რობასტული სისტემების კვლევა

ომარ კოტრიკაძე, ქეთევან კოტრიკაძე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

რობასტული სისტემები თანამედროვე მართვის თეორიაში ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი კვლევის საგანია. ასეთი სისტემების პარამეტრები იცვლება საკმაოდ დიდ საზღვრებში, რაც ართულებს რობასტული სისტემის დინამიკის კვლევას. რობასტული სისტემების მდგრადობის დადგენა შესაძლებელია ხარიტონოვის ძლიერი და სუსტი თეორემების საშუალებით. იგივე ტიპის ამოცანებისათვის აღნიშნულ სტატიაში ვიყენებთ ფესვური ჰოდოგრაფების მეთოდს, რომელიც აიოლებს ასეთი ტიპის განტოლებების ფესვების და მათი განლაგების არეების დადგენას ფესვთა კომპლექსურ სიბრტყეში.

საკვანძო სიტყვები: რობასტული სისტემები. რობასტული მდგრადობა. მეხუთე რიგის განტოლება. ფესვური ჰოდოგრაფი.

1. შესავალი

რობასტული სისტემები მრავლადაა თანამედროვე ავტომატური რეგულირების და მართვის სისტემებში. ძირითადი გამოწვევები, რომლებიც დაკავშირებულია ასეთი სისტემების კვლევასთან, მდგომარეობს იმაში, რომ ამ სისტემებში პარამეტრები იცვლება დიდ საზღვრებში, რაც ართულებს მდგრადობის და სინთეზის ამოცანების გადაწყვეტას აღნიშნული სისტემების შესწავლისას. რობასტული სისტემების კვლევისთვის არსებობს სხვადასხვა მეთოდები. მნიშვნელოვანია, ის გარემოებაც, რომ მაღალი რიგის მახასია-თებელი განტოლებისათვის ასეთი სისტემების კვლევა ჩვეულებრივ მართვაში არსებული სტანდარტული მდგრადობის კრიტერიუმების საშუალებით, საკმაოდ რთულია და ზოგჯერ შეუძლებელიც. ამიტომ მაღალი რიგის განტოლებების ფესვების მნიშვნელობების დასადგენად, როცა ადგილი აქვცს პარამეტრების ცვლილებას, მივმართეთ ფესვური ჰოდოგრაფის (ფჰ) მეთოდს [1,2].

2. ძირითადი ნაწილი

განვიხილოთ მეხუთე რიგის სამწევრა პოლინომი, რომელიც წარმოადგენს დაყვანილ განტოლებას და გააჩნია მხოლოდ ერთი პარამეტრი, რომელიც დიდ საზღვრებში იცვლება.

აღნიშნული სამწევრა პოლინომის კვლევა, წარმოაჩენს ფჰ-ების ერთ-ერთ საინტერესო თვისებას. კერძოდ, ამ შემთხვევაში არსებობს კომპლექსური ფესვების მოდულის ექსტრემუმი, რომელიც თავს იჩენს მეხუთე და უფრო მაღალი რიგის სამწევრა პოლინომის ფესვურ ჰოდოგრაფებში (ფჰ).

გამოვიკვლიოთ

$$S^5 + \alpha S + 1 = 0 \tag{1}$$

განტოლების ფჰ-ები. (1) განტოლების ფესვების ტრაექტორიების განტოლება იქნება:

$$r^5 Sin4\varphi = Sin\varphi. \tag{2}$$

სადაც $Sin4\varphi = 4Sin\varphi Cos\varphi(2Cos^2\varphi - 1)$ მნიშვნელობის ჩასმით მივიღებთ:

$$Sin\varphi = 0 \text{ ან } 4r^5 Cos\varphi(2Cos^2\varphi - 1) = 1\ . \tag{3}$$

თუ (3)-ში ჩავსვამთ $Cos\varphi = \frac{\delta}{r}$, გამარტივების შედეგად მივიღებთ:

$$8\delta^3 r^2 - 4\delta r^4 - 1 = 0 \; . \tag{4}$$

(4) წარმოადგენს δ-ს და r-ის არაცხად ფუნქციას, რომელიც აღვნიშნოთ

$$X(\delta; r) = 8\delta^3 r^2 - 4\delta r^4 - 1.$$

ამ ფუნქციის r ექსტრემუმის საპოვნელად საჭიროა ვიპოვოთ:

$$X'_\delta(\delta; r) = 24\delta^2 r^2 - 4r^4 = 0$$

და გავუტოლოთ ნულს.

