МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТОКА ВЕТРА И АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАГРУЗОК НА ИНЖЕНЕРНЫЕ СООРУЖЕНИЯ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Обгадзе Т.А., Яшвили Л.З., Тушишвили Н.З.,
Грузинский Технический Университет

Резюме

Строится математическая модель потока ветра для изучения задач обтекания высотных инженерных сооружений. Предлагается алгоритм расчёта поля скоростей и давлений на основе методов RO –функции Рвачёва-Обгадзе. В качестве базисных функций разложения используются регулярные источники Обгадзе-Габричидзе. Задачи решаются в рамках обратной вариационной постановки Купрадзе-Бреббия.

Ключевые слова: ветровые нагрузки, регулярные источники, категория булевых алгебр

1. Введение

При проектировании жилых и производственных строительных комплексов требуется рассчитывать ветровую нагрузку, действующую на здания и сооружения. Данной задаче необходимо уделять должное внимание, поскольку от ее решения напрямую зависит безопасность и стоимость данных строительных комплексов. При заниженном значении ветровой нагрузки строительные конструкции обладают недостаточной прочностью, а при завышенном – происходит удорожание строительства. Следует отметить многообразие форм, которые могут иметь различные здания и сооружения. Это и сооружения в форме параллелепипеда или совокупности параллелепипедов, и множество других возможных форм зданий и сооружений.

Традиционно данная задача решается с использованием аэродинамических формул, изложенных в Строительных Нормах и Правилах (СНиП 2.01.07-85), или изготовлением модели исследуемого сооружения и продува ее в аэродинамической трубе. Однако расчет ветровых нагрузок с помощью формул СНиП является неточным. Кроме того, в СНиП даны формулы для ограниченного числа форм зданий и сооружений, и отсутствуют формулы для расчета зданий в застройках. При продуве в аэродинамической трубе имеются ограничения на размеры продуваемого объекта и на скорость потока, а также, использование данного метода требует значительных материальных затрат.

Аналитического решения для определения ветровых нагрузок на сегодняшний день не найдено. Оно найдено лишь для простейших гидродинамических задач.

Существуют программные комплексы для численного решения задач, связанных с определением аэродинамической нагрузки на здания и сооружения. Однако такие программные комплексы отличаются следующими недостатками: 1) не обеспечивают достаточной точности, которая удовлетворила бы строителей; 2) не удобны при практическом использовании и применимы только к достаточно простым по форме объектам; 3) не позволяют рассчитывать аэродинамику группы зданий, произвольно расположенных друг относительно друга; 4) обладают высокой стоимостью.

Поэтому, актуальность задачи создания универсального численного алгоритма, для расчётов нагрузок на высотные инженерные сооружения трудно недооценить.

1. Математическое моделирование потока ветра

Поток ветра, можно рассматривать, как вязкую несжимаемую жидкость. Соответственно, динамические уравнения для потока ветра совпадают с уравнениями Навье – Стокса, а так как, в дозвуковом режиме обтекания, можно пренебречь сжимаемостью воздуха, будем пользоваться уравнениями неразрывности в форме соленоидального векторного поля. Тогда, легко можно построить математическую модель ветрового потока.

Пусть имеем область Ω-заполненную вязкой жидкостью с Липшицевой границей $\partial\Omega$. Уравнение Навье - Стокса запишем в виде :

$$-\frac{1}{\mathrm{Re}}V_{j,ii}+V_iV_{j,i}+p_{,i}=f_j-\dot{V}_j \quad \text{в } \Omega \quad , \tag{1}$$

$$V_{j,j}=0 \quad \text{в} \quad \Omega \ , \tag{2}$$

$$V_{j|t=0}=V_j^o \quad \text{в} \quad \Omega \ , \tag{3}$$

$$V_{j|\partial\Omega}=0 \quad \text{на} \ \partial\Omega \ . \tag{4}$$

где $\mathrm{Re}-$число Рейнольдса.

2. Алгоритм численного решения задачи определения определяющих параметров потока ветра

Используя разностное представление для временной производной из (1) имеем:

$$-\frac{1}{\mathrm{Re}}V_{j,ii}+V_iV_{j,i}+P_{,j}=f_j-\frac{V_j^{\tau+\delta\tau}-V_j^{\tau}}{\delta\tau}\ . \tag{5}$$

Обозначим через S - систему соленоидальных (удовлетворяющих условию несжимаемости (2)) функций, удовлетворяющих также и граничным условиям (4).

