მტყუნებათა ნაკადის ანალიზი ინფოკომუნიკაციურ ქსელებში

რევაზ კაკუბავა, რევაზ მიქაძე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

განხილულია პირობები, რაც სრულდება ისეთ რთულ სისტემებში, რომლებიც შედგება ერთგვაროვან ელემენტთა დიდი რაოდენობისგან. ეს პირობები ასეთი სისტემების მათემატიკური მოდელირების პროცესში აქსიომების როლს ასრულებს. ამ აქსიომებზე დაყრდნობითა და ლოგიკური მსჯელობის გზით ნაშრომში დასაბუთებულია, რომ რთულ სისტემებში განაცხადთა შემავალი ნაკადები პუასონურია. მიღებული შედეგები გათვალისწინებულია მობილური ტელეკომუნიკაციების ქსელების ანალიზის საჭიროებისათვის. ამავე დროს მიღებული შედეგი სამართლიანია ნებისმიერი რთული სისტემისათვის, რომელიც შეიცავს ერთგვაროვან ელემენტთა დიდ რაოდენობას.

საკვანძო სიტყვები: მტყუნება. რემონტი. მომსახურება. პუასონის (უმარტივესი) ნაკადი.

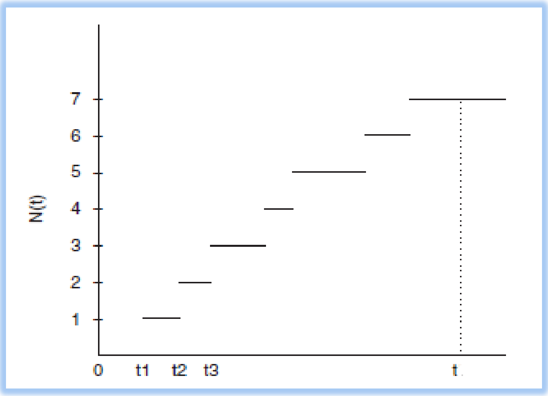
1. შესავალი

გასული საუკუნის 80-იანი წლების მეორე ნახევრის დასაწყისიდან მნიშვნელოვანი ცვლილებები განხორციელდა ინფოკომუნიკაციების სფეროში, რამაც გავლენა მოახდინა მისი მომსახურების მიმწოდებლების ინტერესებზე, ასევე მომხმარებლებსა და აღჭურვილობის მწარმოებლებზე. აქ ვგულისხმობთ დემონოპოლიზაციას მთელი მსოფლიოს განვითარებულ ქვეყნებში ინფოკომუნიკაციურ მომსახურებაში; და შედეგად, შეიქმნა ტრადიციული და ახალი ტიპის სერვისების ღია ბაზარი, მომსახურების მიმწოდებელთა შორის გამძაფრდა კონკურენცია; გაიზარდა მომხმარებელთა მხრიდან მოთხოვნები; სწრაფად განვითარდა ახალი ტექნოლოგიები, არქიტექტურები და ა.შ. ამ ცვლილებების შედეგია სატელეკომუნიკაციო ქსელების და მათი ელემენტების საიმედოობის პრობლემების მიმართ ინტერესის ზრდა, რომლის არსია: დაბალი საიმედოობა მომსახურების მიმწოდებლებს ემუქრება არა მარტო კლიენტების დაკარგვით, არამედ პირდაპირ გავლენას ახდენს მათ ეკონომიკურ მაჩვენებლებზე. მომხმარებელთა მომსახურების შეუსრულებლობა, ინფოკომუნიკაციური საშუალებების გამტყუნების გამო, გამოიხატება დაკარგული შემოსავლებით და ხშირ შემთხვევებში, მომხმარებელთა მიერ მოთხოვნილი სანქციების შედეგად გამოწვეული პირდაპირი დანაკარგებით.

საიმედოობის კლასიკური მათემატიკური თეორია არ იძლევა ფართომასშტაბიანი ტერიტორიულად განაწილებული სისტემების საიმედოობისა და ეფექტიანობის ანალიზის საშუალებას, რადგან ორიენტირებულია ცალკეულ მოწყობილობებზე. ინფოკომუნიკაციური ქსელის სტრუქტურული მართვის ახალი მოდელების შექმნისთვის უნდა გავითვალისწინოთ შემდეგი ფაქტორი, რომ თანამედროვე საკომუნიკაციო ქსელებში საბაზო რადიოსადგურების რაოდენობა (RBS) შეიძლება იყოს ასობით, ათასობით და მეტი, რაც ნიშნავს, რომ მათემატიკურ მოდელებში RBS-ების კომპლექტი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც უსასრულო. იგივე ფაქტორის გამო, ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ ელემენტთა

მტყუნება მუდმივი ინტენსივობის მოვლენად. წარმოდგენილ სტატიაში სწორედ ამ საკითხს შევეხებით.

