 + \omega^2} - \frac{j\omega}{a^2 + \omega^2}$$

შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{a^2 + \omega^2} = p\delta(\omega)$$

მართლაც, ამ წილადის ზღვრული მნიშვნელობა ყველა $\omega \neq 0$ იქცევა ნოლად და ამავე დროს

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a \cdot d\omega}{a^2 + \omega^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(\omega/a)}{1 + (\omega/a)^2} = \pi$$

a – ს სიდიდისაგან დამოუკიდებლად, საიდანაც გამომდინარეობს გაკეთებული დასკვნა.

ამგვარად მიღებულია ერთმნიშვნელოვანი შესაბამისობა ჩართვის ფუნქციის და მის სპექტრალურ სიმკვრივეს შორის:

$$s(t) \leftrightarrow p\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (2.49)$$

d – თავისებურება $\omega = 0$ წერტილში მიაჩნდება იმაზე, რომ ჩართვის ფუნქციას გააჩნია მუდმივი მდგენელი, რომელიც $1/2$ -ის ტოლია.

რადიოიმპულსის სპექტრალური სიმკვრივე. როგორც ცნობილია, რადიოიმპულსი არის ვიდეოიმპულსის და არაიტეგრირებადი ჰარმონიული რხევის ნამრავლი $s(t) = v(t) \cos(\omega_0 t + j \phi_0)$.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ რადიოიმპულსის სპექტრალური სიმკვრივე, დავუშვათ რომ ცნობილია მისი მომვლეს სპექტრი $V(\omega)$. კოსინუსოიდალური სიგნალის სპექტრი ნებისმიერი საწყისი ფაზით მიიღება (2.46) -ის ელემენტარული განზოგადოების გზით:

$$\cos(\omega_0 t + j \phi_0) \leftrightarrow p [d(\omega - \omega_0) e^{j\phi_0} + d(\omega + \omega_0) e^{-j\phi_0}]$$

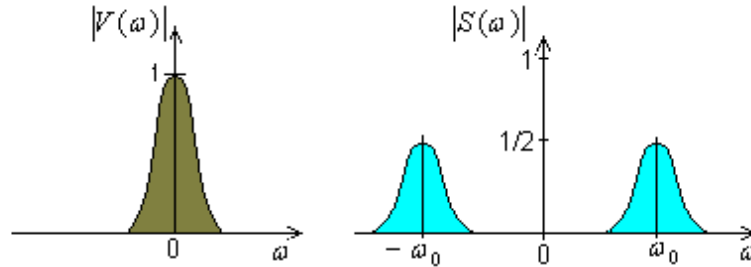
რადიოიმპულსის სპექტრი არის ნაკვეცი

$$S(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega - x) [d(x - \omega_0)e^{j\omega_0 x} + d(x + \omega_0)e^{-j\omega_0 x}] dx$$

გავითვალისწინებთ რა d – ფუნქციის მაფილტრებელ თვისებას, მივიღებთ მნიშვნელოვან შედეგს

$$S(\omega) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} V(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} V(\omega + \omega_0) \quad (2.50)$$

ქვემოთმოცემული ნახაზი გვიჩვენებს ვიდეოიმპულსის სპექტრის ტრანსფორმაციას მის მაღალსიხშირულ ჰარმონიულ სიგნალზე გამრავლების შედეგად.



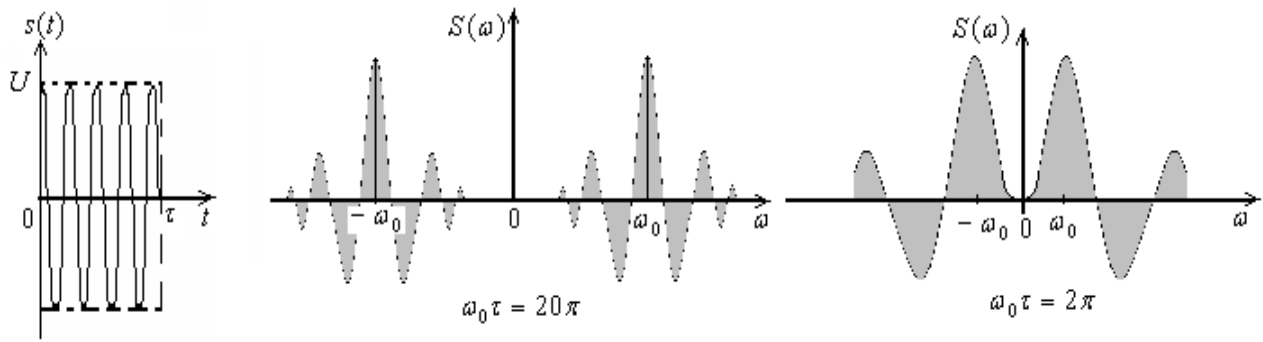
მაგალითი. ვიპოვოთ მართკუთხა რადიოიმპულსის სპექტრალური სიმკვრივე. ამოხსნა. სიმარტივისთვის საწყისი ფაზა ავიღოთ ნულის ტოლი და რადიოიმპულსის მათემატიკური მოდელი ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$s(t) = U[s(t) - s(t - t)] \cos \omega_0 t$$

ვიცით რა ვიდეოიმპულსის სპექტრი (2.20) ფორმულიდან, (2.50) -ის საფუძველზე შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$S(\omega) = \frac{Ut}{2} \left[\frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0)t}{2}}{\frac{(\omega - \omega_0)t}{2}} + \frac{\sin \frac{(\omega + \omega_0)t}{2}}{\frac{(\omega + \omega_0)t}{2}} \right] \quad (2.51)$$

ნახაზზე ნაჩვენებია მართკუთხა რადიოიმპულსი და მისი სპექტრალური სიმკვრივე. ნაანგარიშები (2.51) ფორმულის მიხედვით ორი შემთხვევისთვის: 1. მომვლებში ანუ ვიდეოიმპულსში ეტევა მაღალსიხშირული შემსვების 10 პერიოდი - $\omega_0 t = 20\pi$. 2. მომვლებში ანუ ვიდეოიმპულსში ეტევა მაღალსიხშირული შემსვების 1 პერიოდი - $\omega_0 t = 2\pi$. მეორე შემთხვევაში სპექტრის „ფოთლები“ არიან გადაფარვის ზღვარზე.



3.16 ლაპლასის გარდაქმნა

ფურიეს გარდაქმნასთან ერთად სიგნალების დამუშავებაში საკმაოდ ვრცლად გამოიყენება კიდევ ერთი ინტეგრალური გარდაქმნა – ლაპლასის გარდაქმნა.

კომპლექსური სიხშირის ცნება. სპექტრალური მეთოდები ემყარება იმაზე, რომ გამოსაკვლევი სიგნალი შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც ელემენტარული უსასრულო მდგენელთა ჯამი, სადაც ყოველი მათთაგანი დროში პერიოდულად იცვლება კანონით $\exp(j\omega t)$.

ამ პრინციპის ბუნებრივი განზოგადოება მდგომარეობს იმაში, რომ კომპლექსური ექსპონენციალური წარმოსახვით მაჩვენებლიანი სიგნალების მაგივრად შემოაქვთ ექსპონენციალური სიგნალები - $\exp(pt)$, სადაც p – კომპლექსური რიცხვია: $p = s + j\omega$ რომელსაც ეწოდება კომპლექსური სიხშირე.

ორი ასეთი კომპლექსური სიგნალისგან შეიძლება შევადგინოთ ნამდვილი სიგნალი, მაგალითად, წესით

$$s(t) = \frac{1}{2}(e^{pt} + e^{p^*t}) \quad (2.52)$$

სადაც $p^* = s - j\omega$ - კომპლექსურად შეუღლებული სიდიდეა.

მართლაც ამ დროს

$$s(t) = e^{st} \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = e^{st} \cos \omega t \quad (2.53)$$

კომპლექსური სიხშირის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილის შერჩევით შესაძლებელია მივიღოთ სხვადასხვა ნამდვილი სიგნალები. მაგალითად, თუ $s = 0, \omega \neq 0$ მივიღებთ ჩვეულებრივ ჰარმონიულ რხევებს $\cos \omega t$. თუ $\omega = 0, s \neq 0$, იმისა და მიხედვით s დადებითია თუ უარყოფითი, მივიღებთ ზრდად ან ქრობად რხევებს.

კომპლექსური სიხშირის ცნება ძალიან სასარგებლოა უპირველესყოვლისა იმიტომ, რომ საშუალებას იძლევა განზოგადოებული ფუნქციების გარეშე მივიღოთ სიგნალების სპექტრალური სიმკვრივე, რომელთა მათემატიკური მოდელებიც არაინტეგრირებადია.

ძირითადი შეფარდებები. დავუშვათ $f(t)$ - განსაზღვრულია $t \geq 0$ –თვის. ამ სიგნალის ლაპლასის გარდაქმნაა კომპლექსური ცვლადის p –ს ფუნქცია, რომელიც განისაზღვრება ინტერვალით

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (2.54)$$

სიგნალ $f(t)$ -ს ეწოდება ორიგინალი, ხოლო $F(p)$ -ს მისი გამოსახულებაა ლაპლასის მიხედვით. (2.54) ინტეგრალის არსებობის აუცილებელი პირობაა $|f(t)| \leq A \exp(at)$, სადაც a, A დადებითი რიცხვებია.

ცვლადი p ძირითად ფორმულაში (2.54) შეიძლება გავაიგივოთ კომპლექსურ სიხშირესთან $p = s + j\omega$. მართლაც, წარმოსახვით კომპლექსურ სიხშირისას, როცა $s = 0$, ფორმულა (2.54) გარდაქმნება (2.16) -ში, რომელიც განსაზღვრავს სიგნალის ფურიე-გარდაქმნას, რომელიც ნოლის ტოლია $t < 0$ -თვის. ამგვარად ლაპლასის გარდაქმნა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ფურიეს გარდაქმნის განზოგადოება კომპლექსურ სიხშირეთა შემთხვევაში.

ისევე, როგორც ფურიეს გარდაქმნის შემთხვევაში, თუ ვიცით გამოსახულება, შეიძლება აღვადგინოთ ორიგინალი. ამისათვის ფურიეს უკუგარდაქმნის ფორმულაში

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

უნდა მოვახდინოთ ანალიტიკური გაგრძელება, გადავალთ რა წარმოსახვითი ცვლადიდან კომპლექსურ არგუმენტზე $s + j\omega$. კომპლექსური სიხშირის სიბრტყეზე ინტეგრირება ხორციელდება ვერტიკალურ ღერძზე, რომელიც ძვეს აბსოლუტური კრებადობის აბსცისის ღერძის მარჯვნივ. რადგან როდესაც დიფერენციალი $s = const$, ლაპლასის უკუგარდაქმნის ფორმულა მიიღებს სახეს

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)e^{pt} dp \quad (2.55)$$

კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის თეორიაში დამტკიცებულია, რომ ლაპლასის გამოსახულებას გააჩნია „კარგი თვისებები“ სიგლუვის თვალსაზრისით: ასეთი გამოსახულებები კომპლექსური p სიბრტყის ყველა წერტილში არიან ანალიტიკური ფუნქციები გარდა სასრული რაოდენობის წერტილებისა, რომელთაც განსაკუთრებული წერტილები ეწოდება. განსაკუთრებული წერტილები, როგორც წესი-პოლუსები, ერთჯერადი ან მრავალჯერადია. ამიტომ (2.55)-ის სახის ინტეგრალების გამოსაანგარიშებლად შეგვიძლია გამოვიყენოთ მოქნილი ნაშთების თეორია. როგორც თეორიულ კვლევებში, ისე საინჟინრო პრაქტიკაში საკმაოდ პოპულარულია ლაპლასის გარდაქმნის ცხრილები.

დასასრულ განვიხილოთ ლაპლასის გარდაქმნის გამოანგარიშების რამდენიმე მარტივი მაგალითი.

მაგალითი. ვიპოვოთ განზოგადოებული ექსპონენციალური იმპულსის გამოსახულება.

დავუშვათ $f(t) = \exp(p_0 t)S(t)$, სადაც $p_0 = s_0 + j\omega_0$ - ფიქსირებული კომპლექსური რიცხვია.

S - ფუნქციის არსებობა განაპირობებს ტოლობას, როდესაც $f(t) = 0$. ვისარგებლოთ (2.54) ფორმულით

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-(p-p_0)t} dt = -\frac{e^{-(p-p_0)t}}{p-p_0} \Big|_{t=0}^{t=\infty}$$

თუ $\operatorname{Re} p > s_0$, მნიშვნელი გახდება ნოლის ტოლი ზედა ზღვრის ჩასმისას. ამიტომ მივიღებთ შესაბამისობას

$$e^{p_0 t} S(t) \leftrightarrow \frac{1}{p-p_0} \quad (2.56)$$

როგორც (2.56) კერძო შემთხვევა, შეგვიძლია ვიპოვოთ ნამდვილი ექსპონენციალური ფუნქციის გამოსახულება

$$e^{-a \cdot t} S(t) \leftrightarrow \frac{1}{p+a} \quad (2.57)$$

წარმოსახვითი ექსპონენციალური ფუნქციის გამოსახულება იქნება

$$e^{j\omega_0 t} S(t) \leftrightarrow \frac{1}{p-j\omega_0} \quad (2.58)$$

თუ (2.57)-ში დავუშვებთ $a = 0$, ვიპოვოთ ხვევსაიდის ფუნქციის გამოსახულებას

$$S(t) \leftrightarrow \frac{1}{p} \quad (2.59)$$

საბოლოოდ ავღნიშნავთ, რომ ლაპლასის გარდაქმნის ძირითადი თვისებები ფურიეს გარდაქმნის მსგავსია.

IV. სიგნალების ენერგეტიკული სპექტრი. კორელაციური ანალიზის პრინციპები

სიგნალების წარმოდგენა მათი სპექტრალური სიმკვრივის მეშვეობით საშუალებას იძლევა გავამარტივოთ სიგნალების ენერჯიის გამოანგარიშება.

ცნობილია, რომ ორი ნამდვილი სიგნალის $u(t)$ და $v(t)$ სკალარული ნამრავლი

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t) dt$$

ამ სიგნალების ურთიერთენერჯიის პროპორციულია. თუ ეს სიგნალები ემთხვევა ერთმანეთს, სკალარული ნამრავლი ენერჯიის ტოლი ხდება

$$E_u = (u, u) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt$$

$u(t)$ და $v(t)$ სიგნალების სკალარული ნამრავლი შეიძლება გამოვსახოთ მათი სპექტრალური სიმკვრივით რელეის ფორმულის დახმარებით

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(w) V^*(w) dw$$

რადგან ნამდვილი სიგნალების სკალარული ნამრავლი ნამდვილი რიცხვია.

ნამდვილი $u(t)$ და $v(t)$ სიგნალების ურთიერთენერგეტიკულ სპექტრს წარმოადგენს ფუნქცია

$$W_{uv}(w) = U(w) V^*(w)$$

რომელშიც

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{uv}(w) dw$$

ამავე დროს

$$W_{vu}(w) = W_{uv}^*(w)$$

თუ ჩავსვავთ $u(t)$ და $v(t)$ სიგნალების სპექტრალურ სიმკვრივებს ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების ჯამის სახით:

$$U(w) = A_u(w) + jB_u(w) \dots V(w) = A_v(w) + jB_v(w)$$

დავრწმუნდებით, რომ ურთიერთენერგეტიკული სპექტრი W_{uv} – არის ფუნქცია, რომელიც ზოგად შემთხვევაში კომპლექსურია

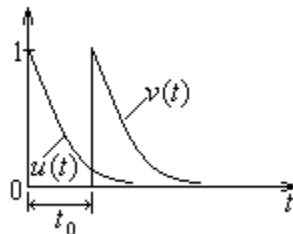
$$W_{uv}(w) = A_u A_v + B_u B_v + j(B_u A_v - A_u B_v) = \text{Re} W_{uv}(w) + \text{Im} W_{uv}(w)$$

ნათლად სჩანს, რომ $\text{Re} W_{uv}(w)$ – ლუწია, ხოლო $\text{Im} W_{uv}(w)$ – კენტი სიხშირის ფუნქცია. ურთიერთენერგეტიკულ სპექტრის ინტეგრალში წილი შეაქვს მხოლოდ ნამდვილ ნაწილს. ამიტომ

$$(u, v) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re} W_{uv}(w) dw$$

ეს ფორმულა იძლევა საშუალებას გავანალიზოთ სიგნალების ურთიერთკავშირის „ნაზი სტრუქტურა“ .

მაგალითი. განვიხილოთ ერთნაირი ფორმის ორი ინტერვალით ურთიერთმიმდევარი ექსპონენციალური ვიდეოიმპულსის ურთიერთენერგეტიკული სპექტრი.



დავუშვათ, რომ ორივე იმპულსს აქვს ერთეულოვანი ამპლიტუდა. ჩავწეროთ მათი სპექტრალური სიმკვრივების გამოსახულებები

$$u(t) = e^{-at} \mathcal{S}(t) \leftrightarrow U(w) = \frac{1}{a + jw}$$

$$v(t) = e^{-a(t-t_0)} \mathcal{S}(t-t_0) \leftrightarrow V(w) = \frac{e^{-jw t_0}}{a + jw}$$

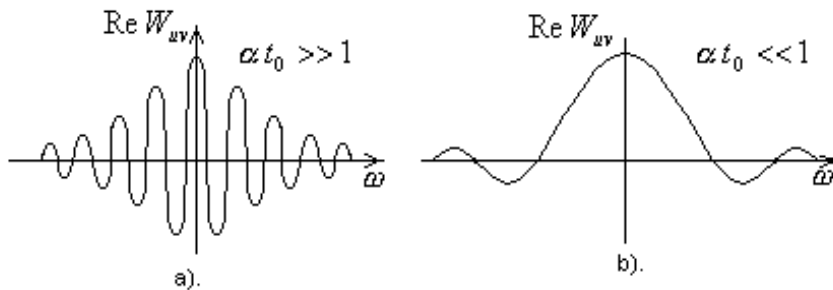
აქედან ვპოვულობთ ურთიერთენერგეტიკულ სპექტრს

$$W_{uv}(w) = e^{jw t_0} / (a^2 + w^2)$$

რომელსაც გააჩნია ნამდვილი ნაწილი

$$\text{Re } W_{uv}(w) = \cos w t_0 / (a^2 + w^2)$$

თუ დავაფიქსირებთ a პარამეტრს, რომელიც განსაზღვრავს სიგნალის ფორმას, მაშინ ურთიერთენერგეტიკულ სპექტრის სიხშირული მახასიათებლები მთლიანად არის დამოკიდებული დროით წანაცვლებაზე სიგნალებს შორის.



ნახ.23

ნახ.23 მოყვანილია ფუნქცია $\text{Re } W_{uv}(w)$ –ს ორი დამახასიათებელი გრაფიკი. ძირითად ინტერესს წარმოადგენს შემთხვევა, როდესაც იმპულსები ფარავენ ერთმანეთს ($a.t_0 \ll 1$). ფორმულა ცხადჰყოფს, რომ ურთიერთენერგეტიკულ სპექტრს გააჩნია გამოკვეთილი დაბალსიხშირული მახასიათებელი. შესაბამისად, იმისათვის რომ შევამციროთ ასეთი სიგნალების სკალარული ნამრავლი, ე.ი. გავხადოთ ისინი კარგად განსხვავებადი, საჭიროა გამოვიყენოთ მაღალსიხშირული ფილტრი. იგი დაახშობს ყველა იმ სიხშირეს, რომელიც ზღვრულ სიხშირეზე ნაკლებია.