თუ ამოვხსნით ორუცნობიან განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} X(\delta; r) = 0 \\ X'_\delta(\delta; r) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

მივიღებთ r ექსტრემუმის წერტილს და δ აბსცისას; ამის შემდეგ ვიპოვოთ ექსტრემუმის წერტილის არგუმენტი და მოდულის ექსტრემალური მნიშვნელობა. (5)-ის მეორე განტოლებიდან $r^2 = 6\delta^2$; თუ ამ მნიშვნელობას ჩავსვამთ (5)-ის პირველ განტოლებაში მივიღებთ δ-ს მნიშვნელობას: $\delta = -\frac{1}{\sqrt[5]{96}} = -0{,}4$ (უფრო ზუსტი მნიშვნელობა იქნება: $\delta = -0{,}40137078$); მაშინ მოდულის ექსტრემალური მნიშვნელობა იქნება $r_m = \sqrt{6}\ |\delta| = 0{,}98$ (უფორ ზუსტი მნიშვნელობა $r_m = 098315361$); ექსტრემუმის წერტილში არგუმენტის კოსინუსი იქნება $Cos\varphi_m = \frac{\delta}{r_m} = -0{,}41$. აქედან, $\varphi_m = 114{,}1^o$ (უფრო ზუსტად, 114,0948426^0). ამგვარად, ჩვენ გვაქვს ექსტრემუმის წერტილი და არ ვიცით იგი მაქსიმუმის, თუ მინიმუმის წერტილია. ამის გარკვევა გაიოლდება მას შემდეგ, როცა დავადგენთ ფჰ-ის ზოგად სახეს. პირველ რიგში ვიპოვოთ ფჰ-ს საწყისი წერტილები, რომლებიც

$$S^5 + 1 = 0$$

განტოლების ფესვებია:

$$\varphi_1 = 36^o; \varphi_2 = 108^o; \varphi_3 = 180^o; \varphi_4 = 252^o; \varphi_5 = 324^o.$$

ეს წერტილები ერთეულოვან წრეწირზეა. ფჰ-ების ერთი საბოლოო წერტილი კოორდინატთა სათავეა, ხოლო დანარჩენი ხუთი საბოლოო წერტილი უსასრულობაშია. ახლა დაგვრჩა ჰოდოგრაფის ერთეულოვან წრეწირთან დამატებითად გადაკვეთის წერტილების დადგენა [1,2,3].

(2) განტოლებიდან ჩანს, რომ ფჰ-ები ერთეულოვან წრეწირს ($r = 1$ და ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია) გადაკვეთენ φ-ს იმ მნიშვნელობებისთვის, რომლის დროსაც

$$Sin4\varphi = Sin\varphi \text{ ანუ } Sin4\varphi - Sin\varphi = 0;$$

$$2Sin\frac{4\varphi - \varphi}{2} Cos\frac{4\varphi + \varphi}{2} = 0.$$

აქედან, $Sin\frac{3\varphi}{2} = 0$ და $\varphi = 120^o n$, სადაც $n \in Z$ (6).

$$Cos\frac{5\varphi}{2} = 0 \;\; \varphi = \frac{2}{5}(90^o + 180^o k) = 36^o(2k+1) \tag{7}$$

(7) წერტილები ფჰ-ს საწყისს წერტილებს წარმოადგენენ და ერთეულოვან წრეწირზე მდებარეობენ. (2)-ში თუ $r = 1$, მაშინ $Sin4\varphi = Sin\varphi$ და საწყისს წერტილებს წარმოადგენენ, ხოლო (5) წერტილები ერთეულოვან წრეწირთან გადაკვეთის სამი წერტილია $0^o; 120^o; 240^o$. ბოლოს ვიპოვოთ (1) განტოლების ორჯერადი ფესვები:

$$(S^5 + 1)'S - S'(S^5 + 1) = 0.$$

აქედან ორჯერადი ფესვი იქნება: $S=\sqrt[5]{0,25}=0,758$. ფესვების არგუმენტის განსაზღვრის არეებია:

