

იმპულსური ავტომატური რეგულირების სისტემის მდგრადობის ანალიზი და სინთეზი ფინიტიური ჰოლოგრაფიით

ომარ კოტრიკაძე, ქეთევან კოტრიკაძე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

ნაშრომში მოცემულია იმპულსური ავტომატური რეგულირების სისტემის მდგრადობის ანალიზი ფესვური ჰოლოგრაფიით. კერძო მაგალითზე ნაჩვენებია სისტემის გადაცემის კოეფიციენტის ზღვრული მნიშვნელობის გამოთვლის შესაძლებლობა; მითითებულია სისტემის პარამეტრების ისეთი მნიშვნელობები, როცა სისტემა სტრუქტურულად არამდგრადია.

საკვანძო სიტყვები: იმპულსური სისტემა, ავტომატური რეგულირების სისტემა, სინთეზის ამოცანა, ფესვური ჰოლოგრაფები.

1. შესავალი

ავტომატური რეგულირების სისტემის (არს) იმპულსური ეწოდება, თუ სისტემის სქემის რამდენიმე წერტილში სიგნალი მიეწოდება დროის ტოლი ინტერვალების ბოლოს. ამ დროს, ორ მომდევნო სიგნალებს შორის სისტემას არავითარი ინფორმაცია არ მიეწოდება.

ამჟამად, იმპულსური სისტემები წარმატებით გამოიყენება ავტომატურ მართვაში და კავშირგაბმულობაში. ასეთ სისტემების გამოყენების არეალს მნიშვნელოვნად აფართოებს ციფრული ტექნიკის გამოყენება. იმპულსური სისტემის, ტექნოლოგიური პროცესების მართვის სისტემებში, გამოყენება საშუალებას იძლევა ერთარხიანი მაღალსიხშირის ციფრული გამომთვლელი მოწყობილობა ჩართული იქნას მრავალარხიან არს-ში. ამ დროს შეცდომის გამოთვლის სისტემა რიგ-რიგობით, სხვადასხვა რეგულირების არხისთვის, ახდენს შეცდომის რიცხვითი მნიშვნელობების დადგენას, რაც ამარტივებს სისტემის მართვის ციფრულ ნაწილს. იმპულსური სისტემების უპირატესობა და მათი დასაბუთება კარგადაა გაშუქებული სპეციალურ ლიტერატურაში [1,2], ამიტომ ამ საკითხზე არ შევჩერდებით; ