# ქაოსური პროცესების მართვა სინერგეტიკის მეთოდის გამოყენებით

გელა ჭიკაძე, ალექსანდრე კეკენაძე, ციური ფხაკაძე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

**რეზიუმე**

გამოკვლეულია რთული ქაოსური მოძრაობა, რომელიც წარმოიქმნება ფაზურ სივრცეში მესამე რიგის არაწრფივ დეტერმინირებულ სისტემებში. ასეთი ტიპის სისტემებში წარმოიშვება ქაოსის მართვის პრობლემა, რომელსაც ექცევა სულ უფრო მეტი ყურადღება მეცნიერულ ლიტერატურაში. განხილულია ბიოლოგიური პოპულაციის ოპტიმალურ დონეზე შენარჩუნების ამოცანა, საკვების მოპოვების კონკურენციის გათვალისწინებით. უკუკავშირის შემოტანით მართვის კანონმა საშუალება მოგვცა გადავსულიყავით ბიფურკაციიდან (რომელიც მომავალში გამოიწვევდა კატასტროფას) ლოჯისტიკურ განტოლებაზე, რომელსაც გააჩნია თვითორგანიზების თვისება.

**საკვანძო სიტყვები:** არაწრფივი სისტემები. ქაოსი. ბიფურკაციის წერილი. მათემატიკური მოდელები. სინერგეტიკის მეთოდი. პოტენციალური ფუნქცია. მართვა. უკუკავშირი.

## 1. შესავალი

არც ისე დიდი ხნის წინ მეცნიერები ფიქრობდნენ რომ რთული ქაოსური მოძრაობა შეიძლება წარმოიქმნას მხოლოდ ზოგიერთ მრავალგანზომილებიან სისტემებში. თუმცა, აღმოჩნდა, რომ არაწრფივ დეტერმინირებულ მესამე რიგის სისტემებში ფაზურ სივრცეში შეიძლება წარმოიქმნას რთული ქაოსური მოძრაობები. არაწრფივ დინამიკურ სისტემებში გავრცელებული პროცესები მიეკუთვნება ქაოსურს. ასეთი მოვლენების მათემატიკური მოდელები შეიცავენ ხარისხობრივ და კვადრატულ არაწრფივობას, რომლებიც გავრცელებულია სხვადასხვა ბუნების ობიექტებში. მათში წარმოიშვება ქაოსის მართვის პრობლემა, რომელსაც ექცევა სულ უფრო მეტი ყურადღება მეცნიერულ ლიტერატურაში.

## 2. ძირითადი ნაწილი

მაგალითისათვის განვიხილოთ შემდეგი დიფერენციალური განტოლებებათა სისტემა:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sigma y - \sigma x \\ \dot{y}(t) &= -y + rx - xz \\ \dot{z}(t) &= -bz + xy \end{aligned} \tag{1}$$

სადაც $\beta, r, b$ – მუდმივი პარამეტრებია. (1) განტოლება წარმოადგენს ლორენცის ცნობილ მოდელს, რომელიც აღწერს მრავალფეროვან ბუნებრივ პროცესებს. (1) სისტემის ფაზურ სივრცის რომელიმე სიმრავლეზე გააჩნია ფრაქტალური განზომილების „უცნაური“ ატრაქტორი. ამ სიმრავლეზე სისტემა ხასიათდება საწყისი პირობებისადმი გაზრდილი მგრძნობიარობით, რომლის გამოც სისტემაში წარმოიქმნება მოძრაობის ქაოსური რეჟიმები.

გამოვიკვლიოთ ლორენცის მათემატიკური მოდელის თვისებები [1]. თავდაპირველად განვიხილოთ მისი სტაციონალური მდგომარეობა, როდესაც $\dot{x}_s(t) = \dot{y}_s(t) = \dot{z}_s(t) = 0$ მაშინ (1) სისტემიდან გვაქვს

$$x_s = y_s\,,\;\; y_s - rs_s + x_s z_s = 0\,, \qquad x_s y_s - bz_s = 0 \tag{2}$$

რომელიც შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$x_s^3 + b(1-r)x_s = 0 \tag{3}$$

ნათელია, რომ (3)-ში შესაძლებელია შემდეგი სტაციონალური მდგომარეობები

$$\text{ა)}\quad x_s = 0, y_s = 0, z_s = 0 \tag{4}$$

$$\text{ბ)}\quad x_s = y_s = \pm\sqrt{b(r-1)}, z_s = r-1 \tag{5}$$

(3) და (4) განტოლებათა სტაციონალური მდგომარეობების მდგრადობის შესასწავლად განვიხილოთ ლორენცის მოდელის წრფივი მიახლოება.