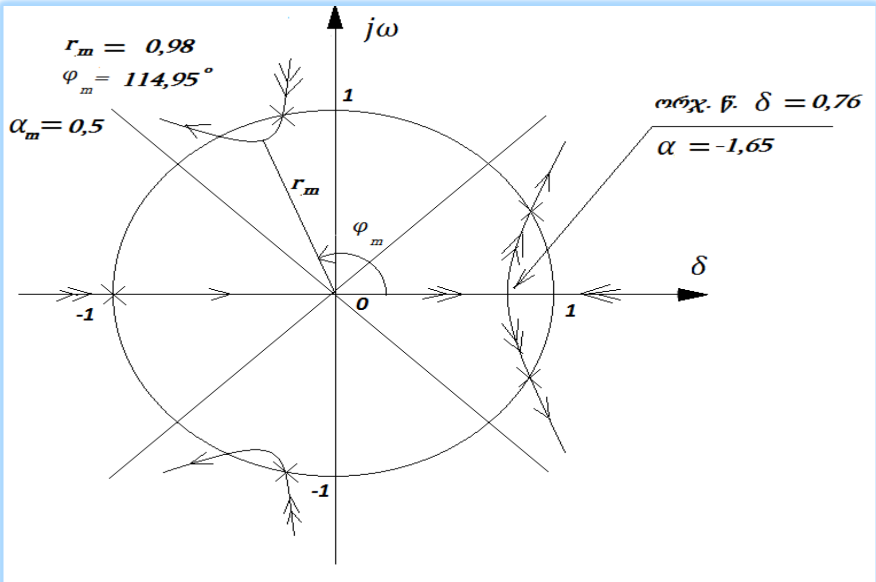
$$\begin{cases}\sin 4\varphi > 0\\ \sin\varphi > 0\end{cases} \text{ ან } \begin{cases}\sin 4\varphi < 0\\ \sin\varphi < 0\end{cases}$$

$$\varphi \in]-45^0;45^0[\cup]-90^0;-135^0[\cup]90^0;135^0[.$$

ახლა ვიპოვოთ α-ს მნიშვნელობა მოდულის ექსტრემუმის წერტილში. (1) განტოლების მოდულის ექსტრემუმის წერტილში α-ს მნიშვნელობა ვიპოვოთ შემდეგი ფორმულით:

$$\alpha = -r^4(16Cos^4\varphi - 12Cos^3\varphi),$$

რომელშიც ჩავსვათ $r=r_m=0,98$ და $\varphi=\varphi_m=114,95^o$ და მივიღებთ $\alpha_m=0,58$.



ნახ.1

საბოლოოდ ჩატარებული კვლევის შედეგად შეიძლება დავხაზოთ (1) განტოლების ფვ-ები (ნახ. 1). ამ ნახაზზე აღნიშნულია (1) განტოლების ორჯერდი ფესვები და მითითებულია α-ს მნიშვნელობა ამ წერტილში. ნახ. 1-ზე აგრეთვე აღნიშნულია (1) განტოლების კომპლექსური ფესვების მინიმუმი. $r_m=0,98$, $\varphi_m=114,95^o$ და $\alpha_m=0,58$.