4.1 სიგნალის ენერგეტიკული სპექტრი

სიგნალის ენერგიის სპექტრს ადვილად მივიღებთ რელეის განზოგადოებული ფორმულიდან, თუ მასში სიგნალებს $u(t)$ და $v(t)$ ჩავთვლით ერთნაირად. მაშინ ზემოთ მოყვანილი ენერგიის სპექტრალური სიმკვრივის ფორმულა მიიღებს სახეს

$$W_u(w) = U(w)U^*(w) = |U(w)|^2$$

სიდიდე $W_u(w)$ –ს ეწოდება სიგნალ $u(t)$ –ს ენერგიის სპექტრალური სიმკვრივე ან, უფრო მოკლედ, მისი ენერგეტიკული სპექტრი. ფორმულა ჩაიწერება ასე

$$E_u = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_u(\omega) d\omega$$

ეს ფორმულა ფიზიკის სხვადასხვა განხრებში ცნობილია როგორც რელეის ფორმულა და გამოსახავს შემდეგს: ნებისმიერი სიგნალის ენერგია არის სიხშირული ღერძის სხვადასხვა ინტერვალების შენატანების აჯამვის შედეგი. დადებითი სიხშირეების ყოველ მცირე ინტერვალს $\Delta\omega$ -ს საერთო ენერგიაში შეაქვს წვლილი

$$\Delta E_u = \frac{1}{\rho} W_u(\omega') \Delta\omega$$

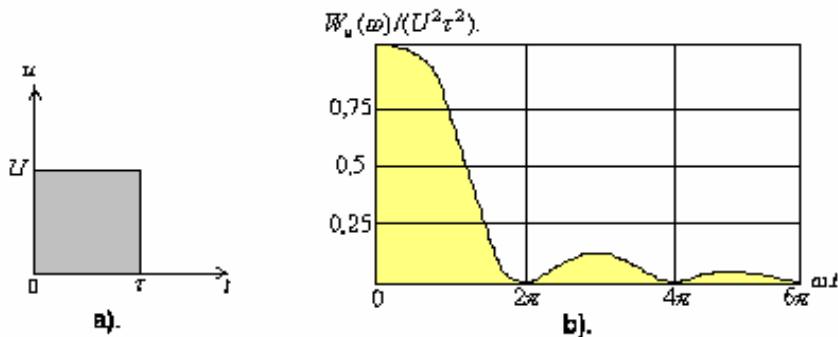
სადაც ω' -ამ ინტერვალის შიდა წერტილია. უნდა გავითვალისწინოთ, რომ სიგნალის შესწავლისას მისი ენერგეტიკული სპექტრით ჩვენ უთოოდ ვკარგავთ ინფორმაციას, რომელიც ჩადებულია ფაზურ სპექტრში. მაგრამ საინჟინრო შეფასებებში ენერგეტიკული სპექტრის ცნება ძალიან სასარგებლოა, მით უფრო ამა თუ იმ სიგნალის სპექტრის სიგანის დადგენის შემთხვევაში.

მაგალითი. შევისწავლოთ მართკუთხა ვიდეოიმპულსის ენერგეტიკული სპექტრი.

შედეგის მისაღებად ამ იმპულსის სპექტრალური სიმკვრივე (იხილეთ ზემოთ) ავიყვანოთ კვადრატში

$$W_u(\omega) = U^2 t^2 \frac{\sin^2(\omega t / 2)}{(\omega t / 2)^2}$$

შესაბამისი გრაფიკი ნაჩვენებია ნახ.24.



ნახ.24.

ნახაზზე ნათლად სჩანს, რომ მოცემული სიგნალის ენერგეტიკულ სპექტრს დაბალ სიხშირეებზე უდიდესი სიდიდე გააჩნია. სიხშირის ზრდასთან ერთად შესაბამის სპექტრალური მდგენელების წვლილს აქვს არამონოტონური, რხევადი ხასიათი, მაგრამ ზოგადი ტენდენცია – ენერგეტიკული სპექტრის კლება კვადრატის უკუპროპორციულია:

$$W_u(\omega) = O(1/\omega^2), \omega \rightarrow \infty$$

(და არა სიხშირის უკუპროპორციული, როგორც განხილული სიგნალის ჩვეულებრივი სპექტრალური სიმკვრივის).

მიღებული ფორმულა იძლევა საშუალებას პირდაპირი გამოთვლებით შევამოწმოთ რელეის ფორმულა. უპირველესყოვლისა დროით არეში ვპოვულობთ ამ ვიდეოიმპულსის ენერგია

$$E_u = U^2 t$$

იმისათვის, რომ გავნსაზღვროთ სიგნალის ენერგია სიხშირულ სივრცეში, საჭიროა გამოვიანგარიშოთ ინტეგრალი

$$E_u = \frac{U^2 t^2}{p} \int_0^\infty \frac{\sin^2(\omega t / 2)}{(\omega t / 2)^2} d\omega$$

თუ მოვახდენთ შეცვლას ($x = \omega t / 2$) მივიღებთ ენერგიის ფორმულას.

4.2 ენერგის განაწილება მართკუთხა ვიდეოიმპულსის სპექტრში

საინტერესოა და მთელი რიგი პრაქტიკული ამოცანისთვის მნიშვნელოვანია, თუ საერთო ენერგიის რა წილი მოდის სპექტრალური დიაგრამის პირველ, მეორე, მესამე და ა.შ. მონაკვეთებში. ავლნიშნოთ მართკუთხა ვიდეოიმპულსის ენერგიის წილი, რომელიც მოდის k – ურ მონაკვეთზე $E_{(k)}$ – თი.

რელეის ფორმულის მიხედვით

$$E_{(k)} = \frac{2}{p} U^2 t \int_0^{k\pi} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

ეს ინტეგრალი გამოიანგარიშება ანალიზურად და აგრეთვე შეიძლება ვიპოვოთ რიცხვითი მეთოდით. ქვემოთამოყვანილ ცხრილში ამოყვანილია მონაკვეთის ნომრისგან დამკვიდებულების ენერგიის

ფარდობითი წილის დამოკიდებულების გაანგარიშებების შედეგები

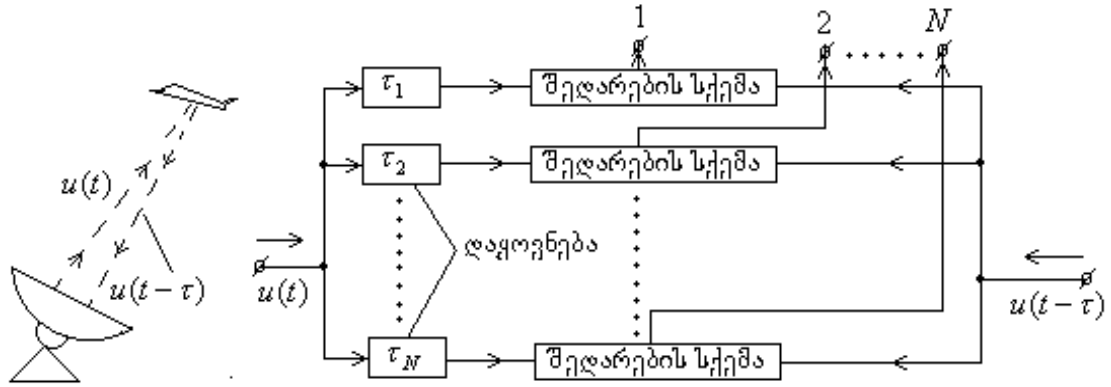
k	1	2	3
$E_{(k)} / E_u$	0 ⁹⁰²	0 ⁹⁵	0 ⁹⁶⁷

ამრიგად, თუ მართკუთხა ვიდეოიმპულსს მივაწვდით დაბალსიხშირულ იდეალურ ფილტრზე, რომელიც თანაბრად და შესუსტების გარეშე ატარებს სიხშირეებს 0-დან $2\pi / t$, გამოსასვლელზე მივიღებთ შესასვლელი ენერგიის 90,2%. თუ ფილტრის გატარების ზოლს ორჯერ გავაფართოვებთ, სასარგებლო სიგნალი გაიზრდება 4,8%-ით.

4.3 სიგნალების კორელაციური ანალიზი. დროში წანაცვლებული სიგნალების შედარება

სიმარტივისთვის განვიხილოთ იმპულსური ლოკატორის მუშაობის იდეა, რომელიც გამოიყენება მიზნამდე მანძილის გასაზომად. აქ ინფორმაცია გაზომვის ობიექტზე ჩადებულია t -სიდიდეში, დაყოვნებაში მაზონდირებელ $u(t)$ და მიღებულ $u(t-t)$ სიგნალებს შორის. მაზონდირებელი და მიღებული სიგნალების ფორმა ერთნაირია ნებისმიერ დაყოვნების დროს.

რადიოლოკაციური მოწყობილობის შესაძლო სტრუქტურული სქემა ნაჩვენებია ნახ.25.



ნახ.25.

სისტემა შედგება ელემენტების ნაკრებისგან, რომლებიც ანხორციელებენ გამოსხივებადი „ეტალონური“ სიგნალის დაყოვნებას ფიქსირებული დროის მონაკვეთით t_1, t_2, \dots, t_N . დაყოვნებული სიგნალი დაყოვნებულთან ერთად მიეწოდება შედარების მოწყობილობაში, რომელნიც მოქმედებენ შემდეგი პრინციპით: გამოსასვლელზე არის სიგნალი, თუ შესასვლელები ერთმანეთის „კოპიები“ არიან. ვიცით რა არხის ნომერი, შეგვიძლია გავზომოთ დაყოვნება და, შესაბამისად, მანძილი მიზნამდე.

გადავიდეთ დაყენებული ამოცანის ზუსტ მათემატიკურ ფორმულირებაზე და ვნახავთ, რომ ეს საკითხები პირდაპირ არის დაკავშირებული სიგნალების ენერგეტიკული სპექტრის თეორიასთან.

4.4 სიგნალების ავტოკორელაციური ფუნქცია

იმისათვის, რომ რაოდენობრივად გავნსაზღვროთ სიგნალი $u(t)$ -ს და მისი დროში წანაცვლებული კოპიის $u(t-t)$ -ს განსხვავების ხარისხი, შემოაქვთ სიგნალი $u(t)$ -ს ავტოკორელაციური ფუნქციის ცნება. იგი უდრის სიგნალის და მისი კოპიის ნამრავლს

$$B_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)u(t-t)dt$$

მომავალში ვგულისხმობთ, რომ გამოსაკვლევ სიგნალს აქვს ლოკალიზებული ხასიათი, ასე რომ ეს ინტეგრალი არსებობს.

ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $t = 0$, ავტოკორელაციური ფუნქცია სიგნალის ენერგიის ტოლი ხდება

$$B_u(t) = E_u$$

ავტოკორელაციური ფუნქციის უმარტივესი თვისებაა მისი ლუწობა

$$B_u(t) = B_u(-t)$$

მართლაც თუ საწყის ინტეგრალში შევცვლით ცვლადებს $x = t-t$, მაშინ

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)u(t-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(x+t)u(x)dx$$

ავტოკორელაციური ფუნქციის უმნიშვნელოვანესი თვისება მდგომარეობს შემდეგში: დროითი წანაცვლების t -ს ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის ავტოკორელაციური ფუნქციის მოდული არ აჭარბებს სიგნალის ენერგიას

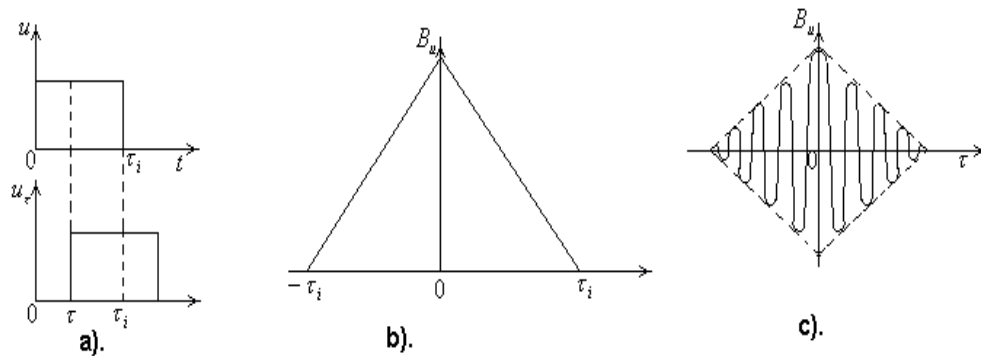
$$|B_u(t)| \leq B_u(0) = E_u$$

ეს ფაქტი პირდაპირ გამომდინარეობს კოში-ბუნიაკოვსკის თეორემიდან

$$|(u, u_t)| \leq \|u\| * \|u_t\| = E_u$$

ამგვარად, ავტოკორელაციური ფუნქცია წარმოადგენს სიმეტრიულ მრუდს ცენტრალური მაქსიმუმით და ყოველთვის დადებითია. ამავე დროს სიგნალის ფორმისგან დამოკიდებულებით ავტოკორელაციურ ფუნქციას შეიძლება **ჰკონდეს** როგორც მონოტონურად კლებადი, ასევე რხევითი ხასიათი.

მაგალითი. ვიპოვოთ მართკუთხა ვიდეოიმპულსის ავტოკორელაციური ფუნქცია.



ნახ.26.

ნახაზზე მოყვანილია მართკუთხა ვიდეოიმპულსი u ამპლიტუდით და t_i ხანგრძლივობით. აქვე წარმოდგენილია მისი **ასლი** t დროით დაყოფნებული. ინტეგრალი ამ შემთხვევაში გამოიანგარიშება ელემენტარულად, გრაფიკული აგების საფუძველზე. მართლაც, ნამრავლი $u(t) * u(t-t)$ ნულისაგან განსხვავდება მხოლოდ დროის იმ ინტერვალებში, სადაც არის სიგნალების ზედდება. ნახ.26-დან სჩანს, რომ ეს დროის ინტერვალი ტოლია $t_i - |t|$, თუ წანაცვლება არ აღემატება იმპულსის ხანგრძლივობას. ამგვარად, განხილული სიგნალისთვის

$$B_u(t) = \begin{cases} U^2 t_i^2 (1 - \frac{|t|}{t_i}), & |t| \leq t_i \\ 0, & |t| > t_i \end{cases}$$

ასეთი ფუნქციის გრაფიკია სამკუდხედი, რომელიც ნაჩვენებია ნახ.26.გ-ზე. მაგალითი. ვიპოვოთ მართკუთხა რადიოიმპულსის ავტოკორელაციური ფუნქცია.

განვიხილოთ შემდეგი სახის რადიოიმპულსი

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < t_i / 2 \\ U \cos \omega_0 t, & -t_i / 2 \leq t \leq t_i / 2 \\ 0, & t > t_i / 2 \end{cases}$$

რადგან წინდაწინ ვიცით, რომ ფუნქცია ლუწია, ვიანგარიშოთ ინტეგრალი $0 \leq t \leq t_i$ ზღვრებში. ამ დროს

$$B_u(t) = U^2 \int_{-t_i/2+t}^{t_i/2} \cos \omega_0 t \cos \omega_0 (t-t) dt = \frac{U^2}{2} \cos \omega_0 t (t_i - t) + \frac{U^2}{2} \int_{-t_i/2+t}^{t_i/2} \cos 2\omega_0 (t - \frac{t}{2}) dt$$

საიდანაც მარტივად ვიღებთ

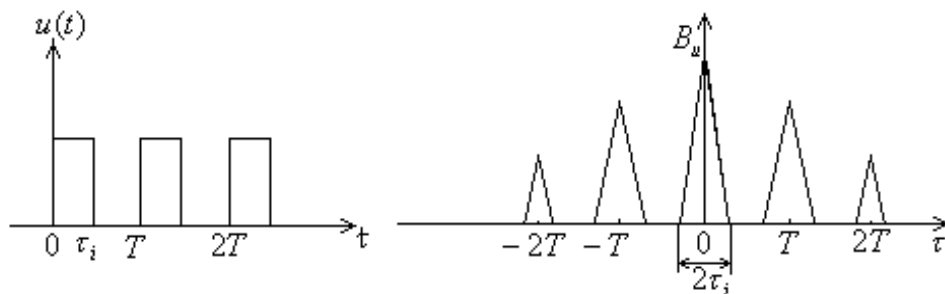
$$B_u(t) = \frac{U^2}{2} (t_i - |t|) \left[\cos \omega_0 t + \frac{\sin 2\omega_0 (t_i - |t|)}{2\omega_0 (t_i - |t|)} \right]$$

ცხადია, რომ როდესაც $t = 0$, $B_u(0)$ – ის სიდიდე ხდება ამ იმპულსის ენერჯის ტოლი.

მაგალიტი. ვიპოვოთ მართკუთხა ვიდეოიმპულსების ავტოკორელაციური ფუნქცია.

რადიოლოკაციაში ხშირად გამოიყენება სიგნალები, რომელნიც წარმოადგენენ ერმანეთის მიმდევარ დროის ერთნაირი ინტერვალით ფორმით ერთნაირ იმპულსების „პაჩკებს“. ასეთი „პაჩკების“ აღმოსაჩენად და მისი პარამეტრების გასაზომად გამოიყენება მოწყობილობები, რომელნიც აპარატურულად ახდენენ ავტოკორელაციური ფუნქციის გამოთვლის ალგორითმის რეალიზაციას.

ნახ.26 ნაჩვენებია „პაჩკა“ სამი იმპულსისაგან და მისი ავტოკორელაციური ფუნქცია.



ნახ.26.

კარგად სჩანს, რომ როდესაც ავტოკორელაციური ფუნქცია აღწევს თავის მაქსიმუმს. თუ დაყოვნება მიმდევრობის პერიოდის ჯერადაა, თავს იჩენს ავტოკორელაციური ფუნქციის გვერდითი „ფოთლები“, რომელნიც ძირითადის თანაზომადია. ეს მეტყველებს ამ სიგნალის ავტოკორელაციური სტრუქტურის დაუხვეწელობაზე.

4.5 დროში შეუზღუდავი სიგნალის ავტოკორელაციური ფუნქცია

ამ საკითხის გამოსარკვევად საჭიროა შევცვალოთ მიდგომა სიგნალების კორელაციური თვისებების შესწავლის მიმართ.

ჩავთვალოთ, რომ ასეთი მიმდევრობა მიიღება გარკვეული დროში ლოკალიზებული, ე.ი. იმპულსური, სიგნალისგან როდესაც მისი ხანგრძლივობა $t_i \rightarrow \infty$. იმისათვის, რომ ავიცილოთ მიღებული შედეგების განუსაზღვრელობა, გავნსაზღვროთ ახალი ავტოკორელაციური ფუნქცია, როგორც სიგნალის და მისი კოპიის ნამრავლის საშუალო

$$B_u(t) = \lim_{t_i \rightarrow \infty} \frac{1}{t_i} \int_{-t_i/2}^{t_i/2} u(t)u(t-t)dt$$

ასეთი მიდგომისას ავტოკორელაციური ფუნქცია გახდება ამ ორი სიგნალის ურთიერთსიმძლავრის საშუალოს ტოლი.

მაგალითად, თუ გვინდა ვიპოვოთ დროში შეუზღუდავი კოსინუსოიდის ($u(t) = U \cos \omega_0 t, -\infty < t < \infty$) ავტოკორელაციური ფუნქცია, ვისარგებლოთ მართკუთხა რადიომპულსის ფორმულით. თუ აქ გავითვალისწინებთ $t_i \rightarrow \infty$, მივიღებთ

$$B_u(t) = \frac{U^2}{2} \cos \omega_0 t$$

ეს ავტოკორელაციური ფუნქცია თვითონ არის პერიოდული. მისი მნიშვნელობა უდრის $U^2/2$ როდესაც $t=0$. ეს არის სიგნალის საშუალო სიმძლავრე, რომელიც გამოიყოფა 1 ომიან დატვირთვაზე.

4.6 კავშირი სიგნალის ენერგეტიკულ სპექტრს და მის ავტოკორელაციურ ფუნქციას შორის

მართლაც, ავტოკორელაციური ფუნქციის განმარტებიდან და მისი ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ იგი არის სკალარული ნამრავლი: $B_u(t) = (u, u_t)$. აქ სიმბოლოთი u_t აღნიშნულია დროში წანაცვლებული სიგნალის კოპია $u(t-t)$.

თუ გამოვიყენებთ რელეის განზოგადოებულ ფორმულას, შეგვიძლია ჩავწეროთ ტოლობა

$$(u, u_t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega)U_t^*(\omega)d\omega$$

დროში წანაცვლებული სიგნალის სპექტრალური სიმკვრივე $U_t(\omega) = U(\omega) \exp(-j\omega t)$, საიდანაც $U_t^*(\omega) = U^*(\omega) \exp(-j\omega t)$ ამგვარად

$$B_u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(\omega)|^2 e^{j\omega t} d\omega$$

როგორც ცნობილია სპექტრალური სიმკვრივის მოდულის კვადრეტი წარმოადგენს სიგნალის ენერგეტიკულ სპექტრს. ამრიგად სიგნალის ავტოკორელაციური ფუნქცია და ენერგეტიკულ სპექტრი დაკავშირებულნი არიან ფურიეს გარდაქმნით:

$$B_u(t) \leftrightarrow |U(\omega)|^2 = W_u(\omega)$$

ცხადია, რომ ადგილი აქვს უკუშეფარდებას

$$|U(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} B_u(t) e^{-j\omega t} dt$$

მიღებული შედეგები პრინციპიალურად მნიშვნელოვანია ორი მიზეზით:

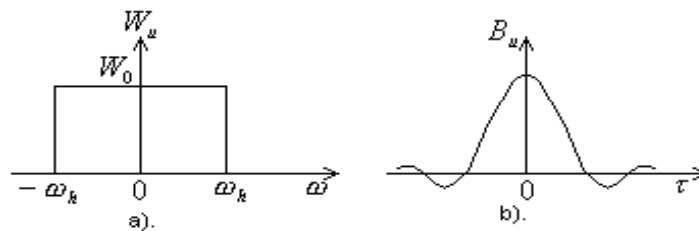
1. შესაძლებელი ხდება სიგნალის კორელაციური თვისებების შეფასება ენერგეტიკული სპექტრის დახმარებით.

2. მიღებული ფორმულები გვაჩვენებენ ენერგეტიკული სპექტრის ექსპერიმენტალური განსაზღვრის გზას. ხშირად უფრო ხელსაყრელია ჯერ ვიპოვოთ ავტოკორელაციური ფუნქცია და შემდეგ ფურიეს გარდაქმნის დახმარებით ვიპოვოთ სიგნალის ენერგეტიკული სპექტრი.

ასეთი ხერხი სულ უფრო ხშირად გამოიყენება კომპიუტერული ტექნიკის სწრაფმოქმედების ზრდასთან ერთად, მით უფრო დროის რეალურ მასშტაბში.

მაგალითი. ვიპოვოთ სიხშირით შეზღუდული და თანაბარი ენერგეტიკული სპექტრის მქონე სიგნალის ავტოკორელაციური ფუნქცია.

მოცემული სიგნალი $u(t)$ – ს ენერგეტიკულ სპექტრს აქვს სახე



ნახ.27.

$$W_u(w) = \begin{cases} 0, & w < -w_h \\ W_0, & -w_h \leq w \leq w_h \\ 0, & w > w_h \end{cases}$$

სადაც w_h – სპექტრის ზედა ზღვრული სიხშირეა. თუ გამოვიყენებთ ამ პარაგრაფში მოყვანილ ავტოკორელაციური ფუნქციის ფორმულას, მივიღებთ

$$B_u(t) = \frac{W_0}{2p} \int_{-w_h}^{w_h} e^{j\omega t} d\omega = \frac{W_0}{p} \int_{-w_h}^{w_h} \cos \omega t d\omega = \frac{W_0 w_h}{p} \frac{\sin w_h t}{w_h t}$$

როგორც ვხედავთ, ამ სიგნალის ავტოკორელაციურ ფუნქციას ფოთლისებური სახე აქვს.

ხშირად შემოაქვთ მოქნილი რიცხობრივი პარამეტრი - კორელაციის ინტერვალი - t_k , რომელიც წარმოადგენს ავტოკორელაციური ფუნქციის ძირითადი ფოთლის სიგანის შეფასებას. მოცემულ მაგალითში t_k დაკავშირებულია w_h – თან შეფარდებით $w_h t_k = p$. აქედან გამომდინარეობს, რომ კორელაციის ინტერვალი $t_k = p / w_h = 1 / (2f_h)$ მით უფრო ნაკლებია, რაც უფრო მაღალია სიგნალის სპექტრის ზედა ზღვრული სიხშირე.

4.7 სიგნალის ავტოკორელაციური ფუნქციის შეზღუდვები

კავშირი ავტოკორელაციურ ფუნქციას და ენერგეტიკულ სპექტრს შორის იძლევა საშუალებას დავადგინოთ საინტერესო და პირველი შეხედვით არაცხადი კრიტერიუმი

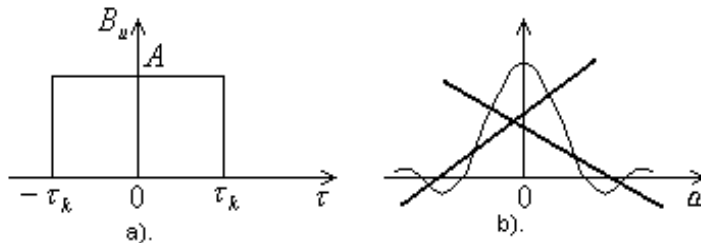
მოცემული ავტოკორელაციური თვისებების მქონე სიგნალის არსებობისა. საქმე იმაშია, რომ განსაზღვრებით ნებისმიერი სიგნალის ენერგეტიკული სპექტრი დადებითი უნდა იყოს. ეს პირობა არ სრულდება ნებისმიერი ავტოკორელაციური ფუნქციის არჩევის დროს. მაგალითად, თუ ავიღებთ

$$B_u(t) = \begin{cases} 0, t < t_k \\ A, -t_k \leq t \leq t_k \\ 0, t > t_k \end{cases}$$

და გამოვიანგარიშებთ შესაბამის ფურიეს გარდაქმნას, მაშინ

$$|U(\omega)|^2 = 2A \int_0^{t_k} \cos \omega t dt = 2A t_k \frac{\sin \omega t_k}{\omega t_k}$$

ეს ნიშანცვლადი ფუნქციაა და არ შეიძლება წარმოადგენდეს რომელიმე სიგნალის ენერგეტიკულ სპექტრს.



ნახ.28.

4.8 ორი სიგნალის ურთიერთკორელაციური ფუნქცია

ავტოკორელაციური ფუნქციის განსაზღვრების გათვალისწინებით ორი ნამდვილი სიგნალის $u(t)$ -ს და $v(t)$ -ს ურთიერთკორელაციური ფუნქცია იქნება შემდეგი სახის სკალარული ვექტორი

$$B_{uv}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t-t)dt$$

ამგვარი ინტეგრალური მახასიათებლის მიზანშეწონილობა გამომდინარეობს შემდეგი მაგალითიდან. დავუშვათ, რომ სიგნალები $u(t)$ და $v(t)$ საწყის მდგომარეობაში ორთოგონალურები არიან ისე, რომ

$$B_{uv}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)dt = 0$$

ამ სიგნალების სხვადასხვა მოწყობილობებში გავლის დროს შესაძლებელია, რომ სიგნალი $v(t)$ წანაცვლდება $u(t)$ -ს მიმართ t დროით.

ცხადია რომ ურთიერთკორელაციური ფუნქცია ხდება ორთოგონალურობის მდგომარეობის „საზომი“ სიგნალების დროში წანაცვლების დროს.

4.9 ურთიერთკორელაციური ფუნქციის ზოგიერთი თვისება

თუ ურთიერთკორელაციური ფუნქციის ფორმულაში შევცვლით ინტეგრირების ცვლადს $x = t - t$, ისე რომ $dt = dx$, ცხადია რომ

$$B_{uv}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x+t)v(x)dx$$

ამიტომ

$$B_{uv}(t) = B_{vu}(-t)$$

ავტოკორელაციური ფუნქციისაგან განსხვავებით ურთიერთკორელაციის ფუნქცია არ არის ლუწი არგუმენტ t -ს მიმართ: $B_{uv}(t) \neq B_{uv}(-t)$.

თუ სიგნალებს გააჩნიათ სასრული ენერგია, მათი ურთიერთკორელაციური ფუნქცია შეზღუდულია. ეს გამომდინარეობს კოში-ბუნიაკოვსკის თეორემიდან

$$|B_{uv}(t)| = |(u, u_t)| \leq \|u\| * \|v_t\|$$

საიდანაც

$$|B_{uv}(t)| \leq \|u\| * \|v\|$$

რადგანაც სიგნალის წანაცვლება დროში არ მოქმედებს ნორმის მნიშვნელობაზე.

საყურადღებოა, რომ როდესაც $t = 0$ ურთიერთკორელაციური ფუნქციის მნიშვნელობა არ უნდა აღწევდეს აუცილებლად მაქსიმუმს.

მაგალიტი. ვიპოვოთ ურთიერთკორელაციური ფუნქცია მართკუთხა $u(t)$ და სამკუთხა $v(t)$ სიგნალებისთვის, თუ მათი ამპლიტუდა A და დროის ხანგრძლივობა T ერთნაირია. საწყის მდგომარეობაში ისინი არსებობენ დროის ერთსადაიგივე მონაკვეთზე .

ამოხსნა. როდესაც $0 \leq t \leq T$ სიგნალები ჩაიწერება ასე:

$$u(t) = U, v(t) = Ut / T$$

თუ $t > 0$, ე.ი. სიგნალი $v(t)$ დაყოვნებულია $u(t)$ -ს მიმართ, მაშინ

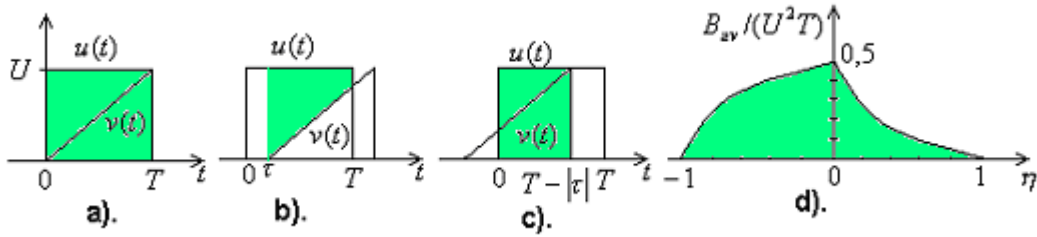
$$B_{uv}(t) = \frac{U^2}{T} \int_t^T (t-t)dt$$

თუ გავნსაზღვრავთ განუზომად სიდიდეს $h = t / T$ და ჩავატარებთ ელემენტარულ გარდაქმნებს, შედეგად მივიღებთ

$$B_{uv}(h) = (U^2 T / 2)(1 - 2h + h^2)$$

თუ $t < 0$ მაშინ $v(t)$ უსწრებს $u(t)$ -ს და გვექნება $B_{uv}(t) = \frac{U^2}{T} \int_0^{T-|t|} (t-|t|)dt$ საიდანაც

$B_{uv}(h) = (U^2 T / 2)(1 - h^2)$ ამ ფორმულებით მიღებული მრუდი ნაჩვენებია ნახ.31-ზე.



ნახ.31

4.10 კავშირი ურთიერთკორელაციური ფუნქციასა და ურთიერთსპექტრალურ სიმკვრივეს შორის

განსჯის მეთოდიკა არის ზუსტად იგივე, როგორც ერთეულოვანი სიგნალის ავტოკორელაციური ფუნქციის სპექტრალური გამოსახვისას.

თუ გამოვიყენებთ რელეის განზოგადოებულ ფორმულას

$$B_{uv}(t) = (u, u_t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) V_t^*(\omega) d\omega$$

რადგანაც დროში წანაცვლებული სიგნალის სპექტრი

$$V_t(\omega) = V(\omega) \exp(-j\omega t)$$

მივიღებთ

$$B_{uv}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) V^*(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $W_{uv}(\omega) = U(\omega) V^*(\omega)$ არის სიგნალების $u(t)$ და $v(t)$ -ს ურთიერთენერგეტიკული სპექტრი, განსაზღვრული უსასრულო ინტერვალზე $-\infty < \omega < \infty$, დავასკვნით: ორი სიგნალის ურთიერთკორელაციური ფუნქცია და ურთიერთენერგეტიკული სპექტრი დაკავშირებულნი არიან ფურიეს გარდაქმნის წყვილით.

V. კორელაციური ანალიზის გამოყენება სიგნალების დამუშავებაში

განვიხილოთ კორელაციური ფუნქციების და სპექტრალური სიმკვრივის გამოყენება პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტაში. ძირითადი ამოცანები, სადაც ეს მეთოდები გამოიყენება, არის: სიგნალის აღმოჩენა და გამოყოფა ხმაურის ფონზე. ფარული პერიოდულობების აღმოჩენა. ენერჯიის სპექტრალური განაწილება კორელაციური ფუნქციით ვინერ-ხინჩინის თეორემის საფუძველზე და პირიქით. წრფიული სისტემების დინამიური მახასიათებლების შესწავლა და ა.შ.

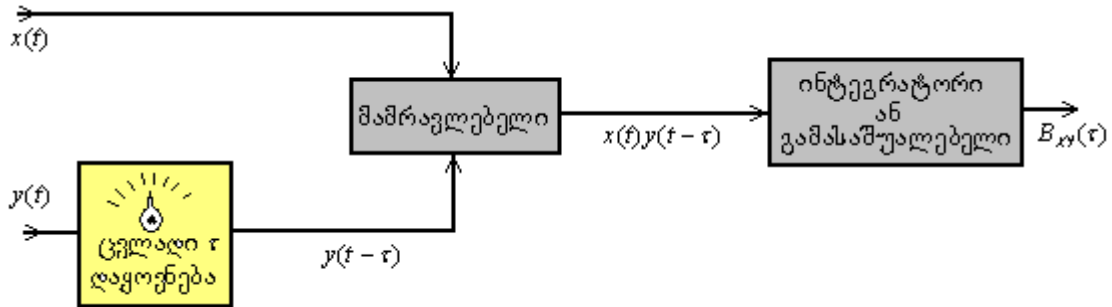
ცნობილია აგრეთვე კორელაციური და სპექტრალური ანალიზის გამოყენება სამედიცინო კვლევების პრაქტიკაში.

აღსანიშნავია დროის და სიხშირის დუალობა, რის გამოც ნებისმიერი კორელაციური ფუნქციით მიღებული შედეგი შეიძლება მიღწეულ იქნას სპექტრალური სიმკვრივის დახმარებით. პრაქტიკული გაანგარიშებების დროს საჭიროა ავირჩიოთ ერთ-ერთი მათგანი - დრო ან სიხშირე. ხშირ შემთხვევაში ეს არჩევანი შესაძლებელია გაკეთდეს შემდეგი მოსაზრებით: დროში „ვიწრო“ სიგნალი იძლევა ფართო სპექტრს და პირიქით.

5.1 ელექტრონული კორელომეტრები

ზემოთგანხილულიდან გამომდინარეობს, რომ როგორც ავტოკორელაციური ასევე ურთიეთკორელაციური ფუნქციების მისაღებად საჭიროა ჩავატაროთ შემდეგი ოპერაციები: სიგნალის დაყოვნება, საწყისი და დაყოვნებული სიგნალების გადამრავლება ინტეგრირება და გასაშუალება ანუ ინტეგრირების დროზე გაყოფა. უკანასკნელი ოპერაცია არამნიშვნელოვანია, რადგან ცვლის მხოლოდ მრუდის მასშტაბს. რაც შეეხება ინტეგრირების პროცესს, მცირე ინტერვალებისთვის (100 წამზე ნაკლებს), ეს ოპერაცია შეიძლება შეასრულოს საკმაო სიზუსტით დაბალსიხშირულმა ფილტრმა.

გაზომვების შედეგად ჩვენ მივიღებთ ავტოკორელაციური ან ურთიეთკორელაციური ფუნქციების შეფასებებს სხვადასხვა t - თვის.



t - ს სხვადასხვა მნიშვნელობების მისაღებად გამოიყენებდნენ მაგნიტურ ლენტებს, რომელზეც ჩაიწერებოდა საწყისი სიგნალი. ამის შემდეგ ეს სიგნალი და მისი კოპია შესაბამისი დროითი წანაცვლებით შეყავდათ მამრავლებელში, რომლის გამოსასვლელიდანაც სიგნალი მიეწოდებოდა ინტეგრატორს. ინტეგრატორიდან გამოსული სიგნალის მასშტაბირების შემდეგ ხორციელდება მიღებული შედეგის გაზომვა და ფიქსაცია შესაბამის t - თან ერთად. ასეთი გარკვეული რაოდენობის გაზომვის შედეგად მიიღება საძიებელი მრუდი.

როგორც ვხედავთ, ასეთი მეთოდი საკმაოდ შრომატევადი და არაზუსტია. ამ მეთოდის მეორე მნიშვნელოვანი ნაკლი მდგომარეობს n - რი გაზომვის მოლოდინის აუცილებლობაში იმისათვის, რომ მივიღოთ კორელაციური ფუნქციის სრული სურათი, ანუ მისი ყველა n მნიშვნელობა. ამიტომ კორელომეტრების განვითარების პირველ ნაბიჯზე მოიხსნა სწორად ეს შეზღუდვა და დამუშავდა კორელაციური ფუნქციების მიღების მეთოდი n წერტილში:

$$B_{XY}(0) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t)dt$$

$$B_{XY}(t_i) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t-t_i)dt$$

$$B_{XY}(2t_i) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t-2t_i)dt$$

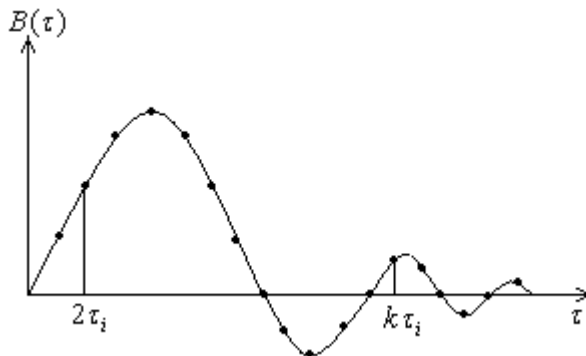
.....

.....

.....

$$B_{XY}(mt_i) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t-mt_i)dt$$

სადაც t_i - დაყოვნების ბიჯია, ე.ი. დრო, რომლითაც კორელაციური ფუნქციის მომდევნო წერტილები დაშორებულნი არიან ერთმანეთისაგან (იხილეთ ნახაზი)



ნახ.876

აღნიშნული ნაკლოვანებების მიუხედავად მხოლოდ აქ აღწერილი კორელომეტრები გამოიყენება პრაქტიკაში და იძლევიან უწყვეტი სიგნალების დამშავების საშუალებას. შემდგომი განვითარება ავტომატიზაციის და სწრაფმოქმედების თვალსაზრისით შესაძლებელია მხოლოდ სიგნალის დისკრეტიზაციის შემთხვევაში და, შესაბამისად, დისკრეტული ოპერაციებით. ამიტომ უფრო თანამედროვე კორელომეტრები განხილული იქნება დისკრეტული სისტემების განხილვისას.

ქვემოთ განვიხილოთ კორელომეტრების გამოყენების ზოგიერთი პრაქტიკული მაგალითი.

5.2 ხმაურის ფონზე პერიოდული სიგნალების აღმოჩენა ავტოკორელაციით.

სიგნალის აღმოჩენა ხმაურის ფონზე ნიშნავს გავცეთ პასუხი კითხვაზე: არსებობს თუ არა სიგნალი. მისი ფორმის განსაზღვრის ამოცანა ამ დროს არ დგება.

ამ ამოცანის გადაწყვეტა ხორციელდება ავტოკორელაციური ფუნქციით. დასაბუთებისთვის დავუშვათ, რომ გაქვს სიგნალი

$$x(t) = p(t) + b(t)$$

სადაც $p(t)$ – პერიოდული სიგნალია უცნობი პერიოდი T , ხოლო $b(t)$ – ხმაურია. სიმარტივისთვის დავუშვათ, რომ ეს ორივე სიგნალი ცენტრირებულია, ანუ მათი საშუალო მნიშვნელობები ნოლის ტოლია. შესაბამისად $x(t)$ –ც ცენტრირებულია. ფიზიკის თვალსაზრისით ეს ჰიპოტეზა სრულიად გამართლებულია, რადგან პრაქტიკაში მუდმივი კომპონენტა გამოირიცხება.

ამ შემთხვევაში ავტოკორელაციური ფუნქცია განისაზღვრება გამოსახულებით

$$B_{xx}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [p(t) + b(t)] \cdot [p(t-t) + b(t-t)] dt$$

კორელაციური ოპერატორის დისტრიბუციულობის თვისების გათვალისწინებით

$$B_{xx}(t) = B_{pp}(t) + B_{bb}(t) + B_{pb}(t) + B_{bp}(t)$$

შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ხმაური $b(t)$ და სიგნალი $p(t)$ დამოუკიდებლები არიან. ამ პირობის გათვალისწინებით $B_{pb}(t)$ და $B_{bp}(t)$ დიდი სიზუსტით უახლოვდებიან ნოლს. ხმაურის ავტოკორელაციური ფუნქცია, როგორც ცნობილია, $B_{bb}(t) \rightarrow 0$ თუ t იზრდება. მინიმალური t -ს მნიშვნელობა განისაზღვრება ხმაურის სპექტრალური სიმკვრივით: რაც უფრო ფართოა ხმაურის სპექტრი მოცემულ სრულ სიმძლავრისას, მით უფრო სწრაფად კლებულობს ხმაურის ავტოკორელაციური ფუნქცია.

ზემოთ ჩამოთვლილის გათვალისწინებით დახმაურებული პერიოდული სიგნალის ავტოკორელაციური ფუნქციის გამოსახულებას დარჩება მხოლოდ ერთი მდგენელი

$$B_{xx}(t) = B_{pp}(t)$$

სინამდვილეში

$$B_{xx}(t) = B_{pp}(t) + e(t)$$

სადაც $e(t)$ – მით უფრო მცირეა, რაც უფრო დიდია ინტეგრირების დრო T (ანუ გამასაშუალებელი დაბალსიხშირული ფილტრის დროის მუდმივა).

ამრიგად, აღწერილი მეთოდი საშუალებას იძლევა აღმოვაჩინოთ სიგნალი ხმაურის ფონზე.

თვალსაჩინოებისთვის განვიხილოთ პერიოდული $p(t)$ სიგნალი T_1 პერიოდით. ზემოთ ვნახეთ, რომ მისი ფურიეს მწკრივი იქნება

$$p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n f_1 t + b_n \sin 2\pi n f_1 t)$$

მისი ავტოკორელაციური ფუნქცია იქნება წარმოდგენილი მწკრივით

$$B_{pp}(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \cos 2\pi n f_1 t$$

აქედან ვხედავთ, რომ თუ კორელომეტრის შესასვლელზე მიაწვდით პერიოდულ სიგნალს, გამოსასლელის გრფიკულ გამოსახულებაზე დავინახავთ პერიოდულ სიგნალს შეცვლილი ფორმით (გვექნება მისი მოდულის კვადრატი), ხოლო ინფორმაცია ფაზაზე საერთოდ იკარგება. ცხადია, რომ თუ სიგნალი სინუსოიდალურია, იგი არ იცვლება და შეიძლება იყოს აღდგენილი.