Тогда, следуя методу Купрадзе-Бреббия [1-2] умножая уравнение (1) на $\forall W_j \in L_2(\Omega)$ скалярно в смысле $L_2(\Omega)$ и используя формулу Грина. Получаем, слабую формулировку Лионса-Темам [3] :

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}((V^{\tau+\delta\tau},W))+b(V^{\tau+\delta\tau},V^{\tau+\delta\tau},W)=(f-\frac{V^{\tau+\delta\tau}-V^{\tau}}{\delta\tau},W)\ , \tag{6}$$

где $V_j \in D_{NS}(\Omega)$,

$$(f-\frac{V^{\tau+\delta\tau}-V^{\tau}}{\delta\tau},W)=\int_\Omega(f_j-\frac{V_j^{\tau+\delta\tau}-V_j^{\tau}}{\delta\tau})W_jdx \quad , \tag{7}$$

$$\mathrm{b}(\mathrm{V}^{\tau+\delta\tau},V^{\tau+\delta\tau},W)=\int_\Omega V_i^{\tau+\delta\tau}V_{j,i}^{\tau+\delta\tau}W_jdx \quad , \tag{8}$$

$$((V^{\tau+\delta\tau},W))=\int_\Omega V_{i,j}^{\tau+\delta\tau}W_{i,j}dx \quad . \tag{9}$$

Применяя еще раз формулу Грина для (9) получаем обратную вариационную формулировку Купрадзе - Бреббиа [1-2]:

$$((V^{\tau+\delta\tau},W))=\int_\Omega V_i^{\tau+\delta\tau}W_{i,jj}dx \tag{10}$$

Найти $V_j \in D_{NS}(\Omega)$-Удовлетворяющее (6) при (7)-(10) и при $\forall W_j \in L_2(\Omega)$.В качестве W_j-мы будем выбирать фундаментальное решение оператора Лапласа W_j^*. Решение задачи (6) ищем в виде:

$$V_i=\varepsilon_{ijk}\phi_{k,j} \tag{11}$$

$$W_i=W_i^* \tag{12}$$

где ε_{ijk} -- компоненты псевдотензора Леви – Чивита ,

$$\phi_k = RO\alpha_{ki}\Psi_i \tag{13}$$

$$W^*_{i,jj} = \Delta_i \tag{14}$$

где Ψ_i -полная система функций в $L_2(\Omega)$, а RO -функция Рвачева - Обгадзе [4-6] обращающаяся в нуль на $\partial\Omega$, Δ_i -дельта функция Дирака.

Алгоритм построения RO-функции можно представить в виде диаграммы

$$L_c \to L_p \to L_{ro} \tag{15}$$

где L_c-булева алгебра множеств $\{\cup;\cap;\overline{}^c\}$; L_p -булева алгебра предикатов $\{\vee;\wedge;\neg\}$; L_{ro} - булева алгебра функций Рвачева - Обгадзе.

Стрелки в диаграмме (15) указывают на гомоморфизмы.

Подставляя (15) в (13), а далее вместе с (14) в (6), получаем систему квадратных уравнений относительно α_{ij} , которая решается на каждом временном слое, а для внутренних точек имеем соотношения (11)-(13). В работе [4], для построения системы базисных функции, было введено понятие регулярного источника.

Определение: функция вида $\Psi(r_k^2)$-где $r_k = |x - \xi_k|$ называется регулярным источником если $\lim\limits_{r_k \to d} \|\Psi\| = o$, где $\mathrm{d} = \mathrm{diam}\,\Omega$ - диаметр множества Ω.

Такие функции применяются в качестве базисных функций Ψ_k. Хотя, доказать полноту такой системы функций пока не удается , результаты расчетов по формулам

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}((V_{N+1}^{\tau+\delta\tau}, W) - (f - \frac{V_{N+1}^{\tau+\delta\tau} - V^{\tau}}{\delta\tau}, W) = b(V_N^{\tau+\delta\tau}, V_N^{\tau+\delta\tau}, W),$$

показывают их преимущества, по сравнению с другими системами функций. Применяются в основном системы, следующих видов:

$$\Psi_k = \exp(-0.05 r_k^2), \quad \text{(источники Т.А.Обгадзе)}, \tag{16}$$

$$\Psi_k = \frac{r_k^2}{r_k^2 + k^2 a} \quad \text{(источники Г.К. Габричидзе)}, \tag{17}$$

которые перед применением нормализуются.

