ციფრული რეგულატორის ანალიზური კონსტრუირება დინამიკური დაპროგრამების მეთოდის გამოყენებით

ნოდარ ნარიმანაშვილი

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

მოცემულია მართვის სისტემებში რეგულატორების სინთეზის მეთოდების მოკლე მიმოხილვა და ნაჩვენებია მათი კავშირი ოპტიმალური მართვის ამოცანებთან. გამოკვლეულია ციფრული მოქმედების მმართველი მოწყობილობის ანალიზური კონსტრუირების შესაძლებლობა, დინამიკური დაპროგრამების მეთოდის დისკრეტული ფორმის გამოყენებით, არაკვადრატული ფუნქციონალისთვის. მოყვანილია ციფრული რეგულატორის სინთეზის მეთოდი ბელმანის ფუნქციონალური განტოლების პირველი და მეორე მიახლოებისთვის.

საკვანძო სიტყვები: მართვის ციფრული სისტემები. ოპტიმალურობის პრინციპი. ანალიზური კონსტრუირება. დინამიკური დაპროგრამება. ბელმანის განტოლება.

1. შესავალი

მართვის ნებისმიერი სისტემის დაპროექტებისას ისმება შემდეგი ძირითადი ამოცანა: გამოვიმუშავოთ მმართველი ზემოქმედების ისეთი კანონი, რომელიც უზრუნველყოფს გამოსასვლელი პარამეტრების წინასწარ მოთხოვნილ ხარისხობრივ მაჩვენებლებს. თუ ეს მოთხოვნები სისტემის ფუნქციონირების საუკეთესო რეჟიმზეა ორიენტირებული, მაშინ საქმე გვაქვს ოპტიმალური მართვის ამოცანასთან.

სისტემის ოპტიმალური ამოცანების გადაწყვეტის ერთ-ერთი მძლავრი და თანამედროვე მეთოდია დინამიკური დაპროგრამების მეთოდი [1; 2; 5]. ამ მეთოდს საფუძვლად უდევს რ. ბელმანის მიერ ფორმულირებული ოპტიმალურობის პრინციპი, რომლის თანახმადაც: ოპტიმალური მართვის ტრაექტორიის ნაწილი აგრეთვე ოპტიმალურია და სისტემის ქცევა მომავალში დამოკიდებულია მის მოცემულ საწყის მდგომარეობაზე და არა იმაზე თუ როდის და როგორ მივიდა სისტემა ამ მდგომარეობამდე. ეს გარემოება ოპტიმალური ტრაექტორიის აგების სტრატეგიას ხდის კარგად პროგრამირებადს, რის გამოც ამ მეთოდმა ფართო გამოყენება ჰპოვა დინამიკური ოპტიმიზაციის ბევრ ამოცანაში და მათ შორის მმართველი მოწყობილობის რეგულატორის ანალიზური კონსტრუირების ამოცანებში [1; 2; 4; 5].

ამავე დროს გასული საუკუნის 80-იანი წლებიდან მოყოლებული კომპიუტერული ტექნიკის უსწრაფესმა განვითარებამ თითქმის სრულად გამოდევნა პრაქტიკიდან ანალოგური მოქმედების რეგულატორები; შესაბამისად აქტუალურობა შეიძინა ოპტიმალური მართვის ალგორითმების ციფრული ფორმების შემუშავებამ და პრაქტიკაში დანერგვამ. დღეისათვის დამპროექტებლებისათვის შემოთავაზებულია ციფრული რეგულატორების სინთეზის მრავალი მეთოდი, რომელთაგან ყველაზე ხშირად გამოიყენება: ა) სიხშირული მეთოდები, ბ) ბილინეარული გარდაქმნის მეთოდი,

გ) უშუალო დაპროექტების (ციფრული ფილტრების) მეთოდი, დ) ფესვური ჰოდოგრაფების მეთოდი, ე) რიცხვითი მეთოდები და სხვა [2; 3]. მათი უმეტესი ნაწილი უზრუნველყოფს ციფრული მართვის წრფივი ალგორითმების გამომუშავებას. სინთეზის (ანალიზური კონსტრუირების) ამოცანა საგრძნობლად რთულდება, როდესაც საქმე ეხება არაწრფივ ციფრულ სისტემას ან ანალიზური კონსტრუირების არაწრფივ ამოცანას. ამ სირთულის დაძლევა შესაძლებელია დინამიკური დაპროგრამების მეთოდის ციფრული ფორმის მოდიფიცირებით გარკვეული შეზღუდვების პირობებში.