ახლა გამოვიკვლიოთ

$$S^5+\alpha S-1=0 \qquad (6)$$

განტოლების ფესვების ტრაექტორიები, როცა $\alpha\in]-\infty;+\infty[$ (რობასტული სისტემებისთვის ეს საზღვრებია: $\alpha\in]\underline{\alpha};\overline{\alpha}[$). (6) განტოლების ფესვების ტრაექტორიების განტოლება იქნება:

$$r^5Sin4\varphi = -Sin\varphi. \qquad (7)$$

სადაც თუ ჩავსვამთ $Sin4\varphi = Sin\varphi(8Cos^3\varphi - 4Cos\varphi)$ მნიშვნელობას მივიღებთ:

$$Sin\varphi = 0 \text{ ან } 4r^5(8Cos^3\varphi - 4Cos\varphi) = -1\,. \qquad (8)$$

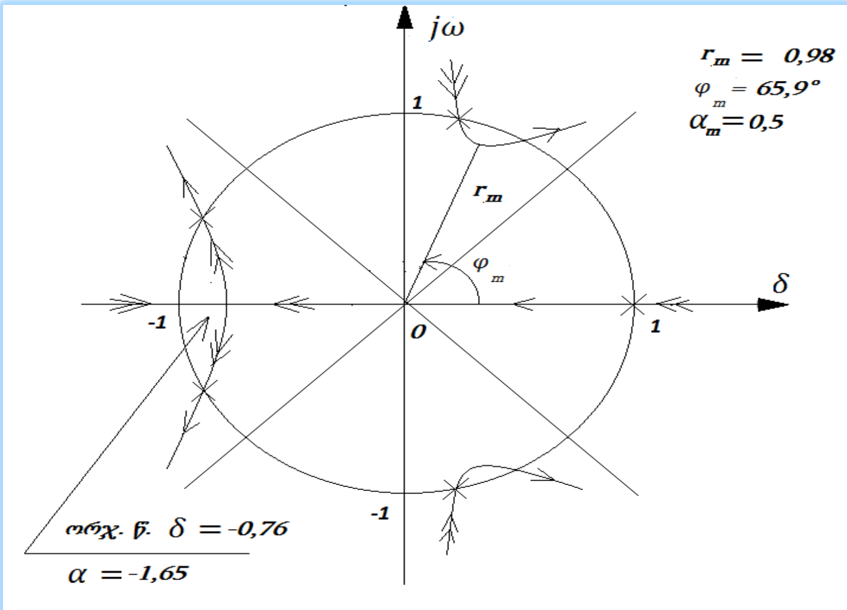
ეს უკანასკნელი ტოლობა (6) განტოლების $S=\delta+j\omega$ $(\omega\neq 0)$ კომპლექსური ფესვების ფვ-ების განტოლებაა ჩაწრილი ტრიგონომეტრიულ ფორმაში. (8)-ში ჩავსვათ $Cos\frac{\delta}{r}=0$ და გამარტივების შემდეგ მივიღებთ:

$$8\delta^3r^2 - 4\delta r^4 + 1 = 0. \qquad (9)$$

გამოვიკვლიოთ (6) განტოლების კომპლექსური ფესვების ექსტრემუმი; ამ შემთხვევაში:

$$X(\delta; r) = 8\delta^3 r^2 - 4\delta r^4 + 1 = 0$$
$$X'_\delta(\delta; r) = 24\delta^2 r^2 - 4r^4 = 0.$$

თუ ამოვხსნით (5) განტოლებათა სისტემას მივიღებთ: $\delta_m = -\frac{1}{\sqrt[5]{96}}$ $r_m = \sqrt{6}\,\delta_m = 0{,}98$ (უფრო ზუსტად $r_m = 0{,}98315361$); $\varphi_m = arcCos\frac{\delta_m}{r_m} = 65{,}91^o$ (უფრო ზუსტად, $65{,}90515745^0$).



ნახ.2

ფჰ-ების საწყისი წერტილები იქნება:

$$S^5 - 1 = 0$$

განტოლების ფესვები: $S_1 = 0$, $S_2 = e^{j72^o}$, $S_3 = e^{j144^o}$, $S_4 = e^{j216^o}$ და $S_5 = e^{j288^o}$. ფჰ-ს ორჯერადი ნამდვილი ფესვი იქნება შემდეგი განტოლების ნამდვილი ფესვი:

$$(S^5 - 1)'S - S'(S^5 - 1) = 0.$$

აქედან, $S = -\sqrt[5]{0{,}25} = -0{,}758$ ასეთი ფესვი (6) განტოლებას ექნება თუ

$$S = -\frac{S^5 - 1}{S} = -\frac{-1{,}25}{-\sqrt[5]{0{,}25}} = -1{,}65.$$

ახლა დავადგინოთ ფესვური ჰოდოგრაფის განლაგების არეები:

$$\begin{cases} \sin 4\varphi > 0 \\ \sin\varphi < 0 \end{cases} \text{ან} \begin{cases} \sin 4\varphi < 0 \\ \sin\varphi > 0 \end{cases}$$

