МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБОСНОВАНИЯ ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТИ РЕЗЕРВА В СЛОЖНОЙ СИСТЕМЕ

Гулуа Давид, Амилахвари Георгий, Амилахвари Нугзар

Грузинский Технический Университет

Резюме

Исследован вопрос оптимизации резервированной системы по экономическому критерию. Предложена мнемоническая схема для анализа подобных стохастических систем.

Ключевые слова: математическая модель. Сложная система. Телекоммуникационные сети. Резервирование. Оптимизация. Замещение. Экономическая эффективность.

1. Введение

В рекомендациях по проектированию телекоммуникационных систем особое внимание уделяется моделям и методам надежности планирования, проектирования, функционирования и технического обслуживания телекоммуникационных сетей и вопросам использования этих методов к разнообразным услугам в международной сети. Отметим, что из двух возможных подходов к надежностному планированию - интуитивному и аналитическому, рекомендации (см. например рекомендации E.862 [1]) вполне убедительно отдают предпочтение - аналитическому. Среди направлений надежностного планирования выделяется задача определения оптимального количества резервных элементов и средств технического обслуживания для тех случаев, когда элементы системы подвергаются отказам, теряют работоспособность и требуют замены. Следует отметить, что модели анализа, разработанные нами, пригодны для исследования многих систем и, тем самым являются, в определенном смысле, универсальными. Эта универсальность основывается на изоморфизме процессов, протекающих в системах различной природы, абстрактным процессам в их математических моделях.

Рассмотрим резервированную систему (Рис.1). На этой схеме: B_i–основные элементы (i = 1,...,m), R_j – резервные элементы(j = 1,...,n), Ren – органы восстановления, α - интенсивность отказа основного элемента, β - интенсивность отказа резервного элемента, λ - интенсивность замещения отказавшего основного элемента резервным, μ -интенсивность восстановления отказавшего элемента. Количество органов замещения и восстановления ограничены и равны соответственно k и r.

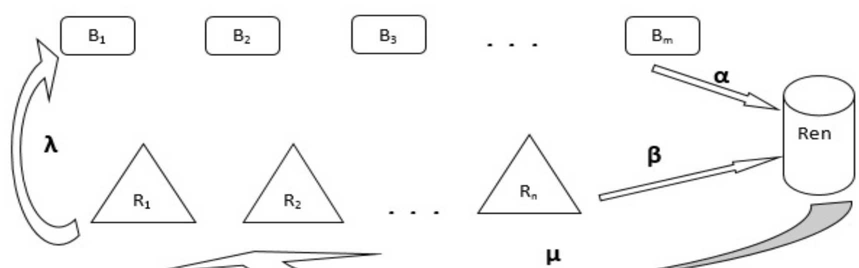


Рис.1: B_i –основные элементы; R_i -резервные элементы; Ren -орган восстановления

Скажем, что система находится в состоянии $S_{i,j}$(i=$\overline{0,m}$; j=$\overline{0,m+n}$), если количество недостающих основных элементов равно i, а количество неработоспособных элементов равноj.Процесс функционирования системы опишем функциями P(i,j,t) - вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии $S_{i,j}$.

В работах [2-4] построена и исследована модель для случая, когда как замещением, так и ремонтом занят один орган. В этом случае возникает вопрос приоритета операции. В указанных статьях рассмотрена система с приоритетом замещения. Приоритетная система, когда обслуживающий орган больше единицы, исследован в [5,6].

В предлагаемой статье, исследована более общая система. Очевидно, что здесь вопрос приоритета теряет смысл (есть органы замещения (k) и органы ремонта (r)). Среди задач проектирования резервированных систем, является задача их экономической эффективности. В свою очередь экономическая эффективность функционирования резервированных систем связана с определением оптимального количества резервных элементов.

2. Критерий экономической эффективности системы

Рассмотрим следующий критерийэкономической эффективности рассматриваемой системы

$$F(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{7} c_i M \overline{X}_i , \qquad (1)$$

где компоненты вектора $\overline{X}$ ($m,n,k,r,\alpha,\beta,\lambda,\mu,c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,c_7$) имеют следующий смысл: $m,n,k,r,\alpha,\beta,\lambda,\mu$ - вышеопределённые параметры системы; c_1-доход от работающего основного элемента, c_2-доход от работающего резервного элемента, c_3-доход от неработоспособного элемента, c_4- доход от работающего органа замещения, c_5-доход от неработающего органа замещения, c_6-доход от работающего органа восстановления, c_7-доход от неработающего органа восстановления; $\overline{X}_1$ –случайное число, кол-во работающего основного элемента, $\overline{X}_2$-случайное число, кол-во работающего резервного элемента, $\overline{X}_3$-случайное число, кол-во неработоспособного элемента, $\overline{X}_4$- случайное число, кол-во работающего органа замещения, $\overline{X}_5$-случайное число, кол-во неработающего органа замещения, $\overline{X}_6$-случайное число, кол-во работающего органа восстановления, $\overline{X}_7$-случайное число, кол-во неработающего органа восстановления. $M\overline{X}_i$, (i=1,...,7) –соответственно средние значения случайных чисел $\overline{X}_i$.

