

ფუნდამენტური კვლევებისათვის სახელმწიფო სამეცნიერო გრანტების კონკურსი

ხელშეკრულების ნომერი:

FR/116/5-100/14

საგრანტო პროექტის სათაური:

„ალგებრულ-ტოპოლოგიურ სტრუქტურებზე განსაზღვრული ზომები  
და მათი გამოყენებები“

წამყვანი ორგანიზაცია: საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

გრანტის შემსრულებლები:

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: ალექსი კირთაძე - სტუ-ს პროფესორი

ძირითადი შემსრულებლები:

2015-2016 წლებში: გოგი ფანცულაია -სტუ-ს პროფესორი

2017-2018 წწ. ალექსანდრე ხარაზიშვილი (ა. რაზმაძის მათემატიკის ინსტიტუტის  
მთავარი მეცნიერ-თანამშრომელი);

გივი გიორგაძე - სტუ-ს პროფესორი;

ნინო რუსიაშვილი (დაიცვა სადოქტორო დისერტაცია სტუ-ში 2017 წელს);

მურმან კინწურაშვილი (დაიცვა სადოქტორო დისერტაცია სტუ-ში 2015 წელს).

რეზიუმე

სიმრავლეთა და ფუნქციათა ზომადობის ფუნდამენტურ კონცეფციებთან დაკავშირებული სხვადასხვა საკითხების კვლევა არის აუცილებელი თანამედროვე მათემატიკის მთელი რიგი ისეთი განშტოებების შემდგომი განვითარებისათვის, როგორცაა: ნამდვილი და კომპლექსური ანალიზი, აბსტრაქტული ჰარმონიული ანალიზი, უსასრულო-განზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეთა ანალიზი, ერგოდულობის თეორია, ალბათობის თეორია, შემთხვევით პროცესთა თეორია, თამაშთა თეორია, ზოგადი ტოპოლოგია და სხვა. ამასთან დაკავშირებით, განსახილველი ამოცანების სპეციფიკიდან გამომდინარე, ზომადობის ცნება შეიძლება განხილულ ან შემოღებულ იქნას განსხვავებული ან მოდიფიცირებული სახით.

პროექტის ძირითად ამოცანას წარმოადგენს უსასრულოგანზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში ზომადობისა და ზომის თვალსაზრისით მცირე (უგულებელყოფადი)

სიმრავლეთა ცნებებთან დაკავშირებული სხვადასხვა კონცეფტუალური მიდგომების შემუშავება და დანერგვა მათემატიკის ისეთ დარგებში, როგორცაა წრფივ ფუნქციონალთა თეორია, განზოგადებულ ინტეგრალთა თეორია, მათემატიკური სტატისტიკა და სხვა. მაგალითად, უსასრულოგანზომილებიანი პოლონური ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცეებისათვის 1973 წელს ქრისტენსენის მიერ შემოტანილი ჰაარის აზრით ნულ-სიმრავლის ცნების საშუალებით, ჩვენს მიერ შემოტანილია პირველი რიგის სტოქასტური პროცესის შემთხვევაში სასარგებლო სიგნალის უსასრულო-შერჩევითი ძალდებული შეფასებების კლასიფიკაცია სუბიექტურ და ობიექტურ შეფასებებად, რამაც საშუალება მოგვცა მოგვეხდინა მკაცრი მათემატიკური ანალიზი სტატისტიკურ გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიის კრიტიკისას ჯამ ნანუნალის (1960) და იაკობ კონის (1994) მიერ გამოთქმულ მოსაზრებებზე, რომ *"მაქსიმალური საიმედოობის" მქონე ტესტების საშუალებით ხდება ნულ ჰიპოთეზის უარყოფა "თითქმის ყველა" უსასრულო შერჩევისათვის.*

ამგვარად, მოსალოდნელია, რომ ყოველი პროგრესი ზომის თეორიაში გარკვეულ გავლენას მოახდენს მათემატიკის ზემოთ მოხსენიებული დარგების შესაბამის პროგრესზე. გარდა ამისა, უკანასკნელი ათწლეულების განმავლობაში უსასრულოგანზომილებიანი პოლონური ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცეებისათვის განვითარებულ ზომის თეორიის გამოყენების არეალი გახდა არსებითად უფრო ფართე.

