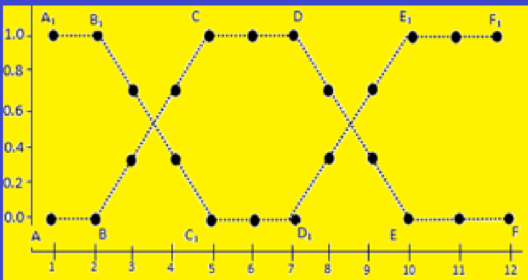
მერაბ ახობაძე

არამკაფიო სიმრავლეთა თეორიის მათემატიკური საფუძვლები: არამკაფიო ალგორითმები



„სტუ-ს IT კონსალტინგის ცენტრი"

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

მერაბ ახობაძე

არამკაფიო სიმრავლეთა თეორიის მათემატიკური საფუძვლები: არამკაფიო ალგორითმები

დამტკიცებულია:
სტუ-ს „IT-კონსალტინგის“
სამეცნიერო ცენტრის
სარედაქციო-საგამომცემლო
კოლეგიის მიერ

თბილისი

2017

უაკ 004.6

განხილულია არამკაფიო სიმრავლეთა თეორიის მათემატიკური საფუძვლები, იმ მოსაზრებით, რომ ადამიანის აზროვნების ელემენტებია არა რიცხვები, არამედ გარკვეული არამკაფიო სიმრავლეების ან ობიექტთა კლასების ელემენტები, რომელთათვისაც გადასვლა „კლასისადმი მიკუთვნებიდან" - „არა მიკუთვნებაზე" ხდება არა ნახტომისებურად, არამედ უწყვეტად. არამკაფიობა, რომელიც ახასიათებს ადამიანის აზროვნებას, გვაძლევს საბაბს ვივარაუდოთ, რომ ამ პროცესის საფუძველია არა ტრადიციული ორმნიშვნელობიანი ან მრავალმნიშვნელობიანი ლოგიკა, არამედ ლოგიკა არამკაფიო ჭეშმარიტებით, არამკაფიო კავშირებით და გარდაქმნა არამკაფიო წესებით. ჩვენი აზრით, საწორედ ასეთი არამკაფიო ლოგიკა თამაშობს ძირითად როლს ადამიანის აზროვნების ერთ-ერთ ყველაზე მნიშვნელოვან – ინფორმაციის შეფასების უნარში. დამხმარე სახელმძღვანელო გამიზნულია ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების სპეციალობის ბაკალავრების, მაგისტრანტებისა და დოქტორანტებისათვის.

რეცენზენტები:

- პროფ. გ. ღვინეფაძე,
- პროფ. თ. კაიშაური

პროფ. გ. სურგულაძის რედაქციით

ISBN 978-9941-0-8693-9

შინაარსი

შესავალი 5
თავი I. არამკაფიო სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები . 7
1.1 შესავალი არამკაფიო სიმრავლეთა თეორიაში 7
1.1.1 არამკაფიო ლინგვისტური ცვლადები სოციალური სისტემების ანალიზის, მოდელირებისა და მართვისათვის 8
1.1.2 ლინგვისტური და არამკაფიო ცვლადები 11
1.1.3 არამკაფიო სიმრავლეები 13
1.1.4 არამკაფიო ცვლადებს შორის მარტივი მიმართებები 17
1.1.5 არამკაფიო ფუნქციების და მიმართებების აღწერა არამკაფიო ალგორითმების საშუალებით 19
1.2 შესაძლებლობის ზომები და არამკაფიო სიმრავლეები 21
1.3 ოპერაციები არამკაფიო სიმრავლეებზე 37
1.4 არამკაფიო ინტერვალების პრაქტიკული გამოთვლა. .51
1.4.1 არამკაფიო ინტერვალის პარამეტრული წარმოდგენა 51
1.4.2 მაგალითები 53
თავი II. ინტეგრალური აღრიცხვა არამკაფიო სიმრავლეთა თეორიაში 54
2.1. არამკაფიო ზომის განსაზღვრა და მისი ძირითადი თვისებები 54
2.2. სუჯენოს g_λ ზომები და მათი თვისებები, სემანტიკური სპექტრი 60
2.3. არამკაფიო ინტეგრალის ძირითადი თვისებები . . . 65
2.4. არამკაფიო ინტეგრალი არამკაფიო სიმრავლეეზე. გაფართოებული არამკაფიო ზომები 79
2.5 არამკაფიო ალგორითმები 83
ლიტერატურა 90

შესავალი

კომპიუტინგის ეპოქამ გამოიწვია ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდების გამოყენების სფეროს სწრაფი გაფართოება, ძირითადად მათი საშუალებით ხორციელდება ეკონომიკური, ურბანისტული, სოციალური, ბიოლოგიური და სხვა სისტემების მათემატიკური მოდელირება და მართვის პრობლემების გადაჭრა.

აღნიშნული მეთოდოლოგია დღეისათვის წარმატებით გამოიყენება ჰუმანისტური სისტემების (რომლებშიც მონაწილეობს ადამიანი) ანალიზისათვისაც. ისინი წარმოადგენს იმ მეთოდების მოდიფიკაციას, რომლებიც დიდი ხნის განმავლობაში იქმნებოდა მექანისტური სისტემებისათვის, ე.ი. სისტემებისათვის რომლებიც ემორჩილება მექანიკის, ელექტრომაგნეტიზმის და თერმოდინამიკის კანონებს.

მეცნიერულ აზროვნებაში ღრმად დამკვიდრდა ტენდენცია, რომ მოვლენის აღქმა გაიგივებული იყოს მისი რაოდენობრივი მახასიათებლების ანალიზის შესაძლებლობასთან. მიუხედავად ამისა უკანასკნელ პერიოდში მათემატიკური მეთოდების გამოყენებამ ჰუმანისტური სისტემების მოდელირებისათვის გვიჩვენა, რომ ანალიზის ჩვეულებრივი რაოდენობრივი მეთოდები მიუღებელია სისტემებისათვის და საერთოდ ყველა სისტემისათვის, რომელიც სირთულით ჰუმანისტური სისტემის მსგავსია.

მოყვანილი თეზისის საფუძველია ე.წ არათავსებადობის პრინციპი, რომლის შინაარსიც მდგომარეობს შემდეგში: რაც უფრო რთულია სისტემა, მით უფრო

ნაკლებად შეგვიძლია მისი „ყოფაქცევის" ზუსტი და ამავე დროს პრაქტიკულად ღირებული დახასიათება.

სისტემებისათვის, რომელთა სირთულე აჭარბებს გარკვეულ ზღვრულ დონეს, სიზუსტე და პრაქტიკული აზრი თითქმის ერთმანეთის ურთიერთგამომრიცხავი მახასიათებლებია. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, რაც უფრო ღრმად ვაანალიზებთ რეალურ ამოცანას, მით უფრო რთული ხდება მისი ამოხსნა.

სწორედ ამოტომ ჰუმანისტური სისტემების ზუსტ რაოდენობრივ ანალიზს მოსალოდნელია არ ჰქონდეს დიდი პრაქტიკული ღირებულება რეალური სოციალური, ეკონომიკური და სხვა ამოცანების გადაწყვეტისას, რომლებიც დაკავშირებულია ერთი ადამიანის ან ადამიანთა ჯგუფის მონაწილეობასთან.

წიგნი ორი თავისაგან შედგება:

პირველში განხილულია თანამედროვე მათემატიკის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი და სწრაფად განვითარებადი დისციპლინის – არამკაფიო სიმრავლეთა თეორიის ძირითადი ელემენტები და თვისებები.

მეორე თავი ეხება არამკაფიო ზომის და ინტეგრირების ზოგად თეორიას. აქვე აღწერილია არამკაფიო ინტეგრალისა და ალგორითმების ძირითადი თვისებები.

თავი I

არამკაფიო სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები

1.1. შესავალი არამკაფიო სიმრავლეთა თეორიაში

სისტემების ანალიზის ტრადიციული მეთოდები არა არის საკმარისი ჰუმანისტური სისტემების ანალიზისათვის იმიტომ, რომ ისინი ვერ მოიცავს ადამიანის აზროვნების და ყოფაქცევის არამკაფიობას. ამიტომ ჰუმანისტური სისტემების ანალიზისათვის აუცილებელია მიდგომები, როცა სიზუსტე, სიმკაცრე და მათემატიკური ფორმალიზმი არ წარმიადგენს რაიმე აბსოლუტურად აუცილებელს, არამედ გამოიყენება ისეთი მეთოდოლოგიური სქემა, რომელშიც დასაშვებია არამკაფიობა და ნაწილობრივი ჭეშმარიტებები [1]. ამ თავში განვიხილავთ სწორად ასეთ მიდგომას.

აღნიშნულ მიდგომას აქვს სამი ძირითადი განმასხვავებელი ნიშანი:

ა) გამოიყენება „ლინგვისტური" ცვლადები, რიცხვითი ცვლადების ნაცვლად ან მათთან ერთდ;

ბ) მარტივი მიმართებები აღიწერება არამკაფიო გამონათქვამების საშუალებით;

გ) რთული მიმართებები აღიწერება არამკაფიო ალგორითმებით.

ვიდრე გადავიდოდეთ ჩვენი მიდგომის უფრო დაწვრილებით განხილვაზე, სასარგებლო იქნება მოვიყვანოთ ძირითადი მოსაზრებები, რომლებიც მას უდევს საფუძვლად. თავდაპირველად მოკლედ შევეხოთ ლინგვისტური ცვლადების შინაარსს.

1.1.1 არამკაფიო ლინგვისტური ცვლადები სოციალური სისტემების ანალიზის, მოდელირებისა და მართვისათვის

გამოთვლითი მანქანების, ინფორმაციული ტექნოლოგიების ეპოქის დადგომამ გამოიწვია ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდების გამოყენების სფეროს სწრაფი გაფართოება. თუ ადრე მათი საშუალებით ძირითადად ხორციელდებოდა ეკონომიკური, ურბანისტული, ტექნიკური სისტემების მათემატიკური მოდელირება და მართვის პრობლემების გადაჭრა, დღეისათვის ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდები წარმატებით გამოიყენება სოციალური, ჰუმანიტარული სისტემების კვლევის, მოდელირებისა და მართვისათვის.

თანამედროვე ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდები წარმოადგენენ იმ მეთოდების მოდიფიკაციას, რომლებიც დიდი ხნის განმავლობაში იქმნებოდა ისეთი სისტემებისათვის, რომლებიც ემორჩილებიან მექანიკის, ელექტრომაგნიტიზმის და თერმოდინამიკის კანონებს. ამ ე.წ. კლასიკური მეთოდების დახმარებით მიღწეულმა წარმატებებმა საშუალება მოგვცა ბუნების ბევრ საიდუმლოს ჩავწვდომოდით და შეგვექმნა უფრო და უფრო სრულყოფილი მოწყობილობები.

აღნიშნულმა წარმატებებმა, უფრო მეტად კი იმან, რომ სამყარო ერთიანია და ყველაფერს, ყველა სუბსტანციის მოვლენებს და პროცესებს, „ერთნაირი" კანონები და კანონზომიერებანი უდევს საფუძვლად, განაპირობა აზრი იმის თაობაზე, რომ ამ მეთოდებით (ან მათი მსგავსი მეთოდებით) შეგვესწავლა ისეთი რთული პროცესები როგორიცაა სოციალური, ჰუმანიტარული პროცესები და სისტემები.

ვიცით, რომ რაც უფრო რთულია სისტემა, მით უფრო ნაკლებად შეგვიძლია მისი “ქცევის“ ზუსტად განსაზღვრა. სისიტემებისათვის, რომელთა სირთულე აჭარბებს გარკვეულ ზღვრულ დონეს, სიზუსტე და პრაქტიკული გამოსავლიანობა ურთიერთგამომრიცხავია. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, რაც უფრო ღრმად ვაანალიზებთ რეალურ ამოცანას, მით უფრო რთული ხდება მისი ამოხსნა. სწორედ ამიტომ, სოციალური, ჰუმანიტარული სისტემებისათვის, კლასიკური, რაოდენობრივი მეთოდების გამოყენებისას მიღებულ შედეგებს შეიძლება არ ჰქონოდათ დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა.

საქმე ისაა, რომ როდესაც საქმე გვაქვს სოციალურ სისტემებთან, საჭიროა იმ ფაქტორების გათვალისწინება, რომ ადამიანი ფაქტიურად ოპერირებს არა რიცხობრივი ინფორმაციით, არამედ არამკაფიო ცნებებით, რომლებიც უმეტესწილად ლინგვისტურ ხასიათს ატარებს.

არამკაფიო სიმრავლეების თეორიას საფუძვლად უდევს ის მოსაზრება, რომ ადამიანის ცნობიერებაში ბევრი ობიექტის მიერ ამა თუ იმ თვისების დაკმაყოფილებასა და დაუკმაყოფილებლობას შორის მკაფიო გამიჯვნა არ არსებობს. ამ თვალსაზრისით, ყოველი ენა შეიძლება განვიხილოთ როგორც შესაბამისობა მსჯელობის არის და არამკაფიო ქვესიმრავლეებსა და ამ ენის ტერმინებს შორის.

ქვემოთ განხილულია არამკაფიო სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები, რომელიც ასახვაა იმ მოსაზრებისა, რომ ადამიანის აზროვნების ელემენტებს წარმოადგენს არა რიცხვები, არამედ არამკაფიო სიმრავლეები (სიტყვები, ლინგვისტური ცვლადები). არამკაფიობა. ადამიანის აზროვნების საფუძველს წარმოადგენს არა ტრადიციული ორმნიშვნელიანი ან მრავალმნიშვნელიანი ლოგიკა, არამედ ლოგიკა არამკაფიო ჭეშმარიტებით, არამკაფიო კავშირებით.

ადამიანის აზროვნების უმნიშვნელოვანი ასპექტის – ინფორმაციის შეფასების უნარში, ძირითად როლს თამაშობს მონაცემების, ინფორმაციის გარდაქმნათა არამკაფიო ლოგიკა.

რაიმის შეფასება თავის ბუნებით წარმოადგენს მიახლოებას. ბევრ შემთხვევაში

საჭირო ხდება მონაცემთა უხეში, მიახლოებითი დახასიათება, ვინაიდან ადამიანის

ტვინი ახდენს „ამოცანისათვის საკმარისი ინფორ-მაციის“ (ან „ამოხსნისათვის საკმარისი ინფორმაციის“) კოდირებას არამკაფიო სიმრავლეების ელემენტების სახით, რომლებიც მხოლოდ მიახლოებით აღწერენ ჩვენთ ხელთ არსებულ მონაცემებს. ინფორმაციის ნაკადი, რომელიც მიიღება მხედველობის, სმენის, ყნოსვის და სხვა ორგანოების საშუალებით, გარდაიქმნება ინფორმაციის იმ ვიწრო ნაკადად, რომელიც აუცილებელია ამოცანის მინიმალური სიზუსტით ამოსახსნელად. არამკაფიო სიმრავლეებით ოპერირების შესაძლებლობა და აქედან გამომდინარე ინფორმაციის შეფასების უნარი წარმოადგენს ადამიანის გონების ყველაზე მნიშვნელოვან თვისებას, რაც თვისობრივად განასხვავებს ადამიანის აზროვნებას ე.წ. მანქანური აზროვნებისაგან.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, სისტემების ანალიზის ტრადიციული, რაოდენობრივი მეთოდები არ არის საკმარისი, სოციალური, ჰუმანისტური სისტემების კვლევისა და მართვისათვის. რამეთუ, ისინი ვერ მოიცავენ ადამიანის აზროვნების და ყოფაქცევის არამკაფიობას. აქედან გამომდინარე, სოციალური, ჰუმანისტური სისტემების შესწავლისათვის აუცილებელია ისეთი მიდგომების და მეთოდების შემუშავება, როდესაც სიზუსტე, სიმკაცრე და მათემატიკური ფორმალიზმი არ წარმოადგენენ აბსოლიტურ აუცილებლობას. ასეთი

სისტემებისათვის გამოყენებული უნდა იქნას ისეთი მეთოდოლოგიური სქემა, რომელშიც დასაშვებია არამკაფიობა და ნაწილობრივი ჭეშმარიტებები.

ქვემოთ შემოვიტანოთ ძირითადი ცნებები, რომლებიც საფუძვლად უდევს არამკაფიო სიმრავლის თეორიას.

1.1.2. ლინგვისტური და არამკაფიო ცვლადები

როგორც ავღნიშნეთ, ინფორმაციის შეფასების უნარი არსებით როლს თამაშობს რთული მოვლენების შესწავლისას. ადამიანის უნარი, შეაფასოს ინფორმაცია ყველაზე მკაფიოდ ჩანს ენების გამოყენებისას. სასაუბრო ენის ყოველი სიტყვა შეიძლება განვიხილოთ როგორც მსჯელობების სრული არის, არამკაფიო ქვესიმრავლეთა აღმწერი.

თუ ობიექტის ფერს განვიხილავთ როგორც რაიმე ცვლადს, მაშინ ამ ცვლადის მნიშვნელობები: წითელი, ლურჯი, ყვითელი, მწვანე და სხვ. წარმოადგენს არამკაფიო ცვლადებს. აქ აუცილებელია შევნიშნოთ, რომ ცვლადის – „ფერი“ მნიშვნელობა გამოსახული ბუნებრივი ენის ცნებით – „წითელი“, გაცილებით ნაკლებად ზუსტია, ვიდრე რიცხვი, რომელიც აღნიშნავს მოცემული ფერის შესაბამისი ტალღის სიგრძეს.

თუ არსებითი სახელი – „ყვავილის“ მნიშვნელობა არის არამკაფიო ქვესიმრავლე -M, ხოლო ზედსართავი სახელი - „წითელი“–არამკაფიო ქვესიმრავლე - N , მაშინ, „წითელი ყვავილის“ მნიშვნელობა იქნება M და N -ის თანაკვეთა.

ამ მაგალითში, ცვლადის („ფერის“) მნიშვნელობებია ელემენტარული ცნებები: „წითელი“, „ლურჯი“, „ყვითელი“ და სხვ.

ზოგადად, ასეთი ცვლადების მნიშვნელობებს შეიძლება წარმოადგენდეს, რაიმე სპეციალური ენის წინადადებები და შესაბამისად ასეთ ცვლადებს უწოდებენ ლინგვისტურ ცვლადებს. მაგალითად, არამკაფიო ცვლადმა „სიმაღლე“ შეიძლება მიიღოს შემდეგი მნიშვნელობები: „მაღალი“, „დაბალი“, „საკმარისად მაღალი“, „ძალიან მაღალი“, „ძალიან, ძალიან მაღალი“, „მაღალი, მაგრამ არც ისე“, „მეტ–ნაკლებად მაღალი“ და ა.შ. ეს მნიშვნელობები წარმოადგენს წინადადებებს, რომლებიც წარმოქმნილია ცნებით „მაღალი“ ან „დაბალი“, „საკმარისად“, „მეტი“ და „ნაკლაბი“. აქედან გამომდინარე ზემოთ მოყვანილი განმარტების თანახმად ცვლადების „სიმრავლე“ არის ლინგვისტური.

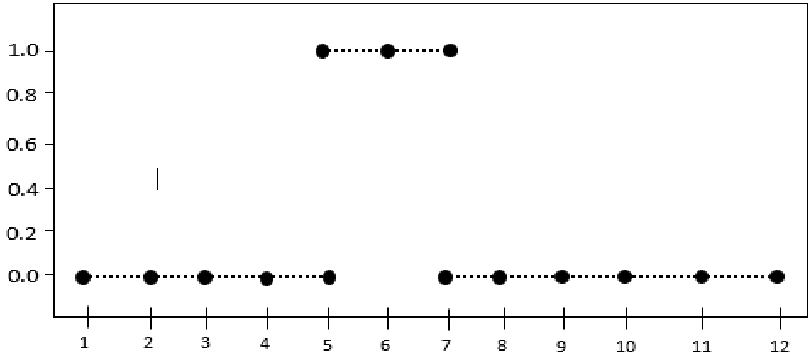
ძირითადად ლინგვისტური ცვლადებით აღიწერება რთული ან „ცუდად“ განსაზღრული მოვლენები. რაოდენობრივ ცვლადებზე უარის თქმით და სიტყვიერ აღწერებზე დაყრდნობით, რომლებითაც ოპერირებს ადამიანი, საშუალება გვეძლევა გავაანალიზოთ იმდენად რთული სისტემები, რომლებისთვისაც ვერ გამოვიყენებდით რაოდენობრივ, კლასიკური ანალიზის მეთოდებს.

1.1.3. არამკაფიო სიმრავლეები

არამკაფიო სიმრავლეები რთულ განსაზღვრებათა აღწერის საშუალებაა.

მაგალითად, მთელი რიცხვების სიმრავლე 1-დან 10-მდე არის მარტივი, ცხადი სიმრავლე. მაგრამ სიმრავლე „მთელი რიცხვები 6-ის სიახლოვეს", არაცხადია. რამეთუ, თუ 7, 8 შეიძლება ჩაითვალოს 6-ის მახლობელ რიცხვებად, ამას ვერ ვიტყვით რიცხვებზე 11 ან 17. ასეთ „უხერხულ” განსაზღვრებას ხსნის არამკაფიო სიმრავლეები, რომელთა

საფუძველზე შეიქმნა მკაფიო ზუსტი თეორია ისეთი ცნების განსაზღვრისათვის როგორიცაა: "6-ის მახლობლად". აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ ის არის სუბიექტური. მოვიყვანოთ გრაფიკული ილუსტრაცია (ნახ.1.1)



ნახ.1.1. მკაფიო სიმრავლე: რიცხვი „6-ის მახლობლად”

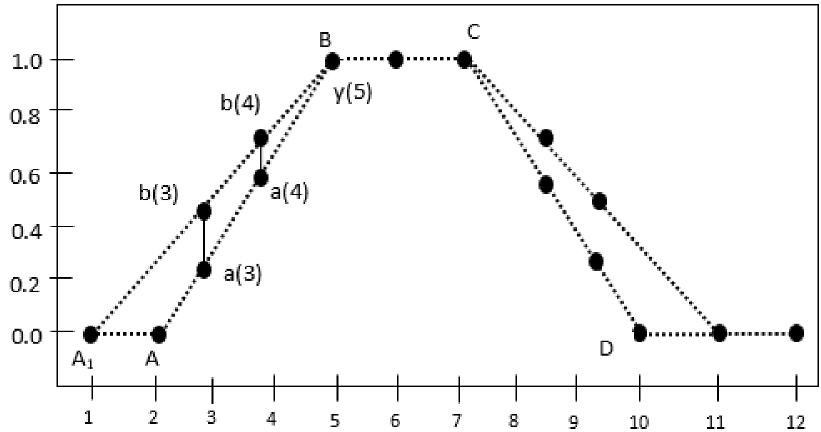
მკაფიო სიმრავლეების შემთხვევაში ზუსტად უნდა განვსაზღვროთ რას მიშნავს ცნება: რიცხვი „6-ის მახლობლად". თუ ჩვენ მივიღებთ, რომ რიცხვები 5-დან 7 არიან „6 მახლობლად" და თუ აბცისათა ღერძზე-y გადავზომავთ მიკუთნების ფუნქციის მნიშვნელობის სიდიდეს, მაშინ მკაფიო სიმრავლეების შემთხვევაში რიცხვების: 5-დან ქვემოთ და 7-ის ზემოთ, მიკუთვნის ფუნქციის მნიშვნელობა იქნება ნულის ტოლი. მხოლოდ რიცხვები 5, 6 და 7 არის „6-ის” მახლობლად და მათი მიკუთვნების ფუნქციის მნიშვნელობა 1-ის ტოლია.

არამკაფიო სიმრავლეების შემთხვევაში ჩვენ (ექსპერ-ტები) ვადგენთ ამა თუ იმ რიცხვების მიკუთნების ფუნქციას „რიცხვ 6“-ის მახლობლად“. მოყვანილ მაგალითში მივიჩნიეთ, რომ რიცხვები 2-ზე ნაკლები და 10-ზე მეტი არაა 6-ის სიახლოვეს. ე.ი მათი მიეკუთნების

ფუნქციის მნიშვნილობა - y „რიცხვ 6“-თან ნულის ტოლია, y=0.

რიცხვები 5-დან 7-ის ჩათვლით ჭეშმარიტად 6-ის სიახლოვესაა, ამიტომ მათი მიკუთნების ფუნქცის მნიშვნელობა y=1.

არამკაფიო სიმრავლის ასაგებად, 2 დან 5 რიცვების დიაპაზონში გავავლოთ წრფე – AB, y=0 დან y=1 - მდე (ნახ.1.2).



ნახ.1.2. არამკაფიო მიკუთვნების ფუნქცია: რიცხვი „ 6 მახლობლად“

ანალოგიურად 7 დან 10 რიცხვების დიაპაზონში ვავლებთ წრფეს-CD. რიცხვების 3,4,8,9 ორდინატების y(3), y(4), y(8), y(9) წარმოადგენს შესაბამისი რიცხვების -3,4,8,9-ის „6-ის მახლობლობის" მიკუთვნების ფუნქციის მნიშვნელობებს. მაგალითად, რიცხვი 4-ის მიკუთვნების ფუნქციის სიდიდეა y(4)=a(4)=0,58. ხოლო რიცხვი 5-ის მიკუთვნების ფუნქციის მნიშვნელობა 1 ტოლია.

ადვილად შევნიშნავთ, რომ არამკაფიო სიმრავლის საზღვარი შეიძლება იყოს სხვადასხვა. იმ შემთხვევაში, თუ

2-ს მივიჩნევდით 6-ის მახლობელ რიცხვად, მაშინ უნდა შევაერთოთ 1 და 5 რიცხვების შესაბამისი აბსცისები (წრფე A_1B). შესაბამისად, შეიცვლებოდა არამკაფიო სიმრავლეების საზღვრები და 3 და 4 რიცხვების მიკუთნების ფუნქციის მნიშვნელობა უკვე იქნებოდა $b(3)$ და $b(4)$.

როგორც ვხედავთ, არამკაფიო სიმრავლის პარამეტრების სიდიდები დამოკიდებელია სუბიექტის თვალსაზრისზე. ანუ, ადექვატური მოდელის შერჩევა დამოკიდებულია ექსპერტების განსწავლულობაზე, მათ მიერ პრობლემის, პროცესის ადექვატურ აღქმაზე. ამაში მდგომარეობს არამკაფიო სიმრავლეების დადებითი და უარყოფითი მხარეები.

არსებობს არამკაფიო სიმრავლეების: „დამატების", „გაერთიანების" და „თანაკვეთის" სხვადასხვა განსაზღვრებები. ისინი ანალოგიურია მკაფიო სიმრავლეებისთვის განსაზღვრული წესებისა. აქ ჩვენ მოვიყვანთ ძირითად განსაზღვრებებს.

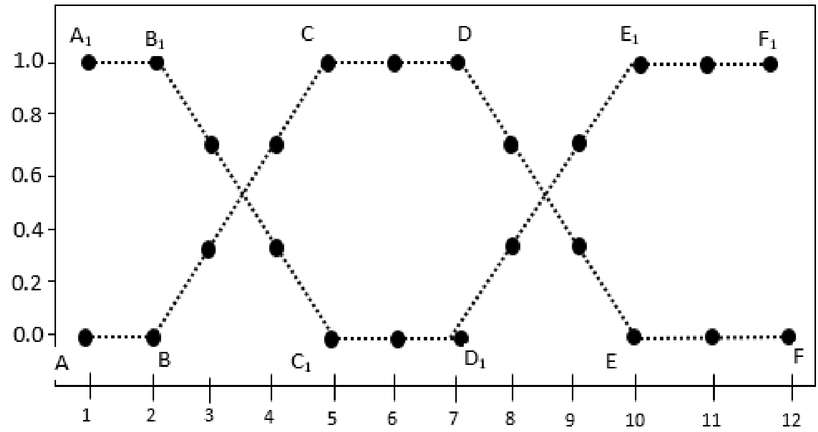
(A) - ეკუთნის A სიმრავლეს, ჩაიწერება შემდეგი სახით $0 \leq A \leq 1$

A - სიმრავლის დამატება ჩაიწერება შემდეგი სახით - $(1 - A)$

$Min\,(A, B)$ - A და B სიმრავლეების თანაკვეთაა.

$Max\,(A, B)$ - A და B სიმრავლეების გაერთიანებაა.

როგორც ვხედავთ, განსაზღვრების თანახმად არამკაფიო სიმრავლის $-A$, „დამატება" არის (1-A). ჩვენ შემთხვევაში, თუ „რიცხვი - 4"-ის, „რიცხვ - 6" თან მიკუთვნების სიდიდე y=0,57-ის ტოლია, ის ასევე 0,43-ით არ ეკუთნის „6-ის მახლობელ" რიცხვებს.



ნახ.3. არამკაფიო სიმრავლის–($ABCDEF$) დამატება რიცხვი „6-მახლობლად" მრუდი ($A_1B_1C_1D_1E_1F_1$)

შეიძლება ითქვას, რომ „მესამის გამორიცხვის კანონი" იყო ის მიზეზი, რომელმაც განსაზღვრა არა-მკაფიო სიმრავლეების თეორიის შემოტანა და მასზე გადასვლა.

არამკაფიო სიმრავლეებს ხშირად „აიგივებენ" ალბათობის თეორიასთან, რამეთუ არამკაფიო სიმრავლეები გამოიყენება ისეთ ამოცანებთან, რომლებიც ფორმულირებულია ალბათობის თეორიის ტერმინებში. ეს გაუგებრობა აგებულია იმაზე, რომ მიკუთვნების ფუნქცია არამკაფიო სიმრავლეების თეორიაში იცვლება 0-დან 1-მდე, ისევე როგორც ალბათობები. მთავარი განსხვავება მათ შორის ისაა, რომ ისინი ზომავს განუზღვრელობის სხვადასხვა ასპექტებს.

არამკაფიო სიმრავლის მიკუთვნების ფუნქცია რთული მდგომარეობის აღმწერი სიდიდეა. დამატებითი მონაცემები მის მნიშვნელობებს ვერ ცვლის, მაშინ

როდესაც ალბათობების მნიშვნელობები იცვლება დამატებითი მონაცემების მიღების მიხედვით.

მოვიყვანოთ კლასიკური მაგალითი არამკაფიო სიმრავლეთა თეორიიდან. გვაქვს ორი, A და B სითხით სავსე ბოთლი. A – ბოთლში მოთავსებული სითხის სასმელ წყალთან მიკუთვნების ფუნქციის მნიშვნელობა 0.9-ის ტოლია. ხოლო ალბათობა იმისა, რომ B ბოთლში მოთავსებული სითხე ეკუთვნის სასმელ წყალს ტოლია 0,9. თუ თქვენ იძულებული ხართ დალიოთ ერთ-ერთი ბოთლიდან, რომელს აირჩევდით?

A ბოთლში არსებული სითხე, მიკუთვნების ფუნქციის მიხედვით (y=0,9) მთლად სასმელი არ არის, მაგრამ მას წააგავს. ის შეიძლება იყოს ჭუჭყიანი წყალი.

ხოლო B-ში მოთავსებული სითხე 90%-ით შეიძლება იყოს სრულიად კარგი სასმელი და 10% - კი იყოს სასიკვდილო. ანუ ის შეიძლება იყოს 100% დასალევი წყალი, ან 100% სასიკვდილო. მაგრამ, ამის გაგება შესაძლებელია მხოლოდ მას შემდეგ როცა მას დავლევთ.

ცხადია, ჩვენ ავირჩევთ A - ჭურჭელს. ადვილად შევამჩნევთ, რომ მიკუთვნების ხარისხი ყოველთვის რჩება ერთიდაიგივე, 0.9 ტოლი.

1.1.4 არამკაფიო ცვლადებს შორის მარტივი მიმართებები

სისტემების ანალიზის რაოდენობრივ მიდგომაში, დამოკიდებულებას ორ რიცხვით (x და y) ცვლადებს შორის ჩვეულებრივ აღწერენ ცხრილის საშუალებით, რომელიც შეიძლება წარმოვიდგინოთ გამონათქვამთა ერთობლიობის სახით. მაგლითად, თუ x უდრის 5, მაშინ y უდრის 0; თუ x უდრის 6, მაშინ y უდრის 14 და ა.შ.

აღწერის ანალოგიური ხერხი გამოიყენება არამკაფიო ცვლადებს შორისაც, მხოლოდ ამ დროს x და y უკვე არამკაფიო ცვლადებია (ლინგვისტური ცვლადები). გამონათქვამებს, რომლებიც აღწერს y-ის დამოკიდებულებას x-ზე, შეიძლება ჰქონდეს ასეთი სახე :

თუ x მცირეა, მაშინ y ძალიან–ძალიან დიდია;

თუ x არც ისე მცირეა, მაშინ y ძალიან დიდია;

თუ x არც მცირეა და არც დიდია, მაშინ y არც ისე დიდია და ა.შ.

არამკაფიო გამონათქვამის სტრუქტურა ასეთია: „ A–დან გამომდინარეობს B", აქ A და B არამკაფიო ცვლადებია. მაგალითად, „თუ ნიკო თავაზიანად გექცევა, მაშინ შენ კეთილად უნდა იყო განწყობილი მის მიმართ,". ამ ტიპის გამონათქვამები ხშირია ყოველდღიურ საუბარში.

აქ x და y არამკაფიო ცვლადებს შორის მიმართება არის მარტივი იმ აზრით, რომ ის შეიძლება აღვწეროთ როგორც „A–დან გამომდინარეობს B" სახის გამონათქვამთა სიმრავლე, სადაც A და B არამკაფიო სიმრავლეების სიმბოლოებია. y–ის x–ზე უფრო რთული დამოკიდებულების აღწერისას კი გამოიყენება არამკაფიო ალგორითმები.

არამკაფიო ალგორითმი არის ინსტრუქციების დალაგებული მიმდევრობა (კომპიუტერული პროგრამის მსგავსად), რომელთაგან ზოგიერთი შეიძლება შეიცავდეს არამკაფიო სიმრავლეებს, მაგალითად:

თუ y დიდია, მაშინ x ცოტათი შევამციროთ;

თუ y არც ისე დიდია და არც ისე მცირე, მაშინ ძალიან ცოტათი გავზარდოთ x;

თუ y მცირეა, მაშინ შეჩერდი; თუ არა, მაშინ x გაზარდე ორით.

ის ფაქტი, რომ ასეთ ალგორითმებში დასაშვებია ანალოგიური ტიპის ინსტრუქციები, ცხადია, მათი საშუალებით შეგვიძლია მიახლოებით აღვწეროთ სხვა რთული მოვლენები.

აღნიშნული მეთოდის მიახლოებითი ბუნება ადექვატურად ასახავს იმ განუზღვრელობას რომელიც დამახასიათებელია ადამიანის ქცევისა და აზროვნებისათვის. აქედეან გამომდინარე არამკაფიო სიმრავლეთა თეორია არის უფრო რეალისტური და ადექვატური მეთოდი სოციალური, ჰუმანისტური სისტემების ანალიზის და მოდელირების, ვიდრე კლასიკური რაოდენობრივი მეთოდები.

მაგრამ აუცილებელია აქვე შევნიშნოთ, რომ ასეთი მიდგომის თეორიული საფუძველი სავსებით მკაცრია. საქმე ისაა, რომ აქ განუსაზღვრელობის წყაროა არა მის საფუძველში ჩადებული თეორია, არამედ ლინგვისტური ცვლადები და ამ ცვლადების და არამკაფიო ალგორითმების გამოყენების ხერხები. ამოცანის გადაწყვეტის სიზუსტის ხარისხი აქ განისაზღვრება ამოცანის მოთხოვნებთან და არსებული მონაცემების სიზუსტის მიხედვით.

1.1.5. არამკაფიო ფუნქციების და მიმართებების აღწერა არამკაფიო ალგორითმების საშუალებით

არამკაფიო ფუნქციის მოცემა არამკაფიო გამონათქვამების საშუალებით ჩვეულებრივი ფუნქციის მოცემის ანალოგიურია $(xf(x))$ სახის წყვილების ცხრილით, სადაც x – არგუმენტის, ხოლო $f(x)$-ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობაა. ცხრილის ნაცვლად ჩვეულებრივი ფუნქცია შეიძლება განვსაზღვროთ ალგორითმულად (ე.ი. პროგრამის საშუალებით).

ანლოგიურად, არამკაფიო ალგორითმის საშუალებით შეიძლება განვსაზღვროთ არამკაფიო ფუნქცია, იგივე შეეხება სიმრავლეებს და მათ შორის არამკაფიო მიმართებებს.

შინაარსით არამკაფიო ალგორითმი ინსტრუქციების დალაგებული მიმდევრობაა (გამომთვლელი მანქანისათვის პროგრამის მსგავსად), რომელთაგან ზოგიერთი შეიძლება შეიცავდეს არამკაფიო სიმრავლეთა სიმბოლოებს, მაგალითად:

თუ y დიდია, მაშინ x ცოტათი შევამციროთ;

თუ y არც ისე დიდია და არც ისე მცირე, მაშინ ძალიან ცოტათი გავზარდოთ x.

თუ y მცირეა, მაშინ შეჩერდი; თუ არა, მაშინ x გავზარდოთ ორით.

ის ფაქტი, რომ ალგორითმში დასაშვებია ასეთი ტიპის ინსტრუქციები, შეგვიძლია მათი საშუალებით მიახლოებით აღვწეროთ სხვადასხვა რთული მოვლენები. აღსანიშნავია რომ, ვინაიდან ეს აღწერები ბუნებით არამკაფიოა, ამიტომ ისინი შეიძლება იყოს მოცემული ამოცანის მიზნის სრულად ადეკვატური. ამ ტიპის არამკაფიო ალგორითმებმა შეიძლება მოგვცეს მიზნის ფუნქციების, სისტემის ფუნქციონირების შეზღუდვების, სტრატეგიების და ა.შ. მიახლოებითი აღწერის ეფექტური ხერხები.

შემდგომში შევჩერდებით ლინგვისტური ცვლადების, არამკაფიო გამონათქვამების და არამკაფიო ალგორითმების ზოგიერთ ძირითად მეთოდსა და თვისებაზე. აღნიშნული მეთოდის მიახლოებითი ბუნება ასახავს განუსაზღვრელობას ადამიანის ყოფაქცევაში და ამიტომ შეიძლება გახდეს ჰუმანისტური სისტემების უფრო რეალისტური ანალიზის საფუძველი.

შემდგომი პარაგრაფებიდან ნათელი გახდება, რომ ასეთი მიდგომის თეორიული საფუძველი სავსებით მკაცრია. საქმე ისაა, რომ აქ განუზღვრელობის წყაროა არა მის საფუძველში ჩადებული თეორია, არამედ ლინგვისტური ცვლადების და არამკაფიო ალგორითმების გამოყენების ხერხები რეალური ამოცანების ფორმულირებასა და ამოხსნაში. სინამდვილეში, ამონახსნის სიზუსტის ხარისხი შეიძლება შეთანხმებული იყოს ამოცანის მოთხოვნებთან და არსებული მონაცემების სიზისტესთან. ასეთი მოქნილობა განსახილველი მოდგომის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი თვისებაა.

1.2. შესაძლებლობის ზომები და არამკაფიო სიმრავლეები

ინფორმაციის მიღებისას არსებობს მონაცემთა ანალიზის სამი ხერხი, იმისდა მიხედვით, თუ რაზე კეთდება აქცენტი; ინფორმაციის სტრუქტურაზე (ლოგიკური მიდგომა), ინფორმაციის შინაარსზე (თეორიულ-სიმრავლური მიდგომა) თუ მის დამოკიდებულებაზე რეალურ ფაქტებთან (მოვლენური მიდგომა).

ინფორმაციული ერთეული განისაზღვრება ობიექტის, თვისების, მნიშვნელობის, დამაჯერებლობის სახით. თვისებას შეესაბამება ფუნქცია, რომელიც გვაძლევს ობიექტის ან საგნის მნიშვნელობას (მნიშვნელობათა სიმრავლეს), რომლის სახელწოდებაც მოცემულია საინფორმაციო ერთეულში. ეს მნიშვნელობა შეესაბამება რაიმე პრედიკატს, ე.ი. მოცემილ თვისებასთან დაკავშირებით უნივერსალური სიმრავლის ქვესიმრავლეს.

დამაჯერებლობა არის ინფორმაციული ერთეულის საიმედოობის მაჩვენებელი. ცხადია, რომ ინფორმაციულ ერთეულში შემავალი ოთხივე კომპონენტი შეიძლება იყოს

შემადგენელი (ობიექტთა სიმრავლე, თვისებათა სიმრავლე, n-ადგილიანი პრედიკატი, დამაჯერებლობის სხვადასხვა ხარისხი). ამ კონტექსტში შეგვიძლია მკაცრად განვასხვაოთ უზუსტობისა და განუსაზღვრელობის ცნებები:

უზუსტობა შეეხება ინფორმაციის შინაარსს (კომპონენტი „მნიშვნელობა"), ხოლო განუსაზღვრელობა მის მართებულობას (კომპონენტი „დამაჯერებლობა"),

ინფორმაციის განუსაზღვრელობა, ხასიათი, აისახება შემდეგი სიტყვებით „შესაძლებელია", „ალბათ", „აუცილებელია", „დამაჯერებელია" და ა.შ.

ინფორმაციის არამკაფიობა, გაბნეულობა, უზუსტობა ახასიათებს შესაბამისი ობიექტის მნიშვნელობისათვის მკაფიო საზღვრის არსებობას. სასაუბრო ენის ბევრი გამონათქვამი არამკაფიოა. მაგალითად შეიძლება მოვიყვანოთ არაზუსტი მკაფიო გამონათქვამი: „$x=y$" ε სიზუსტით ≡ (ტოლობა, (x,y), სიზუსტე ε, 1); არაზუსტი არამკაფიო გამონათქვამია; „x დაახლოებით უდრის y" ≡ (ტოლობა, (x,y), დაახლოებით, 1). არამკაფიო გამონათქვამი „დაახლოებით" ახასიათებს მნიშვნელობების ერთობლიობას, რომლებიც მეტნაკლებად ადეკვატურია ε-ის.

ზემოთქმულიდან გამომდინარე ინფორმაცია შეიძლება იყოს ერთდროულად არამკაფიო და განუსაზღვრელიც, რაზეც მეტყველებს შემდეგი გამონათქვამები: „ფარაში, ალბათ, ბევრი ცხვარია" ≡ (ცხვრების რაოდენობა, ფარა, ბევრი, ალბათ).

მონაცემთა არასრულყოფილების დასახასიათებლად ტრადიციულად გამოიყენება ორი მიდგომა:

ალბათობის თეორია და ცდომილებათა თეორია. ძირითადადი ჰიპოთეზა, რომელიც უზრუნველყოფს ალბათობის თეორიის გამოყენებას მათემატიკურ სტატისტიკაში, მდგომარეობს იმაში, რომ ცდების სივრცეს

შეიძლება ურთიერთცალსახად შევუსაბამოთ ხდომილობათა სივრცე. ყოველ ხდომილობას უკავშირდება მისი რეალიზაციების სიმრავლე (არაცარიელი, თუ მოცემული ხდომილობა არ არის შეუძლებელი), და განსხვავებული ხდომილობების ყოველი წყვილისათვის არსებობს ერთი ცდა მაინც, რომელშიც ერთი ხდომილობა გამორიცხავს მეორეს. ეს ჰიპოთეზა საშუალებას გვაძლევს დავყოთ სარწმუნო ხდომილობა ელემენტარულ ხდომილობად, რომელთაგან თითოეული შეესაბამება რაიმე რეალიზაციას.

სტატისტიკური მონაცემების დამუშავებისას აღნიშნულს მივყავართ დაშვებამდე, რომ არსებობს რეალიზაციების სიმრავლის ისეთი დაყოფა, რომლისთვისაც ყოველი ექსპერიმენტის შედეგს შეიძლება შეუსაბამოთ დაყოფის ერთი და მხოლოდ ერთი ელემენტი, ე.ი შედეგი არის ელემენტარული ხდომილობა. რაც შეეხება ცდომილებათა თეორიას, რომელიც ხშირად გამოიყენება ფიზიკაში, ის ასახავს გაზომვის ხელასწყოს უზუსტობას ინტერვალის სახით. ცდომილებათა თეორიისათვის მიუღებელია განუზღვრელობა: თუ პარამეტრის მნიშვნელობა ზუსტად ცნობილი არ არის, მაშინ ზუსტად არის ცნობილი მისი ცვლადების საზღვრები. როგორც ვხედავთ ალბათობის თეორია და ცდომილებათა თეორია არის უზუსტობის აღწერის ორი პრინციპულად განსხვავებული მიდგომა.

რეალობაში ხშირად წარმოიშობა სიტუაცია, როდესაც შეცდომის ტიპის უზუსტობა გვხვდება ცდების მიმდევრობაში, რომელთაც ვატარებთ შემთხვევითი მოვლენის განსაზღვრისათვის. ადვილი მისახვედრია, რომ ამ შემთხვევაში გარკვეული დამატებითი ჰიპოთეზების გარეშე შეუძლებელია წარმოვადგინოთ მისაღები ინფორმაცია წმინდა ალბათური სახით. ალბათობის

თეორია შეგვიძლია წარმატებით გამოვიყენოთ ზუსტი, მაგრამ რეალიზაციების მიხედვით განაწილებული ინფორმაციის დასამუშავებლად. როგორც კი წარმოიშობა რაიმე უზუსტობა ცალკეულ რეალიზაციაში, ეს მოდელი ხდება მიუღებელი.

უზუსტობის და განუზღვრელობის ტრადიციული მოდელების შეზღუდვების ეს მოკლე განხილვა მოვიყვანეთ იმ მიზნით, რომ დაგვესაბუთებინა უფრო ზოგადი მიდგომის აუცილებლობა, რომელიც შეიცავს ალბათობის თეორიისა და ცდომილობათა თეორიის ელემენტებს.

ქვემოთ განვიხილავთ ასეთ ზოგად მოდგომას და შემოვიტანთ განუზღვრელობის ზომების ახალ ოჯახს – შესაძლებლობის ზომა, რომელიც მჭიდროდ იქნება დაკავშირებული ცდომილობათა თეორიასთნ. სიმრავლის ეს ფუნქციები სავსებით განსხვავდება ალბათური ზომებისაგან. ალბათობა გამოიყენება ცდების ზუსტი, მაგრამ ურთიერთგამომრიცხავი შედეგების დასამუშავებლად, მაშინ როცა შესაძლებლობის ზომა არაზუსტი, მაგრამ შეთანხმებულ მონაცემთა ბაზების აგების ბუნებრივი საშუალებაა.

განვიხილოთ მოვლენათა სიმრავლე, რომელიც დაკავშირებულია არაზუსტ და განუზღვრელ მონაცემთა ბაზასთან. მათ განვიხილავთ როგორც უნივერსალური Ω სიმრავლის ქვესიმრავლეებს. Ω-ს ვუწოდოთ სარწმუნო მოვლენა. ცარიელი სიმრავლე $\emptyset$ გავაიგივოთ შეუძლებელ მოვლენასთან. იგულისხმება, რომ ყოველ $A \subset \Omega$ მოვლენას შეიძლება შევუსაბამოთ ნამდვილი რიცხვი $g(A)$, რომელიც მოიცემა სუბიექტის მიერ ან მიიღება ინფორმაციულ სისტემაში შენახული ინფორმაციის გადამუშავებით. $g(A)$, მნიშვნელობა ასახავს დამაჯერებლობის ხარისხს, რომელიც გააჩნია სუბიექტს A მოვლენის მიმართ.

განმარტების თანახმად $g(A)$ სიდიდე იზრდება დამაჯერებლობის გაზრდით. გარდა ამისა, თუ A სარწმუნო მოვლენაა, მაშინ $g(A)=1$, ხოლო თუ A შეუძლებელი მოვლენაა, მაშინ $g(A)=0$. გვექნება:

$$g(\emptyset)=0 \text{ და } g(\Omega)=1. \tag{1.1}$$

მაგრამ $g(A)=1$ (შესაბამისად $g(A)=0$) ზოგადად არ ნიშნავს, რომ A აუცილებლად არის სარწმუნო (შესაბამისად შეუძლებელი) მოვლენა.

ყველაზე სუსტი აქსიომა, რომელიც შეიძლება მოვითხოვოთ სიმრავლეთა g ფუნქციის განსაზღვრისათვის არის მონოტონურობა ჩადგმის მიმართ:

$$A \subseteq \boldsymbol{B} \Rightarrow g(A) \subseteq g(B). \tag{1.2}$$

ეს აქსიომა გამოხატავს შემდეგ ფაქტს: თუ A მოვლენა იწვევს B მოვლენს, მაშინ იმაში, რომ მოხდება B, სულ ცოტა იმდენად მაინც ვართ დარწმუნებული, რამდენადაც იმაში, რომ მოხდება A.

ასეთი სიმრავლის ფუნქციები შემოღებული იყო სუჯენოს მიერ განუზღვრელობის დასახასიათებლად და მათ უწოდა არამკაფიო ზომები [2]. ა. კოფმანის მიერ შემოთავაზებულია ტერმინი „შეფასება" [4]. ჩვენ მათ ვუწოდებთ განუზღვრელობის ზომებს. შევნიშნავთ, რომ სიმრავლის ეს ფუნქციები არაა ჩვეულებრივი ზომები, ვინაიდან ზოგადად არ აკმაყოფილებს ადიტიურობის აქსიომას.

თუ Ω უსასრულო სიმრავლეა, მაშინ ყოველი $\{A_n\}$ ჩალაგებული სიმრავლეების მიმდევრობისათვის $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq$ ან $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$ შეიძლება შემოვიტანოთ უწყვეტობის პირობა შემდეგი სახით:

$$\lim_{n\to\infty} g(A_n) = g(\lim_{n\to\infty} A_n) \tag{1.3}$$

ქვემოთ ვიგულისხმოთ, რომ განუზღვრელობის ზომა აკმაყოფილებს (1.3) პირობას ზემოთ მოყვანილი ერთ-ერთი ჩალაგებული სიმრავლისათვის ერთობლიობისათვის მაინც.

(1.2) მონოტონურობის აქსიომიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობები:

$$g(A \cup B) \geq \max\big(g(A), g(B)\big), \tag{1.4}$$

$$g(A \cap B) \leq \min\big(g(A), g(B)\big), \forall A, B \subseteq \Omega \tag{1.5}$$

განუზღვრელობის ზომის ერთ-ერთ ზღვრულ შემთხვევაში იგი სიმრავლის ფუნქციაა $\prod$ ისეთი, რომ

$$\prod(A \cup B) = \max\big(\prod(A), \prod(B)\big), \forall A, B \subseteq \Omega \tag{1.6}$$

მათ ეწოდება შესაძლებლობათა ზომები ზადეს მიხედვით.

შევნიშნავთ, რომ (1.6) ფორმულის A, B არაა აუცილებელი თანაუკვეთი სიმრავლები.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ (1.6) პირობა ჭეშმარიტია თანაუკვეთ სიმრავლეებს $A \cap B = \emptyset$ ყოველი წყვილისათვის, მაშინ ის ჭეშმარიტი იქნება სიმრავლეთა (მოვლენათა) ნებისმიერი წყვილისთვისაც. ტერმინის „შესაძლებლობა'' გამოყენება ამ განუზღვრელობის ზომებისათვის შეიძლება გამართლებული იყოს რამდენიმე მოსაზრებით.

ვთქვათ, $E \subseteq \Omega$ წარმოადგენს სარწმუნო მოვლენას. მარტივად შეგვიძლია განვსაზღვროთ ფუნქცია $\prod$ მნიშვნელობებით {0,1}-დან, რომელიც დააკმაყოფილებს (1.6) აქსიომას:

$$\prod\nolimits_{\mathrm{E}}(\mathrm{A}) = \begin{cases} 1, \text{ თუ } \mathrm{A} \cap \mathrm{E} \neq \emptyset, \\ 0, \text{ თუ } \mathrm{A} \cap \mathrm{E} \neq \emptyset, \end{cases} \tag{1.7}$$

მაშინ ცხადია, $\prod_{\mathrm{E}}(\mathrm{A}) = 1$ ნიშნავს, რომ A მოვლენა შესაძლებელია. აგრეთვე, თუ A და $\overline{A}$ საპირისპირო მოვლენებია ($\overline{A} = \Omega \backslash A$), მაშინ

$$\max(\prod(A), \prod(\overline{A})) = 1 \qquad (1.8)$$

აღნიშნული შეიძლება განვიხილოთ როგორც ინტერ-პრეტაცია ფაქტისა, რომ ორი საწინააღმდეგო მოვლენიდან ერთ-ერთი მიანც აუცილებლად შესაძლებელია. უფრო მეტიც, როცა რაიმე მოვლენა შესაძლებელია, არ გამოირიცხება საპირისპირო მოვლენის შესაძლებლობაც, რაც შეესაბამება შესაძლებლობაზე მსჯელობის სემანტი-კას. შემთხვევა, როცა A და $\overline{A}$ ერთნაირად შესაძლებელია, შეესაბამება სრული არაინფორმირებულობის სიტუაციას, როცა A მოვლენა იმდენადვეა მოსალოდნელი, რამდენადაც მისი საწინააღმდეგო.

(1.6) გამოსახულება შეესაბამება ჩვენ წარმოდგენას შესაძლებლობის შესახებ: იმისათვის, რომ მოვახდინოთ $A \cup B$ რეალიზაცია, საკმარისია განვახორციელოთ ყველაზე „ადვილი" ვარიანტი ამ ორიდან.

როცა Ω სასრული სიმრავლეა, მაშინ ყოველი $\prod$ ზომა შეიძლება განვსაზღვროთ მისი მნიშვნელობების საშუა-ლებით Ω-ს ერთწერტილიან ქვესიმრავლეებზე

$$\prod(A) = \sup\{\pi(\omega) | \omega \in A\}, \qquad (1.9)$$

სადაც $\pi(\omega) = \prod(\{\omega\})$; π არის ასახვა Ω-დან [0,1]-ში, რომელსაც ეწოდება შესაძლებლობის განაწილების ფუნქცია. ის ნორმირებულია შემდეგი სახით:

$$\exists\omega, \ \pi(\omega) = 1, \qquad (1.10)$$

ვინაიდან $\prod(\Omega) = 1$.

შევნიშნავთ, რომ (1.9) ფორმულა მართებული დარჩება, თუ არ მოვითხოვთ $\prod(\Omega) = 1$. მაშინ (1.8), (1.10) პირობები შესრულდება თუ 1-ს შევცვლით $\prod(\Omega)$-თი.

იმ შემთხვევაში, როცა Ω უსასრულოა, შესაძლებ-ლობის განაწილების ფუნქციის არსებობა არ არის გარანტირებული. შესაბამისი განაწილება გადაიქცევა შესაძლებლობის განაწილებად მხოლოდ მაშინ, როცა (1.6)

აქსიომა ვრცელდება უსასრულო გაერთიანებების შემთხვევაზე. გამოყენებით ამოცანებში შეგვიძლია ყოველთვის გამოვიდეთ შესაძლებლობის განაწილების ფუნქციიდან და ავაგოთ შესაძლებლობის $\prod$ ზომა (1.9) ფორმულის საშუალებით.

განუზღვრელობის ზომის მეორე ზღვრული შემთხვევა მიიღება (1.5) უტოლობაში ტოლობის მიღწევისას. ამ შემთხვევაში მიიღება სიმრავლის ფუნქციის კლასი, რომელსაც ეწოდება აუცილებლობის ზომა და აღინიშნება N. უცილებლობის ზომა აკმაყოფილებს (1.6)-ის ორადულ აქსიომას:

$$\mathrm{N}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \min\big(\mathrm{N}(\mathrm{A}), \mathrm{N}(\mathrm{B})\big), \quad \forall \mathrm{A}, \mathrm{B}. \tag{1.11}$$

თუ გვაქვს ინფორმაცია სარწმუნო მოვლენის შესახებ, მარტივად აიგება N ფუნქცია მნიშვნელობებით {0,1}-ში:

$$\mathrm{N}(\mathrm{A}) = \begin{cases} 1, \text{თუ} & \mathrm{E} \subseteq \mathrm{A}, \\ 0, \text{თუ} & \mathrm{E} \not\subset \mathrm{A}, \end{cases} \tag{1.12}$$

აქ $N(A) = 1$ ნიშნავს, რომ A სარწმუნო მოვლენაა (აუცილებლად ჭეშმარიტი). გარდა ამისა ადვილი საჩვენებელია, რომ სიმრავლის ფუნქცია N აკმაყოფილებს (1.11) აქსიომას მაშინა და მხოლოდ მაშინ, როცა ფუნქცია $\prod$, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი სახით:

$$\prod(A) = 1 - N(\overline{A}), \ \forall A, \tag{1.13}$$

წარმოადგენს შესაძლებლობის ზომას. (1.13) ფორმულა არის „შესაძლებელია" და „აუცილებელია" მოდალობებს შორის ორადობის მიმართების რიცხვითი გამოსახვა, რომელიც გვიჩვენებს, რომ რაიმე მოვლენა აუცილებელია, როცა საწინააღმდეგო მოვლენა შეუძლებელია. აღნიშნული ორადობის მიმართება გვიჩვენებს, რომ ყოველთვის

შეგვიძლია ავაგოთ აუცილებლობის განაწილების ფუნქცია შესაძლებლობის განაწილების ფუნქციაზე დაყრდნობით შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$N(A) = \inf\{1 - \pi(\omega) | \omega \notin A\}. \tag{1.14}$$

აუცილებლობის ზომები აკმაყოფილებს შემდეგ თანაფარდობს:

$$\min\left(N(A), N(\overline{A})\right) = 0, \tag{1.15}$$

რომელიც გამორიცხავს ორი საპირისპირო მოვლენის აუცილებლობას. (1.13) და (1.15) გათვალისწინებით

$$\prod(A) \geq \mathrm{N(A)}, \qquad \forall \mathrm{A} \subseteq \Omega. \tag{1.16}$$

მოყვანილი პირობა შეესაბამება ინტუიციურ წარმოდგენას იმის შესახებ, რომ მოვლენა უნდა იყოს შესაძლებელი, ვიდრე იქნება აუცილებელი.

გადავიდეთ არამკაფო სიმრავლის განსაზღვრაზე, შევნიშნავთ, რომ არამკაფიო სიმრავლე შეგვიძლია განვსაზღვროთ განუზღვრელობის ზომის შემოტანის გარეშე, მახასიათებელი ფუნქციის სახეცვლილებით, სახელდობრ, ჩვეულებრივ მიკუთვნების მიმართებაში. გრადაციის შემოტანით განუზღვრელობის ზომების გამოყენების შემთხვევა დაიყვანება x ცვლადის მნიშვნელობის ლოკალიზაციაზე, რაც უნივერსალური X სიმრავლის ყოველი A ქვესიმრავლისთვის გამოხატავს $x \in A$ მიმართების შესახებ არსებულ ინფორმაციას.

ქვესიმრავლეთა ოჯახი, რომელიც გამოიყენება x ცვლადის წარმოდგენისათვის, მოგვცემს არამკაფიო სიმრავლის განზოგადებულ მახასიათებელ ფუნქციას და ამავე დროს აღნიშნული ორი მიდგომა მკაცრად ეკვივალენტურია შესაძლებლობის ზომების შემთხვევაში.

პირველი მიდგომის შემთხვევაში F არამკაფიო სიმრავლის განსაზღვრა უნივერსალური Ω სიმრავლის და Ω-დან ერთეულოვან ინტერვალში $\mu_F:\Omega \to [0,1]$ ასახვის დაფიქსირების ტოლფასია. $\mu_F(\omega)$ ყოველი $\omega \in \Omega$ წარმოადგენს ω ელემენტის F არამკაფიო სიმრავლისადმი მიკუთვნების ხარისხს. აღნიშნული პირდაპირი განსაზღვრაა, რომელიც საშუალებას გვაძლევს ავაგოთ სასაუბრო ენების არამკაფიო კატეგორიების მოდელები.

მაგალითად ცნება „მაღალი" შეიძლება განვიხილოთ როგორც არამკაფიო სიმრავლე, განსაზღვრული რიცხვით ღერძზე (Ω რიცხვთა სიმრავლეა, რომლებიც ახასიათებს ადამიანის სიმაღლეს) ან ობიექტთა სიმრავლეზე, რომელიც თვისებრივად ხასიათდება ასეთი კატეგორიების საშუალებით (Ω ადამიანის სიმრავლეა). $\mu_F(\omega)$ სიდიდე ამ შემთხვევაში ასახავს ω მნიშვნელობის (ან ობიექტის) თავსებადობას F ცნებასთან. თუ $\Omega = \mathrm{R}$ (ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა), მაშინ F-ს ეწოდება არამკაფიო სიდიდე. ვიპოვოთ F არამკაფიო სიმრავლის ჩვეულებრივი თეორიულ-სიმრავლური წარმოდგენები. როცა $\mu_F:\Omega \in \{0,1\}, \forall\omega$, მაშინ F იქნება უნივერსალური Ω სიმრავლის ვეულებრივი ქვესიმრავლე. ზოგადად კი ვირჩევთ ზღურბლს $a\epsilon(0,1]$ და განსაზღვრავს ჩვეულებრივ სიმრავლეს

$$F_a = \{\omega \in \Omega | \mu_F(\omega) \geq \alpha\}, \qquad (1.17)$$

რომელსაც ეწოდება α დონის სიმრავლე ან რამკაფიო F სიმრავლის კვეთა. F_α სიმრავლე შეიცავს უნივერსალური Ω სიმრავლის ყველა ელემენტს, რომელთა თავსებადობის ხარისხი F-თან არანაკლებია, ვიდრე α კვეთს $C(F) = \{F_a | \alpha \in (0,1]\}$ სიმრავლე არის მონოტონური მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$0 < \alpha \leq \beta \leq 1 \Rightarrow F_\alpha \supseteq F_\beta. \qquad (1.18)$$

ეს საშუალებას გვაძლევს არამკაფიო F სიმრავლე წარმოვადგინოთ ჩვეულებრივი სიმრავლეების საშუალებით

$$\forall\omega, \mu_F(\omega) = \sup\{\alpha | \omega \in F_\alpha\}. \qquad (1.19)$$

პირიქით, თუ მოცემულია სიმრავლეთა ოჯახი მონოტონური მიმდევრობის სახით $\{F_{a1}, \dots, F_{am}\}$, რომელიც აკმაყოფილებს (1..18) პირობას, მაშინ ის ქმნის არამკაფიო სიმრავლის α კვეთების სიმრავლეს, რომელიც განისაზღვრება (1.19) პირობით. სიმრავლეთა უსასრულო ოჯახის შემთხვევაში (1.18) პირობა საკმარისი არ არის და აუცილებელია, რომ ყოველი ზრდადი (α_n) მიმდევ-რობისათვის (0,1]-დან შესრულდეს პირობა

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \Rightarrow F_a = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{a_n}. \qquad (1.20)$$

არამკაფიო F სიმრავლის წარმოდგენისათვის შეიძლება ავიღოთ მკაცრი a კვეთები (მკაცრი a დონის სიმრავლეები), რომლებიც განისაზღვრებიან შედეგის სახით:

$$F_{\overline{a}} = \{\omega \in \Omega |\, \mu_F(\omega) > a\},\ a \in [0,1). \qquad (1.21)$$

მკაცრი a კვეთები აკმაყოფილებს (1.18) და (1.19) პირობებს ისევე, როგორც a კვეთები.

ჩვეულებრივი სიმრავლეებიდან, რომლებიც აღწერს F არამკაფიო სიმრავლეს, გამოვყოთ ორი: არამკაფიო სიმრავლის ბირთვი და საყრდენი. F არამკაფიო სიმრავლის ბირთვი ვუწოდოთ 1-ელი დონის სიმრავლეს $\mathring{F}$, ე.ი

$\overset{\circ}{F} = \{\omega \in \Omega |\ \mu_F(\omega) = 1\}$; F არამკაფიო სიმრავლის საყრდენი ვიწოდოთ მკაცრი 0 დონის სიმრავლეს $S(F)$, ე.ი დონის $S(F) = \{\omega \in \Omega | \mu_F(\omega) > 0\}$.

არამკაფიო სიმრავლისაგების მეორე მიდგომა მდგომარეობს მისი როგორც შესაძლებლობის ზომის „კვალი" განხილვაში Ω-ს ერთწერტილიან სიმრავლეებზე. მართლაც, ყოველ $E \subseteq \Omega$ სიმრავლე შეიძლება შეუსაბამოთ შესაძლებლობის ზომა $\prod_E$, ისეთი, რომ $\prod_E(A) = 1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $E \cap A \neq \emptyset$ და წინააღმდეგ შემთხვევაში. $\prod_E(A) = 0$. როცა შესაძლებლობის $\prod$ ზომა ღებულობს მნიშვნელობებს ერთეულოვანი ინტერვალიდან, შესაძლებლობის განაწილების ფუნქცია შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც არამკაფიო F სიმრავლის მიკუთვნების ფუნქცია. მართლაც, $[0,1\,]^{\Omega}$-ით ავღნიშნოთ Ω უნივერსუმის არამკაფიო ქვესიმრავლეთა სიმრავლე და

$$\forall \prod, \exists F \in [0,1]^{\Omega}, \prod(\{\omega\}) = \pi(\omega) = \mu_F(\omega), \forall \omega \in \Omega, \qquad (1.22)$$

პირიქით, არამკაფიო სიმრავლის მოცემა საკმარისია შესაძლებლობის განაწილების ფუნქციის აღწერისათვის იმ პირობით, რომ ეს არამკაფიო სიმრავლე ნორმირებულია, ე.ი.

$$\exists \omega, \mu_F(\omega) = 1. \qquad (1.23)$$

მაგარმ, თუ არ მოვითხოვთ $\prod(\Omega) = 1$ პირობას, მაშინ (1.9)-ზე დაყრდენით მივიღებთ

$$\forall\, F \in [0,1]^{\Omega}, \exists \prod, \forall \omega \in \Omega, \prod(\{\omega\}) = \pi(\omega) = \mu_F(\omega), \quad (1.24)$$

$\prod(\Omega) = sup\ \mu_F$ სიდიდეს ეწოდება F არამკაფიო სიმაღლე.

განვიხილოთ არამკაფიო სიმრავლეების რამდენიმე მაგალითი. თავდაპირველად შევნიშნავთ, რომ სასრული საყრდენის მქონე სიმრავლის არამკაფიო სიმრავლის ჩასაწერად ხშირად მოსახერხებელია შემდეგი აღნიშვნა:

$$F = \mu_1 \,/\, y_1 + \cdots + \mu_n \,/\, y_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \,/\, y_i,$$

სადაც μ_1 წარმოადგენს y_1 ელემენტის მიკუთვნების ხარისხს $(i = 1, \ldots, n)$, ხოლო ნიშანი + აღნიშნავს გაერთიანებას და არა ალგებრულ შეკრებას. თუ F სიმრავლის საყრდენი უსასრულოა, მაშინ მას ჩავწერთ შემდეგი სახით:

$$F = \dot{\int_{\Omega}} \mu_F(y)/y,$$

სადაც $\mu_F(y)$ არის y ელემენტის მიკუთვნების ხარისხი.

უნივერსაური სიმრავლე Ω, როცა ის სასრულია, ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\Omega = y_1 + \cdots + y_n = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

ან უფრო ზუსტად

$$\Omega = 1 \,/\, y_1 + \cdots + 1 \,/\, y_n = \sum_{i=1}^{n} 1 \,/\, y_i.$$

ვთქვათ, ახლა

$$\Omega = 1 + 2 + \cdots + 10,$$

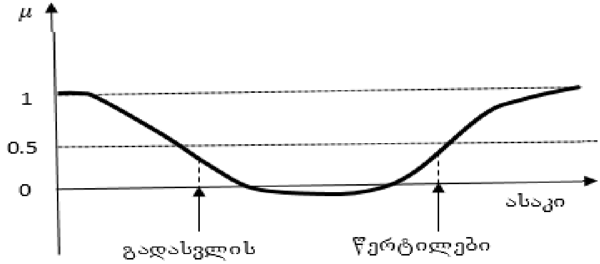
მაშინ Ω-ს არამკაფიო ქვესიმრავლე, რომელიც ხასიათდება ტერმინით „რამდენიმე'', შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

რამდენიმე $\equiv 0.5/3 + 0.8/4 + 1/5 + 1/6 + 0.8/7 + 0.5 \,/\, 8.$

ანალოგიურად, თუ Ω არის ინტერვალი [0,100] ელემენტებით $y \equiv$ასაკი, მაშინ არამკაფიო ქვესიმრავლეები, რომლებიც ხასიათდებიან ცნებებით „ახალგაზრდა'' და „მოხუცი'', შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ (ნახ.1.1):

$$ახალგაზრდა= \int_0^{25} 1\,/\,y + \int_{25}^{100}(1+(\frac{y-25}{5})^2)^{-1}/y,$$

$$მოხუცი\ = \int_{50}^{100}(1+(\frac{y-50}{5})^{-2})^{-1}/y,$$



ნახ.1.1

ზემოთ განხილულ ორივე მაგალითში მიკუთვნების ფუნქცია მნიშვნელობებს ღებულობდა [0,1]-ში. მაგარამ შეიძლება განვიხილოთ უფრო ზოგადი კონსტრუქცია, როცა მიკუთვნების ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე არის რაიმე სხვა სიმრავლე. მაგალითად, ზადეს მიერ განუზღვრელობების გადახასიათებლად შემოთავაზებული იყო $\mu_F(\omega)$ მიკუთვნების ფუნქციის მნიშვნელობებად არამკაფიო სიმრავლეების განხილვა მნიშვნელობებით [0,1] ინტერვალში. ამ შემთხვევაში მივიღეთ ე.წ. მე-2 ტიპის არამკაფიო სიმრავლეებს, რომელთა მიკუთვნების ფუნქცია მნიშვნელობებს მიიღებს $[0,1]^{[0,1]}$-ში. იმ შემთხვევაში, როცა მიკუთვნების ფუნქციია არგუმენტი არის ზუსტი, მაშინ Ω წარმოადგენს V უნივერსუმის არამკაფიო ქვესიმრავლეთა სიმრავლეს (Ω=$[0,1]^V$), ხოლო F მე-2 დონის არამკაფიო სიმრავლეს V უნუვერსუმზე. ეს ცნება საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ სულ უფრო და უფრო აბსტრაქტული კატეგორიები. მაგალითად, თუ

$\Omega =$ ნიკო+შალვა+დათო+ვასიკო,

F არამკაფიო სიმრავლეა, რომელიც ხასიათდება ცნებით „მარდი", მაშინ

მარდი=
საშუალოდ/ნიკო+ცოტათ/შალვა+ძალიან/დათო+ცოტათი/ვასიკო.

მიკუთვნების ფუნქციის არამკაფიო მნიშვნელობები ცოტათი, საშუალოდ და ძალიან წარმოადგენენ V უნუვერსუმის არამკაფიო ქვესიმრავლეებს, სადაც

$$V = 0+0.1+0.2+...+0.9+1.$$

თვით ეს ქვესიმრავლეები განისაზღვრება ასე:

ცოტათი = 0.5/0.2+0.7/0.3+1/0.4+0.7/0.5+0.5/0.6,

საშუალოდ = 0.5/0.4+0.7/0.5+4/0.6+0.7/0.7+0.5/0.8,

ძალიან = 0.5/0.7+0.7/0.8+0.9/0.9+1/1.

არამკაფიო სიმრავლეების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი კლასია არამკაფიო სიდიდეები, ე.ი. არამკაფიო სიმრავლეები, რომლთათვისაც უნივერსუმი $\Omega = \mathrm{R}$. ამ შემთხვევაში Q არამკაფიო სიდიდის მიკუთვნების ფუნქციაა $\mu_Q : R \to [0,1]$. რამკაფიო სიდიდეები ფართოდ გამოიყენება სხვადასხვა პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტისას. ამ სიდიდეების მაგალითებია ზემოთ განხილული ცნებები „მოხუცი", „ახალგაზრდა", „სიმაღლე" და ა.შ.

არამკაფიო სიდიდეებთან დაკავშირებით შემოვიტანოთ რამდენიმე ცნება, რომელთაც გამოვიყენებთ შემდგომში. ყოველ ნამდვილ რიცხვს, რომელთაც ეკუთვნის არამკაფიო Q სიდიდის ბირთვს $m \in_Q^{\circ}$ (ე.ი. $\mu_Q(m) = 1$), ეწოდება Q-ს მოდალური მნიშვნელობა, ჩვეულებრივი ინტერვალის განზოგადებაა. არამკაფიო ინტერვალი – ამოზნექილი არამკაფო სიდიდე, რომლის მიკუთვნების ფუნქცია კვაზიჩაზნექილია:

$$\mu_Q(\omega) \geq \min\left(\mu_Q\,(\mu), \mu_Q(\nu)\right) \quad \forall u, \nu, \qquad \forall \omega \in [u, \nu]$$

არამკაფიო სიდიდეს ეწოდება ამოზნექილი, თუ მისი კვეთები ამოზნექილია ე.ი. (შემოსაზღვრული ან შემოუსაზღვრელი) ინტერვალებია. ჩაკეტილი ინტერ-ვალების ცნება ზოგადდება არამკაფიო ინტერვალების სახით, რომელთა მიკუთვნების ფუნქცია ზემოდან ნახევრად უწყვეტია, ე.ი. განმარტების თანახმად მისი a კვეთები ჩაკეტილი ინტერვალებია. R-ის კომპაქტური ქვესიმრავლების ცნება ზოგადდება არამკაფიო სიდიდეების საშუალებით, რომელთა მიკუთვნების ფუნქცია ზემოდან ნახევრად უწყვეტია და განსაზღვრულია კომპაქტურ საყრდენზე. არამკაფიო რიცხვი ვიწოდოთ ზემოდან ნახევრად უწყვეტ არამკაფიო ინტერვალს კომპაქტური საყრდენით და ერთადერთი მოდალური მნიშვნელობით. თუ M არის არამკაფიო რიცხვი მოდალური მნიშვნელობით. m, მაშინ M შეიძლება განვიხილოთ „m-ის მახლობლად" ცნების წარმოსადგენად. არამკაფიო ინტერვალის შემთხვევაში მოდალურ მნიშვნელობათა სიმრავლე თვით წარმოადგენს რაიმე ინტერვალს.

არამკაფიო Q სიდიდეს ეწოდება პოლიმოდური, თუ არსებობს ამოზნექილ არამკაფიო ქვესიმრავლეთა სასრული სიმრავლე $\{M_i\,|x_i \in I\}$ ზემოდან ნახევრად უწყვეტი მიკუთვნების ფუნქციით, ასე რომ Q არის M_i გაერთიანება არამკაფიო სიმრავლეების გაერთიანების აზრით.

არამკაფიო ინტერვალი წარმოადგენს არაზუსტი სიდიდეების წარმოდგენის საკმარისად მოხერხებულ ფორმას, რომელიც უფრო მდიდარია ინფორმაციით, ვიდრე ჩვეულებრივი ზუსტი ინტერვალი. მართლაც, ზოგჯერ საჭიროა ჩვეულებრივი ინტერვალი არ იძლევა დამაკმაყოფილებელ შედეგს. თუ მოვახდენთ პესიმისტურ შეფასებას, მაშინ ინტერვალი იქნება ძალიან ფართო და გამოთვლებს ექნება მცირე ღირებულება უზუსტობის გამო.

ოპტიმისტური შეფასებისას არსებობს მიღებული სიდიდის დანიშნული არიდან გასვლის სასიშროება, რაც ეჭვქვეშ აყენებს მიღებულ „ზუსტ" შედეგებს. არამკაფიო ინტერვალი საშუალებას გვაძლევს გვქონდეს ერთდროულად პესიმისტური და ოპტიმისტური წარმოდგენები: არამკაფიო სიდიდის საყრდენი აიღება ისე, რომ გარანტირებულად არ გავიდეთ საჭირო საზღვრებიდან, ხოლო მისი ბირთვი უნდა შეიცავდეს ყველაზე სარწმუნო მნიშვნელობებს

1.3. ოპერაციები არამკაფიო სიმრავლეებზე

ჩადგმისა და ტოლობის ცნებები მარტივად შეიძლება გავავრცელოთ არამკაფიო სიმრავლეებზე, რომელთა ყველაზე გავრცელებული განმარტებები ეკუთვნის ზადეს.

ვიტყვით, რომ F ჩადგმულია G-ში (მას ასე ჩავწერთ - $F \subseteq G$), თუ სრულდება შემდეგი პირობა:

$$F \subseteq G, \quad \mu_F(\omega) \leq \mu_G(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{1.25}$$

თუ ერთდროულად სრულდება ორი პირობა $F \subseteq G$ და $G \subseteq F$, მაშინ ვიტყვით, რომ F და G არამკაფიო სიმრავლეები ერთმანეთის ტოლია და ჩავწერთ $F = G$, ე.ი. $F = G$, თუ

$$\mu_F(\omega) = \mu_G(\omega), \qquad \forall \omega \in \Omega. \tag{1.26}$$

განვსაზღვროთ ძირითადი თეორიულ-სიმრავლური ოპერაციები (დამატება, თანაკვეთა და გაერთიანება) არამკაფიო სიმრავლეებისათვის.

F არამკაფიო სიმრავლის დამატება $\overline{F}$ უნივერსალურ Ω სიმრავლეში განისაზღვრება შემდეგი არამკაფიო სიმრავლის სახით:

$$\mu_{\overline{F}}(\omega) = 1 - \mu_F(\omega), \qquad \forall \omega \in \Omega \tag{1.27}$$

ორი არამკაფიო F და G სიმრავლის თანაკვეთა $F \cap G$ უნივერსალურ Ω სიმრავლეში განისაზღვრება

$$\mu_{F \cap G}(\omega) = \min(\mu_F(\omega), \mu_G(\omega)), \qquad \forall \omega \in \Omega. \qquad (1.28)$$

ტოლობის საშუალებით.

ანალოგიურად განიმარტება ორი არამკაფიო F და G სიმრავლის გაერთიანება. კერძოდ, $F \cup G$ უნივერსალური Ω სიმრავლეში განისაზღვრება შემდეგი სახით:

$$\mu_{F \cup G}(\omega) = \max(\mu_F(\omega), \mu_G(\omega)), \qquad \forall \omega \in \Omega. \qquad (1.29)$$

ეს განმარტებები ემთხვევა კლასიკური თეორიულ-სიმრავლური ოპერაციების განმარტებებს, როცა განსახილველი სიმრავლეები უნივერსალური სიმრავლის ჩვეულებრივი ქვესიმრავლეებია. მაგარამ დამატების, თანაკვეთის, გაერთიანების ოპერაციების და ჩადგმის, ტოლობის მიმართებების გავრცელება არამკაფიო სიმრავლეებზე არ არის ერთადერთი. მიუხედავად ამისა, ჩვენ შემოვიფარგლებით ზემოთ აღნიშნული ოპერაციების განხილვით, ვინაიდან ისინი ფართოდაა გავრცელებული და ამავე დროს ინდუცირებს მდიდარ მათემატიკურ სტრუქტურას $[0,1]^{\Omega}$-ზე.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ჩადგმის მიმართება, რომელიც განისაზღვრება (1.25)-ით, არის რეფლექსური და ტრანზიტული. (1.27) ფორმულით განსაზღვრული დამატება აკმაყოფილებს ინვოლუციის პირობას $\bar{\bar{F}} = F$ და არის ერთადერთი, თუ ვიგულისხმებთ, რომ ყოველი $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ წყვილისთვის ω_1 ელემენტიდან ω_2-ზე გადასვლისას F არამკაფიო სიმრავლისადმი მიკუთვნების ხარისხი იცვლება სიმეტრიულად $\bar{F}$-სადმი მიკუთვნების ხარისხის ცვლილებასთნ მიმართებაში, ე.ი.

$$\mu_F((\omega_1) - \mu_F(\omega_2) = \mu_{\bar{F}}(\omega_2) - \mu_{\bar{F}}(\omega_1), \ \forall(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \times \Omega \quad (1.30)$$

Ω უნივერსუმის არამკაფიო ქვესიმრავლეთა სიმრავლეს $[0,1]^{\Omega}$ (1.27)-(1.29) ოპერაციების გათვალისწინებით გააჩნია

ვექტორული ბადის სტრუქტურა. ეს ნიშნავს, რომ მართებულია კლასიკური სიმრავლურ-თეორიულ ოპერაციათა ყველა თვისება, გარდა არაწინააღმდეგობრიობისა $F \cap \bar{F}=\emptyset$ და მესამის გამორიცხვის $F \cup \bar{F}=\Omega$ კანონებისა. მათ სანაცვლოდ გვაქვს ტოლობები:

$$\mu_{F\cap\bar{F}}(\omega) = \min(\mu_F(\omega), 1-\mu_F(\omega)) \leq 0.5, \qquad \forall\omega \in \Omega \qquad (1.31)$$

$$(\mu_{F\cup\bar{F}}\omega) = \max(\mu_F(\omega), 1-\mu_F(\omega)) \geq 0.5, \ \ \forall\omega \in \Omega \qquad (1.32)$$

არამკაფიო სიმრავლეთა თანაკვეთის და გაერთიანების ოპერაციები, რომლებიც ინარჩუნებს „ვექტორული ბადის" სტრუქტურას, ერთადერთი გზით განიმარტება – (1.28) და (1.29) ფორმულების საშუალებით. ამ შემთხვევაში მიიღება გარკვეული „ოპტიმალური" სტრუქტურა, ვინაიდან $[0,1]^{\Omega}$-ზე შეუძლებელია ბულის ბადის სტრუქტურის შენარჩუნება. კერძოდ, არაწინააღმდეგობრიობის $F \cap \bar{F}=\emptyset$ და მესამის გამორიცხვის $F \cup \bar{F}=\Omega$ კანონები არათავსებადია იდემპოტენტურობის პირბებთან $F \cap F = F$, $F \cup F = F$, როცა მიკუთვნების ცნება გრადუირებულია.

F და G არამკაფიო სიმრავლეებისათვის შეიძლება აგრეთვე განვსაზღვროთ ნამრავლი:

$$\mu_{FG}(\omega) = \mu_F(\omega), \mu_G(\omega), \qquad \forall\omega \in \Omega. \qquad (1.32')$$

ამაზე დაყრდნობით განისაზღვრება $A^a (a > 0)$, როგორც $\mu_{A^a}(\omega) = (\mu_A(\omega))^a$, $\forall\omega \in \Omega$. კონცენტრირების ოპერაცია განისაზღვრება $CON(F) \equiv F^2$ ტოლობით. ამ ოპერაციის გამოყენებით F სიმრავლეზე, ცხადია, კლებულობს ელემენტების ამ სიმრავლისადმი მიკუთვნების ხარისხი. ამასთან, ელემენტებისათვის უფრო დიდი მიკუთვნების ხარისხით ეს შემცირება შედარებით მცირეა, ხოლო ელემენტებისათვის მიკუთვნების მცირე ხარისხით შედარებით დიდი გაჭიმვის ოპერაცია განისაზღვრება

შემდეგი სახით: $DIL(F) \equiv F^{0.5}$. ამ ოპერაციის მოქმედება კონცენტრირების ოპერაციის მოქმედების საპირისპიროა.

კონტრასტული ინტენსიფიკაციის ოპერაცია განისაზღვრება შემდეგი თანაფარდობით:

$$INT(F) = \begin{cases} 2F^2, & 0 \le \mu_F(\omega) \le 0.5, \\ \overline{2(\bar{F})^2}, & 0.5 \le \mu_F(\omega) \le 1, \end{cases}$$

სადაც aF განისაზღვრება როგორც $\mu_{aF}(\omega) = a\mu_F(\omega)$, $\forall\omega \in \Omega$. როგორც ვხედავთ, ეს ოპერაცია განსხვავდება კონცენტრირების ოპერაციისაგან იმით, რომ ზრდის $\mu_F(\omega)$-ს იმ მნიშვნელობებს რომლებიც 0.5-ზე მეტია და ამცირებს, თუ 0.5-ზე ნაკლებია. აქედან გამომდინარე, კონტრასტული ინტენსიფიკაცია ამცირებს F-ის არამკაფიობას, რომელიც ახასიათებს F-ის საზღვრების გაბნეულობას.

არამკაფიო სიდიდეებისთვის შესაძლებელია რიცხვებისათვის დამახასიათებელი ოპერაციების გავრცელება. ამისათვის განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: მოცემული დამოკიდებული შესაძლებლობითი $X, Y, Z \dots$ ცვლადების საშუალებით გამოვთვალოთ არამკაფიო სიდიდე $f(X, Y, Z \dots)$, სადაც f მოცემულია ფუნქციაა.

ამ ამოცანის ამოსახსნელად განვიხილოთ ორი სიმრავლე Ω და U და ასახვა $f: \Omega \to \mathrm{U}$. ვიგულისხმოთ, რომ (Ω, G) სივრცეში მოცემულია განუზღვრელობის g ზომა (G წარმოადგენს Ω-ს ჩვეულებრივ ქვესიმრავლეთა სიმრავლეს, რომელზეც განსაზღვრულია g ზომა), მაშინ შებრუნებული ასახვის საშუალებით $f^{-1}(A) = \{\omega | f(\omega) \in A\}$, $A \subseteq U$ შეიძლება ავაგოთ სიმრავლის g_f ფუნქცია შემდეგი ფორმულით:

$$g_f(A) = g\left(f^{-1}(A)\right), \quad \forall A \in \mathrm{P} \tag{1.33}$$

სადაც $P = \{A | f^{-1}(A) \in G\}$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ სიმრავლის g_f ფუნქცია არის განუზღვრელობის ზომა (U, P)-ში.

ეს კონსტრუქცია გამოიყენება ალბათობის თეორიაში, როცა განისაზღვრება შემთხვევითი ცვლადის ფუნქციები. განვიხილავთ შემთხვევას, როცა g შესაძლებლობის ზომაა. თუ $f^{-1}(A) \neq \emptyset$ მაშინ (1.33) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\prod_f(A) = \prod\left(f^{-1}(A)\right) = \sup\{\pi(\omega)|f(\omega) \in A\}, \qquad (1.34)$$

სადაც π შესაძლებლობის განაწილების ფუნქციაა, დაკავშირებილი $\prod$ ზომასთან.

$\prod_f$ ფუნქცია იქნება შესაძლებლობის ზომა, ვინაიდან $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. ამასთან შესაძლებლობის განაწილების ფუნქციას π_f, რომელიც დაკავშირებულია შესაძლებლობის $\prod_f$ ზომასთან, ექნება სახე

$$\pi_f(u) = \prod_f(\{u\}) = \begin{cases} \sup\left\{\pi(\omega)\middle|f(\omega) = u\right\}, & \text{თუ } f^{-1}(u)\neq\emptyset \\ 0, & \text{თუ } f^{-1}(u)\neq\emptyset \end{cases} \qquad (1.35)$$

(1.34) გამოსახულება ცნობილია არამკაფიო სიმრავლეთა თეორიაში განზოგადების პრინციპის სახელწოდებით. როდესაც გვაქვს დეკარტული ნამრავლი $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, ხოლო ფუნქცია π სეპარაბელურია, ე.ი. გამოისახება ფორმულით $\pi = \min\left(\mu_{Q_1}, \mu_{Q_2}\right)$, სადაც Q_1 და Q_2 დამოუკიდებული $X_1 X_2$ ცვლადების ცვლილების არის შემომსაზღვრელი არამკაფიო სიმრავლეებია, მაშინ განზოგადების პრინციპი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\pi_f(u) = \begin{cases} \sup\{min\left\{\mu_{Q_1,}(\omega_1)\mu_{Q_2,}(\omega_2)\middle|f(\omega_1,\omega_2) = u\right\}, & \text{თუ } f^{-1}(u) \neq \emptyset \\ 0, & \text{თუ } f^{-1}(u) = \emptyset \end{cases}$$

აქ π_f ფუნქცია აღწერს შესაძლებლობის განაწილებას, რომელიც შემოსაზღვრავს $f(X_{1,} X_2)$ ცვლადის განსაზღვრის არეს ე.ი. არამკაფიო სიმრავლეს, რომელსაც

აღვნიშნავთ $f(Q_1, Q_2)$-თი. მისი მიკუთვნების ფუნქციაა $\mu_{f(Q_1,Q_2)}=\pi_f$. ცხადია, როცა არამკაფიო სიმრავლეები Q_1 და Q_2 წარმოადგენს ერთწერტილიან სიმრავლეებს $\{\omega_1\}$ და $\{\omega_2\}$, მაშინ $f(Q_1, Q_2)$ აგრეთვე იქნება ერთწერტილიანი სიმრავლე $\{f(\omega_1, \omega_2)\}$.

ქვემოთ მოვიყვანთ ძირითად თეორემას, რომელიც საშუალებასბ იძლევა ზოგიერთ შემთხვევაში არსებითად გამარტივდეს $f(Q_1, Q_2)$ ფუნქციის გამოთვლა. ამისათვის დაგვჭირდება რამდენიმე ცნების შემოტანა.

არამკაფიო სიდიდე Q ვუწოდოთ არამკაფიო სიმრავლეს, რომელიც განსაზღვრულია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე, ე.ი. ასახვას $\mu: R \rightarrow [0,1]$. აქ μ_Q არის შესაძლებლობათა განაწილება რაიმე ცვლადის მნიშვნელობებზე.

ყოველ ნამდვილ m რიცხვს, რომელიც ეკუთვნის $\mathring{Q}$ ბირთვს (ე.ი. $\mu_Q(m) = 1$), ვუწოდოთ Q-ს მოდალური, მნიშვნელობა.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, არამკაფიო სიდიდე არის ასახვა ნამდვილ რიცხვთა ღერძიდან [0,1] ინტერვალზე. იმისათვის, რომ მივიღოთ კლასიკური რიცხვის, ინტერვალის და სხვა ცნებების განზოგადებები არამკაფიო ტერმინებში განვიხილოთ არამკაფიო სიდიდეების ზოგიერთი კლასი.

ვიტყვით, რომ არამკაფიო სიდიდე ამოზნექილია, თუ მისი კვეთები ამოზნექილია, ე.ი. ინტერვალებია (შემოსაზღვრული ან შემოუსაზღვრავი). არამაკფიო ინტერვალი ამოზნექილი არამკაფიო სიდიდეა, რომლის მიკუთვნების ფუნქცია კვაზიჩაზნექილია, ე.ი.

$$\forall u, v, \quad \forall \omega \in [u, v], \quad \mu_Q(\omega) \geq \min(\mu_Q(u), \mu_Q(v)).$$

ჩაკეტილი ინტერვალის ცნება ზოგადდება როგორც არამკაფიო ინტერვალი, რომლის მიკუთვნების ფუნქცია ზემოდან ნახევრადუწყვეტია, ე.ი. განმარტების თანახმად

მისი α კვეთები ჩაკეტილი ინტერვალებია. ასევე ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლის კომპაქტური ქვესიმრავლის ცნება განვაზოგადოთ არამკაფიო სიდიდეების საშუალებით, რომელთა მიკუთვნების ფუნქცია ზემოდან ნახევრად უწყვეტია და გააჩნია კომპაქტური საყრდენი. არამკაფიო რიცხვი ვუწოდოთ ზემოდან ნახევრად უწყვეტ არამკაფიო ინტერვალს კომპაქტური საყრდენით და ერთადერთი მოდალური მნიშვნელობით. მაგალითად, თუ M არის არამკაფიო რიცხვი m მოდალური მნიშვნელობით, მაშინ M შეიძლება განვიხილოთ როგორც "დაახლოებით m" გამონათქვამის წარმოდგენა. არამკაფიო ინტერვალის შემთხვევაში კი მოდალური მნიშვნელობების სიმრავლე თვით არის ინტერვალი. არამკაფიო Q სიდიდეს ეწოდება პოლიმოდალური, თუ არსებობს ამოზნექილი არამკაფიო სიმრავლეების $\{M_i|i \in I\}$ სასრული რაოდენობა ზემოდან ნახევრად უწყვეტი მიკუთვნების ფუნქციებით ისე, რომ Q არის M_i-ების გაერთიანება.

<u>თეორემა 1.1</u> ვთქვათ, M და N ორი არამკაფიო ინტერვალია ზემოდან ნახევრად უწყვეტი მიკუთვნების ფუნქციებით. ვიგულისხმოთ, რომ ყოველი $\alpha > 0$ α-დონეების სიმრავლეების M_α და N_α არ ფარავენ მთელ ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეს. ვთქვათ, f-უწყვეტი და იზოტონური ფუნქციაა $R^2 \to R$, ე.ი.

$$f(u,\text{v}) \geq \text{f}(u',\text{v}'), \qquad \forall u \geq u', \forall \text{v} \geq \text{v}'.$$

მაშინ $f(M,N)$ არამკაფიო სიდიდის α დონის სიმრავლეების წარმოადგენენ M და N არამკაფიო სიდიდეების α დონეების ანასახებს f ასახვის დროს

$$[f(M,N)]_\alpha = f(M_\alpha, N_\alpha), \qquad \forall \alpha > 0. \quad (1.36)$$

თუ M_α-ის და N_α-ის ჩაკეტილი შემოსაზღვრული ინტერვალებია $[\underline{m}_\alpha, \overline{m}_\alpha]$ და $[\underline{n}_\alpha, \overline{n}_\alpha]$, მაშინ $\forall \alpha \in (0,1]$, მართებულია

$$f(M_\alpha, N_\alpha) = [f(\underline{m}_\alpha, \underline{n}_\alpha), f(\overline{m}_\alpha, \overline{n}_\alpha)],$$

ე.ი. $f(M_\alpha, N_\alpha)$ ჩაკეტილი ინტერვალია.

აღსანიშნავია, რომ (1.36) თანაფადობა აგრეთვე მართებულია შემდეგი პრობების შესრულებისას (f-ის უწყვეტობასთან ერთად):

თუ f ფუნქცია განსაზღვრულია R^2 ის რაიმე არეზე (მაშინ განიხილება μ_M და μ_N ფუნქციების შეზღუდვები ამ არეზე) და

ა) თუ f ფუნქცია არის ანტიტონური, ე.ი. $u \geq u', v \geq v' \Rightarrow f(u, v) \geq f(u', v')$, მაშინ როცა M_α და N_α სეგმენტებია, გვაქვს:

$f(M_\alpha, N_\alpha) = [f(\overline{m}_\alpha, \overline{n}_\alpha)], f(\underline{m}_\alpha, \underline{n}_\alpha)];$

ბ) თუ f ფუნქცია "ჰიბრიდულია", ე.ი. $u \geq u'$ და $v \geq v' \Rightarrow f(u, v) \geq f(u', v')$, მაშინ როცა M_α და N_α სეგმენტებია, მართებულია ტოლობა

$f(M_\alpha, N_\alpha) = [f(\underline{m}_\alpha, \overline{n}_\alpha], f(\overline{m}_\alpha, \underline{n}_\alpha)];$

გ) თუ f-ს აქვს ორზე მეტი არგუმენტი და თითოეულის მიმართ არის მონოტონური.

ჩამოყალიბებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ თუ μ_M და μ_N ფუნქციები მკაცრად მონოტონურია $\mu^+_M, \mu^-_M, \mu^+_N, \mu^-_N$ შუალედებზე, სადაც μ^+_M და μ^+_N წარმოადგენენ M და N ინტერვალთა ზრდადობის შუალედებს, ხოლო μ^-_M და μ^-_N- კლებადობის შუალედებს, მაშინ სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობები:

$$\mu^+_{f(M,N)}(\omega) = \sup_{\alpha \epsilon (0.1],\ f(\underline{m}_a, \underline{n}_a) = \omega \leq f(\underline{m}_1, \underline{n}_1)} \{\min\{\mu^+_M(\underline{m}_a), \mu^+_N(\underline{n}_a)\}\} \quad (1.37)$$

$$\mu_{f(M,N)}(\omega) = 1, \ \forall \omega \in [f(\underline{m}_1, \underline{n}_1), f(\overline{m}_1, \overline{n}_1)$$

$$\mu^-_{f(M,N)}(\omega) = \sup\{\min\{\mu^-_M(\overline{m}_a), \mu^-_N(\overline{n}_a)\}, \alpha \in (0.1], \quad (1.38)$$

$$f(\overline{m}_\alpha, \overline{n}_\alpha) = \omega\}, \ \forall \omega \geq f(\overline{m}_1, \overline{n}_1), \quad (1.39)$$

სადაც μ_M^+ და μ_N^+ განისაზღვრებიან $(-\infty, \underline{m_1}]$ და $(-\infty, \underline{n_1}]$ ინტერვალებზე, ხოლო μ_M^-, μ_N^- –შესაბამისად $[\overline{m_1,} +\infty)$ და $[\overline{n_1,} +\infty)$.

თუ ფუნქცია f მკაცრად იზოტონურია (ე.ი. $u > u'$ $v > v' \Rightarrow f(u,v) > f(u',v')$), მაშინ მკაცრად ზრდადი μ_M^+ და μ_N^+ ფუნქციებისათვის (მკაცრად კლებადი ,μ_M^- და μ_N^- ფუნქციებისათვის) (1.37) და (1.39) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს ტოლობა

$$(\mu_{f(M,N)}^{\varepsilon})^{-1} = f((\mu_M^{\varepsilon})^{-1}, (\mu_N^{\varepsilon})^{-1}), \quad \forall \varepsilon \in \{+,-\}. \qquad (1.40)$$

(1.40) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ განზოგადების პრინციპის გამოყენებას რიცხვითი ფუნქციების მნიშვნელოვანი კლასისათვის მივყავართ მარტივ გამოთვლამდე. $f(M,N)$ ფუნქციის განსაზღვრისათვის საკმარისია ამოვხსნათ შემდეგი განტოლება α-ს მიმართ:

$$\omega = f((\mu_M^{\varepsilon})^{-1}(\alpha), (\mu_N^{\varepsilon})^{-1}(\alpha)), \quad \varepsilon \in \{+,-\}. \qquad (1.41)$$

აქვე მოვიყვანოთ ორი მარტივი დებულება, რომლებიც საშუალებას იძლევა გამოითვალოს $f(Q_1, Q_2)$ ფუნქცია როცა Q_1 და Q_2 პოლიმოდალური არამკაფიო სიდიდეებია. დავიყვანოთ გამოთვლებზე არამკაფიო ინტერვალებზე.

<u>**თეორემა 1.2.**</u> ვთქვათ Q_1 და Q_2 არამკაფიო სიმრავლეებია R-ში ისეთი, რომ $sup\, \mu_{Q1} \leq sup\, \mu_{Q2}$, თუ $\underline{Q_2}$ წარმოადგენს Q_2–ის კვეთას $sup\, \mu_{Q1}$ დონეზე ე.ი. $\mu_{\underline{Q_2}} = \min(sup\, \mu_{Q1}, \mu_{Q2})$, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$f(Q_1, Q_2) = f(f\left(Q_1, \underline{Q_2}\right) \quad \text{(კვეთის ეფექტი)}$$

<u>**თეორემა 1.3.**</u> თუ $Q_1 = \bigcup_{i=1,\ldots m_1} M_i^1$ ხოლო $Q_2 = \bigcup_{i=1,\ldots m_2} M_j^2$ სადაც M_i^1 და M_j^2 ამოზნექილი არამკაფიო სიმრავლეებია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში მაშინ

$$f(Q_1, Q_2) = \bigcup_{\substack{i=1,\dots m_1 \\ i=1,\dots m_2}} f(M_i^1, M_j^2)$$

მოყვანილი ზოგადი შედეგები საშუალებას გვაძლევს გავავრცელოთ ცნობილი არითმეტიკული ოპერაციები და მაქსიმუმის, მინიმუმუს პოვნის ოპერაციები არამკაფიო სიდიდეებზე. თავიდან განვიხილოთ უნარული ოპერაციები.

ვთქვათ, f წარმოადგენს ერთი არგუმენტის ფუნქციას, ხოლო Q არამკაფიო სიდიდეა, მაშინ $f(Q)$ მიკუთვნების ფუნქციას ექნება სახე

$$\mu_{f(Q)}(\omega) = \begin{cases} \sup\limits_{\omega = \mathrm{f}(u)} \mu_Q(u), & f^{-1}(\omega) = \emptyset, \\ 0, & f^{-1}(\omega) = \emptyset, \\ \mu_Q\left(f^{-1}(\omega)\right), & f - \text{ინექციაა} \end{cases} \tag{1.42}$$

აქედან გამომდინარე არამაკფიო Q სიდიდის საფუძველზე შეგვიძლია განვსაზღვროთ შემდეგი სიდიდეები, რომლებიც მოყვანილია ქვემოთ ცხრილში.

$f(M)$	$f(Q)$	$\mu_{f(Q)}(u)$
$-u$	$-Q$ (საპირისპირო ნიშნის სიდიდე)	$\mu_Q(-u)$
λu	λQ (რიცხვზე გამრავლება)	$\mu_Q(u/\lambda), \lambda \neq 0$
$1/u$	$(1/Q)$ (შებრუნებული სიდიდე)	$\mu_Q(1/u), u \neq 0$
u^P	Q^p (ხარისხი)	$\mu_Q(u^{1/p}), p \neq 0$
$\lvert u \rvert$	$\lvert Q \rvert$ (აბსოლუტური მნიშვნელობა)	$\lvert Q \rvert = (Q \cup (-Q)) \cap [0, +\infty)$
e^u	e^Q	$\mu_Q(\log(u)), u > 0$

არამკაფიო Q სიდიდეს ვუწოდებთ დადებითს თუ $\inf\ S(Q) \geq 0$ და უარყოფითს, თუ $\inf\ S(Q) \leq 0$, სადაც S აღნიშნავს არამკაფიო სიდიდის საყრდენს. ამ შემთხვევაში გამოვიყენებთ აღნიშვნებს $Q \geq 0$ და $Q \leq 0$, ხოლო > და < გამოვიყენებთ მაშინ, როცა 0 არ ეკითვნის Q არამკაფიო სიდიდის საყრდენს. ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ M არამკაფიო ინტერვალია, მაშინ შებრუნებული სიდიდე $1/_{\mathrm{M}}$ იქნება არამკაფიო ინტერვალი მხოლოდ მაშინ, როცა საწყისი ინტერვალი ან დადებითია ან უარყოფითი.

განვიხილოთ ოთხი ძირითადი არითმეტიკული ოპერაციის გავრცელება. შევნიშნავთ, რომ ნებისმიერი კომუტაციური (ასოციაციური) ოპერაციის გავრცელება კომუტაციურია (ასოციაციურია).

ორი არამკაფიო სიდიდისათვის შეკრების ოპერაცია $Q_1 \oplus\ Q_2$ განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$\mu_{Q_1 \oplus\ Q_2}(\omega) = \sup\left\{min\left(u_{Q_1}(u), u_{Q_2}(\omega - u)\right)\middle|\omega \in R\right\}. \quad (1.43)$$

$I(R)$-ით აღვნიშნოთ ყველა არამკაფიო ინტერვალის სიმრავლე, რომელთა მიკუთვნების ფუნქციები ზემოდან ნახევრად უწყვეტნია. მაშინ $I(R)$ სიმრავლე მასზე განსაზღვრული $\oplus$ ოპერაციის მიმართ იქცევა ნახევარჯგუფად, რომლის ნულოვანი ელემენტია მუდმივი ფუნქცია 0. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე $\oplus$ ოპერაცია ემთხვევა ჩვეულებრივ შეკრების ოპერაციას. ზოგადად Q არ წარმოადგენს Q–ს შებრუნებულ ელემენტს $\oplus$ შეკრების მიმართ, ვინაიდან $(-Q)\oplus Q$ არამკაფიო სიმრავლეა, რომელშიც 0-ს გააჩნია მიკუთვნების ხარისხი 1, მაგარამ არ არის მუდმივი 0 ფუნქცია.

ორი არამკაფიო სიდიდისათვის გამოკლების ოპერაციის გავრცელება $Q_1 \ominus Q_2$ განისაზღვრება შემდეგი სახით:

$$\mu_{Q_1 \ominus Q_2}(\omega) = \sup\left\{min\left(u_{Q_1}(\omega + u), u_{Q_2}(u)\right)\middle| u \in R\right\}. \quad (1.44)$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $Q_1 \ominus Q_2 = Q_2 \oplus (-Q_1)$.

ორი არამკაფიო სიდიდისათვის გამრავლების ოპერაციის გავრცელება $Q_1 \otimes Q_2$ განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$\mu_{Q_1 \otimes Q_2}(\omega) = \begin{cases} \sup\left\{\min\left(u_{\mathrm{Q}_1}(u), u_{\mathrm{Q}_2}(\omega/u)\right)\middle| u \in \mathrm{R}\{0\}\right\}, & \text{თუ} \quad \omega \neq 0 \\ \max\left(u_{\mathrm{Q}_1}(0), u_{\mathrm{Q}_2}(0)\right), & \text{თუ} \quad \omega = 0 \end{cases} \quad (1.45)$$

დადებითი არამაკაფიო ინტერვალთა სიმრავლე $I(R^+)$ ზემოდან ნახევრად უწყვეტი მიკუთვნების ფუნქციით და $\otimes$ გამრავლების ოპერაციით ქმნის ნახევარჯგუფს ერთეულოვანი ელემენტით 1. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე $\otimes$ ოპერაცია ემთხვევა ჩვეულებრივ გამრავლებას. $1/Q$ სიდიდე არაა Q-ს შებრუნებული ელემენტი, რაც უზრუნველყოფდა ჯგუფის არსებობას, ვინაიდან ნამრავლი $Q \otimes 1/Q$ არის არამკაფიო სიმრავლე, რომელიც 1-ს შეიცავს ხარისხით 1, მაგრამ არა რიცხვი 1.

0 არის $\otimes$ ოპერაციის მიმართ ნულოვანი ელემენტი. აგრეთვე შეიძლება შემოწმდეს, რომ

$$Q_1 \otimes Q_2 = (-Q_1) \otimes (-Q_2),$$

$$(-Q_1) \otimes Q_2 = Q_1 \otimes (-Q_2) = -(Q_1 \otimes Q_2).$$

ზოგადად $\otimes$ ოპერაციის დისტრიბუციულობის თვისებას $\oplus$ შეკრების მიმართ ადგილი არა აქვს. მართებულია დისტრიბუციულობის შესუსტებული ვარიანტი

$$Q_1 \otimes (Q_2 \oplus Q_3) \subseteq (Q_1 \otimes Q_2) \oplus (Q_1 \otimes Q_3) \quad (1.46)$$

დისტრიბუციულობის თვისება სრულდება შემდეგ შემთხვევაში:

ა) Q_1 – ნამდვილი რიცხვია;

ბ) Q_1, Q_2, Q_3 – არამკაფიო ინტერვალებია ზემოდან ნახევრად უწყვეტი მიკუთვნების ფუნქციით, ამასთან Q_2 და Q_3 ინტერვალები ან ორივე დადებითია ან ორივე უარყოფითი;

გ) Q_1, Q_2, Q_3 – არამკაფიო ინტერვალებია ზემოდან ნახევრად უწყვეტი მიკუთვნების ფუნქციით, ამასთან Q_2 და Q_3 სიმეტრიული არამკაფიო ინტერვალებია ($Q_2 = -Q_2, Q_3 = -Q_3$).

გაყოფის ოპერაციის გავრცელება $Q_1 : Q_2$ ორი არამკაფიო სიდიდისათვის განისაზღვრება შემდეგი სახით:

$$\mu_{Q_1 : Q_2}(w) = \sup\{min(\mu_{Q_1}(u \times w),\ \mu_{Q_2}(u)) \,|, u \in R\} \quad (1.47)$$

ცხადია, მართებულია $Q_1 : Q_2 = Q_1 \otimes {}^1\!/_{Q_2}$. იმ შემთხვევაში, როცა Q_1 და Q_2 ერთი და იგივე ნიშნის (ორივე დადებითი ან ორივე უარყოფითი) არამკაფიო ინტერვალებია. მაშინ $Q_1 : Q_2$ ფარდობა აგრეთვე იქნება არამკაფიო ინტერვალი.

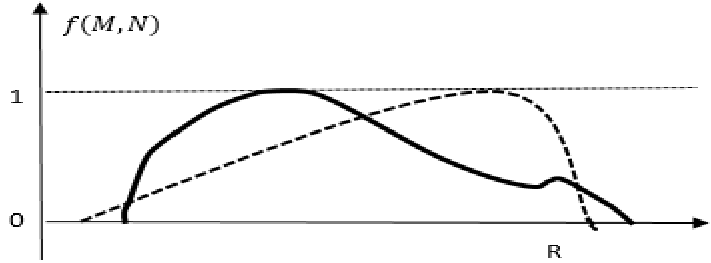
გავარკვიოთ, აქვს თუ არა აზრი მაქსიმუმის და მინიმუმის ოპერაციების გავრცელებას განზოგადების პრინციპის საშუალებით.

$g_1(s,t) = \max(s,t)$ და $g_2(s,t) = \min(s,t)$ იზოტონური ფუნქციებია $R \times R$ დეკარტულ ნამრავლზე, რაც საშუალებას გვაძლევს მარტივად გავავრცელოთ ეს ოპერაციები, ვინაიდან

$$m\tilde{a}x([a,a'],[b,b']) = [\max(a,b), \max(a',b')],$$

$$m\tilde{\imath}n([a,a'],[b,b']) = [\min(a,b), \min(a',b')],$$

აქედან ცხადია $\tilde{max}(M,N)$ და $\tilde{min}(M,N)$ ოპერაციების აგება. $\tilde{max}$-ით და $\tilde{min}$-ით ოპერაციების გავრცელებები, ხოლო M და N არამკაფიო ინტერვალებია ზემოდან ნახევრად უწყვეტი მიკუთვნების ფუნქციით (ნახ.1.3)



ნახ.1.3

შევნიშნავთ, რომ $\tilde{max}(M,N)$ შეიძლება არ დაემთხვეს არც M-ს და არც N-ს. მიღებული $\tilde{max}$ და $\tilde{min}$ ოპერციები კომუტატიური და ასოციაციურია, ამასთან $\tilde{max}(M,N) = \tilde{min}(-M,-N)$. $\tilde{max}$ და $\tilde{min}$ ოპერაციები ურთიერთ-დისტრიბუციულია არამკაფიო ინტერვალთა $I(R)$ სიმრავლეზე და აკმაყოფილებენ შემდეგ თვისებებს:

$$\tilde{min}(M,N) \oplus \tilde{max}(M,N) = M \oplus N,$$

$$M \oplus \tilde{min}(N,P) = \tilde{min}(M \oplus N, M \oplus P),$$

$$M \oplus \tilde{max}(N,P) = \tilde{max}(M \oplus N, M \oplus P),$$

$\tilde{max}(M,N) = M$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\tilde{min}(M,N) = N$, $\tilde{max}(M,M) = M$, $\tilde{min}(M,M) = M$.

1.4. ᲐᲠᲐᲛᲙᲐᲤᲘᲝ ᲘᲜᲢᲔᲠᲕᲐᲚᲔᲑᲘᲡ ᲞᲠᲐᲥᲢᲘᲙᲣᲚᲘ ᲒᲐᲛᲝᲗᲕᲚᲐ

ამ პარაგრაფში ვნახავთ, რომ ხშირ შემთხვევაში არამკაფიო ინტერვალების გამოთვლა დაიყვანება მათ პარამეტრულ წარმოდგენაზე და სათანადო პარამეტრების გამოთვლაზე.

1.4.1. ᲐᲠᲐᲛᲙᲐᲤᲘᲝ ᲘᲜᲢᲔᲠᲕᲐᲚᲔᲑᲘᲡ ᲞᲐᲠᲐᲛᲔᲢᲠᲣᲚᲘ ᲬᲐᲠᲛᲝᲓᲒᲔᲜᲐ

$\mathrm{M} \in \mathrm{I(R)}$ არამკაფიო ინტერვალისათვის პარამეტრული წარმოდგენა შეიძლება მივიღოთ, თუ გამოვიყენებთ ორი ტიპის $R^{+} \rightarrow [0,1]$ ფუნქციას, რომლებსაც ავღნიშნავთ L და R. L – ფართო აზრით კლებადი ფუნქციაა, რომელიც ზემოდან ნახევრად უწყვეტია და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$L(0) = 1 \text{ და აგრეთვე } \forall u > 0,\ \ L(u) < 1,\ \ \forall u < 1,\ \ L(u) > 0,$$

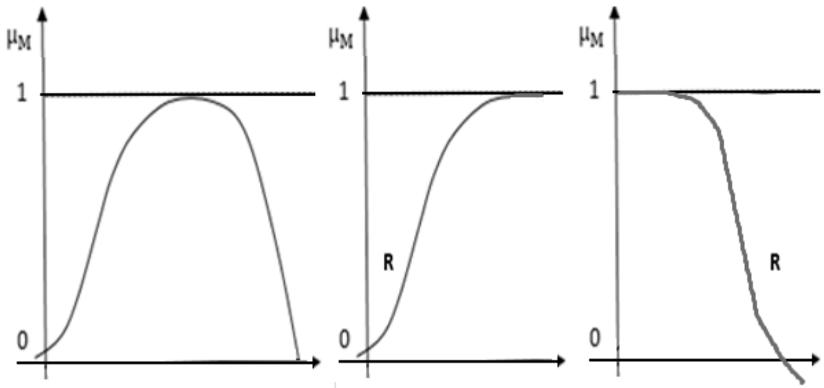
$$L(1) = 0 \text{ ან } L(u) > 0,\ \ \forall u \text{ და } L(+\infty) = 0.$$

განვიხილოთ M არამკაფიო ინტერვალი ზემოდან ნახევრადუწყვეტი მიკუთვნების ფუნქციით, რომელიც გამოისახება L, R ფუნქციების, $(\underline{m}, \overline{m}) \in R^2$ და $\alpha, \beta \geq 0$ პარამეტრების საშუალებით შემდეგი სახით:

$$\mu_{\mathrm{M}}(u) = \begin{cases} \mathrm{L} = \left(\frac{\underline{\mathrm{m}} - u}{\alpha}\right), & u \leq \underline{\mathrm{m}} \\ 1, & \underline{\mathrm{m}} \leq u \leq \overline{\mathrm{m}}; \\ \mathrm{R} = \left(\frac{u - \overline{\mathrm{m}}}{\beta}\right), & u \geq \overline{\mathrm{m}} \end{cases} \qquad (1.48)$$

1.4. ნახაზზე მოყვანილია სამი ტიპის არამკაფიო ინტერვალი:

- გუმბათისებრი ფუნქცია;
- არაკლებადი ფუნქციები;
- არაზრდადი ფუნქცია.



ნახ.1.4

აქ $[\underline{m}, \overline{m}]$ ინტერვალი წარმოადგენს M არამკაფიო ინტერვალის ბირთვს $\underline{m}$ და $\overline{m}$ ეწოდებათ M არამკაფიო ინტერვალის შესაბამისად ქვედა და ზედა მოდალური მნიშვნელობები. $[\underline{m} - \alpha, \overline{m} + \beta]$ წარმოადგენს M არამკაფიო ინტერვალის საყრდენს. α და β პარამეტრებს ეწოდებათ შესაბამისად მარცხენა და მარჯვენა გაბნევის კოეფიციენტები.

არამკაფიო ინტერვალების აღნიშნული კლასი ძალიან ზოგადია, ვინაიდან შეიცავს ყველა ნორმირებულ არამკაფიო ინტერვალს, რომლის მიკუთვნების ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\lim_{x\to+\infty} \mu_M(x) \in \{0,1\}; \quad \lim_{x\to-\infty} \mu_M(x) \in \{0,1\}; \quad \overset{\circ}{M} \neq \emptyset.$$

ამრიგად არამკაფიო ინტერვალი შეიძლება წარმოვადგინოთ პარამეტრთა ოთხეულის საშუალებით $M = (\underline{m}\,, \overline{m}, \alpha, \beta)_{LR}$. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ M არის $(L - R)$ ტიპის არამკაფიო ინტერვალი.

1.4.2. მაგალითები

1. M ნამდვილი რიცხვია $m \in R$. მაშინ განმარტების თანახმად $M = (m, m, 0,0)_{LR}$, $\forall L, \forall R$.
2. $M = [a, b)$, მაშინ განმარტების თანახმად
$$M = (a, b, 0,0)_{LR}, \forall L, \forall R$$
3. M არამკაფიო ინტერვალს აქვს ტრაპეციის ფორმა მაშინ გამოვიყენებთ შემდეგ L, R ფუნქციებს $L(u) = R(u) = \max(0.1 - u)$
4. M არამკაფიო რიცხვია, მაშინ $\underline{m} = \overline{m} = m$ და $M = (m, a, b)_{LR}$. L, R ფუნქციების ნაცვლად შეიძლება ავიღოთ $L(u) = \max(0.1 - u)^P$, $L(u) = \max(0.1 - u^P)$, $L > 0$, $L(u) = e^{-u}$, $L(u) = e^{-u^2}$ და ა.შ.

თავი II

ინტეგრალური აღრიცხვა არამკაფიო სიმრავლეთა თეორიაში

2.1. არამკაფიო ზომის განსაზღვრა და მისი ძირიათადი თვისებები

არამკაფიო ზომა ალბათური ზომის განზოგადებაა. როგორც ცნობილია, რაიმე X სიმრავლეზე ზომა მოიცემა $\mu: P(X) \to R_+$ ასახვის საშუალებით, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ ორ აქსიომას [5]:

1) $P(X)$ წარმოადგენს X სიმრავლის ქვესიმრავლეთგან შექმნილ ნახევარრგოლს, ე.ი. $\emptyset \in P(X)$ და თუ $A, B \in P(X)$, მაშინ $A \cap B \in P(X)$; გარდა ამისა, თუ $A \subset B$, უნდა არსებობდეს თანაუკვეთ სიმრავლეთა ისეთი სასრული ოჯახი $B_1, B_2, \dots, B_k$, რომ $B = A \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$.

2) μ ადიტიურია, ე.ი. $A \in P(X)$ სიმრავლის ყოველი სასრული დაშლისათვის თანაუკვეთ სიმრავლეებად $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, $A_i \in P(X), i = \overline{1, n}$, უნდა სრულდებოდეს ტოლობა

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

თუ μ მნიშვნელობებს იღებს [0,1] სეგმენტიდან, მაშინ ზემოთ მოცემული აქსიომები განსაზღვრავს ალბათურ ზომას. არამკაფიო ზომა ალბათური ზომისაგან განსხვავებით თავისუფალია ადიტიურობის პირობით გამოწვეული საკმაოდ ძლიერი შეზღუდვისაგან.

<u>**განსაზღვრება 2.1**</u> (X, σ_x) სივრცეზე განსაზღვრული არამკაფიო ზომა, სადაც σ_x წარმოადგენს σ ალგებრას X-ზე (ე.ი. $X \in \sigma_x$ და თუ $(A_i)_{i \geq 1}$ მიმდევრობაა σ_x-დან, მაშინ

$\bigcup_i A_i \in \sigma_x$), ეწოდება $\mu : \sigma_x \to [0,1]$ ასახავს, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(X) = 1$ (შემოსაზღვრულობა);

2) თუ $A, B \in \sigma_x$ და $A \subset B$, მაშინ $\mu(A) \le \mu(B)$ (მონოტონურობა);

3) თუ $(A_i)_{i \ge 1}$ მონოტონური (ზრდადი ან კლებადი მიმდევრობაა σ_x-დან მაშინ $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\lim_{n\to\infty} A_n)$ (უწყვეტობა).

აღნიშნულ განსაზღვრებაში მონოტონურობის ქვეშ გვესმის ერთმანეთში ჩალაგებული (კლებადი) სიმრავლეთა მიმდევრობა (ამ დროს ზღვარს წარმოადგენს აღნიშნულ სიმრავლეთა თანაკვეთა) და მზარდად დალაგებული (ყოველი სიმრავლე მოიცავს წინას) სიმრავლეთა მიმდევრობა (ამ დროს ზღვარს წარმოადგენს მათი გაერთიანება).

შემდეგში (X, σ_x, μ) სამეულს ვუწოდებთ სივრცეს არამკაფიო ზომით.

არამკაფიო ზომების აგების საკითხს ეძღვნება მრავალი შრომა [2,3,6,7]. ძირითადად არამკაფიო ზომებს აგებენ ფოკალური ელემენტების ზომის ფუნქციის საშუალებით.

განსაზღვრება 2.2 ფოკალური ელემენტების ზომის ფუნქცია ეწოდება $E_i, i = \overline{1,p};$ $E_i \subset X$ სიმრავლეებზე (ფოკალურ ელემენტებზე) განსაზღვრულ m ფუნქციას, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

1) $E_i, i = \overline{1,p};$ არაცარიელი, წყვილ-წყვილად განსხვავებული სიმრავლეებია;

2) $\sum_{i=1}^{p} m(E_i) = 1, m(E_i) > 0.$

$m(E_i)$ სიდიდეები გაიგება როგორც E_i სიმრავლის შემადგენელი ელემენტარული ხდომილობების ალბათობა. ამასთან, არ ზუსტდება ეს ალბათობები. E_i სიმრავლეებს უწოდებენ "ფოკალურ ელემენტებს" და ისინი გამოხატავენ დაკვირვების არაზუსტობას. მათი ერთობლიობა აღვნიშნოთ Φ სიმბოლოთი.