5.3 ხმაურის ფონზე ცნობილი პერიოდიანი სიგნალების აღმოჩენა.

ამ შემთხვევაში ჩვენთვის ცნობილია სიგნალის პერიოდი T . განვიხილოთ დახმაურებული სიგნალის $x(t) = p(t) + b(t)$ ურთიერთკორელაცია დამხმარე სიგნალთან $f(t)$ იგივე პერიოდით T :

$$B_{xf}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [p(t) + b(t)] f(t-t) dt$$

ან

$$B_{xf}(t) = B_{pf}(t) + B_{bf}(t)$$

რადგან $f(t)$ და $b(t)$ დამოუკიდებელი არიან, $B_{bf}(t)$ შეფასების სიზუსტით ნულის ტოლია. ამიტომ

$$B_{xf}(t) = B_{pf}(t)$$

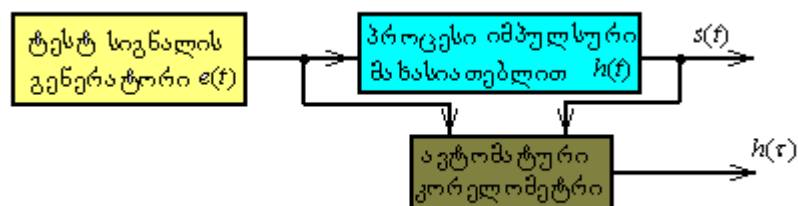
ე.ი. ორი ერთნაირსიხშირიანი პერიოდული სიგნალის ურთიერთკორელაციური ფუნქცია იქნება იგივე პერიოდიანი პერიოდული ფუნქცია.

ამ მეთოდს გააჩნია მთელი რიგი უპირატესობანი ზემოთაღნიშნულთან. უპირველესყოვლისა აქ არა გვაქვს ცდომილების მდგენელი $e(t)$, რაც განაპირობებს სიგნალს ხმაურის დიდ შეფარდებას. თუ პირველ შემთხვევაში საჭიროა იტეგრირების დროის შეფასება, აქ ამ დროის ხანგრძლივობა არ თამაშობს დიდ როლს.

ორივე შემთხვევაში შესაძლებელია გამოვიყენოთ ერთარხიანი კორელომეტრი, რომლის სრუქტურული სქემა ნაჩვენებია ნახაზზე .

5.4 წრფიული სისტემების დინამიური მახასიათებლების გამოკვლევა.

ეს მეთოდი ეფუძნება ნაკეცის ოპერაციას. განვიხილოთ ამ სისტემის ფუნქციონალური სქემა, რომელიც ნაჩვენებია ნახაზზე.



ცნობილია, რომ ასეთი სისტემა აღიწერება იმპულსური მახასიათებლით, რომლის ლაპლასის გარდაქმნაც წარმოადგენს გამოსაკვლევი სისტემის გადაცემის ფუნქციას. შესასვლელი სიგნალი $e(t)$ სისტემის მიერ გარდაიქმნება გამოსასვლელ სიგნალში $s(t)$.

ცნობილია, რომ შესასვლელი და გამოსასვლელი სიგნალები დაკავშირებული არიან ნაკვეცის ოპერაციით

$$s(t) = \int_0^t e(q)h(t-q)dq$$

ან სიმბოლოურად

$$s(t) = e(t) * h(t)$$

(იგულისხმება, რომ $e(t) = h(t) = 0$ როდესაც $t < 0$).

დავუშვათ $B_{ee}(t)$ შესასვლელი სიგნალის $e(t)$ -ს ავტოკორელაციური ფუნქციაა, ხოლო $B_{es}(t)$ -სიგნალების $e(t)$ და $s(t)$ ურთიერთკორელაციური ფუნქცია. ჩვენთვის ცნობილია, რომ ეს ფუნქციები ერთმანეთთან ისევეა დაკავშირებული, როგორც შესაბამისი სიგნალები. ე.ი.

$$B_{es}(t) = B_{ee}(t) * h(t)$$

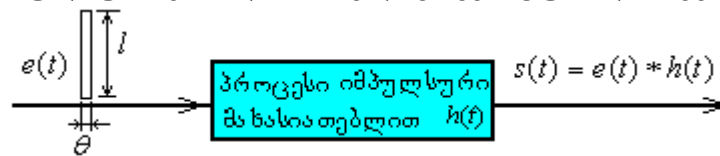
თუ $B_{ee}(t)$ - შეიძლება შევცვალოთ დირაკის ფუნქციით $d(t)$, მაშინ ბოლო განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

$$B_{es}(t) = h(t)$$

ამრიგად, თუ შესასვლელი სიგნალის ავტოკორელაციური ფუნქცია იქცევა ისე, როგორც d - ფუნქცია, მაშინ შესასვლელი და გამოსასვლელი ფუნქციების ურთიერთკორელაციური ფუნქცია უდრის სისტემის იმპულსურ მახასიათებელს. ამიტომ ტესტ-სიგნალი უწოდოთ ისეთ სიგნალს, რომელიც იძლევა საშუალებას მივიღოთ სისტემის იმპულსური მახასიათებელი.

5.5 შედარება პირდაპირ იმპულსურ მეთოდთან.

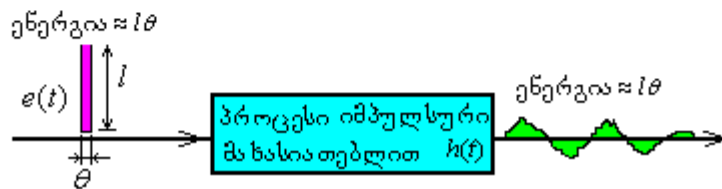
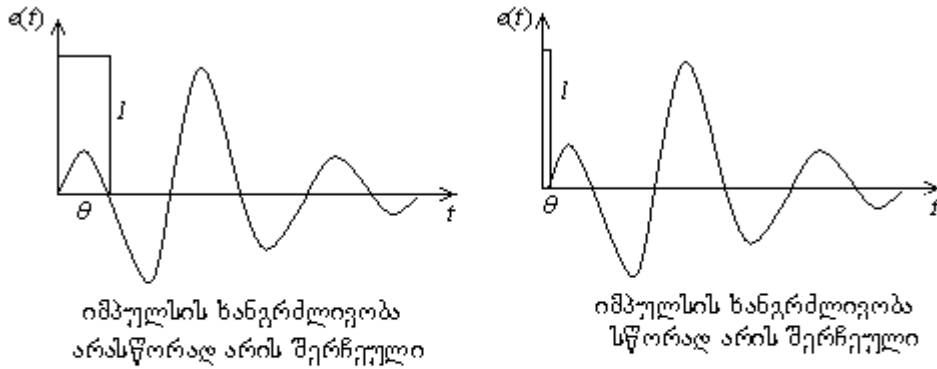
პირველი შეხედვით შეიძლება მოგვეჩვენოს, რომ ზემოთაღწერილი მეთოდი არაფრად არ სჯობს კლასიკურ იმპულსურ მეთოდს, რომელიც სქემატურად ნაჩვენებია ნახაზზე.



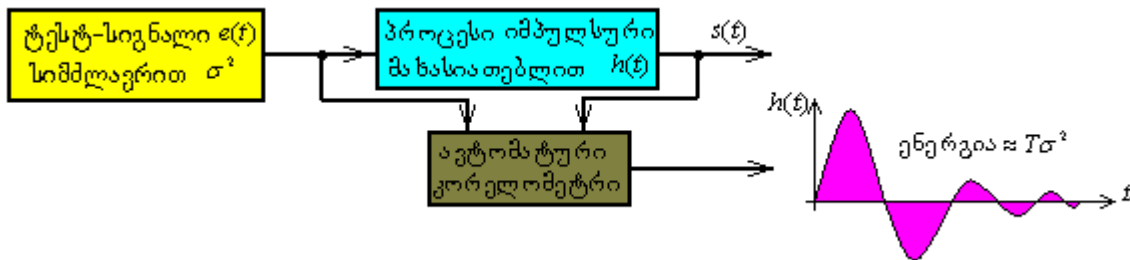
მაგრამ აუცილებელია ავლნიშნოთ, რომ იმპულსური ანალიზის დროს იმპულსის ენერგია E უდრის მისი გრაფიკით შემოსაზღვრულ ფართობს, ანუ $E = lq$ (ცნობილია, რომ ნებისმიერი ფორმის და q - ხანგრძლივობის დროს $E = \int_0^q e(t)dt$). ეს ენერგია შეზღუდულია,

რადგან ერთის მხრივ უნდა აკმაყოფილებდეს წრფივობის პირობას და ამიტომ ამპლიტუდას ძალიან ვერ გავზრდით. მეორეს მხრივ ვერ გავზრდით ხანგრძლივობას, რადგან იგი მაქსიმალურად უნდა უახლოვდებოდეს d - ფუნქციას და გაცილებით მცირე უნდა იყოს, ვიდრე იმპულსური მახასიათებლის ხანგრძლივობა. რადგანაც გაზომვის პროცესში იმპულსის ენერგია საკმაოდ შეზღუდულია ფონური ხმაურების გამო, რომელიც ყოველთვის

თან სდევდს გაზომვებს, სიზუსტე საკმაოდ დაბალია. ზემოთაღნიშნული ილუსტრირებულია ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე.

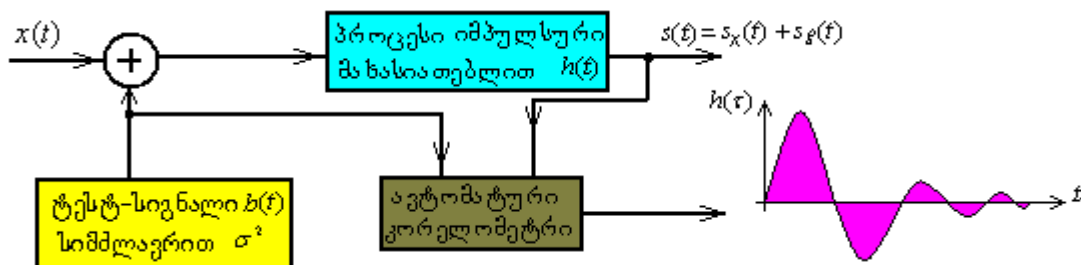


გაზომვის კორელაციურ მეთოდში ენერგია, რომელიც $T\sigma^2$ –ის ტოლია, არაფრით არ არის შეზღუდული. ამიტომ, როგორც ქვემოთ მოყვანილი ნახაზიც გვიჩვენებს, გაზომვა გაცილებით ზუსტია.



5.6 სისტემის შესწავლა მუშაობის პროცესში

იმპულსური მახასიათებლის გამოკვლევის დროს კორელაციური მეთოდის უპირატესობა მდგომარეობს იმაში, რომ ამ მეთოდის გამოყენება შესაძლებელია სისტემის მუშაობის პროცესში: ტესტ-სიგნალი $b(t)$ მიეწოდება შესასვლელზე შესასვლელ სიგნალთან $x(t)$ -თან ერთად.



რადგან $x(t)$ და $b(t)$ დამოუკიდებელი არიან, მაშინ $B_{bS_x}(t) = 0$. შესაბამისად

$$B_{b(S_x+S_B)}(t) = B_{bb}(t) * h(t)$$

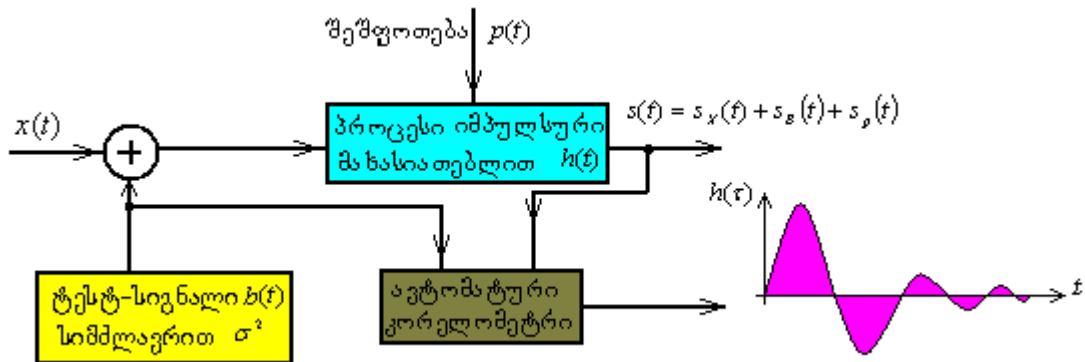
თუ $B_{bb}(t) \approx d(t)$, მაშინ

$$B_{b(S_x+S_B)}(t) \approx h(t)$$

ამგვარად, ჩვენ ვიღებთ საშუალებას გამოვიკვლიოთ სისტემის იმპულსური მახასიათებელი მუშაობის პროცესში, თუ შესასვლელზე მივაწვდით ისეთ ტესტ-სიგნალს, რომლის ავტოკორელაციური ფუნქციაც დირაკის ფუნქციას შეესაბამისება: $B_{bb}(t) \approx d(t)$. საგულისხმოა, რომ საჭირო არ არის ტესტ-სიგნალის დიდი სიმძლავრე, რაც არ გამოიწვევს სისტემის მუშაობაში დამახინჯებას.

5.7 სისტემის შესწავლა მუშაობის პროცესში გარე შემფოთების ზემოქმედებისას.

კორელაციური მეთოდი აგრეთვე იძლევა საშუალებას გავნსაზღვროთ იმპულსური მახასიათებელი, და შესაბამისად, ვიპოვოთ სისტემის გადაცემის ფუნქცია იმ შემთხვევაშიც კი, როდესაც მასზე მოქმედებს გარე შემფოთება $p(t)$. ასეთი სიტემის ფუნქციონალური ბლოკ-სქემა გაზომვის პროცესში გამოსახულია ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე.



ამ შემთხვევაში გამოსასვლელ სიგნალში გაჩნდება მესამე კომპონენტი. გავითვალისწინოთ, რომ ტესტ-სიგნალი და გარე შემფოთება არ არიან ერთმანეთთან დაკავშირებულნი. მაშინ

$$B_{b(S_x+S_B+S_p)}(t) = B_{bb}(t) * h(t)$$

თუ $B_{bb}(t) \approx d(t)$, მაშინ

$$B_{b(S_x+S_B+S_p)}(t) \approx h(t)$$

ეს პრაქტიკულად ერთადერთი მეთოდია, რომელიც საშუალებას იძლევა იმპულსური მახასიათებლის გამოკვლევის ერთი სრული გაზომვით. სხვა ერთნაირი პირობების შემთხვევაში გაზომვის სიზუსტე განპირობებულია მხოლოდ ინტეგრირების ხანგრძლივობით. ამ შემთხვევაშიც ტესტ-სიგნალის ამპლიტუდა შეიძლება იყოს საკმაოდ მცირე, რაც დადებითად ახასიათებს მეთოდს.

ტესტ-სიგნალების პარამეტრების შერჩევის საკითხს და ასევე კორელაციური ანალიზის მრავალ პრაქტიკული გამოყენების საკითხებს შეიძლება გაეცნოთ დამატებით ლიტერატურაში.

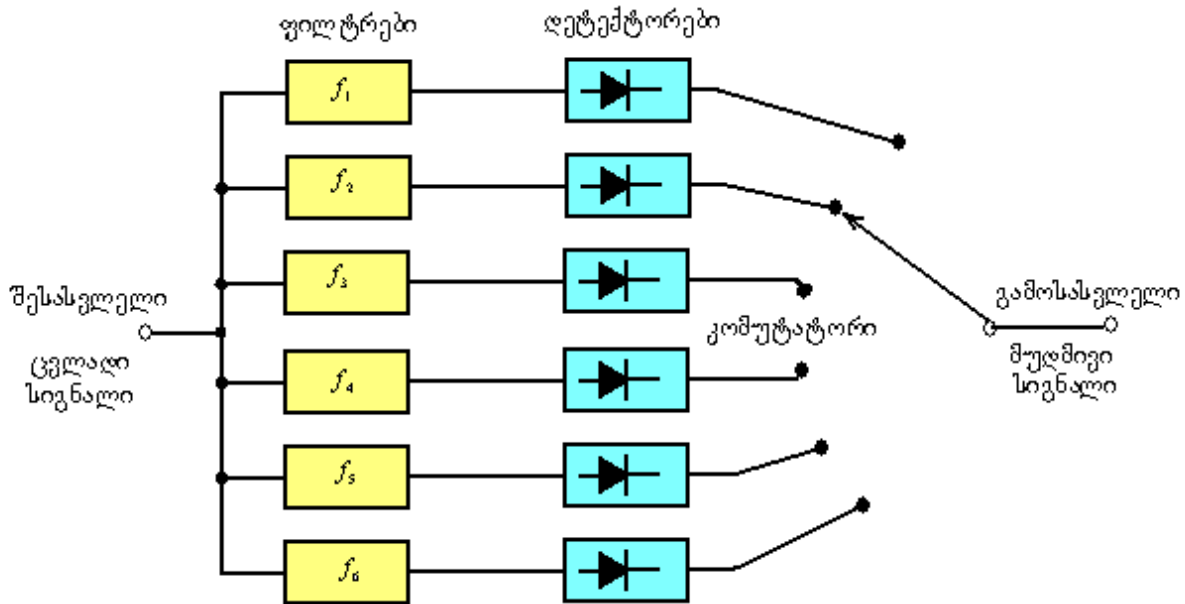
5.8 ელექტრონული სპექტრალური ანალიზატორები

განვიხილოთ სპექტრალური , რომელნიც დაფუძნებულია გამოსაკვლევი სიგნალის ფილტრაციაზე და ფურიეს გარდაქმნაზე. კორელაციურ სპექტრალურ ანალიზატორებს შეიძლება გაეცნოთ სპეციალურ ლიტერატურაში. ქვემოთ განვიხილავთ უწყვეტ სპექტრალურ ანალიზატორებს, ხოლო დისკრეტული ანალიზატორები განხილული იქნება შესაბამის თავში.

5.9 ელექტრონული ანალიზატორები, დაფუძნებული ფილტრაციის მეთოდზე

ანალიზატორებში პარალელური ფილტრებით ხორციელდება ყველაზე მარტივი და გასაგები მიდგომა სიგნალების სპექტრალურ დაშლასთან. ამგვარი ანალიზატორები შედგება პარალელურად ჩართული ფილტრების კრებულისაგან, რომელთა ვიწროზოლიანი სპექტრალური მახასიათებლები წარმოადგენენ ერთმანეთთან მიმდებარე ზოლებს და ჯამში გადაფარავენ სიხშირეთა სასურველ დიაპაზონს. ცხადია, რომ სიზუსტის უზრუნველსაყოფად სასურველია ფილტრების რაოდენობის გაზრდა და მათი ამპლიტურ-სიხშირული მახასიათებლის მართკუდხედთან მიახლოება. აგრეთვე საჭიროა, რომ გვერდი-გვერდ განლაგებული გატარების ზოლების ცენტრალური სიხშირეები ერთმანეთისაგან დაშორებულნი იყვნენ ზუსტად გატარების ზოლის ინტერვალით. სიგნალის სპექტრის მისაღებად საჭიროა გავზომოთ ძაბვის მნიშვნელობების მოდული ყოველი ფილტრის გამოსასვლელზე და განვიხილოთ ისინი როგორც სპექტრის წერტილები, რომელნიც შეესაბამებიან გატარების ზოლის ცენტრალურ სიხშირეებს.

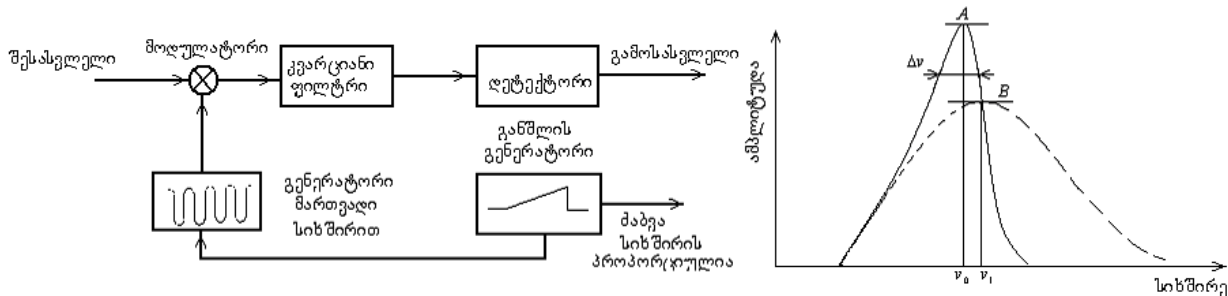
ნახაზზე მოყვანილია ასეთი მოწყობილობის გამარტივებული ბლოკ-სქემა. ყოველი ფილტრი დაკავშირებულია თავის რეგისტრაციის სქემასთან. ყველა სქემის ციკლური გამოკითხვა იძლევა საშუალებას მივიღოთ შესასვლელი სიგნალის სპექტრი.