2. ძირითადი ნაწილი

უპირველესად ჩამოვაყალიბოთ ოპტიმალურობის პრინციპი დისკრეტული სისტემებისთვის ზ. კუოს მიხედვით [1]: მართვის ნებისმიერი სტრატეგია, რომელიც ოპტიმალურია$[i, N]$ ინტერვალში, ასევე ოპტიმალური იქნება $[i+1, N]$ ინტერვალში, სადაც $i = 1, 2, \ldots, N-1$.

განვიხილოთ ზოგადი სახით მოცემული ციფრული მართვის სისტემა:

$$x\,(k+1) = f[x(k), u(k)] \tag{1}$$

სადაც $x\,(k)$ სისტემის გამოსასვლელი სიდიდის დისკრეტული ფორმაა, ხოლო $u(k)$ ციფრული რეგულატორის მიერ გამომუშავებული დისკრეტული მმართველი ზემოქმედებაა. ვთქვათ ოპტიმალურობის ასევე ზოგადი (არაკვადრატული) ფუნქციონალი დაკვირვების უსასრულოდ დიდ შუალედში, ფორმულირებულია შემდეგი სახით:

$$J = \min_u \sum_{k=0}^{\infty} F[x(k), u(k)], \tag{2}$$

საჭიროა ვიპოვოთ მართვის კანონი, რომელიც უზრუნველყოფს (2)-ე კრიტერიუმის შესრულებას, სასაზღვრო პირობებში

$$x\,(0) = x_0; \qquad x\,(\infty) = 0\,. \tag{3}$$

შემოვიტანოთ დამხმარე ფუნქცია $S\,(x_0)$, რომელიც შემდეგნაირადაა განსაზღვრული:

$$S\,(x_0) = \min_u J; \tag{4}$$

მაშინ ოპტიმალურობის პრინციპის საფუძველზე შეიძლება ჩავწეროთ:

$$S\,(x_0) = \min_u \left[\sum_{k=0}^{m} F(x;u) + \sum_{m}^{\infty} F(x;u)\right]; \tag{5}$$

(5)-ე განტოლების წარმოდგენა (4)-ს გათვალისწინებით გვაძლევს:

$$S\,(x_0) = \min_u \left[\sum_{k=0}^{m} F(x;u) + S\,(x_m)\right]; \tag{6}$$

ეს გამოსახულება სამართლიანია ნებისმიერი მთელი m რიცხვისთვის. თუ $m = 1$, (6)-დან ვიღებთ

$$S\,(x_0) = \min_u [F(x_0; u_0) + S\,(x_1)]. \tag{7}$$

ვიგულისხმოთ, რომ $S(x_1)$ უწყვეტია და გააჩნია მაღალი რიგის წარმოებულები x-ის მიმართ. მაშინ (7)-ის დაშლით ტეილორის მწკრივად მივიღებთ:

$$S[x_0 + \Delta x(0)] = S(x_0) + \frac{\partial}{\partial}\Delta x(0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\Delta x^2(0) + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 S}{\partial x^3}\Delta x^3(0) + \cdots \tag{8}$$

(8)-ს დაშლის გათვალისწინებით, (7) ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$S[x_0] = \min_u[F(x_0; u_0) + S(x_0)] + \frac{\partial}{\partial}\Delta x(0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\Delta x^2(0) + \cdots \tag{9}$$