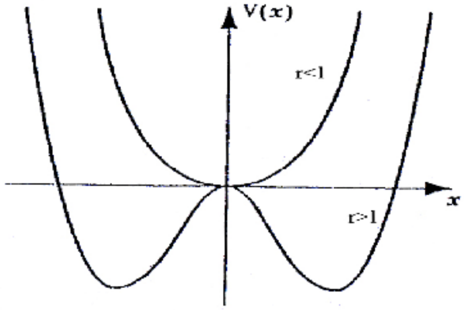
ამ შემთხვევაში კვადრატული წევრები შეიძლება უგულვებელვყოთ, მაშინ (4) მდგომარეობისათვის მივიღებთ განტოლებების სისტემას

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sigma(y-x)\\ \dot{y}(t) &= rs-y\\ \dot{z}(t) &= -bz\end{aligned} \qquad (6)$$

(6) განტოლებათა სისტემიდან გამომდინარეობს რომ მესამე განტოლება არ არის დაკავშირებული პირველ ორთან, ხოლო კომპონენტი $z(t)=z_0e^{-bt}$ მიილევა როდესაც $z\to 0$ რადგანაც პარამეტრი $b>0$, x(t) და y(t) კომპონენტების განსაზღვრისათვის საჭიროა ამოვხსნათ შემდეგი სახის მახასიათებელი განტოლება

$$\lambda^2+(\sigma+1)\lambda+\sigma(1-r)=0\,. \qquad (7)$$

$r_c$=1 მნიშვნელობა წარმოადგენს წრფივი მდგომარეობის საზღვარს და ატარებს ბიფურკაციის წერტილის სახელწოდებას [1]. ასე, რომ განტოლება (4) წრფივად მდგრადია როცა 0≤r≤1 და არამდგრადია როცა r>1-ზე (ნახ.1). სინერგეტიკაში r პარამეტრს უწოდებენ მმართველ პარამეტრს.




**ნახ. 1 პოტენციალური ფაზური პორტრეტი**

ქაოსურობის წარმოშობის მიზეზების თვალნათელი წარმოდგენისათვის გარდავქმნათ (1) ლორენცის განტოლება. ჩავსვათ $y=x+\frac{1}{\sigma}\dot{x}(t)$ ცვლადი პირველი განტოლებიდან და ცვლადი $z=\frac{1}{b}(xy-\dot{z})$ მეორე განტოლებაში, მაშინ მივიღებთ [3]:

$$\frac{1}{\sigma}\ddot{x}(t)=F=-\frac{1+\sigma-x^2}{\sigma}\dot{x}(t)+(\dot{r}-1)x-\frac{1}{b}x^3+\frac{x}{b}\dot{z}(t) \qquad (8)$$

შემოვიტანოთ პოტენციალი

$$V=-\frac{r-1}{2}x^2+\frac{1}{4b}x^4\,, \qquad (9)$$

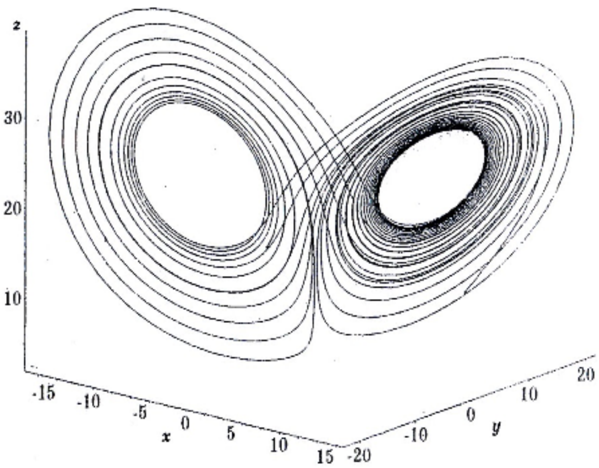
რომელსაც გააჩნია სხვადასხვა სახე როცა r>1-ზე და r<1-ის შემთხვევაში (ნახ.2).