$m : \Phi \rightarrow [0,1]$ ასახვის საშუალებით შესაძლებელია ავაგოთ სხვადასხვა არამკაფიო ზომები.

განვიხილოთ $B : P(X) \rightarrow [0,1]$ ფუნქცია, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$B(A) = \sum_{E_i \subset A} m\,(E_i). \qquad (2.1)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ აღნიშნული ფუნქცია წარმოადგენს არამკაფიო ზომის ფუნქციას, ანუ დაცულია განსაზღვრება 2.1-ში ჩამოთვლილი აქსიომები. აღნიშნულ ზომას უწოდებენ ნდობის ზომას (belief measure). უშუალოდ (2.1) ტოლობიდან გამომდინარეობს ნდობის ზომის კიდევ ერთი საყურადღებო თვისება:

თუ $A_i \subset X, i = \overline{1,n},$ მაშინ

$$B(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{\substack{I \subset \{1,2,\dots,n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} B(\bigcap_{i \in I} A_i), \qquad (2.2)$$

სადაც $|I|$ აღნიშნავს I სიმრავლეში ელემენტთა რაოდენობას.

<u>შენიშვნა 2.1</u> შევნიშავთ, რომ $B : P(X) \rightarrow [0,1]$ ასახვა არ წარმოადგენს m ასახვის გავრცელებას $P(X)$-ზე. ე.ი. $\boldsymbol{B|_{\Phi} \neq m}$.

B ფუნქცია სემანტიკურად გამოხატავს იმ აზრს, რომ ჭეშმარიტი A წინადადების ნდობის ხარისხი არ არის აუცილებელი ერთის ტოლი იყოს. უფრო მეტიც, A გამონათქვამის და მისი უარყოფის $\overline{A}$ ნდობის ხარისხთა ჯამიც შესაძლოა არ იყოს ერთის ტოლი, რადგან როგორც (2.1)-დან გამომდინარეობს, ზოგადად

$$B(A) + B(\overline{A}) = 1 - \sum_{\substack{E_i \notin \Phi,\ E_i \not\subset A \\ E_i \not\subset \overline{A}}} B(E_i). \qquad (2.3)$$

<u>**თეორემა 2.1.**</u> იმისათვის რომ ნდობის B ზომა განსაზღვრავდეს აუცილებლობის ზომას (ე.ი. აკმაყოფილებდეს (1.11) აქსიომას), აუცილებელია და საკმარისი, რომ Φ სიმრავლის ელემენტები ქმნიდეს მონოტონურ მიმდევრობას X-ში.

<u>*დამტკიცება*</u>. ვთქვათ, $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_p$. უნდა ვაჩვენოთ, რომ $B(A \cap C) = \min(B(A), B(C))$, სადაც A და C ნებისმიერი ქვესიმრავლეებია X-ში. ის რომ $B(A \cap C) \leq \min(B(A), B(C))$, გამომდინარეობს არამკაფიო ზომის მონოტონურობის აქსიომიდან. ვაჩვენოთ საწინააღმდეგო უტოლობა. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\min(B(A), B(C)) = B(A) \leq \mathrm{B(C)}$. Φ'-ით აღვნიშნოთ Φ სიმრავლის იმ ელემენტთა ერთობლიობა, რომლებიც შედიან $A \cap C$-ში. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $B(A \cap C) < B(A)$, მაშინ მოიძებნება ერთი მაინც ელემენტი Φ სიმრავლიდან, რომელიც არ შედის Φ'-ში და შედის A-ში. აღნიშნული ტიპის ელემენტებს შორის მინიმალური აღვნიშნოთ E_{i0}-ით. რადაგან Φ სიმრავლის ელემენტები ქმნიან ზრდად მიმდევრობას, ამიტომ ცხადია, რომ $E_{i0} \subset C$. და $E_{i0} \subset (A \cap C)$, რაც ეწინააღმდეგება იმ პირობას, რომ $E_{i0} \notin \Phi'$ საკმარისობა ნაჩვენებია.

ვაჩვენოთ აუცილებლობა. ე.ი. ვუშვებთ, რომ $B(A \cap C) = \min\big(B(A), B(C)\big)$, სადაც A და C ნებისმიერი ქვესიმრავლეებია X-ში. დაუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, Φ სიმრავლის ელემენტები არ ქმნიან ზრდად მიმდევრობას, მაშინ მოიძებნება ერთი მაინც წყვილი სიმრავლეებისა E_i, E_j, რომ $E_i \cap E_j \neq \emptyset$, $E_i \not\subset E_j$ და $E_j \not\subset E_i$. მაშინ ცხადია, რომ $B\big(E_i \cap E_j\big) < (B(E_i)$ და $B\big(E_i \cap E_j\big) < B\big(E_j\big)$ ე.ი. $B\big(E_i \cap E_j\big) < \min(B(E_i), B\big(E_j\big))$, რაც ეწინააღმდეგება პირობას. თეორემა სრულად არის დამტკიცებული.

ფოკალური ელემენტების საშუალებით შესაძლებელია ავაგოთ კიდევ ერთი არამკაფიო ზომა, კერძოდ, განვიხილოთ $P : P(X) \to [0,1]$ ასახვა, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$P(A) = \sum_{\substack{E_i \cap A \neq \emptyset \\ E_i \in \Phi}} m\,(E_i). \tag{2.4}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ აღნიშნული ასახვაც განსაზღვრავს არამკაფიო ზომას X სიმრავლეზე, ანუ დაცულია განსაზღვრება 2.1-ში ჩამოთვლილი პირობები. აღნიშნულ ზომას უწოდებენ სიმართლისმაგვარ ზომას (plausibility measure). აღსანიშნავია, რომ აღნიშნული ზომა აკმაყოფილებს თვისებას. თუ $A_i \subset X, i = \overline{1,n},$ მაშინ

$$B\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \leq \sum_{\substack{I \subset \{1,2,\ldots,n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} B\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big), \tag{2.5}$$

სადაც $|I|$, ისევე როგორც ზემოთ, აღნიშნავს I სიმრავლეში ელემენტების რაოდენობას (სიმძლავრეს). (2.5)უტოლობის დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს (2.4) ტოლობიდან და მას სავარჯიშოს სახით მკითხველს ვთავაზობთ.

$P(A)$ ზომა გამოხატავს $A \subset X$ ხდომილობის სიმართლისმაგვარობის ხარისხს, რომელიც ყალბი ხდომილობისთვისაც კი შესაძლებელია იყოს დადებითი სიდიდე.

აღსანიშნავია, რომ ნდობის B ზომასა და სიმართლისმაგვარობის P ზომას შორის არსებობს ორადული თანაფარდობა, კერძოდ ნებისმიერი $A \subset X$ ქვესიმრავლისათვის მართებულია ტოლობა.

$$P(A) + B\left(\overline{A}\right) = 1 \tag{2.6}$$

აღნიშნული ტოლობა უშუალოდ გამომდინარეობს 2.2 განსაზღვრების მეორე პირობიდან, რადგან Φ სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი („ფოკალური ელემენტი") ან წარმოადგენს $\overline{A}$-ის ქვესიმრავლეს, ან იკვეთება A-სთან. ასევე მართებულია წინა თეორემის ანალოგიური თეორემა.

<u>თეორემა 2.2.</u> იმისათვის, რომ სიმართლისმაგვარობის P ზომა წარმოადგენდეს შესაძლებლობის ზომას (ანუ აკმაყოფილებდეს წინა თავის (1.6) პირობას), აუცილებელია და საკმარისი, რომ "ფოკალური ელემენტები" ქმნიდნენ მონოტონურ მიმდევრობას.

<u>დამტკიცება.</u> ჯერ ვაჩვენოთ საკმარისობა. Φ სიმრავლის ელემენტები ქმნის მონოტონურ მიმდევრობას $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_p$ და დასამტკიცებელი გვაქვს $P(A \cup B) = \max\left(P(A), P(B)\right)$ ტოლობა. რადგან P წარმოადგენს ზომის ფუნქციას, ამიტომ ნათელია (მონოტონურობის თვისების გამო) $P(A \cup B) \geq \max\left(P(A), P(B)\right)$ უტოლობის მართებულობა. დასამტკიცებელი გვაქვს ამ უტოლობის საწინააღმდეგო უტოლობა. დავუშვათ საწინააღმდეგო (თან ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $\max\left(P(A), P(B)\right) = P(A) \geq P(B)$), ე.ი. ვთქვათ, $P(A \cup B) > P(A) \geq P(B)$.

Φ'-ით აღვნიშნოთ იმ ფოკალური ელემენტების ერთობლიობა, რომლებსაც გააჩნია არაცარიელი თანაკვეთა $A \cup B$-სთან, მაშინ აღნიშნული უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს Φ'-ის ერთი ელემენტი, რომელიც არ გადაიკვეთება არც A-სთან და არც B-სთან, რაც შეუძლებელია Φ'-ის განმარტების გამო.

ახლა ვაჩვენოთ აუცილებლობა. ვუშვებთ, რომ $P(A \cup B) = \max\big(P(A), P(B)\big)$, ტოლობა სრულდება ნებისმიერი A და B ქვესიმრავლისათვის X-დან. უნდა ვაჩვენოთ, რომ მაშინ ფოკალური ელემენტები ქმნის მონოტონურ მიმდევრობას. დავუშვათ საწინააღმდეგო, მაშინ მოიძებნება ერთი მაინც წყვილი სიმრავლეებისა E_i, E_j, რომ $E_i \cap E_j \neq \emptyset$, $E_i \not\subset E_j$ და $E_j \not\subset E_i$. A და B სიმრავლეების როლში შესაბამისად განვიხლოთ $E_i \backslash E_j$ და $E_j \backslash E_i$ სიმრავლეები, მაშინ ცნადია, რომ $P(A \cup B) > P(A), P(B))$, რაც ეწინააღმდეგება ჩვენ პირობას. თეორემა სრულად არის დამტკიცებული.

2.2. სუჯენოს g_λ ზომები და მათი თვისებები, სემანტიკური სპექტრი

პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას ფართე გამოყენება ჰპოვა არამკაფიო ზომების სხვადასხვა კონსტრუქციებმა. მათ შორის განსაკუთრებით გამოირჩევა ე.წ. g_λ -სუჯენოს არამკაფიო ზომები, რომლებიც შემოტანილია მ. სუჯენოს მიერ [2,3].

g_λ ზომების ასაგებად გამოიყენება λ-წესი: ნებისმიერი $A, B \in X$, $A \cap B = \emptyset$ სიმრავლისათვის

$$g_\lambda(A \cup \mathrm{B}) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda g_\lambda(A) g_\lambda(B), \lambda \in [-1, +\infty) \qquad (2.7)$$

იმ შემთხვევაში როდესაც $A \cup \mathrm{B} = \mathrm{X}$ და $g_\lambda(A \cup \mathrm{B}) = 1$. (2.7) პირობა წარმოადგენს g_λ ზომების ნორმირების პირობას. აღნიშნული პირობიდან გამომდინარე გვაქვს:

$$g_\lambda(\overline{A}) = \frac{1 - g_\lambda(A)}{1 + \lambda g_\lambda(A)}. \qquad (2.8)$$

(2.8) ფორმულა განსაზღვრავს სუჯენოს λ დამატებებს, რომლებიც შესაძლებელია განისაზღვროს უარყოფის შემდეგი გენერატორების (ზრდადი ფუნქციების) საშუალებით: $t_\lambda : [0,1] \to R_+$, სადაც

$$t_\lambda : (x) = \frac{\ln(1 + \lambda x)}{\lambda}, \qquad \lambda \geq -1. \qquad (2.9)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ (2.8) ფორმულა ტოლფასია შემდეგი თანაფარდობის:

$$c(g_\lambda) = {t_\lambda}^{-1}\big(t_\lambda(1) - t_\lambda(g_\lambda)\big). \qquad (2.10)$$

სუჯენოს g_λ არამკაფი ზომები λ პარამეტრის მიხედვით იყოფა შემდეგ კლასებად:

1) სუპერადიტიურ არამკაფიო ზომებად ($\lambda > 0$). აღნიშნული ზომებისათვის შესრულებულია პირობა ნებისმიერი $A, B \in X$, $A \cap B = \emptyset$ სიმრავლეებისათვის

$$g_\lambda(A \cup \mathrm{B}) > g_\lambda(A) + g_\lambda(B) \qquad (2.11)$$

თუ $h : X \to R$ წარმოადგენს $t_\lambda \circ g_\lambda$ არამკაფიო ზომის სიმკვრივის განაწილების ფუნქციას (ვგულისხმობთ, რომ X სივრცეზე განსაზღვრულია ლებეგის უწყვეტი ზომა), მაშინ

$$\int_x h(x)dx = t_\lambda(1) < 1$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ (2.11) ტოლობა წარმოადგენს ნდობის ზომის (2.2) უტოლობის შსატყვის უტოლობას, ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ g_λ ზომები, რომლებიც

$\lambda > 0$, სემანტიკური მოდალობით წარმოადგენს ნდობის ზომებს.

2) სუბადიატურ ზომებად $(-1 < \lambda < 0)$. აღნიშნულ შემთხვევაში (2.11) პირობა იცვლება შემდეგი თვისებით: ნებისმიერი $A, B \in X$, $A \cap B = \emptyset$ სიმრავლეებისათვის

$$g_\lambda(A \cup \mathrm{B}) < g_\lambda(A) + g_\lambda(B) \qquad (2.12)$$

აღნიშნული უტოლობა წარმოადგენს (2.5) უტოლობის ანალოგს, ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ g_λ ზომები, როდესაც $\lambda \in [-1,0)$, სემანტიკური მოდალობით წარმოადგენს სიმართლისმაგვარობის ზომებს, რომლის დროსაც

$$\int_x h(x)dx = t_\lambda(1) > 1$$

3) ალბათური ზომები $(\lambda = 0)$. ამ დროს სრულდება პირობები: ნებისმიერი $A, B \in X$, $A \cap B = \emptyset$ სიმრავლეები-სათვის სრულდება ტოლობა

$$g_0(A \cup \mathrm{B}) = g_0(A) + g_0(B)$$

g_λ ზომის წარმოდგენა დამოკიდებულია X სივრცეზე. როდესაც X სასრული სივრცეა, $X = \{x_i\}_{i=\overline{1,n}}$, მაშინ საკმარისია განვსაზღვროთ g_λ ზომის მნიშვნელობები x_i ელემენტებზე, $g_\lambda(x_i) = g_i$, რომლებიც უნდა აკმაყოფი-ლებდეს ნორმირების შემდეგ პირობებს:

$$\frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda g_i\right) - 1) = 1, \qquad \lambda \in [-1, +\infty) \qquad (2.13)$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც X სივრცე ნამდვილ რიცხვთა R სივრცის იზოფორმულია, მაშინ შესაძლე-ბელია, რაიმე $H: R \to [0,1]$ ფუნქციის გამოყენებით (რომელსაც ალბათობის განაწილების ფუნქციის ანალოგიური თვისებები გააჩნია) განვსაზღვროთ

არამკაფიო ზომა, რომელიც $[a,b]$ ინტერვალზე იღებს მნიშვნელობას

$$g_\lambda([a,b]) = \frac{H(b)-H(a)}{1+\lambda H(a)}, \quad \forall [a,b] \subset X. \tag{2.14}$$

[8]-ში ნაჩვენებია, რომ აღნიშნული X სივრცისათვის g_λ ზომა შესაძლებელია განსაზღვრული იყოს არამკაფიო ზომის $h(x)$ სიმკვრივის ფუნქციის საშუალებით. კერძოდ, ნებისმიერი $A \subset X$ ქვესიმრავლისათვის

$$g_\lambda(A) = \frac{1}{\lambda}\left\{e^{\lambda \int_A h(x)dx} - 1\right\}. \tag{2.15}$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ (2.15) ფორმულით განსაზღვრული ზომა აკმაყოფილებს (2.7) λ წესს. აღნიშნული ფორმულის გამოყენებით შესაძლებელია მოვახდინოთ დაკვირვება, თუ როგორ იცვლება არამკაფიო ზომის სემატიკური მოდალობა λ პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად, ანუ, თუ დავაფიქსირებთ $W \subset X$ ხდომილობათა სიმრავლეს, შესაძლებელია განვმარტოთ და შევისწავლოთ $sem_W: [-1, +\infty) \to [0,1]$ ფუნქცია. აღნიშნული ფუნქცია განვმარტოთ $sem_W(\lambda) = g_\lambda(W)$ ტოლობით. აღნიშნულ ფუნქციას უწოდებენ $W \subset X$ სიმრავლის სემანტიკურ სპექტრს და იგი არის კლებადი ფუნქცია. $sem_W: [-1, +\infty) \to [0,1]$ ფუნქციების აგება, გამოკვლევა და პრაქტიკულ ამოცანებში მათი გამოყენება წარმოადგენს არამკაფიო ზომების გამოკვლევის და გამოყენების ერთ-ერთ ყველაზე საინტერესო თანამედროვე მიმართულებას.

განვიხილოთ ერთი მაგალითი. ვთქვათ, $X = [0,3]$, $h(x) = \frac{\ln(1+\lambda)}{3\lambda}$, $w = [0,1]$. მაშინ ალბათობა W ხდომილების მოხდენისა ტოლია 1/3-ის. ხოლო W ხდომილობის g_λ ზომა ტოლია

$$g_\lambda(W) = \frac{1}{\lambda}\left\{e^{\lambda\int_0^1 \frac{\ln(1+\lambda)}{3\lambda}} - 1\right\} = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+\lambda)^2} + \sqrt[3]{1+\lambda+1}}.$$

ე.ი. ჩვენ შემთხვევაში სემანტიკური სპექტრის $sem_W: [-1, +\infty) \to [0,1]$ ფუნქციას აქვს სახე

$$sem_W(\lambda) = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+\lambda)^2} + \sqrt[3]{1+\lambda+1}}.$$

აღნიშნული ფორმულიდან ვღებულობთ: შესაძლებლობა იმისა, რომ $\omega \in W$, ტოლია $sem_W(-1) = 1$; ალბათობა იმისა, რომ $\omega \in W$, ტოლია $sem_W(0) = 1/3$ ხოლო აუცილებლობა იმისა, რომ $\omega \in W$, ტოლია 0.

ამრიგად, დღეისათვის არამკაფიო ზომების მოდელირების ყველაზე ეფექტურ გზად შესაძლებელია მივიჩნიოთ სუჯენოს g_λ ზომები, რომელთა აგება ხდება λ წესის გამოყენებით. აღნიშნული ზომები შესაძლებლობას იძლევა აიგოს ეფექტური გამოთვლითი აპარატი რთულ დინამიკურ სისტემებში გადაწყვეტილების მიღების პრაქტიკული ამოცანების გადასაჭრელად.

2.3. არამკაფიო ინტეგრალი და მისი ძირითადი თვისებები

ისე როგორც კლასიკურ მათემატიკურ ანალიზში უდიდესი მნიშვნელობა აქვს ინტეგრირების ოპერაციას, არამკაფიო ანალიზშიც არამკაფიო სიდიდეების აღრიცხვისათვის ფუნდამენტური მნიშვნელობა ენიჭება ინტეგრირების ცნებას.

განსაზღვრება 2.3 ვთქვათ, (X, σ_x, μ) არის სივრცე არამკაფიო ზომით, მაშინ ნებისმიერი $A \in \sigma_x$ ზომვადი სიმრავლისათვის განსაზღვრულია რიცხვი

$$\sup_{\alpha\in[0,1]}\{\min(\alpha,\mu(A\cap f^{\alpha}))\},\qquad (2.16)$$

რომელსაც ვუწოდებთ არამკაფიო ინტეგრალს f ასახვიდან A სიმრავლეზე და აღვნიშნავთ

$$\int_A f\circ\mu$$

სახით. აქ f^{α} აღნიშნავს f არამკაფიო სიმრავლის α დონის სიმრავლეს.

აღნიშნულ ინტეგრალს ლიტერატურაში ზოგჯერ უწოდებენ მოსალოდნელ არამკაფიო მნიშვნელობას (fuzzy expected value FEV). განსაზღვრება 2.3 ტოლფასია შემდეგი განსაზღვრების.

<u>განსაზღვრება 2.4</u>. ვთქვათ, (X,σ_x,μ) არის სივრცე არამკაფიო ზომით, მაშინ ნებისმიერი $A\in\sigma_x$ ზომვადი სიმრავლისათვის და $f\colon X\to[0,1]$ არამკაფიო ზომვადი სიმრავლისათვის და განსაზღვრულია რიცხვი

$$\sup_{E\,\in\,\sigma_x}\left\{\min(\inf_{x\,\in\,E} f(x),\mu(A\cap E))\right\}\qquad (2.17)$$

რომელსაც ვუწოდებთ არამკაფიო ინტეგრალს f ასახვიდან A სიმრავლეზე და აღვნიშნავთ

$$\int_A f\circ\mu$$

სახით.

ვაჩვენოთ აღნიშნული განმარტებების ტოლფასობა. ვთქვათ, 2.3 განსაზღვრებით f ასახვის არამკაფიო ინტეგრალი პირველი განსაზღვრებით აღვნიშნოთ I_1-ით, ხოლო მეორე განსაზღვრებით - I_2-ით (ცხადია, ეს რიცხვები ყოველთვის არსებობენ და ეკუთვნიან [0,1] სეგმენტს). $\forall\varepsilon>0$ რიცხვისათვის (2.16) ტოლობის თანახმად არსებობს $\alpha_0\in[0,1]$ რიცხვი რომ

$$I_1\le\min(\alpha_0,\mu(A\cup f^{\alpha_0}))+\varepsilon.\qquad (2.18)$$

რადგან f ასახვა ზომვადია, ამიტომ ნებისმიერი $\alpha \in [0,1]$ რიცხვისათვის $f^{\alpha} \in \sigma_x$. თუ განსაზღვრება 2.4-ში განვიხილავთ $E = f^{\alpha_0}$ სიმრავლეს, მაშინ გვაქვს $\alpha_0 \leq \inf_{x \in E} f(x)$ (დონის სიმრავლის განსაზღვრების ძალით) და $\mu(A \cap E) = \mu(A \cap f^{\alpha_0})$).აღნიშნული თანაფარდობებიდან ნათელია შემდეგი უტოლობა:

$$\min(\inf_{x \in E} f(x), \mu(A \cap E)) \geq \min(\alpha_0, \mu(A \cap f^{\alpha_0})),$$

რაც (2.18)-თან ერთად გვაძლევს $I_1 \leq I_2 + \varepsilon$. ეს უკანსაკნელი ε-ის ნებისმიერობისგამო გვაძლევს $I_1 \leq I_2$.

დამტკიცებას დავასრულებთ შებრუნებული უტოლობის ჩვენებით. მართლაც, წინა მსჯელობის ანალოგიურად (2.17) ტოლობის გამო $\forall \varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $E' \subset X$ ზომვადი სიმრავლე, ისეთი რომ

$$I_2 \leq min \inf_{x \in E} f(x), \mu(A \cap E')) + \varepsilon. \qquad (2.19)$$

$\inf_{x \in E} f(x)$ რიცხვი აღვნიშნეთ α_0-ით, მაშინ $f^{\alpha_0} \supset E'$ და მაშასადამე

$$\min(\inf_{x \in E'} f(x), \mu(A \cap E)) \leq \min(\alpha_0, \mu(A \cap f^{\alpha_0})),$$

ეს უკანასკნელი (2.19) უტოლობის და ε-ის ნებისმიერობის გამო გვაძლევს $I_2 \leq I_1$.

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ არამკაფიო ინტეგრალი გარკვეულწილად ლებეგის ინტეგრალის მსგავსია. ამისათვის განვიხილოთ საფეხურია ფუნქცია

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \chi_{E_i},$$

სადაც $\alpha_i \in [0,1]$ და $E_i \in \sigma_x$, $E_i \cap E_j \neq \emptyset$.