უტოლობათა სისტემის ამონახსნები:

$$\varphi \in]-135^0; -225^0[\cup]-90^0; -45^0[\cup]45^0; 90^0[.$$

ამის შემდეგ შეგვიძლია ავაგოთ ფესვური ჰოდოგრაფი (ნახ. 2), რომლის დახაზვა ჩატარებული კვლევის გარეშედაც იყო შესაძლებელი. ამისათვის (1) განტოლების S შევცვალოთ „- S"-ით; მივიღებთ:

$$-S^5 - \alpha S + 1 = 0$$

თუ ამ განტოლებაბას გავამრავლებთ (-1)-ზე მივიღებთ (6) განტოლებას. გამოდის, რომ (6) განტოლების ფესვური ჰოდოგრაფი სიმეტრიულია (1) განტოლების ფესვური ჰოდოგრაფის

ფესვთა კომპლექსური სიბრტყის წარმოსახვითი ღერძის მიმართ. ამ შემთხვევაში შენარჩუნებულია ფესვების მოძრაობის მიმართულებები. ე. ი. წარმოსახვითი ღერძის მიმართ სიმეტრიული ფესვები მიიღებიან α-ს ერთი და იგივე მნიშვნელობისთვის.

3. დასკვნა

ამრიგად, მიღებული შედეგების მიხედვით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მეხუთე რიგის განტოლების ფესვების და მათი განთავსების არეების კვლევისას, საქმე გვაქვს საკმაოდ რთულ გამოთვლებთან. თუმცა პრინციპი ამ გათვლებისა საკმაოდ გასაგები და მარტივია. გარდა ამისა, სტატიაში აგებული იქნა ფესვური ჰოდოგრაფები, იმ შემთხვევაში, როცა (1) და (6) განტოლებებში ბოლო წევრს ეცვლება ნიშანი „+1" და „-1." აღნიშნული განტოლებების ფესვური ჰოდოგრაფები ერთმანეთის სარკისებრ ანარეკლებს წარმოადგენენ. ფესვური ჰოდოგრაფების აგება კიდევ უფრო რთულდება, თუ მეხუთე რიგის განტოლებაში (1) პირველი წევრის შემდეგ, გვაქვს ერთზე მაღალი ხარისხის წვრები.

ლიტერატურა - References – Литература:

1. Andrzej Bartoszewicz. (2011). Robust Control, Theory and Applications Pub: InTech.
2. Evans G.W. (2004). The story of Walter R. Evans and his textbook Control-System Dynamics. IEEE Control Systems Magazine.
3. Richard C. Dorf, R. H. (2008). Modern Control Systems. USA: Pearson Education Inc.

RESEARCH OF ROBUST SYSTEMS

Kotrikadze Omar, Kotrikadze Ketevan

Georgian Technical University

Summary

The robust system is the most important research subject in modern control theory. The parameters of such systems changes within the wide ranges, which makes the difficulties of research of dynamic of robust systems. The stability of the robust system can be determined using the weak and strong theorem of Kharitonov. To solve the same type of problem in this article we use the root locus method, which simplifies finding the roots of the equations and their location in the complex plane of the roots.

ИССЛЕДОВАНИЕ РОБАСТНЫХ СИСТЕМ

Котрикадзе О., Котрикадзе К.

Грузинский Технический Университет

Резюме

В современной теории управления робастная система являеться одним из важных предметом исследования. В таких системах параметры меняются довольно в больших пределах, что затрудняет исследование динамики робастной системы. Устоичивость робастной системы можно определить с помощью слабой и сильной теоремы Харитонова. Для решения токого-же типа задач в данной статье используеться метод корневого годографа, что облегчает нахождение корней уравнений и их облость размещения в комплексной плоскости корней.