პოტენციალი (14) იზრდება $x_s$=0 სტაციონალური მდგომარეობის ორივე მხარეს. მმართველი პარამეტრის r-ის ერთიანზე გადასვლისას r>1 წარმოიშობა ბიფურკაცია და წარმოიშობა ერთი არამდგრადი ($x_s$=0) და ორი მდგრადი მდგომარეობა

$$x_s=\pm\sqrt{b(r-1)} \qquad (10)$$

პოტენციალი (14)-ის გამოყენებით, განტოლება ეხლა შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$\frac{1}{\sigma}\ddot{x}(t)=-\frac{1+\sigma-x^2}{\sigma}\dot{x}(t)-\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{x}{b}\dot{z}(t)\,, \qquad (11)$$




**ნახ.2. ლორენცის მოდელის ფაზური ტრაექტორია**

რომელიც მოსახერხებელია ანალიზისათვის. მიღებული (11) განტოლება ბოლო წევრის გარეშე წარმოადგენს მატერიალური წერტილის x(t) ხახუნის ძალით $V(x)$პოტენციალურ ორმოში მოძრაობის განტოლებას, რომელსაც გააჩნია ხახუნის კოეფიციენტი, რომლის ნიშანიც იცვლება დადებითიდან უარყოფითისაკენ, როცა $x^2 \geq 1+\sigma$ .

(11) განტოლების ბოლო წევრს გააჩნია ხისტი ძალის ფორმა, რომლის დრეკადობის კოეფიციენტი $-\frac{1}{b}\dot{z}(t)$ დამოკიდებულია დროზე. როდესაც წარმოებული $\dot{z}(t)$ მცირე სიდიდის არ არის, მაშინ ეს წევრი წარმოადგენს გარკვეულ მაიძულებელ ძალას, რომელიც დამოკიდებულია y და z ცვლადებზე. თუ კავშირს z და x –ს შორის უგულვებელვყოფთ, მაშინ ბოლო წევრი შეიძლება გამოიყურებოდეს როგორც გარკვეული შემთხვევითი ძალა [2].

სხვანაირად რომ ვთქვათ, მატერიალური წერტილი, რომელიც აღიწერება (11) განტოლებით შემთხვევით ძალის მოქმედებით იმოძრავებს ორკუზიან პოტენციურ ორმოში, ამასთან ხახუნის კოეფიციენტმა შეიძლება მიიღოს სხვადასხვა ნიშანი.

წარმოდგენილი მოსაზრებები მიუთითებენ ლორენცის მოდელის ყოფაქცევის, როგორც ატრაქტორის, რთულ ქაოსურ ხასიათზე. 1-ელ და მე-2 ნახაზებზე მოცემულია მოძრაობის პროცესები r პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის, რაც ადასტურებს (1) ლორენცის მოდელის ტრაექტორიის რთულ ქაოსურ ხასიათს, რომლებიც აღიწერება მესამე რიგის დეტერმინირებული დიფერენციალური განტოლებებით. დადგენილი ფაქტი ადასტურებს თანამედროვე არაწრფივი დინამიკის ურთიერთგანსაცვიფრებელ მოვლენას.

ასე რომ, მაღალი რიგის $n \geq 3$ დეტერმინირებულ ობიექტებზე ბიფურკაციული მექანიზმების მოქმედების შედეგად შესაძლებელია წარმოიშვას რთული ქაოსური მოვლენები. ასეთი მოვლენების მათემატიკური მოდელები შეიცავს ხარისხობრივ და კვადრატულ არაწრფივობას, რომლებიც გავრცელებულია სხვადასხვა ბუნების ობიექტებში. ამასთან წარმოიშვება ქაოსის მართვის პრობლემა, რომელსაც ექცევა სულ უფრო მეტი ყურადღება მეცნიერულ ლიტერატურაში.