პუასონის პროცესი და მისი განზოგადება ფუნდამენტურ როლს ასრულებს რთული სისტემების საიმედოობის ანალიზის ამოცანებში [1-3]. კერძოდ, წარმოდგენილ ნაშრომში ჩვენ დავასაბუთებთ, რომ რთული სისტემის ელემენტთა მტყუნებების ნაკადი პუასონურია (უმარტივესია). იმის საჩვენებლად თუ რას ვგულისხმობთ პუასონის პროცესში, განვიხილოთ რთულ სისტემაში ძირითადი ელემენტების მტყუნებათა პროცესი. იგულისხმება, რომ მტყუნების შემდეგ მტყუნებული ელემენტი გადაიცემა სარემონტოდ. წარმოვიდგინოთ, რომ დაკვირვებას ვიწყებთ t=0 დროში და აღვრიცხოთ ძირითადი ელემენტის თითოეული მტყუნება. ჩვენი ინტერესის საგანია N(t), ესაა მტყუნებების რაოდენობა t დროის ჩათვლით. N(t) პრაქტიკაში არის საფეხურეობრივი ფუნქცია, სადაც ფუნქცია ნახტომს აკეთებს მაშინ, როცა ძირითადი ელემენტი მტყუნდება. ე.ი. თუ მტყუნება ხდება $0<t_1<t_2<t_3<\ldots<t_k$ დროის მომენტებში, მაშინ N(t) იქნება:



ნახ.1

$N(t)=0, \quad 0<=t<t_1,$

$N(t)=1, \quad t_1<=t<t_2,$

$N(t)=2, \quad t_2<=t<t_3,$

…

$N(t)=k, \quad t_k<=t<t_{k+1},$ და ა.შ.

მტყუნებებზე დაკვირვება ყოველ t მომენტში გვიჩვენებს N(t) შემთხვევითი ფუნქციის მნიშვნელობას დროის t ინტერვალში. ილუს-ტრაციისთვის ვნახოთ გრაფიკი (ნახ.1):

N(t) შემთხვევითი სიდიდის სიმაღლე t ფიქსირებულ დროის მომენტში არის დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე, რომელმაც შეიძლება მიიღოს 0, 1, 2, 3, … მნიშვნელობები. საინტერესოა გავიგოთ N(t)=n ალბათობა, რომელიც შეიძლება გამოვსა-ხოთ, როგორც P[N(t)=n] ან $P_n(t)$, როცა n=1, 2, 3…

იმისთვის, რომ დავთვალოთ $P_n(t)$, უნდა გავაკეთოთ რამდენიმე დაშვება, რომელიც მარტო ჩვენი კონკრეტული შემთხვევისთვის კი არ იქნება მიზანშეწონილი, არამედ რთული სისტემების ფართო კლასისათვის [4,5]. სახელდობრ, ესენი ისეთი სისტემებია, რომლებშიც ელემენტთა რაოდენობა არის იმდენად დიდი, რომ მათი მათემატიკური მოდელირების დროს შეგვიძლია ვივარაუდოდ, რომ ეს სიმრავლე უსასრულოა.

(i) მტყუნებების რაოდენობა ორ ან მეტ არაურთიერთთანაკვეთ დროის ინტერვალში არის ერთმანეთისგან დამოუკიდებელი დისკრეტული სიდიდეები;

(ii) მტყუნების ალბათობა (t, t+h) ინტერვალში, სადაც h>0, h არის მცირე სიდიდე, იქნება „მიახლოებით“ λh, ან უფრო ზუსტად λh+o(h). ამ შემთხვევაში λ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, როგორც მტყუნებათა რაოდენობა დროის ერთეულ მონაკვეთში;

(iii) ორი ან მეტი მტყუნებათა ალბათობა h დროის ინტერვალში იქნება o(h).

სიდიდე o(h), რომელიც გამოვიყენეთ (ii) და (iii) დაშვებებში, მიისწრაფის ნულისკენ უფრო სწრაფად, ვიდრე h. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, $\frac{o(h)}{h}\rightarrow 0$, როცა $h\rightarrow 0$.