შემოთავაზებულ პროექტის ფარგლებში ჩვენ ვგეგმავთ შემდეგი შედეგების მიღებას:

**(1)** შესწავლილი იქნება ადიტიური ფუნქციონალების ზომადობის თვისებები. კერძოდ, გამოკვლევულ იქნება კომის ფუნქციონალური განტოლების არატრივიალური ამონახსნის ზომადობის თვისებები ერთგანზომილებიანი ლებეგის ზომის ძვრების მიმართ ინვარიანტულ გაგრძელებათა კლასის მიმართ.

**(2)** უსასრულოგანზომილებიან მართკუთხედებზე უნიფორმულად განაწილებულ ზრდად სასრულ სიმრავლეთა მიმდევრობების თვისებების გამოყენებით, მოცემული იქნება  $\mathbb{R}^\infty$  – სივრცეში ნამრავლი ზომებისათვის განსაზღვრული რიმანის ინტეგრალების გამოსათვლელი ალგორითმი.

**(3)** უსასრულოგანზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ  $V$  სივრცეში ხარაზიშვილის ზომის კონსტრუქციის გამოყენებით აიგება ინვარიანტულ ზომათა გარკვეული კლასი და მოხდება ამ

კლასის მიმართ  $V$ -ზე განსაზღვრული ნამდვილმნიშვნელობებიანი ფუნქციების ფარდობითად ზომადობის ამოცანის შესწავლა.

(4) პოლონურ მეტრიკულ სივრცეზე განსაზღვრული ნებისმიერი დიფუზიური ბორელის ალბათური ზომისათვის, განსაზღვრული იქნება ჯგუფური ოპერაცია და ექვივალენტური მეტრიკა, ისეთნაირად, რომ აღნიშნული ზომა იქნება ჰაარის ალბათური ზომა.

(5) შესწავლილი იქნება ზოგადი პირობები ორი ზომადი  $(E_1, S_1, \mu_1)$  და  $(E_2, S_2, \mu_2)$  სივრცისათვის  $f: E_1 \rightarrow E_2$  ფუნქციის გრაფიკის მასიურობისათვის  $\mu_1 \times \mu_2$  ზომათა ნამრავლის მიმართ. შესაბამისად, დადგინდება საკმარისი პირობები მოცემული ფუნქციის ფარდობითი ზომადობისათვის  $\mu_1$  ზომის ყველა შესაძლო გაგრძელებათა კლასის მიმართ.

(6)  $\mathbf{R}^\infty$ -სივრცეზე განსაზღვრული  $\alpha$ -სტანდარტული და  $\alpha$ -ორდინალური "ლებეგის ზომების" გამოყენებით მიღებული იქნება ამავე სივრცეზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციების  $C(\mathbf{R}^\infty)$ -კლასზე განსაზღვრული უსასრულოგანზომილებიანი დირაკის დელტა ფუნქციონალის წარმოდგენა და მიღებული წარმოდგენის საშუალებით შესწავლილი იქნება ამ ფუნქციონალის თვისებები.

(7) ზომის გაგრძელების ყოველი მეთოდისათვის (მარჩევსკის მეთოდი, კოდაირასა და კაკუტანის მეთოდი, ოქსტობისა და კაკუტანის მეთოდი) შესწავლილი იქნება ინვარიანტულ ზომათა ძირითადი თვისებების (მაგალითად, ერთადერთობის თვისება, ერგოდულობა, შტეინგაუსის თვისება და სხვა) შენარჩუნებადობის ამოცანა.

(8) გარკვეული შეზღუდვის პირობებში, სოლოვეის მოდელში ნაჩვენები იქნება რადონ-ნიკოდიმის თეორემის მართებულობა  $\alpha$ -სტანდარტული (ან  $\alpha$ -ორდინალური) "ლებეგის ზომის" მიმართ აბსოლუტურურად უწყვეტი ბორელის ზომისათვის და შესწავლილი იქნება რადონ-ნიკოდიმის წარმოებულების ზოგიერთი თვისება.