ანალიზატორებით პარალელური ანალოგური ფილტრებისაგან შეუძლებელია მივიღოთ ზუსტი შედეგები ფილტრების ფართო გატარების ზოლის გამო. გარდა ამისა, ცნობილია ელექტრული ფილტრების სხვა უარყოფითი თვისებებიც: ძნელადმისაღები ვარგისიანობა, სიხშირული მახასიათებლის მნიშვნელოვანი განსხვავება იდეალურისაგან, რეაქციის დიდი დრო, არარეგულარობა გატარების ზოლის გარეთ და ა.შ.

5.10 ანალიზატორები სიხშირის განშლით

ტექნიკური სირთულეები, რომლებიც წარმოიქმნება პარალელურ ფილტრებიან ანალიზატორებში შეიძლება გარკვეულად გადაილახება, თუ ყველა ფილტრს შევცვლით ერთით, რომელსაც გადავადგილებთ გამოსაკვლევ სიხშირეთა მთელ დიაპაზონზე. ასეთ ფილტრს წარმოადგენს ჰეტეროდინული სისტემა, რომელშიც ფილტრის სიხშირული მახასიათებელი რჩება მუდმივი, ხოლო სპექტრის გადაადგილება ხდება ჰარმონიული რხევების მართვად სიხშირიანი გენერატორით. ნახაზზე ამოყვანილია ასეთი ხელსაწყოების ბლოკ-სქემა.



როგორც წესი, ამ შემთხვევაში გამოიყენება მაღალხარისხიანი კვარცის ფილტრები. სპექტრის ასახვისთვის რაიმე მოწყობილობაზე (თვითჩამწერზე, დისკლეიზე) გამოიყენება ხერხისებური განშლა, რომლის ძაბვაც დროის ნებისმიერ მომენტში გენერატორის სიხშირის

პროპორციულია. განშლის ძაბვა მიეწოდება X ღერძზე, ხოლო სიგნალი რეგისტრაციის მოწყობილობიდან Y ღერძზე.

სასურველი სიზუსტის მისაღწევად საჭიროა განშლის დიდი დრო, რაც არათავსებადია მაღალი სიზუსტის მისაღებად. გარდა ამისა, სწრაფი განშლის დროს შეიმჩნევა ფილტრის სიხშირული მახასიათებლის ცვლილება, რაც ნაჩვენებია ნახაზზე ($\Delta\nu$ – ზოლის სიხშირეა, სიხშირე ν_0 და ამპლიტუდა A შეესაბამისებიან განშლის დაბალ სიხშირეს, ხოლო ν_1 და B – განშლის მაღალ სიხშირეს). გატარების ზოლის ცენტრალური სიხშირის მნიშვნელობა იზრდება, სიხშირული მახასიათებელი ხდება არამკვეთრი და არასიმეტრიული, ვარგისიანობა კლებულობს, რაც საბოლოოდ იწვევს არაწრფივობას დინამიურ დიაპაზონში და სირთულეებს სიხშირული სტაბილურობის მიღწევაში.

ასეთ ანალიზატორებში ფილტრი გატარების ზოლით 20 ჰც დაუშვებს განშლის სიხშირეს 100 ჰც/წ, რაც ძალიან დაბალია.

დღეისათვის მიკროპროცესორული ტექნიკის მძლავრი განვითარების გამო ზემოთ აღწერილი ორივე მეთოდი პრაქტიკულად აღარ გამოიყენება. ისინი შეცვალა ციფრულ მეთოდებმა, დაფუძნებულებმა ფურიეს დისკრეტული და სწრაფი გარდაქმნის ალგორითმებზე, რაც განხილული იქნება შემდეგში.

5.11 ავტომატური კორელომეტრები გამოსაკვლევი სიგნალის ხაზზე

ასეთი ხელსაწყოების დანიშნულებაა ერთდროულად რამდენიმე დაყოვნების მნიშვნელობის შესაბამისი კორელაციური ფუნქციის მისაღებად. ისინი, სამწუხაროდ არ გამოიყენებენ სიგნალში არსებულ მთელ ინფორმაციას.

ამ ხელსაწყოების მოქმედების პრინციპი მდგომარეობს შემდეგში. დავუშვათ T -დისკრეტიზაციის პერიოდია. განვიხილოთ $y(t)$ ამონაკრების l_0 ელემენტი, რომელიც $y(l_0T)$ -ს ტოლია და შევინახოთ ელექტრონულ მეხსიერებაში. შემდეგ გადავამრავლოთ $y(l_0T)$ სიდიდე ამონაკრებ $x(t)$ მიმდევრობით ელემენტებზე:

$$x(l_0T), x[(l_0 + 1)T], x[(l_0 + 2)T], \dots, x[(l_0 + n - 1)T]$$

გადავამრავლების შედეგად მივიღებთ

$$x(l_0T)y(l_0T), x[(l_0 + 1)T]y(l_0T), x[(l_0 + 2)T]y(l_0T), \dots, x[(l_0 + n - 1)T]y(l_0T)$$

ავღნიშნოთ

$$l_0 = l_0^0, l_0 + 1 = l_0^1, l_0 + 2 = l_0^2, \dots, l_0 + n - 1 = l_0^{n-1}$$

მაშინ ნამრავლები ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$\begin{aligned} &x(l_0^0T)y(l_0^0T) && \text{როცა დაყოვნება 0 ტოლია} \\ &x(l_0^1T)y(l_0^1 - 1)T && \text{როცა დაყოვნება } T \text{ ტოლია} \\ &x(l_0^2T)y(l_0^2 - 2)T && \text{როცა დაყოვნება } 2 \text{ ტოლია} \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ &x(l_0^{n-1}T)y(l_0^{n-1} - n + 1)T && \text{როცა დაყოვნება } (n-1)T \text{ ტოლია} \end{aligned} \tag{88}$$

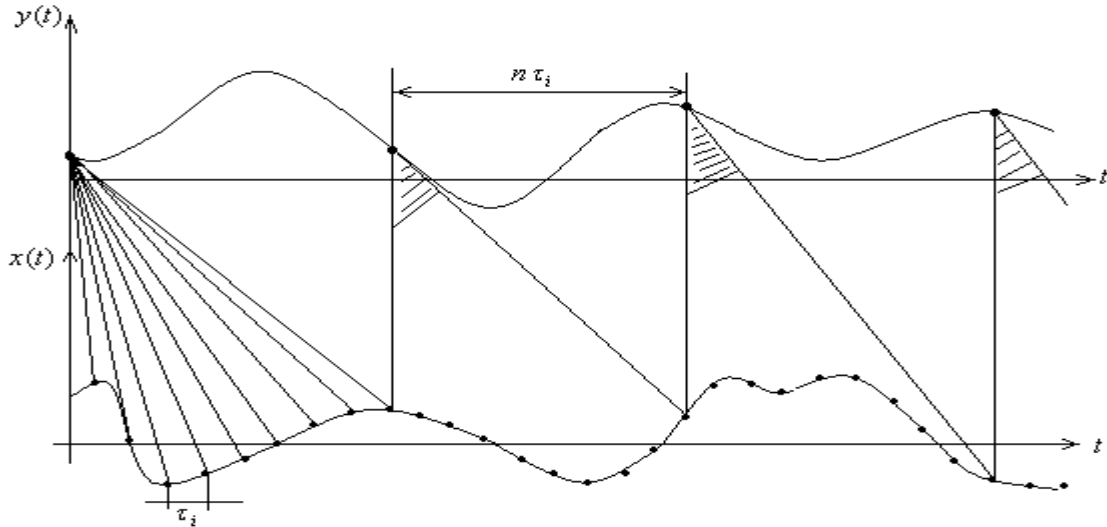
ყველა ნამრავლი ასევე მოვითავსოთ n მიმდევრობით მეხსიერების უჯრედებში თავანთი დაყოვნების დროის შესაბამისად. როდესაც ყველა მითითებული ოპერაცია დამთავრდება, ამოკრება ხორციელდება შესასვლელი სიგნალის მნიშვნელობებისთვის

$$y(l_1 T), x(l_1 T), x[(l_1 + 1)T], x[(l_1 + 2)T], \dots, x[(l_1 + n - 1)T]$$

ნამრავლი, რომელიც შეესაბამისება დაყოვნებას kT

$$x(l_1^k T) y[(l_1 - k)T]$$

დამატება იმ უჯრედს, სადაც არის ნამრავლი, რომელიც შეესაბამისება წინა ამონაკრების ასეთივე დაყოვნების მნიშვნელობას და ა.შ.



ნახაზზე მოყვანილია სიგნალების დროითი დიაგრამა და ნაჩვენებია კორელაციური ფუნქციის გამომანგარიშების პრინციპი.

თუ ჩვენ გვინდა ვიანგარიშოთ კორელაციური ფუნქცია n წერტილში ბიჯით t_i , საჭიროა ავიღოთ სიგნალ $x(t)$ -ს ამონაკრები ბიჯით $T = t_i$ და ჩავატაროთ დამუშავება (88) ფორმულების მიხედვით. ამგვარად სიგნალი $y(t)$ -ს ამონაკრების ერთი წერტილით და $x(t)$ -ს ამონაკრების n წერტილით მივიღებთ პირველ მიახლოებაში წარმოდგენას კორელაციური ფუნქციაზე, გამომანგარიშებულზე ყველა n წერტილში. შემდეგ აიღება $y(t)$ -ს ამონაკრების შემდეგი ელემენტი და სიგნალ $x(t)$ -ს ამონაკრების შემდეგი n ელემენტი და ა.შ. N - ჯერ. ამ დროს სიგნალ $y(t)$ -ს ამონაკრების ამონაკრების ბიჯი n -ჯერ მეტია, ვიდრე $x(t)$ -ს ამონაკრების. კორელაციური ფუნქციის სრულ გამოსაანგარიშებლად საჭიროა გვქონდეს ამონაკრები nN მოცულობით, ხოლო სიგნალების საერთო ხანგრძლივობა უნდა შეადგენდეს nNT .

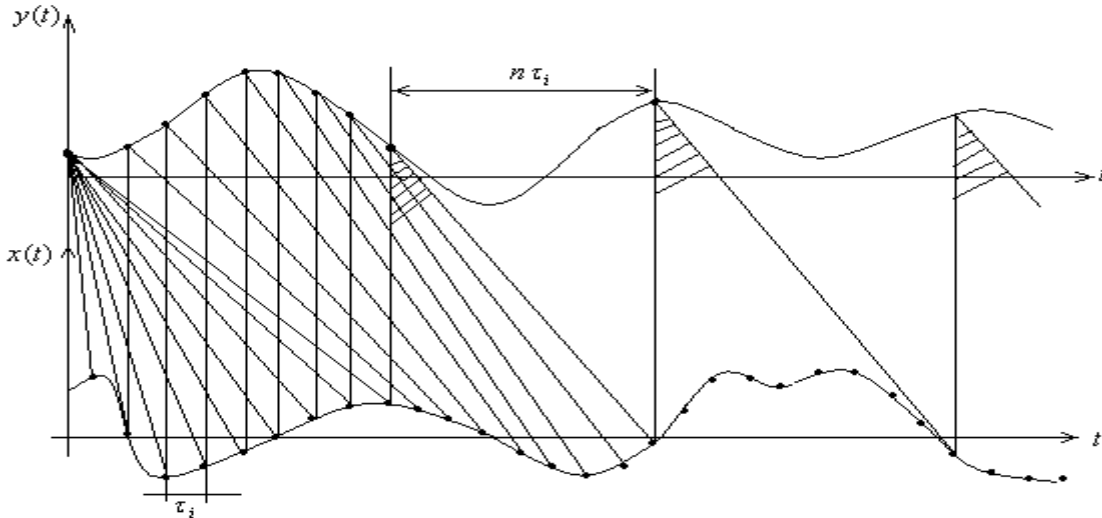
გამოკვლევებისას ძალზედ მნიშვნელოვანია კორელაციური ფუნქციის შეფასების ცდომილების ცოდნა. ამ საკითხის შესწავლა შესაძლებელია დამატებით ლიტერატურაში. აქ მხოლოდ ავლნიშნავთ, რომ თუ იდეალურ კორელომეტრის დროს ცდომილებაა $1/\sqrt{BT}$, ამ მეთოდში ცდომილება

$$e = \frac{1}{\sqrt{BT}} \sqrt{\frac{n}{a}}$$

სადაც a გვიჩვენებს, თუ რამდენჯერ აჭარბებს ამონაკრების სიხშირე შეწონის სიხშირეს. B - სიგნალის სპექტრის სიგანეა. T - დისკრეტიზაციის პერიოდი. n - წერტილთა რაოდენობა.

5.12 რეალური დროის ავტომატური კორელომეტრები

ასეთი ტიპის კორელომეტრები ავტომატურად ერთდროულად იძლევიან კორელაციური ფუნქციის მნიშვნელობებს n წერტილში, რომელნიც შეესაბამისებიან n დაყოვნებას. დასახელება გამომდინარეობს იქიდან, რომ აქ გამოიყენება სიგნალში არსებული სრული ინფორმაცია. რეალური დროის კორელომეტრები n პარალელურად მომუშავე ერთარხიანი კორელომეტრის ექვივალენტურია, სადაც ყოველი მათგანი გამოიანგარიშებს ერთ კორელაციურ ფუნქციას დაყოვნების ერთი მნიშვნელობისთვის. ასეთი კორელომეტრის მუშაობა ილუსტრირებულია ქვემოთ მოყვანილი ნახაზით.



ნახ.879

ასეთ სისტემებში დროითი წანაცვლება ანალოგურ ფორმაში იწვევს სიგნალის მნიშვნელოვან დამახინჯებას. ამიტომ, ასეთი სისტემების რეალიზაცია ხორციელდება ციფრული სახით. დროითი წანაცვლება ხორციელდება წანაცვლების რეგისტრებზე, რომელიც რეალიზებულია ნახევარგამტარებზე, მაგნიტოსტრიქციულ მასალებზე ან ინტეგრალურ მიკროსქემებზე.

5.13 სპექტრალური ანალიზატორები დროის შეკუმშვით

ეს ანალიზატორები დაფუძნებულია ფურიეს გარდაქმნის მსგავსების თვისებაზე

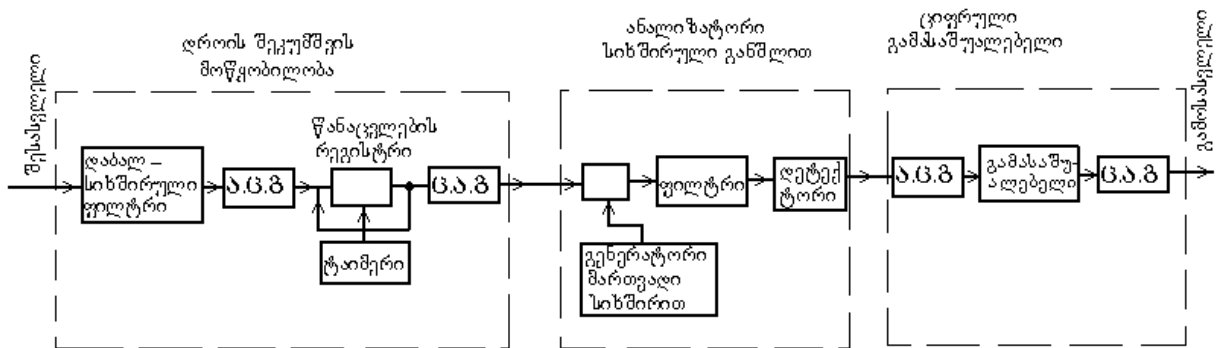
$$f(t/k) \leftrightarrow |k|F(kv)$$

იმისათვის, რომ სპექტროანალიზატორმა განშლადი სიხშირით იმუშაოს გაცილებით ეფექტურად, ვაიძულოთ ის დროის უფრო მოკლე მასშტაბში. ამისათვის სიგნალი გავჭიმოთ დროში ყველა დანარჩენი პარამეტრის შენარჩუნებით, რაც იგივეა, თითქოს დრო იკუმშება სიგნალის მიმართ (აქედან მოდის ტერმინი „დროის შეკუმშვა“). ამ დროს ყოველი სიგნალის შემადგენელი სიხშირე გაიზრდება k -ჯერ (k -შეკუმშვის კოეფიციენტი). ფილტრის გატარების ზოლი გაიზრდება k -ჯერ და უდრის $k\Delta\nu$. განშლის დასაშვები სიხშირე გაიზრდება k^2 -ჯერ, ხოლო სპექტროანალიზატორის სპექტრალური დიაპაზონი გაიზრდება k -ჯერ და ამდენჯერვე შემცირდება ანალიზის ხანგრძლივობა.

იმისათვის, რომ მივიღოთ ამპლიტუდების სწორი მნიშვნელობები შეკუმშვის შემდეგ, ისინი უნდა შევამციროთ k -ჯერ.

თუ გავითვალისწინებთ ზემოაღნიშნულს და აგრეთვე განშლად სიხშირიანი სპექტროანალიზატორის მუშაობის პრინციპს, შეგვიძლია შევადგინოთ დროის შეკუმშვის პრინციპზე აგებული სპექტროანალიზატორის ფუნქციონალური სქემა.

იგი შედგება დროის შეკუმშვის მოწყობილობისაგან, ანალიზატორისაგან განშლადი სიხშირით და ციფრული გამასაშუალებლისაგან. მისი ბლოკ-სქემა ამოყვანილია ნახაზზე.



დაბალსიხშირულ ფილტრს სიგნალი ანალიზატორის შესასვლელზე მოჰყავს დისკრეტიზაციის სიხშირესთან შესაბამისობაში. ა.ც.გ.-თი გარდაქმნილი ანალოგური სიგნალის შესაბამისი ციფრული ანათვლები ჩაიტვირთება ციკლურ შესასვლელ N მოცულობის მეხსიერებაში წანაცვლების რეგისტრის დახმარებით. მონაცემები, ჩატვირთული მეხსიერებაში, წაიკითხება აქედან გაცილებით მეტი სიხშირით (1000-:-10000-ჯერ) და ც. ა. გ.-ით ისევ გარდაიქმნება ანალოგურ ფორმაში, რაც გამოიწვევს სიგნალის დროში შეკუმშვას. წაკითხვის სიხშირე შეადგენს $\approx 100mkS$. ამგვარად, მაღალსიხშირული სიგნალის დამუშავება დადის დაბალსიხშირული სიგნალის დამუშავების ამოცანაზე, ოღონდ გაცილებით მაღალ ტემპში. გამოსასვლელი მეხსიერებიდან წაკითხვის სიხშირის შეფარდება ჩაწერის სიხშირესთან გვიჩვენებს, თუ რამდენად მცირდება დრო შეკუმშვის არარსებობის შემთხვევასთან შედარებით.

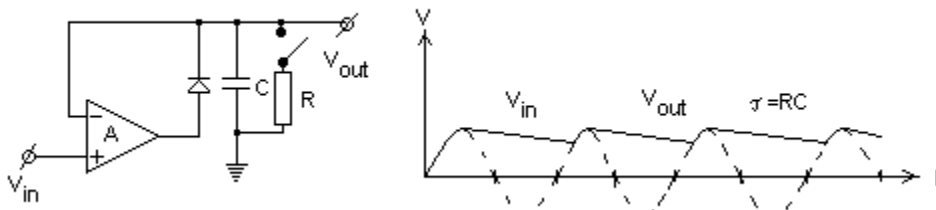
ასეთი ტიპის სპექტროანალიზატორების უარყოფით მხარეს წარმოადგენს ანალოგური სქემების არასტაბილურობა ძირითადად ამპლიტუდების დინამიურ დიაპაზონში, რომელიც ამ შემთხვევაში შეზღუდულია 50-:60 დეციბელით. უარყოფით მხარეს წარმოადგენს აგრეთვე მართვად სიხშირიანი გენერატორის სიხშირის არასტაბილურობა.

5.14 სიგნალი ექსტრემალური მნიშვნელობების განსაზღვრა.
ანალოგური სქემა.