Естественно предположить, что$c_1>0$, $c_3 \le 0$, $c_4 <0$, $c_5 \le 0$, $c_6 <0$, $c_7 \le 0$, $c_1>c_2$, $|c_4|>|c_5|$, $|c_6|>|c_7|$. Средние значения количества операции $M\overline{X}_i$, определяем по формулам:

$$M\overline{X}_1 = \sum_{k=0}^{m}(m-k)\sum_{j=k}^{n+k} p_{k,j} ; \; M\overline{X}_2 = \sum_{k=0}^{n} k \sum_{i=0}^{m} p_{i,n+i-k} + \sum_{l=1}^{m}(n+l)\sum_{i=l}^{m} p_{i,i-l} ;$$

$$M\overline{X}_3 = \sum_{k=0}^{n} k \sum_{i=0}^{m} p_{i,k} + \sum_{l=1}^{m}(n+l)\sum_{i=l}^{m} p_{i,n+l} ; \; M\overline{X}_4 = \sum_{l=0}^{k-1} l(\sum_{j=0}^{n} p_{l,j} + \sum_{i=l+1}^{m} p_{i,n+i-l}) + k\sum_{i=0}^{m-k}\sum_{j=0}^{n+i} p_{k+i,j} ;$$

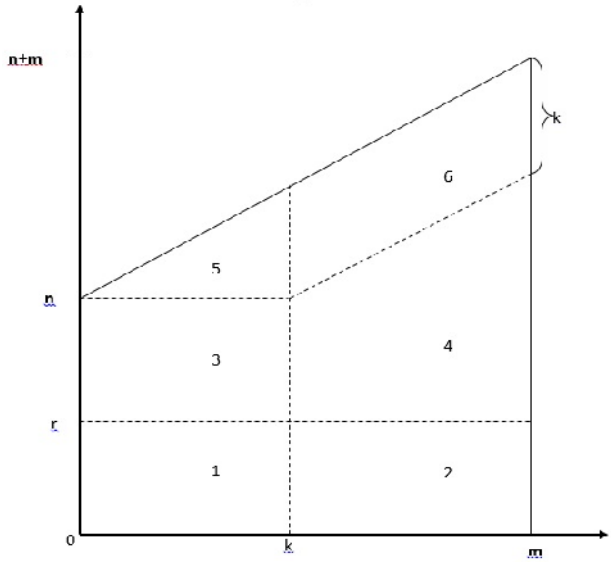
$$M\overline{X}_5 = k - M\overline{X}_4; \; M\overline{X}_6 = \sum_{k=0}^{r-1} k \sum_{i=0}^{m} p_{i,k} + r(\sum_{j=r}^{n}\sum_{i=0}^{m} p_{i,j} + \sum_{j=r+1}^{m+n}\sum_{i=j-r}^{m} p_{i,j}) .$$

Задачу оптимизации количества резервных элементов можно выразить следующим образом: максимизировать целевую функцию (1) по параметруn (количество резервных элементов).

3. Определение финальных вероятностей состояния системы

Для определения средних $M\overline{X}_i$, необходимо определение финальных вероятностей $P_{i,j}= \lim_{t\to\infty} P(i,j,t)$. Доказано, что для описанной системы P(i,j) существуют.

Для определения вероятностей состояния резервированной системы $P_{i,j}$, в работах [3] и [6] предложена мнемоническая схема на основе т.н. карты состояния системы (КСС).



Анализируя особенности функционирования системы, на КСС можно выделить шесть подобластей (рис.2) на которых расположены узлы, для которых мы рассмотрим «шаблоны» событий переводящих систему в состояние и выводящих систему из состояния соответствующему данному узлу и по мнемоническому правилу, запишем систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых предельных вероятностей $P_{i,j}$.