(9) რადონ-ნიკოდიმის თეორემისა და მეტრიკული ტრანზიტულობის თვისების გამოყენებით დადგინდება აუცილებელი და საკმარისი პირობა, რომელიც უზრუნველყოფს კონკრეტული სიგმა-სასრული ინვარიანტული  $\mu$  ზომისათვის ფარდობითად ერთადერთობის თვისების შესრულებადობას ყველა სიგმა-სასრულ ინვარიანტულ ზომათა  $M$  კლასის მიმართ.

(10) სოლოვეის მოდელში ნაჩვენებია იქნება, რომ ყოველი განზოგადებული ინტეგრალის განსაზღვრის არე არის ქრისტენსენის აზრით ჰაარის ნულ-სიმრავლე.

(11) ყოველი  $\alpha \in (\mathbb{N}, \emptyset)^{\mathbb{N}}$  მიმდევრობისათვის, შესწავლილი იქნება  $\alpha$ -სტანდარტული (ან  $\alpha$ -ორდინალური) "ლებეგის ზომისათვის" სიმკვრივის შესახებ ლებეგის თეორემის ანალოგის მართებულობის საკითხი და ამავე ზომის მიმართ აბსოლუტურად უწყვეტი ბორელის ზომებისათვის დიფერენცირებადობის ამოცანა.

(12) შესწავლილი იქნება ამოცანა, რომელიც შეეხება ზოგიერთი სტოქასტური პროცესის მახასიათებელი პარამეტრის უსასრულო-შერჩევითი ძალდებული შეფასებისათვის მისი ობიექტურობის საკითხს.

ჩვენი აზრით, მოცემულ პროექტში შემოთავაზებული საკითხები და მეთოდები არის არსებითი და მივყავართ მნიშვნელოვან პროგრესამდე ზომის თეორიისა და ნამდვილი ანალიზის მთელი რიგი საკითხების შესწავლისას. ვიმედოვნებთ, რომ პროექტში შემოთავაზებული ერთობლივი მიდგომა მოგვცემს საშუალებას ამოვხსნათ საკმაოდ ფართე კლასი ამოცანებისა მათემატიკის სხვადასხვა დარგიდან. მიუხედავად იმისა, რომ ეს ამოცანები და საკითხები განსხვავდებიან თავისი შინაგანი ბუნებით, ისინი მჭიდროდ არიან ერთმანეთთან დაკავშირებული მოტივაციის, მეთოდისა და მეთოდოლოგიის თვალსაზრისით.

**პროექტის ფარგლებში გამოქვეყნდა სამეცნიერო შრომები შემდეგ ჟურნალებში:**

Journal of Mathematics and Statistics Sciences, Science Singpost Publishing, USA; International Journal of Advanced and Research in Mathematics, Sci. Press Ltd., Switzerland; Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute, Elsevier; Proceedings A. Razmadze Mathematical Institute, TSU; Reports of Enlarged Sessions of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, TSU; TICMI, TSU, Georgian Academy of Natural Sciences, და სხვა.

**პროექტის ფარგლებში გრანტის შემსრულებლებმა მონაწილეობა მიიღეს შემდეგ საერთაშორისო კონფერენციებში:**

12<sup>th</sup> International Conference on Geometry and Applications, Vanna (Bulgaria), 2015, 2017; 45<sup>th</sup> Winter School in Abstract Analysis, Prague, 2016, 2017; საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირისა და

მექანიკოსთა კავშირის მე-7 საერთაშორისო კონფერენცია, ბათუმი, 2016; თსუ ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის გაფართოებული სხდომები, 2015, 2016, 2017, თბილისი.

**გამოცემული იქნა ერთი მონოგრაფია:**

G. Pantsulaia, Applications of Measure Theory to Statistics, Springer International Publishing Switzerland 2016