განვიხილოთ რომელიმე ბიოლოგიური პოპულაციის ოპტიმალურ დონეზე შენარჩუნების ამოცანა, რომელიც, საკვების მოპოვების კონკურენციის გათვალისწინებით, აღიწერება შემდეგი სახის განტოლებით [2].

$$\dot{x}(t) = \alpha x - \beta x^2 - \mu, \tag{12}$$

სადაც x პოპულაციის კონკრეტულ სახეობაში წარმომადგენელთა რაოდენობაა; $\alpha$,$\beta$ - დადებითი რიცხვები; $\mu$ - მმართველი პარამეტრი. (12) განტოლებით შეიძლება აღვწეროთ, მაგალითად, თევზჭერის მოდელი. ამ შემთხვევისთვის $\mu$ წარმოადგენს თევზჭერის კვოტას (გეგმას). თავდაპირველად დავუშვათ, რომ $\mu = \mu_0$ წინასწარ მოცემული სიდიდეა. მოვძებნოთ თევზჭერის შესაძლო მაქსიმალური კვოტა. ამისათვის (12) განტოლების მარჯვენა მხარე გავაწარმოოთ x–ით და შემდეგ გავუტოლოთ ნულს, მივიღებთ:

$$x_{\max} = \frac{\alpha}{2\beta} \quad \text{და} \quad \mu_0 = \frac{\alpha^2}{4\beta} \tag{13}$$

გამოვიკვლიოთ (12) განტოლება თვისობრივად. ამისათვის თავდაპირველად შევისწავლოთ მისი სტაციონალური მდგომარეობა:

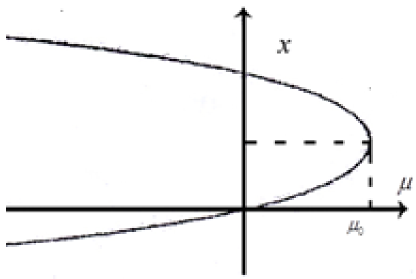
$$\alpha x_s - \beta x_s^2 - \mu = 0\,. \tag{14}$$

(14)-დან განვსაზღვროთ დამოკიდებულება $x_s(\mu)$:

$$x_s = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\mu}}{2\beta}\,, \tag{15}$$

რომლის გრაფიკული სახეც, $\alpha=\beta=1$ პირობის შემთხვევაში, წარმოდგენილია მე-3 ნახაზზე.

$x_s(\mu)$ დამოკიდებულების გრაფიკს გააჩნია ორი ტოტი, რომლებიც ერთმანეთს ერწყმება $\mu$ და $x_s$ იმ მნიშვნელობისათვის, რომლებიც განსაზღვრულია (13) პირობით. ამ მოვლენას უწოდებენ ბიფურკაციულს, ხოლო წერტილს, რომლის კოორდინატებიც გამოითვლება (13) გამოსახულებით, უწოდებენ სისტემის ბიფურკაციულ წერტილს.




ნახ.3. სტაციონალური მდგომარეობის გრაფიკი

გამოვიკვლიოთ სისტემა ამ წერტილის მიდამოში ამისათვის შემოვიღოთ გადახრა $y = x - q_0$ და ჩავსვათ პოტენციური ფუნქციის გამოსახულებაში, რომელსაც ჩვენი შემთხვევისათვის აქვს სახე:

$$V = \frac{\mu - 1}{2} x^2 + \frac{1}{4\beta} x^4$$

მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ მოძრაობის განტოლებას

$$\dot{y}(t) = \alpha q_0 - \beta q_0^2 + (\alpha - 2\beta q_0) y - \beta y^2 - \mu \qquad (16)$$

სადაც $q_0$ წერტილის კოორდინატაა.

უკანასკნელი განტოლების თვისება დამოკიდებულია $\mu$ მმართველი პარამეტრის მნიშვნელობაზე. შევირჩიოთ ოპტიმალური მნიშვნელობები $\mu=\mu_0$ და $q_0=x_{max}$, რომლებიც უზრუნველყოფენ თევზჭერის მაქსიმალურ კვოტას. შედეგად მივიღებთ განტოლებას

$$\dot{y}(t) = -\beta y^2 \qquad (17)$$

რომლის ამონახსნსაც აქვს სახე:

$$y(t) = \frac{y_0}{\beta q_0 t + 1} \qquad (18)$$

(16) გამოსახულებიდან ჩანს, რომ (16) განტოლების ამონახსნი მდგრადია (როცა $y=0$) საწყისი პირობებისათვის $y_0=x_0-x_{max}>0$ და არამდგრადია (როცა $y\to 0$) პირობისათვის $y_0<0$. აქედან გამომდინარეობს მნიშვნელოვანი დასკვნა: (21) საწყისი განტოლების ამონახსნი, რომელიც აღწერს პოპულაციის მდგომარეობას, მდგრადია, როცა $x_{\max} = \frac{\alpha}{2\beta}$ მხოლოდ იმ საწყის პირობებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებს პირობას $x_0 < x_{max}$. ამრიგად, თევზჭერის კვოტის ოპტიმიზაციას (მაქსიმიზაციის) $u = \mu_0 = const$ ხისტი მართვის შემთხვევაში მივყავართ დამყარებულ მდგომარეობის არამდგრადობამდე, რაც მცირე ფლუქტუაციების არსებობის შემთხვევაში იწვევს პოპულაციის განადგურებას, კატასტროფას. ეს კი შედეგია ბიფურკაციის წერტილით გამოწვეული მოვლენისა, რომელიც შეესაბამება თევზჭერის მაქსიმალურ ხისტ გეგმას. აღწერილი მოვლენა შეისწავლება თანამედროვე არაწრფივი სისტემის დინამიკასა და სისტემატიკაში.

ახლა ვაჩვენოთ, თუ როგორ შეიძლება მართვის თეორიის გამოყენებით თავიდან ავიცილოთ პოპულაციის კატასტროფული განადგურება, რომელიც გამოწვეულია თევზჭერის მაქსიმალურად ხისტი გეგმით. ამისათვის გამოვიყენოთ (16) განტოლება და $\mu$ მმართველი პარამეტრი განვიხილოთ როგორც y-ის ფუნქცია. ე.ი. ხისტი გეგმა $\mu=\mu_0$ შევცვალოთ უკუკავშირით:

$$\mu(t) = -\alpha q_0 + \beta q_0^2 - \gamma y, \qquad (19)$$

უკანასკნელი გამოსახულების გათვალისწინებით, (16) გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$\dot{y}(t) = (\alpha - 2q_0\beta - \gamma) y - \beta y^2 \quad .$$

თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას $\eta = \alpha - 2q_0\beta - \gamma$, მაშინ (16) ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\dot{y}(t) = \eta y - \beta y^2 \quad , \qquad (20)$$

რომლის ამონახსნს აქვს სახე:

$$y(t) = \frac{\eta y_0}{\eta e^{-\eta t} - \beta y_0 \left(e^{-\eta t} - 1\right)} \quad . \qquad (21)$$

თუ შევირჩევთ $\eta<0$, ე.ი. $\gamma>\alpha-2q_0\beta$, მაშინ (21) გამოსახულებიდან მივიღებთ, რომ როცა $t\to\infty$, გადახრა $y\to 0$. ეს კი ნიშნავს, რომ (17) გამოსახულება ასიმპტოტურად მდგრადია $y=0$-ის

მიმართ. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\mu(y)$ მართვა უზრუნველყოფს პოპულაციის მოცემულ $q_0$ დონეზე შენარჩუნებას. ამასთან, ეს მნიშვნელობა შეიძლება იყოს ოპტიმალურიც $q_0 = x_{\max} = \dfrac{\alpha}{2\beta}$.

$\mu(y)$-ის გათვალისწინებით (12) განტოლება $x(t)$ საწყისი ცვლადის მიმართ შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\dot{x}(t) = (\alpha - y)x - \beta x^2 + \frac{\gamma a}{2\beta} - \frac{a^2}{2\beta} \quad .$$

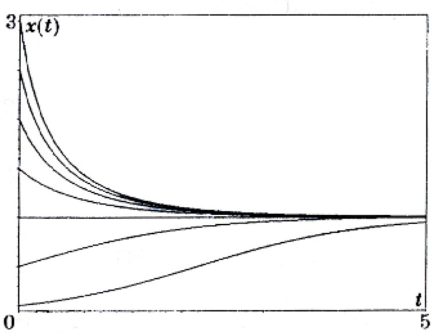
თუ დავუშვებთ, რომ $\gamma = \beta q_0 = \dfrac{\alpha}{2}$, მაშინ განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\dot{x}(t) = \left(\frac{\alpha}{2} - \beta x\right)x,$$