ვთქვათ, (X, σ_x, ν)ლებეგის სივრცეა, ე.ი. X სივრცეზე დამატებით განსაზღვრულია ლებეგის ν ზომა, მაშინ,

როგორც ცნობილია, $A \subset \sigma_x$ ზომვად სიმრავლეზე f ფუნქციიდან ლებეგის ინტეგრალი განიმარტება ტოლობით

$$\int_A f(x)dv = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i v(A \cap E_i). \qquad (2.20)$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots$ განვსაზღვროთ X-ში სიმრავლეთა მონოტონურად კლებადი მიმდევრობა $(E_i)_{i\geq 1}$, სადაც

$$F_k = \bigcup_{i\geq k} E_i.$$

f ფუნქცია შესაძლებელია შემდეგი ფორმით წარმოვადგინოთ: $f(x) = \max_{i \in N} \min\left(\alpha_i, \chi_{E_i}(x)\right)$, ხოლო f ფუნქციის დონის სიმრავლეებს აქვთ სახე $f^\alpha = E_k$, სადაც $\alpha_{k-1} < \alpha \leq \alpha_k$. მაშინ (2.16) ტოლობის თანახმად

$$\int_A f \circ \mu = \sup_{i \in N} \min\bigl(\alpha_i, \mu(A \cap E_i)\bigr) \qquad (2.21)$$

(2.20) და (2.21) ფორმულების ვიზუალური შედარებისას შევამჩნევთ, რომ ლებეგის ინტეგრალში გამრავლების და შეკრების ოპერაციების შეცვლით მინიმუმის და მაქსიმუმის აღების ოპერაციებით ვრებულობთ არამკაფიო ინტეგრალს საფეხურა ფუნქციისათვის. აღსანიშნავია, რომ იმშემთხვევაში, როდესაც არამკაფიო ზომა წარმოადგენს ალბათურ ზომას (ე.ი. დამატებით სრულდება ზომის ადიტიურობის პირობა), შეგვიძლია გარკვეულწილად შევადარო ლებეგის და არამკაფიო ინტეგრალები. უფრო ზუსტად მართებულია შემდეგი თეორემა

<u>**თეორემა 2.3**</u>. ვთქვათ, (X, σ_x, μ) არის სივრცე, $A \in \sigma_x$, ხოლო $f: X \to [0,1]$ ზომვადი ფუნქციაა, რომელიც

აკმაყოფილებს $\inf_{A} f \leq \mu(A)$ პირობას. (X, M_A, m_A) −თი აღვნიშნოთ კლასი ყველა ისეთი არამკაფიო სიმრავლისა, რომელთაც $x \in A$ წერტილების მიკუთვნების ხარისხის სუპრემალურ და ინფიმალურ მნიშვნელობებად აქვს შესაბამისად M_A და m_A რიცხვები, მაშინ მართებულია შემდეგი უტოლობა:

$$C \leq \int_A f dp - \int_A f \circ p \leq D, \tag{2.22}$$

სადაც

C==

$$\begin{cases} m_A p(A) - \frac{(m_A+1)^2}{4}, \text{ როდესაც } 2M_A > m_A + 1; \\ M_A(M_A - m_A) + m_A p(A) - M_A, \text{როდესაც } 2M_A \leq m_A + 1; \end{cases} \tag{2.23}$$

ხოლო

$$D = (M_A + m_A)p(A) - m_A(1 - m_A). \tag{2.24}$$

აღნიშნული თეორემის დასამტკიცებლად დაგვჭირდება ორი ლემა.

ლემა 2.1. ვთქვათ, (X, σ_x, μ) არის სივრცე არამკაფიო ზომით, მაშინ ნებისმიერი $A \in \sigma_x$ ზომვადი სიმრავლისათვის და $f: X \to [0,1]$ არამკაფიო ასახვისათვის, თუ $\int_A f \circ \mu = I_{f,A}$, მაშინ $I_{f,A} = \min\left(I_{f,A}, \mu\left(A \cap f^{I_{f,A}}\right)\right)$. ე.ი. არამკაფიო ინტეგრალის მნიშვნელობა ყოველთვის არ აღემატება A სიმრავლის კვალის ზომას. $I_{f,A} = \mu\left(A \cap f^{I_{f,A}}\right)$ ტოლობას ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როდესაც I არის შემდეგი $\mu_{A,f}: [0,1] \to [0,1]$,

$$\mu_{A,f}(\alpha) = \mu(A \cap f^{\alpha}) \tag{2.25}$$

მონოტონურად კლებადი ფუნქციის უწყვეტობის წერტილი.

დამტკიცება. განვიხილოთ ასახვა კომპოზიცია $G_{f,A} = min \circ \left(id \times \mu_{A,f}\right)$, რომელიც [0,1]→[0,1] ასახვაა, ე.ი.

$$G_{f,A}(t) = \min\left(t, \mu_{A,f}(t)\right), \qquad t \in [0,1]. \tag{2.26}$$

არამკაფიო ინტეგრალის განსაზღვრებით

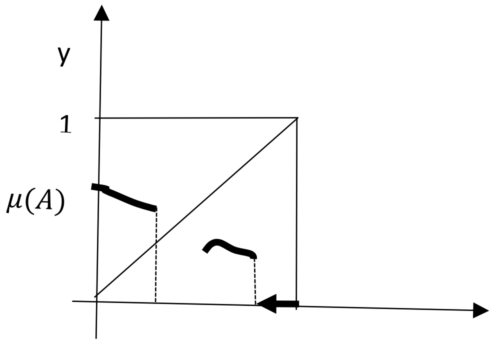
$$I_{f,A} = supG_{f,A}. \tag{2.27}$$

აღნიშნულ ფუნქციებს ხშირად (როდესაც ეს არ გამოიწვევს გაუგებრობას) უბრალოდ G და I სახით ჩავწერთ. ცხადია, რომ id ასახვა არის მონოტონურად ზრდადი, უწყვეტი ასახვა, ხოლო $\mu_{A,f}$ წარმოადგენს მონოტონურად კლებად ასახვას, მაგრამ მას შესაძლებელია გააჩნდეს წყვეტის წერტილები, არა უმეტეს თვლადი რაოდენობისა.

შევნიშნავთ, აგრეთვე, რომ ზომის უწყვეტობის გამო $\mu_{A,f}$ ფუნქცია უწყვეტია მაეცხნიდან. თუ A სიმრავლის ზომა არანულოვანია, მაშინ $\mu_{A,f}(0) = \mu(A) > 0$ (თუ ზომა ნულოვანია, მაშინ დასამტკიცებელი არაფერია $I = 0 = \min(0,0)$).

აღნიშნულიდან გამომდინარე, G_f ფუნქცია არის ზრდადი $Q = \left\{t \in [0,1] \middle| t \leq \mu_{A,f}(t)\right\} \subset [0,1]$, ხოლო კლებადია $[0,1] \backslash Q$ სიმრავლეზე. ზემოთ აღნიშნულიდან ნათელია, რომ $I = supG_f = supQ$.

რადგან G ფუნქცია არის მარცხნიდან უწყვეტი, ამიტომ Q სიმრავლე ჩაკეტილია და $I = maxQ$. მიტომ $I \leq \mu_{A,f}(I)$, სადაც უტოლობა სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც I არის $\mu_{A,f}$ ფუნქციის უწყვეტობის წერტილი. აღნიშნული მსჯელობის თვალსაჩინოება ჩანს ქვემოთ მოყვანილ 2.1 ნახაზზე,



ნახ.2.1

რომელზეც გამოსახულია id და $\mu_{A,f}$ ფუნქციათა გრაფიკების ყველაზე ზოგადი შესაძლო თვისებრივი მდგომარეობა. ლემა დამტკიცებულია.

<u>ლემა 2.2.</u> ვთქვათ, (X, σ_x, μ) სივრცეა არამკაფიო ზომით, მაშინ ნებისმიერი $A \in \sigma_x$ ზომვადი სიმრავლისათვის და $f: X \to [0,1]$ არამკაფიო ასახვისათვის, თუ $\int\limits_A f \circ \mu = I$, მაშინ $\sup\limits_A f \geq I$, თუ დამატებით სრულდება პირობა $\inf\limits_A f \leq \mu(A)$, მაშინ $\inf\limits_A f \leq I$ კერძოდ, თუ $A = X$, მაშინ $\inf f \leq I$.

<u>დამტკიცება.</u> დავუშვათ წინააღმდეგი, ვთქვათ, $\sup\limits_A f = M_A < I$, მაშინ $f^b \cap A = \emptyset$, სადაც $b > M_A$.აქედან გამომდინარე $I = supG < I$, რაც ბუნებრივია გამოწვეულია ჩვენი დაშვებით. ანალოგიურად დამდკიცდება მეორე წინადადებაც. თუ $c = \inf\limits_A f > I$, მაშინ $f^c \supset A$ და $\mu_{A,f}(c) = \mu(A)$. (2.26) ფორმილის თანახმად $G(c) = \min(c, \mu(A)) = c$. რადგან $I = supG$, ამიტომ $I > G(c) = c$, რაც ეწინააღმდეგება ჩვენ დაშვებას. ლემა დამტკიცებულია.

- 2.3 თეორემის დამტკიცება

ვთქვათ, $\int_A f \circ p = I$, მაშინ

$$\int_A f dp = \int_{A\cap f^I} f dp + \int_{A\setminus f^I} f dp \le \int_{A\cap f^I} \sup_A f dp + \int_{A\setminus f^I} I dp =$$

$$= \sup_A f \ p(A\cap f^I) + Ip(A\setminus f^I) \le \sup_A f\, p(A) + I(p(A) - I)\ .$$

ანალოგიურად, ლებეგის $\int_A^{\cdot} f dp$ ინტეგრალი შეიძლება შევაფასოთ ქვემოდან:

$$\int\limits_A^{\cdot} f dp = \int\limits_{A\cap f^I}^{\cdot} f dp + \int\limits_{A\setminus f^I}^{\cdot} f dp \ge \int\limits_{A\cap f^I}^{\cdot} I dp + \int_{A\setminus f^I}^{\cdot} \inf_A f dp = Ip(A\cap f^I)\ +$$

$$+ \inf_A f\left(p(A) - p(A\cap f^I)\right) \ge I^2 + \inf_A f(p(A) - I)$$

უკანასკნელი უტოლობა უშუალოდ გამომდინარეობს $(p(A\cap f^I) - I)(I - \inf_A f) \ge 0$ უტოლობიდან, რომლის მართებულობა ნათელია წინა ლემების გამო. მდენად ვღებულობთ უტოლობას

$$I^2 + \inf_A f(p(A) - I) - I \le \int\limits_A^{\cdot} f dp - \int\limits_A^{\cdot} f \circ p \le \sup_A f\ p(A)$$
$$+ I(p(A) - I) - I. \qquad (2.28)$$

ფუნქციის ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრები შესაბამისად აღვნიშნოთ M_A და m_A სიმბოლოებით და დავაფიქსიროთ. განვიხილოთ (X, M_A, m_A) კლასი ყველა ისეთი არამკაფიო სიმრავლეებისა $x \in A$. წერტილების მიკუთვნების ხაარისხს სუპრემალურ და ინფიმალურ მნიშვნელობებად აქვთ შესაბამისად M_A და m_A რიცხვები, მაშინ რადგან (2.25) უტოლობის მარცხენა და მარჯვენა

ფუნქციებს (როგორც ერთი დამოუკიდებელი I ცვლადის ფუნქციები) გააჩნია აბსოლუტური მინიმუმი და აბსოლუტური მაქსიმუმი (ისინი წარმოადგენს კვადრატულ სამწევრებს შესაბამისად შტოები ზემოთ და შტოები ქვემოთ). ადვილი გამოსათვლელია, რომ (2.28) უტოლობის მარჯვენა მხარის უდიდესი მნიშვნელობის მიღწევა $I = m_A$ წერტილზე, რადგან მისი ექსტრემუმის წერტილი ტოლია $I_0 = \frac{p(A)-1}{2} \leq 0.$ ე.ი.

$$\int_A^{\cdot} f dp - \int_A^{\cdot} f \circ p$$

ინტეგრალი ზემოდან შემოსაზღვრულია $(M_A + m_A)p(A) - m_A(1 + m_A)$ რივცხვით ნებისმიერი ფუნქციისათვის (X, M_A, m_A) კლასიდან. ანალოგიურად (2.28) უტოლობაში მარცხნივ მდგომი ფუნქციის მინიმუმის წერტილს წარმოადგენს $I_0 = \frac{m_A+1}{2}$. მაშინ თუ $I_0 \in [m_A, M_A]$ სეგმენტს, ის წარმოადგენს განსახილველი ფუნქციის მინიმუმის წერტილს სეგმენტზე და მინიმალური მნიშვნელიბა ტოლია $m_A p(A) - \frac{(m_A+1)^2}{4}$, ხოლო თუ $I_0 > M_A$, მაშინ მინიმუმის წერტილს წარმოადგენს $I = M_A$ წერტილი, რომელზეც მინიმალური მნიშვნელობა ტოლოა $M_A(M_A - m_A) + m_A p(A) - M_A)$. თეორემა დამტკიცებულია.

<u>განსაზღვრება 2.5.</u> დირაკის ზომა, რომელიც კონცენ-ტრირებულია $x_0 \in X$ წერტილში ეწოდება ასახვას $D_{x_0}: P(X) \to [0,1]$ რომელიც განისაზღვრება ფორმულით

$$D_{x_0}(A) = \begin{cases} 1, & \text{თუ} \quad x_0 \in A; \\ 0, & \text{თუ} \quad x_0 \notin A. \end{cases} \qquad (2.29)$$

შენიშვნა 2.2 ცხადია, რომ დირაკის ზომა არის ალბათური ზომა. თუ A არის არამკაფიო ქვესიმრავლე X-ში, რომლის მიკუთვნების ფუნქცია არის $f : X \to [0,1]$, მაშინ არამკაფიო ინტეგრალის საშუალებით შესაძლებელია გამოვსახოთ x_0 წერტილის A სიმრავლისადმი მიკუთვნების ხარისხი, კერძოდ მართებულია ფორმულა

$$f(x_0) = \dot{\int_x} f \circ D_{x_0}. \tag{2.30}$$

მაგალითი 2.1. ვთქვათ, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, რომელზეც მოცემულია სუჯენოს g_λ ზომა და f არამკაფიო სიმრავლე შემდეგი ცხრილის საშუალებით:

i	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.1	0.3	0.7	0.6	0.2
g_i	0.143	0.4	0.261	0.35	0.131

ნორმირების პირობის გამოყენებით დავადგენთ, რომ $\lambda = -0.51$. მაშინ f ფუნქციის არამკაფიო ინტეგრალი სუჯენოს ზომის მიმართ ტოლია

$$\mathrm{I} = \sup_{\alpha \in [0,1]} \min(\alpha, g_\alpha),$$

სადაც

$$g_\alpha = \frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i \in \Theta_\alpha} (\lambda g_i + 1\right) - 1),$$

$\Theta_\alpha = \{i | f(x_i) \geq \alpha\}$. პირდაპირი გამოთვლით მივიღებთ, რომ $I = 0.5645$

მაგალითი 2.2. წინა მაგალითი განვიხილით ზოგადი სახით. ვთქვათ, $X = \{x_i\}_{i \geq 1}$ დისკრეტული სიმრავლეა, რომელიც აღჭურვილია არამკაფიო μ ზემოთ. განვიხილოთ X-ის რაიმე არამკაფიო ქვესიმრავლე, რომლის მიკუთვნების

ფუნქცია არის $f : X \to [0,1]$. ცხადია, f ასახვა შესაძლებელია წარმოვადგინოთ საფეხურა ფუნქციის სახით

$$f\,(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \chi E_i, \;\; E_i \cap E_j \neq \emptyset,$$

როცა $i \neq j$, სადაც $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ზრდადი მიმდევრობაა. მაშინ ადვილი შესამჩნევია, პრომლემა 2.1-ში განსაზრვრული $\mu_{X,f}$ ფუნქცია საფეხურა ფუნქციაა. კერძოდ, მას აქვს შემდეგი სახე:

$$\mu_{X,f} = \chi_{[0,\alpha_1]} + \sum_{i>1} \mu(E_i) \chi_{(\alpha_{i-1},\alpha_i]}, \qquad (2.31)$$

სადაც

$$F_k = \bigcup_{i\geq k} E_i.$$

განვიხილოთ სიმრავლე

$$L_x = \{\alpha_i | \alpha_i \leq \mu(F_i)\} \qquad (2.32)$$

მაშინ 2.1 ლემის ძალით

$$\int_x f \circ \mu = supL. \qquad (2.33)$$

აღნიშნული ფორმულა უაღრესად მოხერხებული საშუალებაა დისკრეტულ შემთხვევაში ინტეგრალის გამოსათვლელად. უფრო ზოგად შემთხვევაში, თუ საჭიროა არამკაფიო ინტეგრალის გამოთვლა რაიმე $A \subset X$ ქვესიმრავლეზე, მაშინ ზემოთ აღნიშნულ მსჯელობაში (2.31), (2.32) და (2.33) ფორმულები შესაბამისად შეიცვლება

$$\mu_{X,f} = \mu(A)\chi_{[0,\alpha_1]} + \sum_{i>1} \mu(E_i \cap A)\chi_{(\alpha_{i-1},\alpha_i]}, \qquad (2.31')$$

$$L_x = \{\alpha_i | \alpha_i \le \mu(F_i \cap A)\} \qquad (2.32')$$

$$\dot{\int_x} f \circ \mu = supL_A. \qquad (2.33')$$

ფორმულებით.

ქვემოთ ჩამოვაყალიბებთ არამკაფიო ინტეგრალის ძირითად თვისებებს.

თვისება 1. ვთქვათ, (X, σ_x, μ) სივრცეა არამკაფიო ზომით და $A \in \sigma_x$, მაშინ ნებისმიერი $f: X \to [0,1]$ ზომვადი ასახვისათვის

$$\dot{\int_A} f \circ \mu \le \min(\mu(A), \sup_A f).$$

დამტკიცება. დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს 2.1 ლემიდან, რადგან მისი ძალით

$$\dot{\int_A} f \circ \mu = I \le \mu(A \cap f^I) \le \mu(A),$$

მეორე მხრივ, თუ $I > \sup_A f$, მაშინ $\mu(A \cap f^I) = 0$, საიდანც $I = 0$, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას.

თვისება 2. ვთქვათ, (X, σ_x, μ) სივრცეა არამკაფიო ზომით და $A \in \sigma_x$ სიმრავლის ზომა 0-ის ტოლია, მაშინ ნებისმიერი $f: X \to [0,1]$ ზომვადი ასახვისათვის

$$\dot{\int_A} f \circ \mu = 0$$

დამტკიცება. აღნიშნული თვისება წინა თვისების უშუალო შედეგია.

__თვისება 3__. მუდმივი ფუნქციიდან არამკაფიო ინტეგ-რალი აღნიშნული მუდმივის ტოლია, როდესაც საინტეგ-რირო სიმრავლის ზომა აღემატება ფუნქციის მნიშვნე-ლობას. წინააღმდეგ შემთხვევაში ინტეგრალი საინტეგ-რირო სიმრავლის ზომის ტოლია. ე.ი. თუ $f = c = const$, მაშინ

$$\dot{\int_A} \mathrm{f} \circ \mu = \begin{cases} \mathrm{c}, & \text{როდესაც } \mu(\mathrm{A}) \geq \mathrm{c}; \\ \mu(\mathrm{A}), & \text{როდესაც } \mu(\mathrm{A}) < \mathrm{c}. \end{cases} \qquad (2.34)$$

კერძოდ, როდესაც $A = X$, მაშინ

$$\dot{\int_X} f \circ \mu = c$$

__დამტკიცება.__ (2.25)-ის თანახმად $\mu_{f,A} = \mu(A)\chi_{[0,c]}$, ამიტომ (2.27)-ის ძალით (2.34) ნათელია.

__თვისება 4__. ნებისმიერი $f: X \to [0,1]$ და $g: X \to [0,1]$ ზომვადი ასახვისათვის, თუ $f|_A \leq g|_A$ სადაც $A \in \sigma_x$, მაშინ

$$\dot{\int_A} f \circ \mu \leq \dot{\int_A} g \circ \mu. \qquad (2.35)$$

__დამტკიცება.__ აღნიშნულ პირობებში ცხადია, რომ $\mu_{f,A} \leq \mu_{g,A}$ (იხ. (2.25)) და მაშასადამე $G_f \leq G_g$ (იხ. (2.26)). აქედან ნათელია (2.35) უტოლობა (იხ. (2.27)).

__თვისება 5__. თუ $c \in [0,1]$ მუდმივია, მაშინ ნებისმიერი $f : X \to [0,1]$ ზომვადი ასახვისათვის და $A \in \sigma_x$ სიმრავლისათვის სრულდება ტოლობები:

$$\dot{\int_A} \min(c, f) \circ \mu = \min(c, \dot{\int_A} f \circ \mu), \qquad (2.36)$$

$$\dot{\int_A} \max(c, f) \circ \mu = \max(c, \dot{\int_A} f \circ \mu), \qquad (2.37)$$

<u>დამტკიცება.</u> ორივე ტოლობის დამტკიცება ანალოგიური მსჯელობებით წარმოებს. ამიტომ ჩვენ ნიმუშად მოვიყვანთ მხოლოდ (2.36) ტოლობის დამტკიცებას, ცხადია, რომ

$$(min(c,f))^{\alpha} = \begin{cases} f^{\alpha}, & \text{როცა } \alpha \le c; \\ \emptyset, & \text{როცა } \alpha > c. \end{cases}$$

ამიტომ

$$\mu_{\min(c,f),A}(\alpha) = \begin{cases} \mu_{f,A}(\alpha), & \text{როცა } \alpha \le c; \\ 0, & \text{როცა } \alpha > c. \end{cases}$$

შესაძლებელია გვქონდეს ორი შემთხვევა:

1) $c \geq \int_A^{\cdot} f \circ \mu = I$ და

2) $c < \int_A^{\cdot} f \circ \mu = I$.

პირველ შემთხვევაში (2.36) ტოლობის მარცხენა მხარე ტოლია I. ამ შემთხვევაში $G_{\min(c,f)}$ და G_f ფუნქციები ემთხვევა ერთმანეთს თავიანთი ზრდადობის შუალედებში. ამიტომ

$$\int_A^{\cdot} \min(c,f) \circ \mu = \mathrm{I}$$

მეორე შემთხვევაში (2.36) ტოლობის მარცხენა ტოლია c. ამიტომ $G_{\min(c,f)}$ ფუნქციის ზრდადობის შუალედი $[0,c]$ სეგმენტია. (2.27)-ის ძალის

$$\int_A^{\cdot} \min(c,f) \circ \mu = sup\, G_{\min(c,f)} = c.$$

თვისება დამტკიცებულია

<u>თვისება 6.</u> ვთქვათ, (X,σ_x,μ) სივრცეა არამკაფიო ზომით, და $A,B \in \sigma_x$, ამასთან $A \subset B$, მაშინ ნებისმიერი $f: X \to [0,1]$ზომვადი ასახვისათვის მართებულია უტოლობა

$$\dot{\int_A} f \circ \eta \le \dot{\int_B} f \circ \mu. \qquad (2.38)$$

დამტკიცება. ცხადია, რომ $\mu_{f,A} \le \mu_{g,B}$, ამიტომ $G_{f,A} \le G_{f,B}$ სადაც (2.27) ტოლობის გამო.

თვისება 7. ვთქვათ, (X, σ_x, μ) წარმოადგენს სივრცეს არამკაფიო ზომით, და $A, B \in \sigma_x$, მაშინ ნებისმიერი $f: X \to [0,1]$ზომვადი ასახვისათვის მართებულია უტოლობები:

$$\dot{\int_{A\cup B}} f \circ \mu \ge \max(\dot{\int_A} f \circ \mu , \dot{\int_B} f \circ \mu)$$

$$\dot{\int_{A\cap B}} f \circ \mu \le \min(\dot{\int_A} f \circ \mu , \dot{\int_B} f \circ \mu)$$

დამტკიცება. აღნიშნული უტოლობები წინა თვისების ტრივიალური შედეგია. ზომის უწყვეტობის უშუალო შედეგია შემდეგი ორი თვისება (დაამტკიცეთ!).