ჩვენი შემთხვევითი პროცესი, რომელშიც გათვალისწინებული იქნება ეს სამი დაშვება, იქნება პუასონის ჰომოგენური პროცესი. ჰომოგენურს ვამბობთ ჩვენი (ii) დაშვებიდან გამომდინარე, ანუ λ არის მუდმივი. (i) და(ii) დაშვებები ერთდროულად გვიჩვენებს, რომ მტყუნების ალბათობა (t, t+h) დროის ინტერვალში არის დაახლოებით λh და დამოუკიდებელია იმისგან, თუ რამდენი მტყუნება მოხდა (0, t) ინტერვალში. (iii) დაშვება გვიჩვენებს, რომ მცირე h-სთვის, ორი ან მეტი მტყუნების ალბათობა (t, t+h) მონაკვეთში არის ძალიან მცირე და უგულებელყოფადი, თუ შევადარებთ ერთი მტყუნების მოხდენის ალბათობას [6,7].

2. ძირითადი ნაწილი

გავიხსენოთ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე X, რომელიც იღებს მთელ მნიშვნელობებს 0, 1, 2,..k, … ალბათობებით

$$P(X=k)=e^{-\alpha}\frac{\alpha^k}{k!}(\alpha>0).$$

ასეთი X არის პუასონის შემთხვევითი სიდიდე α პარამეტრით. ახლა დავამტკიცოთ, რომ პუასონის ერთგვაროვანი პროცესისთვის $t>0$ დროში, N(t) არის პუასონის შემთხვევითი სიდიდე λt პარამეტრით, ანუ

$$P_n(t)=P[N(t)=n]=e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!,\ n=0,1,2…$$

ამ ტოლობის დასამტკიცებლად განვიხილოთ ორი ინტერვალი (0,t) და (t, t+h). თავდაპირველად უნდა ვაჩვენოთ, თუ როგორ უკავშირდება ერთმანეთს $P_0(t+h)$ და $P_0(t)$. ამისთვის უნდა გავითვალისწინოთ, რომ $\{N(t+h)=0\}$ (არ მომხდარა მტყუნება (0, t+h) ინტერვალში), ხდება მხოლოდ მაშინ, როცა $\{N(t)=0\}$ და $\{N(t+h)-n(t)=0\}$ ერთდროულად.

აქედან გამომდინარე (i) დაშვებიდან ვიღებთ $P_n(t)=P[N(t)=n]=e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!$, n=0,1,2… დაშვება (ii)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$P[N(t+h)-N(t)=0]=1-\lambda h+o(h).$$

ამ ორი განტოლების გაერთიანებით ვიღებთ:

$$(P_0(t+h)-P_0(t))/h=-\lambda P_0(t)+o(h)/h.$$

თუ $h\rightarrow 0$, ჩვენ ვიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას

$$P_0'(t)=-\lambda P_0(t)$$

იმავე გზით შეგვიძლია ერთმანეთს დავუკავშიროთ $P_n(t+h)$ და $P_n(t)$, როცა $n>=1$ და $h\rightarrow 0$. ლიმიტისკენ წასვლით მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას, რომელიც გამოსახავს P_n'-ს $P_n(t)$ და $P_{n-1}(t)$-თი. როცა $n=1(n\geq 2)$, მაშინ გვაქვს შემთხვევაზე დაკვირვების სამი ურთიერთდამოუკიდებელი გზა:

ა) $\{N(t)=n\}$ და $\{N(t+h)-N(t)=0]$

ბ) $\{N(t)=n-1\}$ და $\{N(t+h)-N(t)=1\}$

გ) $\{N(t)=n-k\}$ და $\{N(t+h)-N(t)=k\}$, $2\leq k\leq n$.

(თუ n=1, მაშინ მარტო ა და ბ შემთხვევა გვექნება).

პუასონის ჰომოგენური პროცესის დაშვებიდან გამომდინარე ვიღებთ, რომ ა, ბ და გ შემთხვევებთან დაკავშირებული ალბათობებია, შესაბამისი თანმიმდევრობით:

$$P_n(t)[1-\lambda h+o(h)],\quad P_{n-1}(t)[\lambda h+o(h)],\quad o(h).$$

სრული ალბათობის ფორმულის გამოყენებით და o(h)-თან გაერთიანებით მივიღებთ

$$P_n(t+h)=P_n(t)[1-\lambda h]+P_{n-1}(t)\,\lambda h+o(h),$$

ან

$$(P_n(t+h)-P_n(t))/h=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+o(h)/h.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $h \rightarrow 0$, მაშინ ბოლო ტოლობიდან მივიღებთ

$$P_n'(t)=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t),\ N\geq 1.$$

აქედან გამომდინარე ვიღებთ დიფერენციალური განტოლობების სისტემას. ასევე, გვაქვს პირობა: $P_0(0)=1$ და $P_n(0)=0$, $n\geq 1$.