განვსაზღვროთ $\Delta x(0)$-ის მნიშვნელობა (1)-დან და შევიტანოთ (9)-ში. მივიღებთ:

$$\min_u \left[\begin{matrix} F(x_0; u_0) + \frac{\partial}{\partial}(F(x_0; u_0) - x_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(F(x_0; u_0) - x_0)^2 + \\ + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 S}{\partial x^3}(F(x_0; u_0) - x_0)^3 + \cdots \end{matrix}\right] = 0. \tag{10}$$

(10)-ე გამოსახულების განზოგადებით მივიღებთ განტოლებას:

$$\min \left[F(x; u) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}\frac{\partial^i S}{\partial x^i}(F(x; u) - x)^i\right] = 0. \tag{11}$$

(11-ე) არის ბელმანის ფუნქციონალური განტოლების დისკრეტული ფორმა, რომლის საშუალებითაც განსაზღვრული $u(k)$ მართვა აკმაყოფილებს (2)-ე ოპტიმალურობის კრიტერიუმს.

მეთოდის გამოყენების საილუსტრაციოდ განვიხილოთ წრფივი ციფრული სისტემა, რომლის განტოლებაა:

$$x\,(k+1) = x(k) + du(k), \tag{12}$$

სადაც d - მოცემული რიცხვია. განვსაზღვროთ ფუნქციონალი ბიკვადრატული ფორმით [5]:

$$F(x(k); u(k)) = \gamma_1 x^2(k) + \gamma_2 x^4(k) + bu^2(k), \tag{13}$$

სადაც γ_1, γ_2და b ასევე მოცემული რიცხვებია.

ჩავწეროთ მინიმიზაციის პირობა:

$$J = \min_u[\gamma_1 x^2 + \gamma_2 x^4 + bu^2] \tag{14}$$

ვისარგებლოთ ბელმანის (11)-ე განტოლებით და (13)-ე-ს გათვალისწინებით ჩავწეროთ მისი პირველი მიახლოება:

$$\min_u\left[\gamma_1 x^2 + \gamma_2 x^4 + bu^2 + \frac{\partial}{\partial}(x + d\ \ ) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x + d\ \ )^2\right] = 0.$$

წონითი კოეფიციენტების სათანადო შერჩევისას ამ განტოლებიდან განსაზღვრულ ოპტიმალურ $u(x)$ მართვას აქვს შემდეგი სახე:

$$u_1(x) = -\frac{d}{2M(x)}\left(\frac{\partial}{\partial} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}ax\right) \tag{15}$$

სადაც $M_1(x) = b + \frac{d^2}{2}\,\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$ და მას უწოდებენ განზოგადებულ წონით მუდმივას.

თუ $M_1(x)$ მუდმივას განსაზღვრისას აგრეთვე პირველი მიახლოებით დავკმაყოფილდებით, ე.ი. ჩავთვლით, რომ $M_1 = b + d^2 c_1$, (15)-ე მიიღებს შედარებით მარტივ სახეს:

$$u_1(x) = -\frac{d}{2M}\frac{\partial}{\partial} = -\frac{d}{b}(c_1 x + 2c_2 x^3)\ .$$

ბელმანის განტოლების მეორე მიახლოებისთვის იგივე (14)-ე კრიტერიუმისთვის მივიღებთ:

$$\min\left[\gamma_1 x^2 + \gamma_2 x^4 + bu^2 + \frac{\partial}{\partial}(x + d\quad) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x + d\quad)^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 S}{\partial x^3}(x + d\quad)^3\right] = 0.$$

მინიმიზაციის პირობიდან მართვის კანონისთვის გვექნება:

$$u_2(x) = -\frac{d}{2M(x)}\left(\frac{\partial}{\partial} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}a\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 S}{\partial x^3}(a\quad)^3\right), \tag{16}$$

სადაც

$$M_2(x) = b + \frac{d^2}{2}\,\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{d^2}{2}\,\frac{\partial^3 S}{\partial x^3}a\quad ;$$