Рис.2. Области Карты Состояния Системы

На рис.3 изображен узел (i,j) области 1, соответствующий состоянию системы$S_{i,j}$ и потоки событий. Сплошной линией изображены потоки событий выводящих систему из состояния $S_{i,j}$, а пунктиром – события переводящие систему в состояние $S_{i,j}$.На примере состояния системы $S_{i,j}$(узла (i,j) КСС, рис.3) поясним правило построения карты состояния системы.

В состоянии $S_{i,j}$система может перейти (на рис.3 пунктир): 1) из состояния $S_{i-1,j-1}$,в результате выхода из строя основного элемента; 2) из состояния $S_{i,j-1}$, в результате выхода из строя резервного элемента; 3) из состояния $S_{i+1,j}$, в результате замещения отказавшего основного элемента резервным; 4) из состояния $S_{i,j+1}$, в результате ремонта вышедшего из строя элемента.

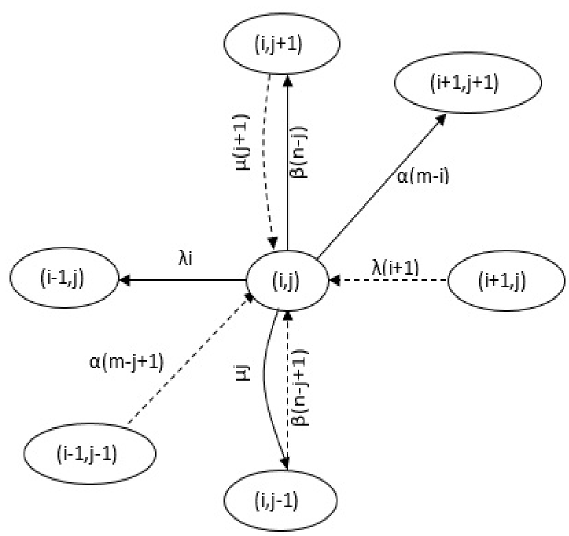


Рис.3. Шаблон событий для области 1 на КСС

Из состояния $S_{i,j}$система может перейти (на рис.3 сплошная линия): 1) в состояние $S_{i,j-1}$, в результате ремонта вышедшего из строя элемента; 2) в состояние $S_{i+1,j+1}$, в результате отказа основного элемента; 3) в состояние $S_{i,j+1}$, в результате отказа резервного элемента; 4) в состояние $S_{i-1,j}$, в результате замещения отказавшего основного элемента резервным.

Подобные рассуждения позволяют построить КСС. Для рассматриваемой системы, область допустимых состоянии указана на рис.2.

Из рис.3, по мнемоническому правилу (сумма входных, равен сумме выходных потоков), запишем уравнения для состояний системы соответствующие подобласти 1.

$$(\alpha(m-i)+\beta(n-j)+\lambda i+\mu j)P(i,j) = \alpha(m-i+1)P(i-1,j-1)+\beta(n-j+1)P(i,j-1)+\lambda(i+1)P(i+1,j)+\mu(j+1)P(i,j+1),$$

$i=\overline{0,k-1}$, $j=\overline{0,r-1}$. Аналогично получаем уравнения для остальных областей КСС.

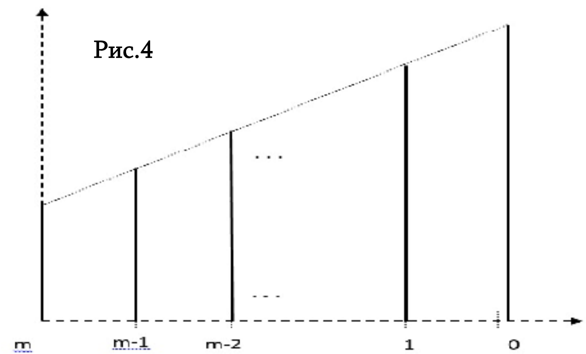
Для решения полученной системы линейных алгебраических уравнений, одно из уравнений заменим на нормирующее условие: $\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n+i} p(i,j)=1$

Трудности связанные с решением полученной системы линейных алгебраических уравнений носят чисто технический характер.