რომელიც აღწერს კრიტიკულ ბიფურკაციას და წარმოადგენს ლოჯისტიკურ განტოლებას. ამ განტოლების ამონახსნს აქვს სახე:

$$x(t) = \frac{\alpha x_0}{\alpha e^{-\frac{\alpha}{2}t} - 2\beta x_0\left(\alpha e^{-\frac{\alpha}{2}t} - 1\right)} \quad .$$

რომელიც ასიმპტოტურად მდგრადია $x_s = \dfrac{\alpha}{2\beta}$ ატრაქტორის მიმართ და შეესაბამება თევზჭერის ოპტიმალურ კვოტას. ნებისმიერი საწყისი პირობების შემთხვევაში სინთეზირებული სისტემა ყოველთვის გამოდის ამ მდგომარეობაზე, რაც მტკიცდება მე-4 ნახაზზე წარმოდგენილი მრუდებით, რომლებიც მიღებულია სისტემის მოდელირების შედეგად.




**ნახ.4. სინთეზირებული სისტემის გარდამავალი პროცესი**

გამომდინარე ზემოაღნიშნულიდან, $(\gamma x)$ უკუკავშირის შემოტანით მართვის კანონმა საშუალება მოგვცა გადავსულიყავით ბიფურკაციიდან (რომელიც მომავალში გამოიწვევდა კატას-ტროფას) ლოჯისტიკურ განტოლებაზე, რომელსაც გააჩნია თვითორგანიზების თვისება. ამასთან, შესაძლებელია განვახორციელოთ თევზჭერის მოცემული კვოტა, რომელიც შეიძლება იყოს მაქსიმალურიც. უკუკავშირში $\gamma$ კოეფიციენტის მცირე გადახრა გამოიწვევს წარმადობის მცირე დაწევას და არა კატასტროფას, რასაც ადგილი ჰქონდა ხისტი გეგმის $u=\mu_0=const$ არჩევის შემ-თხვევაში.

## 3. დასკვნა

მიუხედავად იმისა, რომ განხილული ფაქტი გამოვლენილ იქნა თევზჭერის მარტივ მაგა-ლითზე, იგი შეიძლება გამოვიყენოთ მართვის ყველა იმ არაწრფივ სისტემაშიც, სადაც შესაძლე-ბელია წარმოიქმნას ბიფურკაციული და ქაოსური მოვლენები. ცხადია, $(\mu)$ მმართველი პარამეტრის შერჩევის გზით შესაძლებელია სისტემა მებისმიერი საწყისი პირობებიდან გავიყვანოთ მისი მდგომარეობათა სივრცის სასურველ ატრაქტორზე და უზრუნველვყოთ მიმართული თვითორგანი-ზება-მიზიდვა ინვარიანტული მრავალსახეობისაკენ (ატრაქტორისაკენ).

## ლიტერატურა:

1. გუგუშვილი ა. მართვის სისტემები, მე-3 ნაწ. სინერგეტიკა. სტუ. თბ., 2004
2. სესაძე ვ., სესაძე ნ. სინერგეტიკა, არაწრფივი სისტემების სინთეზი. სტუ. თბ., 2009
3. Колесников А.А. Синергетическая теория управления. М.: Энергоатомиздат, 1994
4. Колесников А.А. Синергетический подход в нелинейной теории управления. Сб.избр. работ по грантам в области информатики, радиоэлектроники и систем управления. СПб., 1994.

## CONTROL OF CHAOTIC PROCESSES OF SYNERGETRICS METHODS

Chikadze Gela, Kekenadze Alexander, Fchakadze Ciuri

Georgian Technical University

**Summary**

In the article there is discussed a difficult chaotic movement which arises in phase space in the nonlinear determined systems of the third degree. The problem of preservation biological populations at an optimum level taking into account competition in obtaining food is considered. It is shown that using the feedbacks allows a system to change from state to logistic, which is characterized with self-organization.

## УПРАВЛЕНИЕ ХАОТИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ МЕТОДАМИ СИНЕРГЕТИКИ

Чикадзе Г., Кекенадзе А., Пхакадзе Ц.

Грузинский Технический Университет

**Резюме**

Исследовано сложное хаотическое движение, которое возникает в фазовом пространстве в нелинейных детерминированных системах третьей степени. Рассмотрена задача сохранения биологических популяции на оптимальном уровне с учетом добычи пищи. Показано,что, с использованием обратной связи система переходит  из состояния на лоджистическое, которое обладает признаком самоорганизации