3. Определение нагрузок на обтекаемые сооружения

Рассчитывая поле скоростей V_i и распределение P давлений, находим поле напряжении $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu(V_{i,j} + V_{j,i})$; что со своей стороны, дает возможность вычислить силовое воздействие производимое потоком на обтекаемое сооружение.

Для расчета полной силы F_i - используется формула

$$F_i = \oint \sigma_{ij} n_i ds, \tag{18}$$

где n_i -внешняя нормаль к поверхности $\partial\Omega$ - обтекаемого сооружения.

Разложив тензор напряжения на шаровую и дэвиаторную части ,

$$\sigma_{ij} = \sigma_s\delta_{ij} + \tau_{ij}, \tag{19}$$

силу сопротивления, можно разложить на две слагаемые: это сопротивление давления и сопротивление трения :

$$F_i = \oint \sigma_s n_i ds + \oint \tau_{ij} n_j ds. \tag{20}$$

Исходя из определяющих соотношений и вводя безразмерные характерные значения параметров под интегралами имеем

$$F_i = \frac{\rho V^2}{2} S_0 \left(\oint \frac{2\sigma_s n_i}{\rho_0 V_0^2} ds + \oint \frac{2\tau_{ij} n_j}{\rho_0 V_0^2} ds \right), \tag{21}$$

где S_0 -площадь Миделевого сечения обтекаемого тела.

При обтекании высотных зданий, сопротивление трения (второе в скобке выражение) значительно меньше сопротивления давления, поэтому им обычно пренебрегают и получают, широко известную формулу силы давления на обтекаемое высотное сооружение в виде

$$F_i = \frac{\rho V^2}{2} S_0 C_p, \tag{22}$$

где коэффициент давления C_p, обычно записывают перед дробью и её значения берут из различных грубых расчётов по полуэмпирическим формулам или, после обдувки их моделей в аэродинамических трубах. В нашей методике, мы рассчитываем коэффициент давления по построенной схеме с использованием регулярных источников.

Литература:

1. Kupradze V.D. Potential Methods in the Theory of elasticity. Daniel Davey & Co.,New York , 1965
2. Brebbia C.A. The bondary element method for engineers. Pentech Press. London, Holstead press, New York. 1978
3. Temam R. Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis . St. in Math. And its Applic., v.2, 1979
4. Обгадзе Т. А. Элементы математического моделирования. ГПИ. Тбилиси , 1989
5. Рвачёв В.А., Проценко В.С., Манько Г.П., Гончарюк И.В.,Шевченко А.Н., Стоян Ю.Г. Теория R – функции и актуальные проблемы современной прикладной математики. Наукова думка. Киев. 1986
6. Обгадзе Т.А., Прокошев В.Г. Вычислительная физика. Владимирский Гос.Университет. Владимир. 1999.

WIND GUST MATHEMATICAL MODELING OF ENGINEERING STRUCTURES AND COMPLEX GEOMETRY ALGORITHM FOR DETERMINATION OF THE LOADS

Obgadze Tamazi, Iashvili Lasha, Tushishvili Nato

Georgian Technical University

Summary

It is very useful mathematical model is constructed Wind Gust a high engineering structures garsdenis objectives of the study. Speed and pressure fields have been developed for determining the allocation algorithm Rvachov - Obgadze and using RO-function method. Basic functions are used to open Obgadze - Gabrichidze regular source method. Tasks opens Kupradze-Brebias setting the inverse variational framework.

ქარის ნაკადის მათემატიკური მოდელირება და რთული გეომეტრიის საინჟინრო ნაგებობებზე წარმოებული დატვირთვების განსაზღვრის ალგორითმი

იაშვილი ლაშა, თუშიშვილი ნატო, ობგაძე თამაზი

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

ნაშრომში აგებულია ქარის ნაკადის მატემატიკური მოდელი, მაღალი საინჟინრო ნაგებობების გარსდენის ამოცანების შესასწავლად. შემუშავებულია სიჩქარეთა ველისა და წნევების განაწილების განსაზღვრის ალგორითმი რვაჩოვ-ობგაძის RO- ფუნქციის მეთოდზე დაყრდნობით. გაშლის საბაზისო ფუქციებად გამოიყენება ობგაძე-გაბრიჩიძის რეგულარულ წყაროთა მეთოდი. ამოცანები იხსნება კუპრაძე-ბრებიას შებრუნებული ვარიაციული დასმის ფარგლებში.