თვისება 8. ვთქვათ, (X, σ_x, μ) სივრცეა არამკაფიო ზომით, და $A \in \sigma_x$ და $(f_i)_{i\ge 1}$ ზომვად ასახვათა მონოტონური მიმდევრობაა. მაშინ $\lim_{i\to\infty} f_i = f$ (წერტილოვანი კრებადობით) მართებულია ტოლობა

$$\dot{\int_A} f \circ \mu = \lim_{i\to\infty} \dot{\int_A} f_i \circ \mu. \qquad (2.40)$$

თვისება 9. ვთქვათ, (X, σ_x, μ) არის სივრცე არამკაფიო ზომით. $A \in \sigma_x$ და $(f_i)_{i\ge 1}$ ზომვად ასახვათა მონოტონურად ზრდადი (კლებადი) მიმდევრობაა, $(f_i)_{i\ge 1}$ მონოტონურად კლებადი (ზრდადი) მიმდევრობაა [0,1] სეგმენტიდან, მართებულია ტოლობა

$$\dot{\int_A} (\max_{i\in N} min(\alpha_i, f_i) \circ \mu = \max_{i\in N} min\,(\alpha_i, \dot{\int_A} f_i \circ \mu). \qquad (2.41)$$

2.4. არამკაფიო ინტეგრალი არამკაფიო სიმრავლეებზე. გაფართოებული არამკაფიო ზომები

აქამდე ვიხილავდით არამკაფიო ინტეგრალებს ჩეულებრივი სიმრავლეებიდან. არსებობს აღნიშნული ინტეგრალის ბუნებრივი განზოგადება არამკაფიო სიმრავლეებზე.

__განსაზღვრება 2.6__. ვთქვათ, (X, σ_x, μ) წარმოადგენს სივრცეს არამკაფიო ზომით, A არის არამკაფიო ქვესიმრავლე X-ში, რომლის მიკუთვნების $h_A: X \to [0,1]$ ფუნქცია ზომვადია, მაშინ ნებისმიერი $f: X \to [0,1]$ ზომვადი ასახვისათვის განიმარტება რიცხვი [0,1] სეგმენტიდან

$$\dot{\int\limits_{h_A}} f \circ \mu \equiv \dot{\int\limits_{X}} \min(h_A, f) \circ \mu, \qquad (2.42)$$

რომელსაც უწოდებენ f ასახვის არამკაფიო ინტეგრალს არამკაფიო A ქვესიმრავლეზე.

ადვილი შესამოწმებელია (შეამოწმეთ!), რომ როდესაც A წარმოადგენს ჩვეულებრივ ქვესიმრავლეს X-ში, ე.ი. როდესაც A სიმრავლის მიკუთვნების ფუნქცია აქვს სახე $h_A = \chi_A$, მაშინ (2.42) ინტეგრალი ემთხვევა (2.16) ინტეგრალს.

(2.16) ინტეგრალში საინტეგრირო არეს წარმოადგენდა σ_X ალგებრას ელემენტები, (2.42) ინტეგრალში ჩვენ მოვახდინეთ აღნიშნულ არეათა სიმრავლის გაფართოება X-ში ყველა არამკაფიო ქვესიმრავლეთა სიმრავლემდე, რომელთაც გააჩნიათ ზომვადი მიკუთვნების ფუნქციები. აღნიშნული სიმრავლე აღვნიშნოთ $\Phi(X)$ სიმბოლოთი. $\Phi(X)$ სიმრავლეს შეიძლება ვუყუროთ როგორც σ- ალგებრას, რადგან ის ჩაკეტილია არამკაფი სიმრავლეთა გადაკვეთის, გაერთიანების,

დამატების და თვლადი გაერთიანების მიმართ (იხ. (1.26) (2.27) (1.28)). ადვილი შეამჩნევია, რომ $\sigma_X \subset \Phi(X)$. (2.42) ინტეგრალს შეიძლება ვუყუროთ როგორც ასახვას

$$\tilde{I}: \Phi(X) \times \Phi(X) \to [0,1], \qquad (2.43)$$

სადაც პირველი არგუმენტი წარმოადგენს საინტეგრირო სიმრავლეს, ხოლო მეორე არგუმენტი-ინტეგრალქვეშა ფუნქციას. თუ დავაფიქსირებთ ზომვად არამკაფიო სიმრავლეს $f: X \to [0,1]$ და განვიხილოთ ასახვა $\tilde{I}(.,h): \Phi(X) \to [0,1]$, მაშინ $\tilde{I}(.,h)|_{\sigma(X)}$ წარმოადგენს უწყვეტ არამკაფიო "ზომას" $\Phi(X)$ ალგებრაზე. აღნიშნულ ზომას μ_h-ით აღვნიშნავთ. აქ $\Phi(X)$-ზე ზომის ქვეშ გვესმის შემდეგი:

1) $\Phi(X)$ალფენრის მინიმალური ელემენტის ($\Phi(X)$ წარმოადგენს ნაწილობრივ დალაგებულ სიმრავლეს ჩედმის მიმართ, თუ $A, B \in \Phi(X)$, მაშინ $A \le B \Leftrightarrow h_A \le h_B$) ზომა ნულის ტოლია.
2) $\Phi(X)$ ალგებრის მაქსიმალური ელემენტის ზომა არ აღემატება ერთს.
3) თუ $A, B \in \Phi(X)$ და $A \le B$, მაშინ $h_A(A) \le h_B(B)$.
4) $\Phi(X)$ ალგებრაში მონოტონური მიმდევრობის ზომათა ზღვარი ზომის ტოლია.

ადვილი შესამჩნევია, რომ აღნიშნულ სამ თვისებას აკმაყოფილებს μ_h ასახვა. მართლაც

$\mu_h(\emptyset) = \dot{\int_\emptyset} h \circ \mu = \dot{\int_X} 0 \circ \mu = 0$. 2) $\mu_h(\chi_X) = \dot{\int_{\chi_X}} h \circ \mu = \dot{\int_X} \min(\chi_X, h) \circ \mu = \dot{\int_X} h \circ \mu$. მესამე თვისება წარმოადგენს არამკაფიო ინტეგრალს თვისება 4-ის შედეგს (იხ წინა პარაგრაფი). დავამტკიცოთ მეოთხე თვისება. ვთქვათ, $(A_n)_{n\ge 1}$ არამკაფიო სიმრავლეთა მონოტონური მიმდევრობაა, გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $A_i \le A_{i+1}$, $i \in N$, მაშინ მათი მიკუთვნების ფუნქციები

წარმოადგენენ ასახვათა ზრდად მიმდევრობას h_{A_i}, რომელთაც უბრალოდ h_i სიმბოლოთი აღვნიშნავთ. თუ ვისარგებლებთ არამკაფიო ინტეგრალის თვისება 8-ით გვექნება:

$$\lim_{i\to\infty}\mu_h(A)_i=\lim_{i\to\infty}\dot{\int_X}\min(h_i,h)\circ\mu=\dot{\int_X}\lim_{i\to\infty}\min(h_i,h)\circ\mu$$
$$=\dot{\int_X}\min(h_A,h)\circ\mu=\mu_h(\lim_{i\to\infty}A_i).$$

ამრიგად

$$\tilde{\mu}:\Phi(X)\to[0,1]^{\Phi(X)} \qquad (2.44)$$

ასახვა, რომელიც განმარტებულია ფორმულით $\tilde{\mu}(h)=\tilde{I}(.,h)=\mu_h$ წამოადგენს ასახვას X-ში ზომვადი არამკაფიო ქვესიმრავლეების სიმრავლიდან ამავე სიმრავლეზე ზომების სიმრავლეში.

<u>განსაზღვრება 2.7</u>. (2.44) ასახვის ყოველ მნიშვნელობას ვუწოდოთ გაფართოებული ზომა $\Phi(X)$-ზე.

თუ

$$\dot{\int_X}h\circ\mu\neq 0,$$

მაშინ

$$\mu_h=\frac{1}{\dot{\int_X}h\circ\mu}\mu_h$$

ზომა უკვე დააკმაყოფილებს არამკაფიო ზომის იმ მოთხოვნასაც, რომ მაქსიმალური ელემენტისზომა 1-ის ტოლია. ცხადია, რომ μ_h კერძოდ წარმოადგენს ზომას σ_X ალგებრაზეც. ამიტომაც საინტერესოა აღნიშნული ზომით ინტეგრალების გამოთვლა.

ვთქვათ, $f: X \to [0,1]$ რაიმე ზომვადი ფუნქციაა და $g_E: X \to [0,1]$ არამკაფიო $E \subset X$-ში ქვესიმრავლის მიკუთვნების ფუნქციაა. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\dot{\int_{gX}} h \circ \mu_h$$

განმარტების თანახმა $\dot{\int}_{gX} h \circ \mu_h = \dot{\int}_X \min(g_E, f) \circ \mu_h =$

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} \{\min(\alpha, \mu_h({g_E}^\alpha \cap f^\alpha))\} = \sup_{\alpha \in [0,1]} \{\min(\alpha, \dot{\int_{{g_E}^\alpha \cap f^\alpha}} h \circ \mu)\} =$$

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} \{\min(\alpha, \sup_{\beta \in [0,1]} \min(\beta, \mu(h^\beta \cap {g_E}^\alpha \cap f^\alpha)))\}.$$

აღნიშნული შედეგი შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ცალკე თეორემის სახით.

<u>**თეორემა 2.4.**</u> ვთქვათ, (X, σ_x, μ) სივრცეა არამკაფიო ზომით, ხოლო μ_h გაფართოებული ზომაა $\Phi(X)$-ზე, ვთქვათ, $f: X \to [0,1]$ რაიმე ზომვადი ფუნქციაა და $g_E: X \to [0,1]$ არამკაფიო $E \subset X$-ში ქვესიმრავლის მიკუთვნების ფუნქციაა, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\dot{\int_{g_E}} f \circ \mu_h = \sup_{\gamma \in [0,1]} min(\gamma, \mu(h^\beta \cap {g_E}^\alpha \cap f^\alpha)\}. \quad (2.45)$$

სადაც $\gamma = \min(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in [0,1]$.

<u>***შედეგი 2.1.***</u> ვთქვათ, (X, σ_x, μ) სივრცეა არამკაფიო ზომით, ხოლო μ_h გაფართოებული ზომაა $\Phi(X)$-ზე, ვთქვათ, $f: X \to [0,1]$ რაიმე ზომვადი ფუნქციაა და $g_E: X \to [0,1]$ არამკაფიო $E \in \sigma(X)$ ზომვადი ქვესიმრავლეა X-ში მაშინ

$$\dot{\int_{E}} f \circ \mu_h = \sup_{\gamma \in [0,1]} min(\gamma, \mu(h^\beta \cap E \cap f^\alpha)\}. \quad (2.46)$$

სადაც $\gamma = \min(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in [0,1]$.

შედეგი 2.2. თუ $f = a = const$, მაშინ

$$\dot{\int_X} a \circ \mu_h = \min\bigl(a, \mu_h(X)\bigr).$$

შედეგი 2.3. ვთქვათ, (X, σ_x, μ) სივრცეა არამკაფიო ზომით, ხოლო μ_h გაფართოებული ზომაა $\Phi(X)$-ზე, ვთქვათ, $f: X \to [0,1]$ რაიმე ზომვადი ფუნქციაა და $g_E: X \to [0,1]$ არამკაფიო $E \subset X$-ში ქვესიმრავლის მიკუთვნების ფუნქციაა, მაშინ მართებულია შემდეგი ტოლობები:

$$\dot{\int_{g_E}} \min(a, f) \circ \mu_h = \min(a, \dot{\int_{g_e}} f \circ \mu_h) \qquad (2.47)$$

$$\dot{\int_{g_E}} \max(a, f) \circ \mu_h = \max(a, \dot{\int_{g_e}} f \circ \mu_h) \qquad (2.48)$$

2.5 არამკაფიო ალგორითმები

1. ***არამკაფიო გამონათქვამები.*** მაგალითად, „თუ x-მცირეა, მაშინ y-დიდია, სხვა შემთხვევაში y-არ არის დიდი“;

„თუ x-დადებითია, მაშინ შევამციროთ y უმნიშვნელოდ“

„თუ x-გაცილებით აღემატება 5, მაშინ სდექ “

შევნიშნავით, რომ ასეთ წინადადებებში თანაფარდობის ნებისმიერი წევრი შეიძლება წარმოადგენდეს არამკაფიო სიმრავლეების სიმბოლოებს.

2. ***უპირობო აქტიური წინადადებები.*** მაგალითად,

x გავამრავლოთ x-ზე

შევამციროთ x ოდნავ

გადადი 7-თან
სდექ.

როგორც ვხედავთ მოყვანილი ინსტრუქციებიდან ზოგიერთი არამკაფიოა, ზოგიერთი კი არა. არამკაფიო გამონათქვამების კომპონირება უნდა განხორციელდეს კომპოზიციური წესის შესაბამისად, მაგალითად, თუ არამკაფიო ალგორითმის შესრულების რომელიღაც მომენტისათვსის გვაქვს კონსტრუქცია

1) $x =$ძლიერ პატარა

2) თუ x პატარაა, მაშინ y-დიდია, სხვა შემთხვევაში y არც ისე დიდია.

$$y = 0.36/1 + 0.4/2 + 0.64/3 + 0.9/4 + 1/5 \qquad (2.49)$$

უპირობო, მაგრამ არამკაფიო, ინსტრუქცია სრულდება ანალოგიურად, მაგალითად, „გავამრავლოთ x თავის თავზე რამოდენიმეჯერ“ (2.50)

ამ ინსტრუქციის შერულება, სადაც სიტყვა რამოდენიმე განისაზღვრება ტოლობით

$$\text{რამოდენიმე} = 1/1 + 0.8/2 + 0.3/3 + 0.4/4 \qquad (2.50)$$

მოგვცემს არამკაფიო სიმრავლეს

$$y = 1/x^2 + 0.8/x^3 + 0.6/x^4 + 0.4/x^5 \qquad (2.51)$$

აუცილებელია შევნიშნოთ, რომ როგროც (2.49) ისე (2.52) ინსტრუქციის შერულების შედეგად ვღებულობთ არამკაფიო სიმრავლეს და არა ერთ-ერთ რიცხვს. მაგრამ, როდესაც ადამიანი იძლევა არამკაფიო ინსტრუქციას, როგორიცაა „გააკეთეთ რამოდენიმე ნაბიჯი“, სადაც **რამოდენიმე** განისაზღვრება როგორც :

$$\text{რამოდენიმე-}0.3/3 + 0.8/4 + 1/5 + 1/6 + 0.8/7 + 0.5/8 \qquad (2.52)$$

შედეგი შეიძლება იყოს ერთერთი რიცხვი [3.8] ინტერვალში. თუ რის საფუძველზე უნდა ავირჩიოთ ერთი რიცხვი ნაჩვენები [2].

ქვემოთ ჩვენ მოვიყვანეთ არამკაფიო ალგორითმების მაგალითები უნდა შევნიშნოთ, რომ ეს მაგალითები გვიჩვენებს მხოლოდ არამკაფიო ალგორითმების ძირითად ასპექტებს და არ არის დემონსტრირება მათი ეფექტურობისა, ----ტული პრობლემის ამოხსნისას. არამკაფიო ალგორითმების კლასიფიკაცია უმჯობესია მოვახდინოთ მათი გამოყენების სფეროს მიხედვით. განსაზღვრების და იდენთიფიკაციის ალგორითმების გადაწყვეტილების მიღებისათვის შეიძლება შეგვხვდეს ალგორითმები, რომელშიც გამოიყენება ორივე.

- **განსაზღვრების არამკაფიო ალგორითმები**

არამკაფიო ალგორითმების გამოყენების ძირითადი არეა რთული, სრულიად განასზღვრულის ან არამკაფიო განსაზღვრებების განსაზღვრება უფრო მარტივი, ნაკლებად არამკაფიო განსაზღვრებები.

მოვიყვანოთ მაგალითები პოჩერკის მახასიათებელები: განუკურნებელი ავადმყოფობები და სხვა.
მოვიყვანოთ განსაზღვრების არამკაფიო ალგორითმების ძალიან მარტივი მაგალითი განვიხილოთ არამკაფიო ცნება ოვალი.

ალგორითმი ოვალი (T- თი აღვნიშნოთ).
ინსტრუქცია „ თუ A, მაშინ B“ უნდა გავიგოთ, როგორც „თუ A მაშინ B, წინააღმდეგ შემთხვევაში გადავიდეთ ინსტრუქციაზე“:

1. თუ T არ არის ჩაკეტილი, მაშინ T არ არის ოვალი სდექ.

2. თუ T არის თვითგადაკვეცადი, მაშინ T არის ოვალი სდექ.

3. თუ T არ არის ამოზნექილი, მაშინ T არ არის ივალი სდექ.

4. თუ T არ აქვს ორი ორთოგონალური სიმეტრიის ღერძები მაშინ T არ არის ოვალი სდექ.

5. თუ *T*-ს დიდი ღერძი არ არის მნიშვნელოვნად ∞ გრძელი, ვიდრე მცირე ღერძი, მაშინ *T* არ არის ოვალი სდექ.

6. *T*-ოვალია სდექ.

ახლა განვიხილოთ გადაწყვეტილების მიღების არამკაფიო ალგორითმები ეს არამკაფიო ალგორითმები, რომლებიც გამოიყენება სტრატეგიის მიახლოებითი აღწერისათვის ან გადაწყვეტილების შემუშავებისათვის. ასეთი ალგორითმებს ჩვენ ვიყენებთ ქვეშეცნობილად, მაგალითად, ავტომანქანის გაჩერებისათვის ავტოსადგომ-ზე, სახლის ყდვისას და სხვა.

ალგორითმი გზაჯვარედინზე გადასვლა სიმარტივი-სათვის განვიხილავთ ისეთ გზაჯვარედინს, სადაც დაყენებულია ნიშანი სდექ.

ალგოროთმის გზაჯვარედინი:

1. თუ არის შუქნიშანი, მაშინ გადავიდეთ ალგორითმზე შუქნიშანი, სხვაგვარად, თუ გვაქვს ნიშანი სდექ, მაშინ გადავიდეთ ალგორითზე ნიშანი, სხვაგვარად თუ გვაქვს მოციმციმე ყვითელი სიგნალი, მაშინ გადავიდეთ ალგორითმზე მოციმციმე, სხვაგვარად გადავიდეთ ალგო-რითმზე არაკონტროლირებადი ქვეალგორითმი „ნიშანი“.

ქვეალგორითმი „ნიშანი“.

1) თუ თქვენი მოძრაობის მიმართულებაზე არ გაქვთ ნიშანი „სდექ“, მაშინ თუ მანქანა არ არის გზაჯვარედინზე, მაშინ გადაკვეთე ნორმალური სიჩქარით, სხვაგვარად მოიცადე, სანამ ავტომანქანები არ გაათავისუფლებს გზაჯვარედინს, შემდეგ გადაკვეთე ის.

2) თუ თქვენი მანქანა არ მიუახლოვდება გზაჯვარე-დინს, მაშინ გააგრძელე მოძრაობა ნორმალური სიჩქარით რამდენიმე წამში. შემდეგ გადადი ისევ (2)-ზე.

3) შეანელე მოძრაობა.

4) თუ თქვენ ძალიან გეჩქარებათ და ირგვლივ პოლიციელი არ არის და არ არის მანქანა გზაჯვარედინზე ან მის მახლობლად, მაშინ ნელი სვლით გაიარეთ გზაჯვარედინი.

5) თუ თქვენ ძალიან ახლო ხართ გზაჯვარედინთან, მაშინ გაჩერდით, გადადით 7-ზე.

6) განაგრძეთ ძალიან ნელი სვლით მიახლოება გადადი (5)-ზე.

7) თუ გზაჯვარედინზე ან მის მახლობლად არაა ავტომანქანები, მაშინ გაიარე.

8) გაჩერდი რამდენიმე წუთი, გადადი (7)-ზე.

არამკაფო გამონათქვამებს ძირითადი როლი უკავია არამკაფიო ალგორითმებში. უფრო კონკრეტულად, ტიპიურ პრობლემებს, რომელსაც ვხვდებით არამკაფიო ალგორით-მების შემუშავებისათვის მდგომარეობს შემდეგში.

გვაქვს არამკაფიო $R : V \to V$ რომელიც განისაზ-ღვრება არამკაფიო გამონათქვამებით. პრობლემა მდგომა-რეობს შემდეგში, იმისათვის, რომ ნებისმიერი არამკაფიო სიმრავლისათვის $x \in \mathrm{U}$ განისაზღვროს არამკაფიო ქვესიმრავლე $y \in \mathrm{V}$, ისეთი, რომ x ინდუცირებს V-ში. მაგალითად, გვაქვს შემდეგი ორი წინადადება:

1. x-ძალიან მცირეა;

2. თუ x-ძალიან მცირეა, მაშინ y-დიდია, წინააღმდეგ შემთხვევაში y არც ისე დიდია.

აქედან მეორე განსაზღვრების განუზღვრელი თანაფარდობა R, განვსაზღვროთ შემდეგი წესის მიხედვით. ვთქვათ A არამკაფიო ქვესიმრავლეა U განსაზღვრების არე. B წარმოადგენს არამკაფიო ქვესიმრავლეს V განსაზღვრების არეს. მაშინ A და B დეკარტული ნამრავლი $A \times B$ განისაზღვრება შემდეგი სახით:

$$A \times B \triangleq \int_{\mathsf{U}\times\mathsf{V}}^{\cdot} \mu_\Delta(u) \wedge \mu_{\boldsymbol{B}}(v)/(u,v) \qquad (2.53)$$

სადაც $\mathsf{U}\times\mathsf{V}$ ნიშნავს U და V არამკაფიო სიმრავლეების დეკარტულ ნამრავლს ანუ

$$\mathsf{U}\times\mathsf{V} \triangleq \{(u,v)/u \in \mathsf{U}, v \in \mathsf{V}\}$$

განვიხილოთ მარტივი მაგალითი დავუშვათ

$$\mathsf{U} = 1 + 2 \qquad (2.54)$$

$$\mathsf{V} = 1 + 2 + 3 \qquad (2.55)$$

$$\Delta = 1 \setminus 1 + 0.8 \setminus 2 \qquad (2.56)$$

$$B = 0.6/1 + 0.9/2 + 1/3 \qquad (2.57)$$

მაშინ

$$\Delta\times B = 0.6/(1.2) + 0.9/(1.2) + 1/(1.3) + 0.6(2.1) + 0.8/(2.2) + 0.8/(2.3) \qquad (2.58)$$

ეს თანაფარდობა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი მატრიცის საშუალებით

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.6 & 0.9 & 1 \\ 0.6 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix} \qquad (2.59)$$

არამკაფიო გამონათქვამის „ თუ A, მაშინ B“ აზრი ნათელი იქნება თუ განვიხილავთ მას როგორც სპეციალურ შემთხვევას შემდეგი პირობით გამონათქვამს.

„თუ A, მაშინ B სხვა შემთხვევაში C“ სადაც A და (B და C) – არამკაფიო ქვესიმრავლეების შესაბამისია U და V - სხვადასხავა არეებისათვის

დეკარტული გარდაქმნის ტერმინებში ეს წინადადება ჩაიწერება ასე თუ A, მაშინ B, სხვა შემთხვევაში $C \triangleq A\times B + (\urcorner\Delta\times C)$ (2.60) სადაც + აღნიშნავს $A\times B$ და ($\urcorner\Delta$ $+C$) არამკაფიო სიმრავლეების გაერთიანებას.

A არამკაფიო სიმრავლის დამატება აღინიშნება $\urcorner\Delta$ და განისაზღვრება, როგორც

$$\neg A \triangleq \dot{\int_{U}} (1 - \mu_A(y)) \,/\, y$$

დამატების ოპერაცია შეესაბამება უარყოფას თუ x-არამკაფიო სიმრავლის სიმრავლეა, მაშინ არა x ინტერპრეტირებული უნდა იქნეს როგორც $\neg x$.

ლიტერატურა:

1. Zedeh L.A. 1.Fuzzy sets-Inform. Contr., vol.8,1965.2. quantitative fuzzy semantics-Infrm.Sci., vol.3.1971.
2. Sugeno M.Fuzzy measure end fuzzy integral. – Transaction os the Sosiety of Instrument end Control Engineers, Tokyo.-1972.v.8,#2.p218-226.
3. Sugeno M.Fuzzy decision making problems. Transaction os the Sosiety of Instrument end Control Engineers, Tokyo.-1975.v.11,#6.p85-90.
4. попков Ю. С., Посохин М.В., Системный анализ и проблемы развития городов. М.: Наука, 1983.
5. Математическое моделированиею. Под ред . Дж. Ендрюс. Р Мал-Лоун. М.: Мир, 1979.
6. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения.Пер. с англ. Под ред. Р.Р Ягерра. М.: Радио и связь, 1986-408с.
7. Дюбуа Д., Прад А. теориа возможностей. Приложение к представлению знаний в информатике. М.: Радио и связь, 1990.