4. Линии операции системы

Важно заметить, что определение средних значении количества операции М$\overline{X}_i$ значительно упрощается, если мы обратимся к КСС. Анализируя логику расположения узлов на «карте», можно заметить определённый порядок.Назовём линией операции, линиина КСС, на котором расположены узлы состояний системы в которых определённый параметр системы сохраняет постоянство. Рассмотрим по подробнеелинии работающих основных элементов. На сплошных линиях находятся узлы соответствующие состоянию системы когда количество работающих основных элементов постоянно (m,m-1,m-2, …,1,0 - соответственно). Тогда, очевидно распределение случайного числа $\overline{X}_1$имеет вид:

Рис.4



m	m-1	m-2	……	2	1	0
$\sum_{j=0}^{n} p_{0,j}$	$\sum_{j=1}^{n+1} p_{1,j}$	$\sum_{j=2}^{n+2} p_{2,j}$	……	$\sum_{j=m-2}^{n+m-2} p_{m-2,j}$	$\sum_{j=m-1}^{n+m-1} p_{m-1,j}$	$\sum_{j=m}^{n+m} p_{m,j}$

СоответственноМ$\overline{X}_1 = \sum_{k=0}^{m}(m-k)\sum_{j=k}^{n+k} p_{k,j}$.

Ниже приведены схематические изображения следующих линии соответственно: работающих резервных элементов; отказавших элементов; работающих органов замещения; работающих органов восстановления.

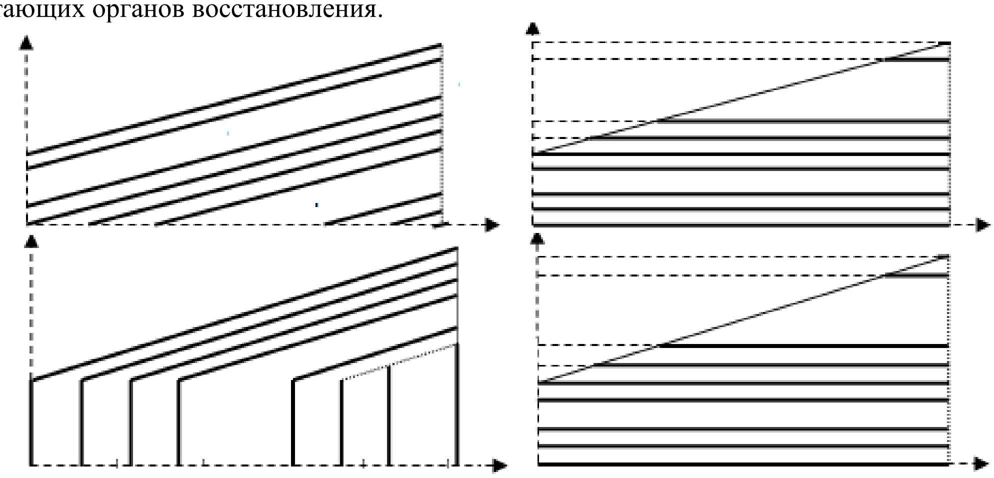


Рис.5

3. Заключение

Мы считаем, что КСС является довольно удобным инструментом не только при исследовании экономической эффективности рассматриваемой системы но и при решении других задач связанных с исследовании поведения системы.

Литература:

1. Recommendation E.862 (rev.1) Dependability of Telecommunication Networks. Geneva, 1992.

2. Гулуа Д.В., Баиашвили З.А., Мания С.Р. Приоритетное обслуживание замещения в технических системах. ГТУ, Труды, #1(459), 2006.

3. Khurodze R., Kakubava R., Gulua D. Priority queuing system for replacement and renewal. Bulletin of the Georgian Academy of Sciences, 172, #1, 2005.

4. Khurodze R., Kakubava R., Gulua D. Analysis of Priority queuing system for replacements and renewals, Georgian National Academy of Sciences, vol.3,#2, 2009.

5. Гулуа Д.В., Баиашвили З.А., Мания С.Р., Кимостели М. Математическая модель системы приоритетного обслуживания с двумя типами операции, ГТУ, Труды, #2(460), 2006.

6. Gulua D. A General stochastic model of the priority service system with two types of operations, PROCEEDINGS ofI.Vekua Institute of Applied Mathematics, VOL 57, 2007.

რთულ სისტემებში რეზერვის არსებობის დასაბუთების მათემატიკური მოდელი

დავით გულუა, გიორგი ამილახვარი, ნუგზარ ამილახვარი

რეზიუმე

ნაშრომში გამოკვლეულია, ეკონომიკური კრიტერიუმით დარეზერვებული სისტემის ოპტიმიზაციის საკითხი. მსგავსი სტოქასტური სისტემებისათვის შემოთავაზებულია მნემონიკური სქემა.

MATHEMATICAL MODEL FEASIBILITY STUDY ALLOWANCE IN COMPLEX SYSTEMS

Gulua David, Amilakhvari George, Amilakhvari Nugzar

Georgian Technical University

Summary

In the paper there is investigated the question of optimization of a redundant system on economic criteria. There is proposed a mnemonic scheme for the analysis of such stochastic systems.