(4)-ის გათვალისწინებით შესაბამის აღნიშვნებში (16)-ე შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$u_2(x) = -\frac{d(c_1 x + 2c_2 x^3)}{b + d^2(c_1 + 6c_2 x^2)};$$

მივანიჭოთ კოეფიციენტებს რიცხვითი მნიშვნელობები:

$\gamma_1 = 2;\ \ \gamma_2 = 5;\ \ d = 0{,}01;\ \ b = 0{,}01;\ \ a = 1.$

პირველი მიახლოებისას ვღებულობთ c კოეფიციენტების მნიშვნელობებს:$c_1 \approx 13{,}2$; $c_2 \approx 0$; ხოლო მეორე მიახლოებისთვის $c_1 \approx 15{,}1$; $c_2 \approx 11{,}5$. შესაბამისად, მართვის ოპტიმალური კანონები, რომელიც რეგულატორმა უნდა გამოიმუშავოს, შესაბამისად პირველი და მეორე მიახლოებისთვის შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$u_1(x) = -13{,}2x_1;\quad u_2(x) = -\frac{15{,}1x + 23x^3}{1{,}15 + 0{,}69x^2};$$

როგორც ვხედავთ, გარკვეულ დაშვებებში პირველი მიახლოებისას მივიღეთ წრფივი მართვის კანონი, ხოლო მეორე მიახლოების შემთხვევაში, როგორც მოსალოდნელი იყო, არაწრფივი კანონი.

3. დასკვნა

ციფრული რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების ამოცანების გადაწყვეტის ერთ-ერთ პერსპექტიულ მიმართულებად უნდა ჩაითვალოს ოპტიმიზაციის კლასიკური მეთოდების გამოყენება. დისკრეტულ სისტემებში ოპტიმალური მართვის კანონის ძებნის სტრატეგიიდან გამომდინარე, პრიორიტეტი შეიძლება მიენიჭოს დინამიკური დაპროგრამების მეთოდს.

ლიტერატურა - References – Литература:

1. Александров А.Г. (1989). Оптимальные и адаптивные системы. «Высшая школа», Москва
2. Куо Б. (1986). Теория проектирования цифровых систем. «Машиностроение», Москва
3. ნარიმანაშვილი ნ., კაპანაძე თ., გოჩოლეიშვილი თ. (2017). ფესვური ჰოდოგრაფების მეთოდი მართვის ციფრული სისტემების სინთეზის ამოცანებში. სტუ-ს შრ.კრ. „მართვის ავტომატიზებული სისტემები“, N2(24). თბ., გვ.66-70
4. Бессарб В.И., Федюн Р.В. (2001). Синтез цифровых систем управления многоступенчатыми водоотливными установками угольных шахт. Донецкий государственный университет.
5. Кудин В.Ф., Колесниченко. (2001). Субоптимальное нелинейное управление по критерию быстродействия на основе метода Беллмана-Ляпунова. Журнал «Радиоэлектроника, информатика, управление». Киевский политехнический институт. Киев.

ANALYTICAL CONSTRUCTION OF DIGITAL CONTROLLERS USING A DYNAMIC PROGRAMMING METHOD

Narimanashvili Nodar

Georgian Technical University

Summary

A brief review of the methods of synthesis of control system regulators is presented; relation of this problem with the methods of optimal control is shown. Possibility of analytic construction of a digital control device using a discrete form of dynamic programming method for a no squared functional is studied. An example of the synthesis of a digital controller for the first two approximations of the Bellman functional equation is shown.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Нариманашвили Н.

Грузинский Технический Университет

Резюме

Представлен краткий обзор методов синтеза регуляторов систем управления и показана связь этой задачи с методами оптимального управления. Исследована возможность аналитического конструирования цифрового управляющего устройства с применением дискретной формы метода динамического программирования для неквадратического функционала. Приведен пример синтеза цифрового регулятора для первых двух приближений функционального уравнения Беллмана.