ძირითადი სქემა რომელიც გამოიყენება სიგნალების დადებითი პიკების გამოსავლენად, ნაჩვენებია ნახ.1 ზე. დიოდი უკუკავშირის წრედში უზრუნველყოფს სქემის, როგორც იდეალური დეტექტორის მუშაობას. მაგალითისთვის განვიხილოთ შესასვლელზე სინუსოიდური სიგნალი. V_{in} -ის ზრდისას ტევადობა C იმუხტება. როდესაც იგი მიაღწევს მაქსიმუმს და დაიწყებს კლებას, დიოდი ჩაიკეტება და კონდენსატორი იწყებს განმუხტვას ოპერაციული მამღერებლის მაინვერტირებელ შესასვლელზე ან დატვირთვის R წინააღობაზე, თუ იგი ჩართულია. V_{out} -ის ცვლილების სიჩქარე მით უფრო მცირეა, რაც უფრო დიდია ოპერაციული მამღერებლის შესასვლელი წინააღობა (რაც მიიღწევა შესასვლელზე ველიანი ტრანზისტორის დაყენებით) და დატვირთვის წინააღობა. გამოსასვლელზე სიგნალის ზრდის სიჩქარე განისაზღვრება ოპერაციული მამღერებლის მოკლე ჩართვის დენით (I_m). თუ სიგნალის ზრდის სიჩქარე არ არის შემოსაზღვრული მამღერებლის მაქსიმალური ზრდის სიჩქარით, მაშინ იგი უდრის:

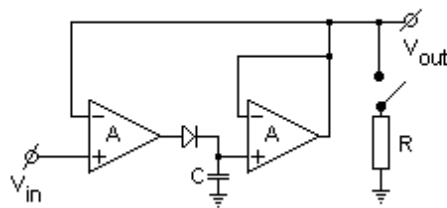
$$\Delta U_{out} / \Delta t = I_m / C$$

ნახ.2-დან სჩანს, რომ დატვირთვის წინააღობის გავლენა შეიძლება გამოვრიცხოთ მეორე ოპერაციული მამღერებლის ჩართვით. ამ შემთხვევაში ძაბვის ვარდნის სიჩქარე განისაზღვრება მეორე მამღერებლის შესასვლელი დენით, შეფარდებული ტევადობასთან C .



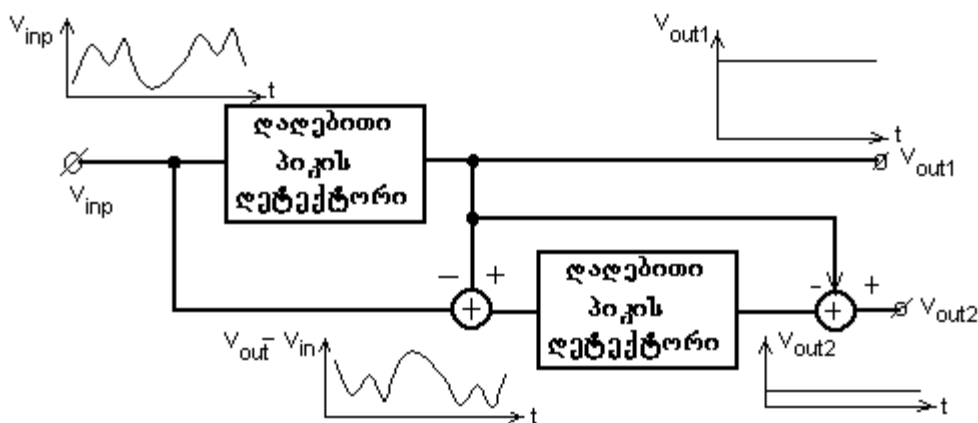
ნახ.1

სიგნალის ექსტრემალური მნიშვნელობების ანალოგური დეტექტორი.



ნახ.2

სიგნალის ექსტრემალური მნიშვნელობების გამოვლენა შეიძლება ორი დადებითი პიკის დეტექტორის დახმარებით. შესაბამისი ჩართვის ბლოკ-სქემა ნაჩვენებია ნახ.3-ზე.

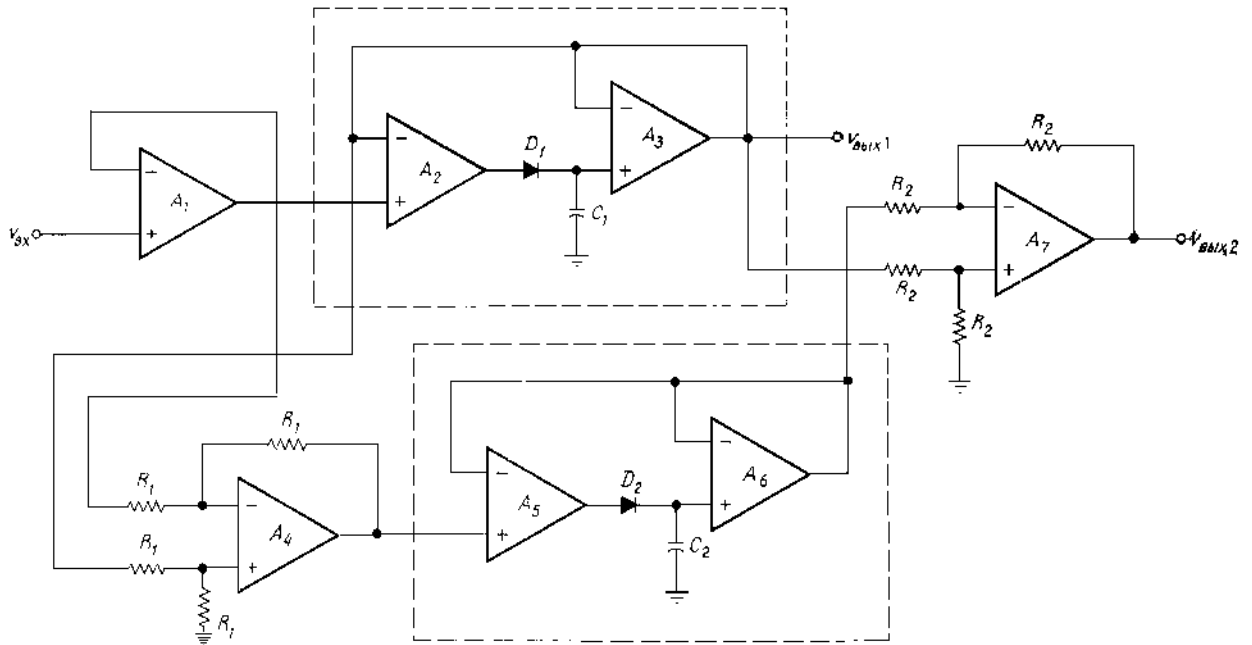


ნახ.3

პირველი დადებითი პიკის დეტექტორის გამოსასვლელზე გვექნება პიკის მნიშვნელობა, რომელიც ტოლია V_{in+} -ის პიკის. ამ მაქსიმუმიდან V_{in+} -ის გამოკლება გვაძლევს მაქსიმუმისა და მინიმუმის სხვაობას. მინიმუმის მნიშვნელობა შეგვიძლია V_{out2} მივიღოთ მეორე დეტექტორის გამოსასვლელი მნიშვნელობა V_{out1} -ის გამოკლებით.

სიგნალის ექსტრემალური მნიშვნელობების დეტექტორის სრული სქემა ნაჩვენებია ნახ.4-ზე. შესასვლელი სიგნალი მიეწოდება ბუფერული მამლიერებლის შესასვლელზე (A_1), მამლიერებლები A_2, A_3, A_5, A_6 მუშაობენ, როგორც დადებითი პიკის ფიქსატორები.

A_3 გამოსასვლელი იძლევა პიკის მნიშვნელობას. მამლიერებლები A_4 და A_7 მუშაობენ, როგორც დიფერენციალური მამლიერებლები ერთის ტოლი გაძლიერების კოეფიციენტით.



ნახ.5

VI. ანალოგური ფილტრები

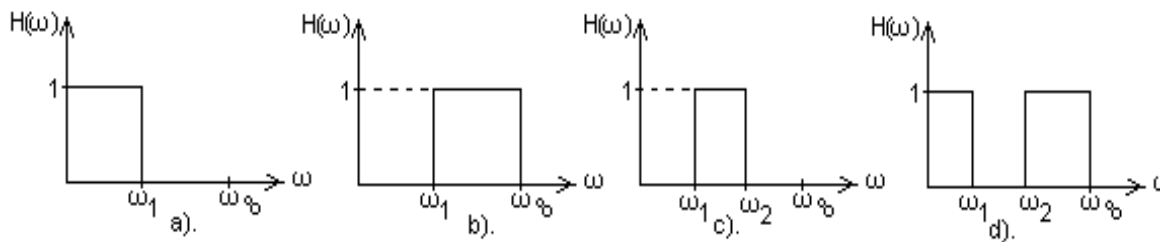
ფილტრები ეწოდება მოწყობილობებს, რომელნიც ირთვებიან ელექტრულ წრედში მასში გამავალი სიგნალის სპექტრალური შემადგენლობის შეცვლის მიზნით. ამიტომ ფილტრებს განიხილავენ, როგორც „შავ ყუთს“, რომელსაც გააჩნია ორი შესასვლელი და ორი გამოსასვლელი მომჭერი. აქედან გამომდინარე, ფილტრების ანალიზის და სინთეზისთვის გამოიყენება ოთხპოლუსების ანალიზის და სინთეზის მათემატიკური აპარატი.

ფილტრებს განასხვავებენ ტიპის (მაგ. LC – ფილტრები, აქტიური, კრისტალური და ა.შ.), ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებლის ფორმის და სიხშირული დიაპაზონის მიხედვით.

ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებლის ფორმით განასხვავებენ ფილტრების ოთხ ძირითად კლასს:

1. დაბალსიხშირული
2. მაღალსიხშირული
3. ზოლოვანი
4. რეჟექტორული

ნახაზზე მოყვანილია ზემოთ ჩამოთვლილი ფილტრების იდეალური ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებლები შესაბამისად.



ნახ.1

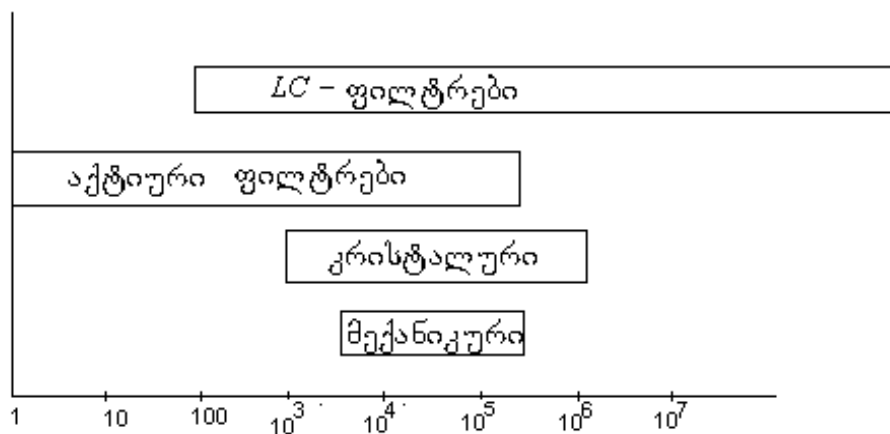
ფილტრის ძირითადი ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებელი, წარმოადგენს მისი სიმძლავრის გადაცემის კოეფიციენტის $H(\omega)$ -ს დამოკიდებულებას სიხშირეზე.

სიხშირული ფილტრების სინთეზი იწყება იდეალიზირებული ფუნქციის შერჩევით, რომელიც აღწერს სიმძლავრის გადაცემის კოეფიციენტის დამოკიდებულებას სიხშირეზე, რომელიც ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებლების კვადრატის ტოლია. ასეთ მიდგომას უწოდებენ ფილტრის სინთეზს მოცემული ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებლით. იდეალური ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებელი ფიზიკურად არარეალიზებადია. ამიტომ სინთეზის მეორე ეტაპი მდგომარეობს ამ მახასიათებლის ისეთი ფუნქციით აპროქსიმაცია, რომელიც შეესაბამისება ფიზიკურად რეალიზებად წრედს.

შემდეგ აპროქსიმირებული სიმძლავრის გადაცემის სიხშირული მახასიათებლით განსაზღვრავენ ფილტრის გადაცემის ფუნქციას $H(\omega)$.

როდესაც $H(\omega)$ -თი ვიპოვით ნულებისა და პოლუსების მდებარეობას, შეგვიძლია მოვახდინოთ წრედის რეალიზაცია, ე.ი. მივიღოთ ფილტრის პრინციპიალური სქემა და მასში შემავალი ელემენტების პარამეტრების ნომინალები.

ნახ.2-ზე მოყვანილია სხვადასხვა ტიპის ფილტრების სიხშირული მუშა დიპაზონი.



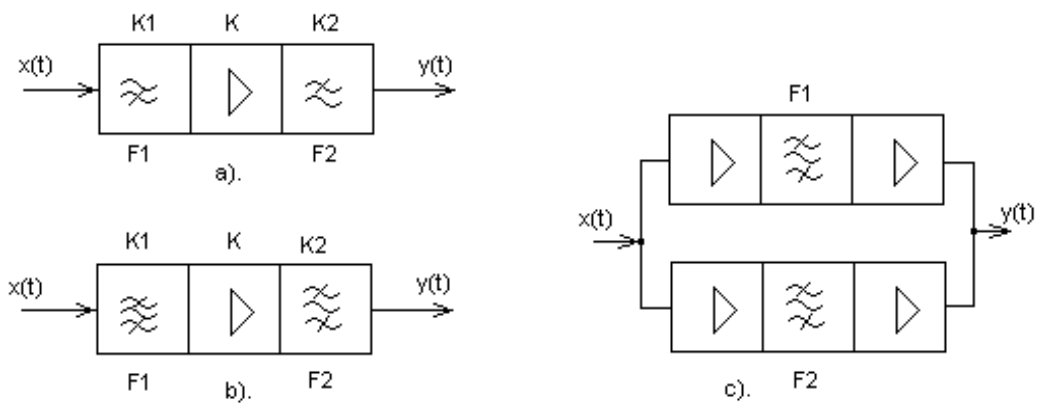
ნახ. 2

ანალოგური სიგნალების დამუშავების დროს ძირითადად გამოიყენება აქტიური ფილტრები, რაც განპირობებულია მათი მაღალი ეფექტურობით და დაბალი ღირებულებით.

6.1 სიხშირული ფილტრები

სიხშირული ფილტრი არის ოთხპოლუსა, რომელიც გაცილებით კარგად ატარებს შესასვლელიდან გამოსასვლელისაკენ დენის იმ სიხშირეებს, რომელიც არის გარკვეულ ზღვრებში და საგრძნობლად ამცირებს ამ დენის სიხშირულ მდგენელებს აღნიშნული დიაპაზონის გარეთ. დენის სიხშირეთა ზოლს, რომელიც გაივლის ფილტრში, გატარების ზოლი ეწოდება. ხშირად მას აგრეთვე უწოდებენ „გამჭვირვალეობის“ ზოლს. დენის სიხშირეთა ზოლს, რომლებიც საგრძნობლად სუსტდებიან - შეზღუდვის ზოლი ეწოდება.

სასურველი გატარების ან შეზღუდვის ზოლის მისაღებად ხშირად გამოიყენებენ ფილტრების პარალელურ ან მიმდევრობით ჩართვას. ასეთი ჩართვების მაგალითები პირობითი აღნიშვნებით ნაჩვენებია ნახაზზე.



ნახ. 1

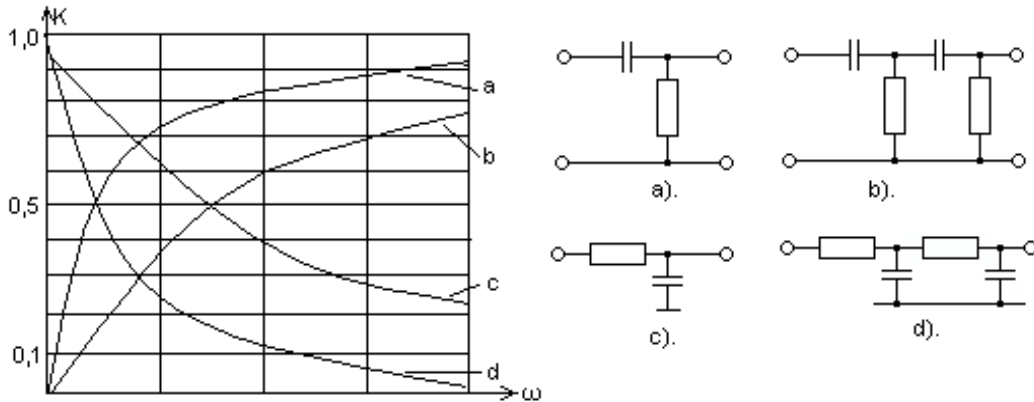
ნახ.1ა-ზე მოყვანილია დაბალსიხშირული და მაღალსიხშირული ფილტრების მიმდევრობითი შეერთება, ხოლო ნახ.2ა-ზე მათი ცალკე-ცალკე და საერთო სიხშირული მახასიათებლები. მათ შორის მამლიერებლის ჩართვა გამოწვეულია მეორე ფილტრის შესასვლელის გავლენის შესამცირებლად პირველი ფილტრის ამპლიტუდურ-სიხშირულ მახასიათებელზე გადაცემის საერთო კოეფიციენტი ფარდობით ერთეულებში ტოლია ცალკეული ბლოკების კოეფიციენტების ნამრავლის, ხოლო დეციბელებში - ჯამს.

ნახ.1-ზე მოყვანილია ორი ზოლოვანი ფილტრის მიმდევრობითი შეერთება, ხოლო ნახ.2-ზე მათი ცალკე-ცალკე და საერთო სიხშირული მახასიათებლები.

ნახ. 1 მოყვანილია ორი ფილტრის პარალელური ჩართვა, ხოლო ნახ.2 - ზე რეზულტიური.

R-C -ფილტრები. მაღალსიხშირული და დაბალსიხშირული უმარტივესი ფილტრები შედგება რეზისტორებისა და კონდენსატორებისაგან. ისინი გამოიყენება საკმაოდ დაბალ სიხშირეებზე (მაგ. ბგერით სიხშირეებზე), როდესაც არ არის მაღალი მოთხოვნა მახასიათებლის მკვეთრ დამრეცობაზე. მაგალითისთვის ნახ.3 მოყვანილია ერთ და

ორწრედიანი ფილტრების ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებლები და შესაბამისი სქემები.



ნახ.3

6.2 დაბალი სიხშირის ფილტრები

ამ ფილტრების ძირითადი დანიშნულებაა გადასცეს გამოსასვლელზე რხევები, რომელთა სიხშირეებიც არ აღემატება ზღვრულ სიხშირეს. ამ სიხშირეს უწოდებენ ფილტრის მოკვეთის სიხშირეს - ამავე დროს მასზე მაღალი სიხშირის რხევები საგრძნობლად უნდა შემცირდეს.

ცხადია, რომ ასეთი ფილტრის სიმძლავრის გადაცემის კოეფიციენტის იდეალურ სიხშირულ დამოკიდებულებას ექნება სახე

$$K_p(\omega) = \begin{cases} 1, 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ 0, \omega > \omega_c \end{cases}$$

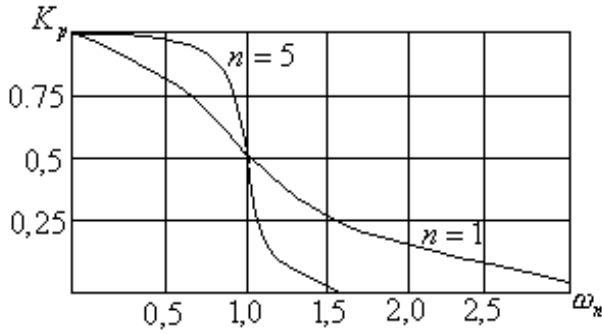
ცხადია, რომ ასეთი სიხშირული მახასიათებელი არარეალიზებადია და ამიტომ დგება დასაშვები მახასიათებელი ფუნქციის შერჩევის ამოცანა.

მაქსიმალურად ბრტყელი აპროქსიმაცია. ასეთი აპროქსიმაციის ერთ-ერთი ხერხი მდგომარეობს შემდეგი სიმძლავრის გადაცემის კოეფიციენტის გამოყენებაში

$$K_p(\omega) = 1/(1 + \omega_r^{2n})$$

სადაც $\omega_r = \omega / \omega_c$ - განუზომადი ნორმირებული სიხშირეა.

დაბალსიხშირულ ფილტრს, რომელსაც გააჩნია ასეთი თვისებები, ეწოდება მაქსიმალურად ბრტყელ მახასიათებლიანი ან ბატერვორტის ფილტრი. მთელი რიცხვი წარმოადგენს ფილტრის რიგს. მოყვანილი ორი განტოლების შედარება გვიჩვენებს, რომ ნებისმიერი თვის ასეთი ფილტრი რეალიზებადია. გატარების ზოლში, ე.ი. , გადაცემის კოეფიციენტის მოდულის კვადრატი სიხშირის ზრდისას მდორედ მცირდება. მოკვეთის სიხშირეზე ფილტრის მიერ სიგნალის შესუსტება ტოლია სისტემის რიგის მიუხედავად. რაც უფრო მეტია , მით უფრო ზუსტად ხდება სიხშირული მახასიათებლის აპროქსიმაცია. ნახაზზე მოყვანილია სხვადასხვა რიგის მაქსიმალურად ბრტყელი მახასიათებლები.



ჩვეულებრივ ფილტრის რიგს ირჩევენ სიგნალის შესუსტების მოთხოვნის მიხედვით, როდესაც .