$P_0'(t)=-\lambda P_0(t)$ ტოლობის ამოხსნა, მაშინ, როცა ვიცით, რომ $P_0(0)=1$, იქნება $P_0'(t)=e^{-\lambda t}$.

რადგან გავიგეთ $P_0(t)$-ს მნიშვნელობა, მაშინ

$$P'_n(t)=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t),\ \ n\geq 1,$$

1-სთვის გვექნება $\{e^{\lambda t}P_1(t)\}'=\lambda$.

ტოლობის ორივე მხარის გაერთიანებით გვექნება $P_1(t)=e^{-\lambda t}(\lambda t+c)$, მუდმივი c-სთვის, ვინაიდან $P_1(0)=0$, ამიტომ $c=0$.

ინდუქცით თუ გავყვებით, დავუშვათ $P_k(t)=e^{-\lambda t}(\lambda t)^k/k!0\leq k\leq n$. ტოლობა უნდა დავამტკიცოთ $k=n+1$-სთვისაც.

ინდუქციის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ $P_n'(t)=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)$, $n\geq 1$ ეკვივალენტურია $e^{\lambda t}(P_{n+1}'(t)+\lambda P_{n+1}(t))=\{e^{\lambda t}P_{n+1}(t)\}'=\lambda(\lambda t)^n/n!$.

ამ ტოლობის ორივე ნაწილის ინტეგრირებით ვიღებთ:

$$e^{\lambda t}P_{n+1}(t)=\lambda^{N+1}/n!(t^{n+1}/(n+1)+c),\ \text{და თუ}\ P_{n+1}(0)=0,\ \text{მაშინ}\ c=0.$$

ამრიგად ჩვენ დავამტკიცეთ

$$P_k(t)=e^{-\lambda t}(\lambda t)^k/k!$$

ტოლობის სამართლიანობა $k=n+1$-სთვის.

3. დასკვნა

როგორც ვნახეთ, სტატიაში ჩამოყალიბებული პირობების საფუძველზე დასაბუთებულია, რომ რთულ სისტემებში ელემენტთა მტყუნებების ნაკადი პუასონურია (უმარტივესია). ამისთვის გამოყვანილია წრფივი დიფერენციალური განტოლებების უსასრულო სისტემა. ასეთი სისტემის ამოხსნა, საზოგადოდ, რთული მათემატიკური პრობლემაა. მაგრამ ჩვენს შემთხვევაში შესაძლებელი ხდება მიღებული სისტემის ამოხსნა მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით. სწორედ ეს ამოხსნა იძლევა პუასონის განაწილებას.

ლიტერატურა – References – Литература:

1. Kołowrocki K., Soszyńska-Budny J. (2013). Modelling reliability of complex systems. Reliability: Theory & Applications 8(4)

2. Kuo W., Zuo M.J. (2003). Optimal Reliability Modeling: Principles and Applications. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc.

3. Limnios N., Ionescu D., Cezar (Eds.), (1999). Statistical and Probabilistic Models in Reliability

4. Khairy A., Helmy K.D.N., Prabhakar M, (2008). Complex System Maintenance. Handbook

5. Torben K. (2016). Capacitated Planned Maintenance: Models, Optimization Algorithms, Combinatorial and Polyhedral Properties.

6. Mohamed B.D., Salih O., Duffuaa A.R., Jezdimir K., Daoud A.K. (2009). Handbook of Maintenance Management and Engineering, Springer

7. Achermann D. (2008). Modelling, Simulation and Optimization of Maintenance Strategies under Consideration of Logistic Processes, Swiss Federal Institute of Technology Zurich.

ANALYSIS OF FAILURE FLOW IN INFOCOMMUNICATION NETWORKS

Kakubava Revaz, Mikadze Revaz
Georgian Technical University

Summary

We discuss the conditions that are fulfilled in complex systems where the numbers of similar elements are high. These conditions play a role of axioms in the mathematical modeling of such systems. Based on these axioms and logical reasoning, we prove that demand flow in complex systems is Poisson flow. The results are considered for mobile telecommunications network analysis. Besides, the result is fair for all kind of complex systems that contains big number of similar elements.

АНАЛИЗ ПОТОКА ОТКАЗОВ В ИНФОКОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЯХ

Какубава Р., Микадзе Р.
Грузинский Технический Университет

Резюме

Рассматриваются условия, которые выполняются в таких сложных системах, которые состоят из большого числа однородных элементов. Эти условия играют роль аксиом при математическом моделировании таких систем. На основе этих аксиом и логического рассуждения, мы доказываем, что поток требований в сложных системах - Пуассоновский. Результаты применяются для анализа инфокоммуникационных сетей. Кроме того, результаты справедливы для всех сложных систем, которые содержат большое количество однородных элементов.