მაგალითი. ვიპოვოთ ბატერვორტის ფილტრის რიგი, თუ მოკვეთის სიხშირე $w_c = 10^5 \text{ Hz}$, ხოლო $w = 3 \cdot 10^5 \text{ Hz}$ სიხშირეზე უზრუნველყოფს სიგნალის შესუსტებას არა უარეს -26 dB ნულოვან სიხშირესთან შედარებით.

ამოცანის პირობა განსაზღვრავს ფილტრის რიგს n , როგორც მთელ რიცხვს, მიახლოებულს სიჭარბით განტოლების ფესვთან

$$10 \lg [1 / (1 + 3^{2n})] = -26 \text{ აქედან } 1 + 3^{2n} = 10^{2,6} = 398$$

ამოხსნით მივიღებთ

$$2n = \lg 398 / \lg 3 = 5,45$$

საიდანაც $n = 3$.

თუ სიგნალის სიხშირე ძალიან აჭარბებს ფილტრის მოკვეთის სიხშირეს, მაშინ ფორმულიდან მივიღებთ

$$K_p(w_r) = w_r^{2n}$$

ე.ი. შესუსტება, გამოსახული დეციბელებში

$$\Delta = 10 \lg K_p \approx -20n \lg w_r$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ სიხშირის ორჯერ გაზრდა იწვევს სიგნალის ბატერვორტის ფილტრის მიერ შემცირებას $-20n \cdot 0,301 \approx -6n \text{ dB}$. ამბობენ, რომ ამ ტიპის ფილტრისთვის შესუსტების ზრდა გატარების ზოლის გარეთ შეადგენს $-6n \text{ dB / okt}$.

მაქსიმალურად ბრტყელი სიხშირულმახასიათებლიანი ფილტრის გადაცემის ფუნქცია. იმისათვის, რომ მომავალში მოვახდინოთ წრედის სტრუქტურის სინთეზი, აუცილებელია სიმძლავრის გადაცემის კოეფიციენტისგან (ფორმულის შესაბამისად) გადავიდეთ გადაცემის ფუნქციაზე K_p . ამ მიზნით შემოვიტანოთ ნორმირებული კომპლექსური სიხშირე $p_r = s_r + jw_r$. მაშინ სიმძლავრის გადაცემის კოეფიციენტის ფორმულას ექნება სახე

$$K_p(p_r) = 1 / [1 + (-1)^n p_r^{2n}]$$

აქედან ჩანს, რომ p_r სიბრტყეზე ფუნქცია $K_p(p_r)$ გააჩნია $2n$ პოლუსი, რომელნიც არიან განტოლების

$$1 + (-1)^n p_r^{2n} = 0$$

ფესვები. ყველა ეს ფესვი მდებარეობს ერთეულოვან წრეწირზე.

თუ $n = 1$ სიმძლავრის გადაცემის კოეფიციენტები განისაზღვრებიან განტოლებიდან $p_r^2 = 1$,
 ე.ი. $p_{r1} = 1, p_{r2} = -1$.

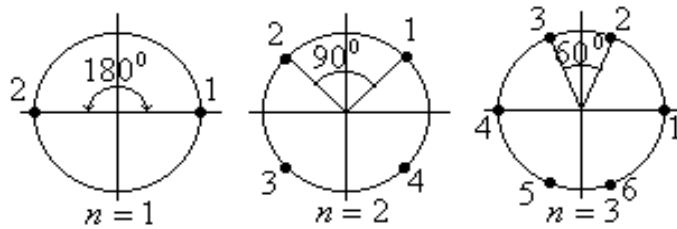
თუ $n = 2$, მაშინ განტოლება $p_r^4 = -1$ გააჩნია ოთხი ფესვი:

$$p_{r1} = e^{j\pi/4}, p_{r2} = e^{j3\pi/4}, p_{r3} = e^{j5\pi/4}, p_{r4} = e^{j7\pi/4}$$

თუ $n = 3$, მაშინ განტოლება $p_r^6 = 1$ გააჩნია ექვსი ფესვი:

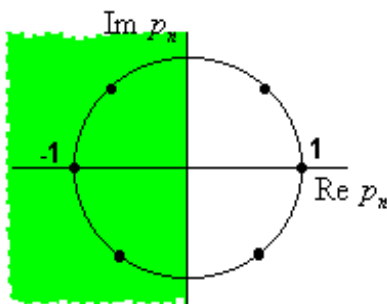
$$p_{r1} = 1, p_{r2} = e^{j\pi/3}, p_{r3} = e^{j2\pi/3}, p_{r4} = -1, p_{r5} = e^{j4\pi/3}, p_{r6} = e^{j5\pi/3}$$

ფესვების განლაგება კომპლექსურ სიბრტყეზე ნაჩვენებია ნახაზზე.



ნებისმიერი n -თვის ზოგადი კანონზომიერება ასეთია: ყველა პოლუსი მდებარეობს ერთი და იგივე კუთხურ მანძილზე ერთმანეთისაგან, რომელიც ტოლია π/n . თუ n კენტია, პირველი ფესვი $p_{n1} = 1$, ხოლო თუ n -ლუწია $p_{n1} = \exp(j\pi/n)$.

ეხლა ვისარგებლოთ იმით, რომ სიმძლავრის გადაცემის კოეფიციენტების პოლუსებს აქვს კვადრატული სიმეტრია, ე.ი. მათი რაოდენობა და განლაგება ორივე ნახევარსიბრტყეში ერთნაირია. ეს იძლევა საშუალებას ჩავთვალოთ, რომ მხოლოდ მარცხენა ნახევარსიბრტყეში განლაგებული პოლუსები პასუხობენ სინთეზირებად ფილტრს. მათი „სარკისებური კოპია“ მარჯვენა ნახევარსიბრტყეში შეესაბამება ფუნქცია $K(-p_n)$ და არ მიიღება მხედველობაში. აღნიშნული ნაჩვენებია ქვემოთმოყვანილ ნახაზზე.



აქ აღწერილი პრინციპი ძირითადია ფილტრების სინთეზის პროცედურაში, რადგანაც მასზეა დამოკიდებული მომავალში წრედების რეალიზაცია.

მაგალითი. გავნსაზღვროთ მეორე რიგის ბატერვორტის მახასიათებლიანი დაბალსიხშირული ფილტრის გადაცემის ფუნქცია.

ზემოთგანხილულიდან, მარცხენა ნახევარსიბრტყეში მდებარეობენ

$$p_{n2} = (-1 + j)/\sqrt{2}, p_{n3} = (-1 - j)/\sqrt{2}$$

მაშინ

$$K(p_n) = \frac{1}{(p_n - p_{n2})(p_n - p_{n3})} = \frac{1}{p_n^2 + p_n\sqrt{2} + 1}$$

ამგვარად, დროს დაბალსიხშირული ფილტრის რეალიზაციისთვის საჭიროა მეორე რიგის დინამიური სისტემა - რხევითი კონტური.

ჩებიშევის აპროქსიმაცია. ფართო გამოყენებას პოულობს სიხშირული იდეალური მახასიათებლის აპროქსიმაციის კიდევ ერთი ხერხი. ასეთი სახის დაბალსიხშირული ფილტრის გადაცემის კოეფიციენტი აღიწერება ფორმულით

$$K_p(w_r) = 1/[1 + e^{-2}T_n^2(w_r)]$$

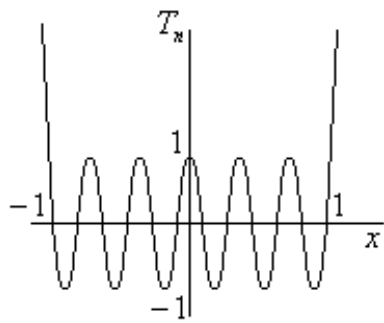
სადაც $e \ll 1$ - მუდმივი რიცხვია, რომელსაც ეწოდება მახასიათებლის უთანასწორობის კოეფიციენტი გატარების ზოლში. $T_n(w_r)$ n - რი რიგის ჩებიშევის პოლინომია, რომელიც განისაზღვრება გამოსახულებით

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

რომლისთვისაც $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$.

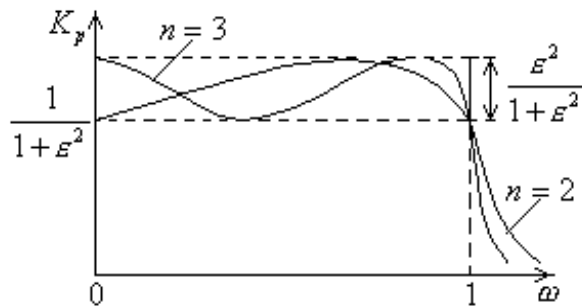
ამ პოლინომს ძალიან ხშირად ხმარობენ აპროქსიმაციის სხვადასხვა ამოცანებში შემდეგი თვისებების გამო:

სხვა n -რი რიგის პოლინომებიდან ერთნაირი კოეფიციენტებით არგუმენტის უმაღლეს ხარისხთან ისინი ყველაზე ნაკლებად გადაიხრებიან ნულისაგან $-1 < x < 1$ ინტერვალზე. ამავე დროს, როდესაც $|x| \gg 1$ ჩებიშევის პოლინომის აბსოლუტური მნიშვნელობები საკმაოდ დიდებია. ასიმპტოტურად როდესაც $|x| \gg 1, T_n(x) = 2^{n-1} x^n$. ჩებიშევის პოლინომის ტიპიური გრაფიკი ნაჩვენებია ნახაზზე.



ასეთი ფუნქციების დახმარებით შეგვიძლია საკმაოდ კარგად მოვახდინოთ დაბალსიხშირული ფილტრის იდეალური მახასიათებლის აპროქსიმაცია: ფორმულიდან სჩანს, რომ გატარების ზოლში K_p მერყეობს 1-დან $1/(1+e^2)$ ზღვრებში, ხოლო როდესაც $w_r \gg 1$, ფილტრი უზრუნველყოფს სიგნალის მნიშვნელოვან შესუსტებას.

ქვემოთმოყვანილი ნახაზზე მნაჩვენებია სიმძლავრის გადაცემის მახასიათებლის სიხშირული მახასიათებლები ჩებიშევის ორი ფილტრისთვის, როცა $n = 2$ და $n = 3$



გრაფიკებიდან სჩანს, რომ გატარების ზოლში ჩებიშევის ფილტრის სიხშირული მახასიათებლები არამონოტონურია. შესუსტების პულსაციის სიდიდე მით უფრო მეტია, რაც მეტია ϵ . როგორც ფორმულიდან სჩანს, ϵ ზრდას მივყავართ შესუსტების ზრდასთან გატარების ზოლის გარეთ. ამრიგად n -ის და ϵ -ის შერჩევით შეიძლება მივაღწიოთ სინთეზირებადი ფილტრების საწყისი პირობების შესრულებას.

მაგალითი. ჩებიშევის 3-რიგის ფილტრი მოკვეთის სიხშირეზე უზრუნველყოფს ორჯერად შესუსტებას, როგორც ბატერვორტის. გავსაზღვროთ შესუსტება მოკვეთის სამხვერ მეტ სიხშირეზე.

უპირველესყოვლისა ვიპოვოთ ϵ . ჩებიშევის პოლინომის ფორმულიდან $T_n(1) = 1$ ნებისმიერი n -თვის. ამიტომ $K_p(1) = 0,5$ იმ შემთხვევისთვის, როდესაც $\epsilon = 1$.

მესამე რიგის ჩებიშევის პოლინომისთვის

$$T_3(\omega_r) = 4\omega_r^3 - 3\omega_r$$

საიდანაც შესუსტება, რომელიც შეაქვს ჩებიშევის ფილტრს უთანაბრობის ერთეულოვანი კოეფიციენტით სიხშირეზე $\omega = 3\omega_r$, შეადგენს.

$$\Delta_{ch} = 10 \lg[1/(1+99^2)] = -39,9.dB$$

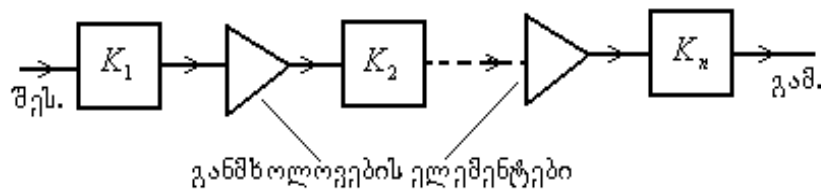
ავლნიშნავთ, რომ ანალოგურ პირობებში მესამე რიგის ბატერვორტის ფილტრი უზრუნველყოფს შესუსტებას

$$\Delta_{Bat} = 10 \lg[1/(1+3^6)] = -28,6.dB$$

ამგვარად, ჩებიშევის ფილტრი უფრო კარგათ ჩაახშობს გატარების ზოლის გარეთ მდებარე სიხშირეებს

6.3 ფილტრების რეალიზაცია

ფილტრების სინთეზის უკანასკნელი ეტაპია მოწყობილობის პრინციპიალური სქემის მოძებნა. ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ ე.წ. სტრუქტურულ სინთეზს, როდესაც წრედი წარმოიქმნება გარკვეული რაოდენობის კვანძების კასკადური ჩართვით, რომელნიც ერთმანეთისაგან არიან განცალკევებული იდეალური განმხოლოვების ელემენტებით, როგორც ნაჩვენებია ნახაზზე.

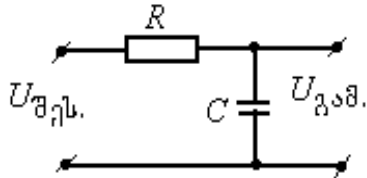


ასეთი წრედის სიხშირული გადაცემის კოეფიციენტი $K(j\omega) = K_1(j\omega)K_2(j\omega) \dots K_n(j\omega)$.

გადაცემის კოეფიციენტები $K_1(j\omega), K_2(j\omega), \dots, K_n(j\omega)$ უნდა იყოს ისეთები, რომ მოახდინონ $K(p)$ ფუნქციის პოლუსების რეალიზაცია, რომელნიც იყო განსაზღვრული ადრე აპროქსიმაციის ეტაპზე.

დაბალსიხშირული ფილტრის სინთეზისთვის საჭიროა ორი ტიპის კვანძები-პირველი რიგის ერთი ნამდვილი პოლუსით და მეორე რიგის, რომელსაც გააჩნია ერთი წყვილი კომპლექსურად შეწყვილებული პოლუსები.

პირველი რიგის რგოლი.

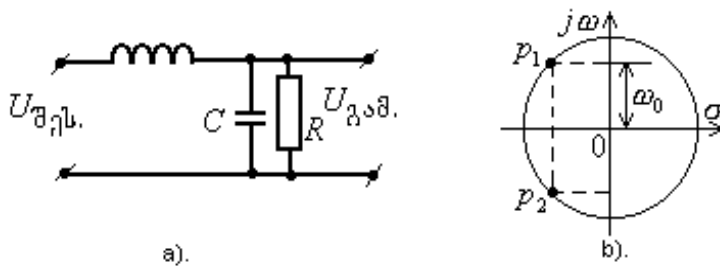


ასეთი სახის უმარტივესი რგოლი არის Γ -სებური ოთხპოლუსა, რომლისთვისაც ძაბვით გადაცემის ფუნქცია

$$K(p) = \frac{1}{1 + pRC}$$

პოლუსის კოორდინატა $p_1 = -1/(RC)$.

მეორე რიგის რგოლი. გადაცემის ფუნქციის ორი კომპლექსურად შეუღლებული პოლუსის რეალიზაცია შეიძლება Γ -სებური ოთხპოლუსათი, რომელიც ნაჩვენებია ნახაზზე.



ამ რგოლისთვის ძაბვით გადაცემის ფუნქციას ექნება სახე

$$K(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2a.p + \omega_0^2}$$

სადაც $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$; $a = 1/(2RC)$.

გადაცემის ფუნქციას აქვს პოლუსები წერტილებში

$$p_{1,2} = -a \pm j\sqrt{\omega_0^2 - a^2}$$

რომელნიც და შეფარდებისგან დამოკიდებულებით შეიძლება იყოს როგორც კომპლექსურად შეუღლებული, ასევე ნამდვილი.

მაგალითი. განვახორციელოთ მესამე რიგის დაბალსიხშირული ფილტრი მოკვეთის სიხშირით 10^5 Hz . ფილტრის დატვირთვა არის რეზისტორი წინააღმდეგობით $R = 0.5 \text{ k}\Omega$.

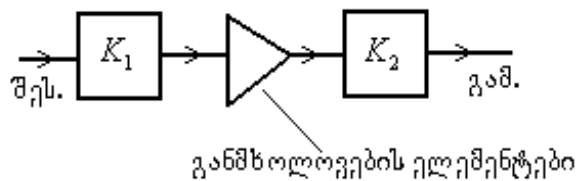
როგორც ნაჩვენებია იყო, ასეთ ფილტრს აქვს სამი პოლუსი კოორდინატებით

$$p_{1,2} = -10^5 (\cos 60^\circ \pm j \sin 60^\circ) = 5 \cdot 10^4 \pm j 8,66 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$$

$$p_3 = -10^5 \text{ s}^{-1}$$

აქ განხორციელებულია ნორმირებული ცვლადიდან p_r ჭეშმარიტ კომპლექსურ სიხშირეზე $p = W_r p_r$.

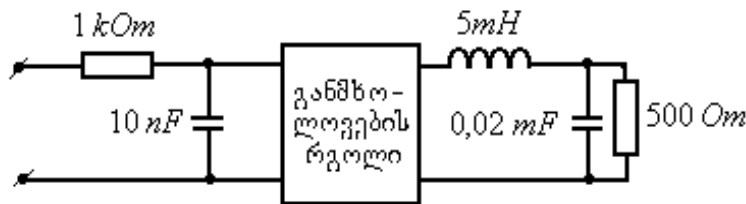
ზემოთაღნიშნულიდან გამომდინარეობს, რომ სინთეზირებადი ფილტრი შესდგება თითო პირველი რიგის რგოლისაგან პოლუსით p_3 და მეორე რიგის რგოლისგან პოლუსებით p_1, p_2 და გამხოლოვების კვანძით:



შესაბამისი ფორმულიდან პირველი რიგის რგოლს ექნება დროის მუდმივა $RC = 1/W_r = 10^{-5} \text{ s}$.
 . თუ ამოვირჩევთ $C = 10 \text{ nF}$, რეზისტორის წინააღმდეგობა იქნება $R = 10^{-5} / C = 1 \text{ k}\Omega$.

დავუშვათ, რომ მეორე რიგის რგოლში შემავალი წინააღმდეგობის როლს ასრულებს დატვირთვის წინააღმდეგობა. შესაბამისი ფორმულიდან, კომპლექსურად შეუღლებულ ფესვების წყვილს უქნება აუცილებელი ნამდვილი ნაწილი, თუ $1/(2RC) = -\text{Re } p_{1,2} = 5 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$. აქედან $C = 1/(10^6 \cdot R) = 0,02 \text{ mF}$. საბოლოოდ, ინდუქციობა $L = 1/(W^2 C) = 5 \text{ mH}$.

მაშინ პრინციპიალურ სქემას აქვს სახე, ამოყვანილი ნახაზზე.



მაგალითი. მოვახდინოთ მეორე რიგის დაბალსიხშირული ჩებიშევის ფილტრის რეალიზაცია, რომელიც დატვირთულია რეზისტორით $1 \text{ k}\Omega$. საწყისი მონაცემებია: მოკვეთის სიხშირე- $w = 10^5 \text{ s}^{-1}$, უთანასწორობის კოეფიციენტი $e = 1$.

მეორე რიგის ჩებიშევის ფილტრის რეალიზაციისათვის საკმარისია ერთი Γ - სეზური RLC - რგოლი.

ცნობილია, რომ ჩებიშევის ფილტრის გადაცემის ფუნქციის პოლუსები მდებარეობენ ელიფსზე (იხილეთ შესაბამისი ლიტერატურა). კომპლექსურ სიბრტყეზე $p_r = s_r + jW_r$, ელიფსის განტოლებას აქვს სახე

$$\left(\frac{s_r}{sha}\right)^2 + \left(\frac{s_r}{cha}\right)^2 = 1$$

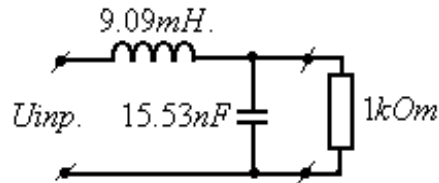
რადგან $e = 1$, $a = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) = 0,4407$

შესაბამის ბატტერვორტის ფილტრს ექნება გადაცემის ფუნქცია ორი პოლუსით
 $p_1 = 0,707(-1 + j)$, $p_2 = 0,707(-1 - j)$

ჩებიშევის ფილტრის გადაცემის ფუნქციის პოლუსების აბსცისები ტოლი იქნება $-0.707sha = -0.322$. პოლუსების ორდინატები იქნება $\pm 0.707ch.a = \pm 0.777$. ანუ შეგვიძლია ჩავწეროთ $p_{1,2} = -0.322 \pm j0.777$. თუ გადავალთ არანორმირებულ სიხშირეზე $p_{1,2} = -3.22 \cdot 10^4 \pm j7.77 \cdot 10^4 s^{-1}$.

ტევადობას ვპოულობთ მეორე რიგის რგოლის გადაცემის ფუნქციის პოლუსების კოორდინატების ფორმულიდან. თუ a გაუტოლებთ სასურველ პოლუსთა აბსცისებს: $a = 1/(2RC) = 3.22 \cdot 10^4 s^{-1}$, საიდანაც $C = 15.53 nF$.

ინდუქციობა განისაზღვრება წარმოსახვით ღერძზე პოლუსთა კოორდინატთა განტოლებიდან: $\sqrt{w^2 - a^2} = 7.77 \cdot 10^4 s^{-1}$. ამოხსნის შედეგად მივიღებთ $w^2 = 1/(LC) = 7.08 \cdot 10^9 s^{-2}$. $L = 1/(w^2 C) = 9.09 mH$. ე.ი. მონაცემების შესაბამისი ფილტრის რეალიზაცია შესაძლებელია სქემით, რომელიც ნაჩვენებია ნახაზზე.



6.4 მაღალსიხშირული ფილტრის რეალიზაცია

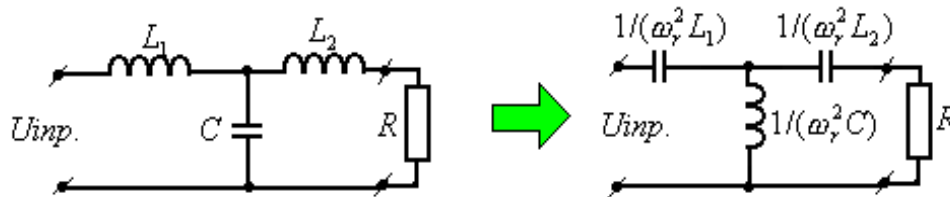
მაღალსიხშირული ეწოდება ფილტრს, რომელიც მინიმალური შესუსტებით ატარებს რხევებს მოკვეთის სიხშირის w_r ზევით.

მაღალსიხშირული ფილტრის სქემა შეიძლება მივიღოთ პირდაპირ, თუ სინთეზირებულია იგივე მოკვეთის სიხშირის დაბალსიხშირული ფილტრი. ამისათვის წრედების თეორიაში გამოიყენება ხერხი, რომელსაც უწოდებენ სიხშირის გარდაქმნას.

გადავიდეთ ცვლადიდან p , რომელიც გამოიყენება დაბალსიხშირული ფილტრის აღწერისთვის, ახალ სიხშირულ ცვლადზე s , ისეთზე რომ $p = w_r^2 / s$. ამ დროს წერტილს $p = 0$ შეესაბამება უსასრულოდ დაშორებული წერტილი s სიბრტყეში. ორ წერტილს $p_{1,2} = \pm jw_r$ წარმოსახვით ღერძზე შეესაბამება ორი წერტილი $s_{1,2} = \mp jw_r$, განსხვავებული საწყის უბისგან მხოლოდ ნიშნებით. ამიტომ მოსალოდნელია, რომ დაბალსიხშირული ფილტრისაგან სიხშირული გარდაქმნით სინთეზირებული ფილტრის ამპლიტუდურ - სიხშირული მახასიათებელი, ნამდვილად შეესაბამება მაღალსიხშირულ ფილტრს.

ყოველი კონდენსატორი, რომელსაც დაბალსიხშირულ ფილტრში შეესაბამება გამტარებლობა pC , უნდა იყოს შეცვლილი $\omega_r^2 C/s$ გამტარებლობიან ელემენტზე, ე.ი. ინდუქციურ კოჭაზე. ანალოგიურად, კოჭა ინდუქციურობით L დაბალსიხშირულ ფილტრში უნდა შეიცვალოს მაღალსიხშირულზე გარდაქმნისას კონდენსატორით $C = 1/(\omega_r^2 L)$. რეზისტული ელემენტი გადასვლისას რჩება უცვლელი.

აღწერილი გადასვლა ნაჩვენებია ქვემოთამოყვანილ ნახაზზე.

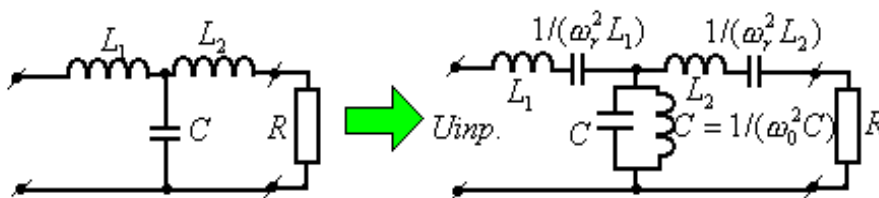


6.5 ზოლოვანი ფილტრების რეალიზაცია

ზოლოვანი ფილტრი მცირე შესუსტებით ატარებს სიხშირეებს მხოლოდ იმ სიხშირულ ზოლში, რომელნიც მდებარეობენ $\omega_0 \neq 0$ წერტილის ახლოს. თუ სინთეზირებულია დაბალსიხშირული ფილტრი მოცემული მოკვეთის სიხშირით, შესაძლებელია პირდაპირ გადავიდეთ ზოლოვან ფილტრზე ცვლადის შეცვლით $p = s + \omega_0^2/s$.

ამ დროს წერტილს $s = j\omega_0$ პასუხობს წერტილი $p = 0$ და, ამგვარად, დაბალსიხშირული ფილტრის ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებლის მაქსიმუმი ნოლოვან სიხშირეზე ზოლოვან ფილტრში გვექნება სიხშირეზე ω_0 . რადგან $pC = sC + \omega_0^2 C/s$, კონდენსატორის გამტარებლობას, რომელიც გამოყენებულია დაბალსიხშირულ ფილტრში, ზოლოვან ფილტრში შეესაბამება პარალელური რხევითი რგოლის გამტარებლობა, რომელიც შექმნილია კონდენსატორით C და კოჭათი $L = 1/(\omega_0^2 C)$. აღსანიშნავია, რომ ეს რგოლი დარეგულირებულია სიხშირეზე ω_0 .

ანალოგიურად, ტოლობიდან $pL = sL + \omega_0^2 L/s$ ვასკვნით, რომ კოჭა L გარდაიქმნება კოჭის და კონდენსატორის $C = 1/(\omega_0^2 L)$ მიმდევრობით ჩართვაში, ე.ი. მიმდევრობით რხევით კონტურში. აღწერილი ნაჩვენებია ქვემოთამოყვანილ ნახაზზე.



აქ განხილული მაგალითები გვიჩვენებენ, რომ სიხშირული ფილტრების სინთეზის დროს დაბალსიხშირული ფილტრები თამაშობენ ფილტრი-პროტოტიპების როლს, რომელნიც გვაძლევენ საშუალებას შემდგომში გადავიდეთ სხვა ტიპის ფილტრების სქემებზე.

რეზონანსული ზოლოვანი ფილტრები. ასეთი ფილტრების ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებლები საკმაოდ უახლოვდებიან მართკუთხას, მაგრამ გატარების ზოლი საკმაოდ ვიწროა. ასეთი ფილტრები გამოიყენება ძირითადად სიხშირის გარდაქმნის კვანძებში 10 მეგაჰერცის ქვევით.

განვიხილოთ LC წრედის გაანგარიშება.

რეზონანსული წრედისთვის ტალღის სიგრძე (მეტრი) და (მეგაჰერცი) დაკავშირებულნი არიან შეფარდებით $f_0 = 300 / \lambda$.

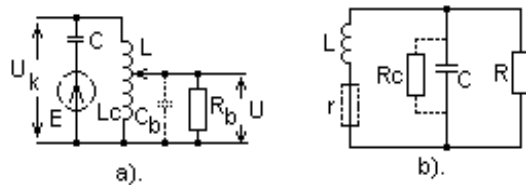
L -ის (მიკროჰენრი) და C -ს (პიკოფარადი) გამოანგარიშებისას გამოიყენება ფორმულა $LC = 25300 / f_0^2$, სადაც L და C -წრედის სრული ინდუქტივობა და ტევადობაა. (აქ იგულისხმება, რომ C -ში უნდა გავითვალისწინოთ აგრეთვე ინდუქციური კოჭის ტევადობა, შემაერთებელი გამტარების ტევადობა და ა.შ.).

რეზონანსული წრედის სიხშირეზე დიდ გავლენას ახდენს დატვირთვის წრედი, რასაც ჩართვის p კოეფიციენტით ითვალისწინებენ.

თუ კავშირი ავტოტრანსფორმატორულია $p = L_c / L$, ხოლო ტრანსფორმატორული კავშირის შემთხვევაში $p = M / L$, სადაც M -გრაგნილების ურთიერთინდუქციობაა. ტევადური კავშირის დროს $p = C_1 / (C_1 + C_2)$. L და C -ს უმნიშვნელო ცვლილება ცვლის რეზონანსულ სიხშირეს სიდიდით.

გავნსაზღვროთ რხევითი წრედის ძაბვით გადაცემის კოეფიციენტი K_k .

$K_k = U_k / E$. რეზონანსული სიხშირის დროს, როცა $f = f_0$, $K_k = Q$ - რხევითი წრედის ვარგისიანობაა, რომელიც დამოკიდებულია კოჭის ვარგისიანობაზე- Q_L , ტევადობის ვარგისიანობაზე- Q_C და გარე წრედის წინააღობაზე- R_b .



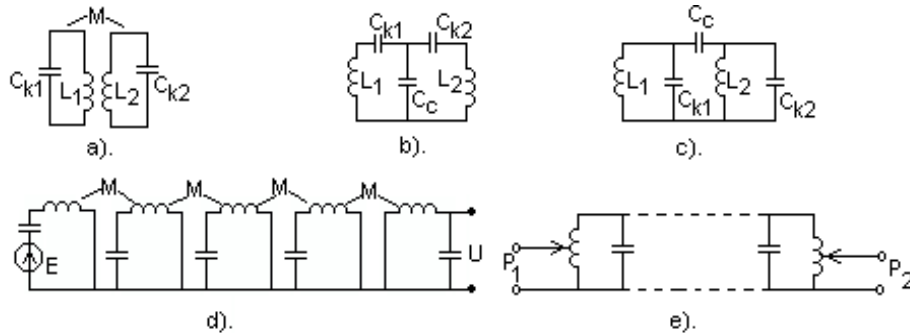
ნახ.4

$Q_L \approx r_L / 6,3 f_0 L$ -კოჭის გამტარის იზოლაციაში, გულარში და აქტიურ წინააღობაში ენერჯის კარგვის პროპორციულია. ჩვეულებრივ $Q_L = 50 \dots 250$. აქ $f_0 - MHz, L - mH, r_L - OM$.

$Q_C = 6,3 f_0 C R_c 10^{-3}$, სადაც $f_0 - MHz, C - pF, R_c - kOM$. ჩვეულებრივ $Q_C = 400 \dots 1000$.

წრედის რეზულტიური ვარგისიანობა $Q = Q_L / (1 + Q_L / Q_C + Q_L f_0 L / 159 R)$ სადაც $f_0 - MHz, L - mH, R - kOM$.

შეკავშირებული რგოლები. კავშირის ყველაზე გავრცელებული ხერხები ნაჩვენებია ნახ.5. *a* -ტრანსფორმატორული, *b* -შიდა ტევადური, *c* -გარე ტევადური.



ნახ.5

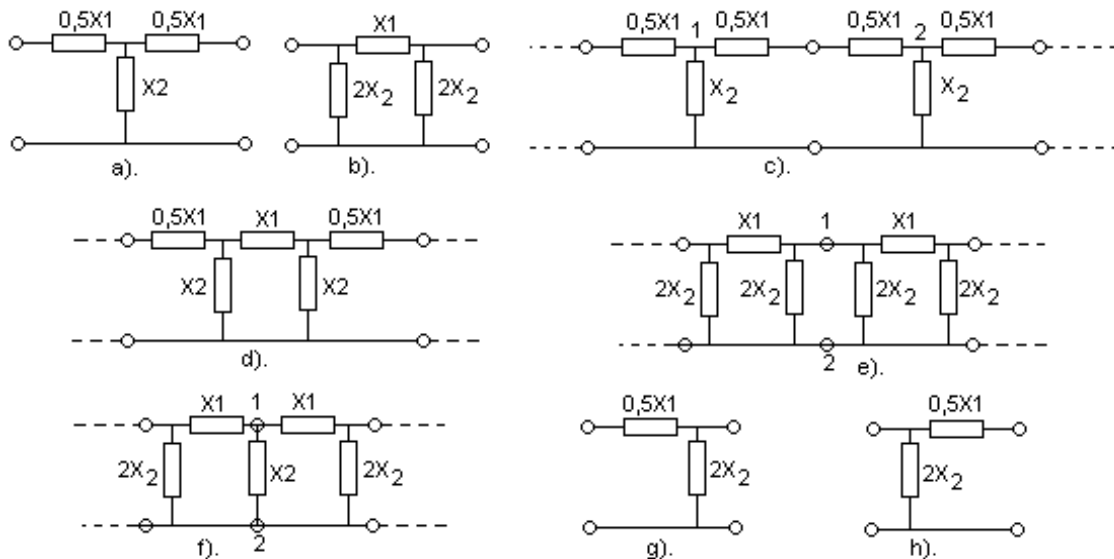
წრედები ჩვეულებრივ აეწყობა f_0 სიხშირეზე. კავშირს წრედებს შორის განსაზღვრავს კოეფიციენტი $k \ll 1$. მაგალითად 5 *a* -თვის $k = M / \sqrt{L_1 L_2}$, 5 *b* -თვის $k = \sqrt{C_{k1} C_{k2} / C_c}$, 5 *c* -თვის $k = C_c / \sqrt{C_{k1} C_{k2}}$.

ფილტრის გადაცემის კოეფიციენტი განისაზღვრება საბოლოო რგოლის ძაბვის შეფარდებით პირველ რგოლში აღძრულ ელექტრომაგნიტურ ძალებთან E -ნახ.5. იგი რთულად არის დამოკიდებული რგოლებთან შორის კავშირის კოეფიციენტზე და სიხშირეზე. ჩვეულებრივ რგოლების ვარგისიანობას არჩევენ ერთნაირს, ხოლო რგოლებშორის კავშირის კოეფიციენტებს დაახლოვებით $k = 1/Q$ ტოლს. მაშინ გადაცემის კოეფიციენტების მნიშვნელობები რეზონანსული სიხშირის დროს ზოლოვანი ფილტრისთვის როცა $n = 1 \div 8$ მოყვანილია ცხრილში

n	1	2	3	4	5	6	7	8
K	Q	Q/2	Q/3	Q/5	Q/8	Q/13	Q/21	Q/34

იმისათვის, რომ შეამცირონ კარგები პირველ და ბოლო რგოლებში ჩართვის შედეგად, ხშირად იყენებენ ტრანსფორმატორულ ან ავტოტრანსფორმატორულ კავშირს ამ რგოლებთან, მაგალითად ნახ.5e.

საფეხურისებური ფილტრები. ეს ფილტრები გამოიყენებიან სიხშირეთა ძალზედ ვრცელ დიაპაზონში (1:-100 კილოჰერცი) და შედგებიან ძირითადად ინდუქტივობების და ტევადობებისაგან კვანძებისაგან. ნახ.6*a* -ზე მოყვანილია T-სებური სქემა, ხოლო ნახ.6 -ზე Π-სებური სქემა. x_1 და x_2 რეაქტიული წინააღმდეგობებია ωL ან $1/\omega C$.



ნახ.6

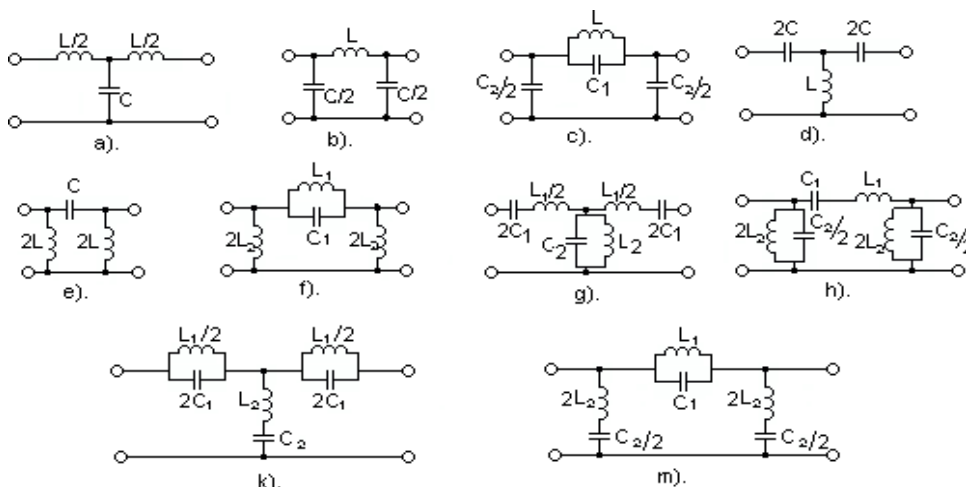
როდესაც წრედებს ჩავრთავთ ნახ.6c მიხედვით, მაშინ წინააღმდეგობები 1 და 2 წერტილს შორის შეიცვლება ერთი წინააღმდეგობით ნახ.6 d . იგივეს აქვს ადგილი Π -სებური წრედების ჩართვის შემთხვევაში (ნახ.6e და ნახ.6f).

ფილტრების შესასვლელზე და გამოსასვლელზე გამოიყენება ნახ.6g,h-ზე მოყვანილი ნახევარრგოლები. ნახევარრგოლი, ნაჩვენები ნახ.6g .-ზე, ჩაირთვება Π -სებური რგოლების შესასვლელზე და T-სებური რგოლების გამოსასვლელზე, ხოლო ნაჩვენები ნახ. 6f - ზე, პირიქით.

ნახ.7 მოყვანილია კონსტრუქციულად ყველაზე მარტივი და გავრცელებული LC ფილტრების სქემები.ნახ.7a – c-ზე მოყვანილია დაბალსიხშირული ფილტრების სქემები. უკანასკნელი უზრუნველყოფს მოკვეთის მაღალ დამრეცობას.

კავშირი ინდუქტიურობას $L(Henry)$, ტევადობას $C(Farad)$, მოკვეთის სიხშირეს $f_0(Hertz)$ და მახასიათებელ წინააღმდეგობას $R_x(Om)$ შორის ნახ7. a,b-ს შემთხვევაში გამოისახება შემდეგი ფორმულებით $L = 0,32R_x / f_0$; $C = 0,32 / (R_x f_0)$; $f_0 = 0,32 / \sqrt{LC}$; $R_x = \sqrt{L/C}$

ნახ.7



ნახ.7c -ზე გამოსახული ფილტრისთვის

$$L = 0,18R_x / f_0; C_1 = 0,085 / (R_x f_0); C_2 = 0,18 / (R_x f_0); f_0 = 0,18 / \sqrt{LC_2}; R_x = \sqrt{L / C_2}$$

ნახ.7d, e -ზე გამოსახული ფილტრებისთვის

$$L = 0,08R_x / f_0; C = 0,08 / (R_x f_0); f_0 = 0,08 / \sqrt{LC}; R_x = \sqrt{L / C}$$

ნახ.7f -ზე გამოსახული ფილტრისთვის

$$L_1 = 0,3R_x / f_0; L_2 = 0,13R_x / f_0; C = 0,13 / R_x f_0; f_0 = 0,13 / \sqrt{L_2 C}; R_x = \sqrt{L_2 / C}$$

ამ ფილტრს გააჩნია მოკვეცილის მაღალი დამრეცობა.

ნახ.7g, h -ზე გამოსახული ზოლოვანი ფილტრებისთვის და -გატარების ზოლის ზედა და ქვედა ზღვრებია. საანგარიშო ფორმულებს ექნება სახე

$$L_1 = 0,3R_x / (f_{02} - f_{01})$$

$$C_1 = 0,08(f_{02} - f_{01}) / (f_{01} f_{02} R_x)$$

$$C_2 = 0,3 / [R_x (f_{02} - f_{01})]$$

$$R_x = \sqrt{L_1 / C_2}$$

ნახ.7k, m -ზე გამოსახული რეჟექტორული ფილტრებისთვის f_{01} და f_{02} -რეჟექციის ზედა და ქვედა ზღვრებია. საანგარიშო ფორმულებს ექნება სახე

$$L_1 = 0,3R_x (f_{02} - f_{01}) / f_{01} f_{02}$$

$$C_1 = 0,08 / R_x (f_{02} - f_{01})$$

$$L_2 = 0,08R_x (f_{02} - f_{01})$$

$$C_2 = 1,25(f_{02} - f_{01}) / f_{01} f_{02} R_x$$

$$R_x = \sqrt{L_2 / C_1}$$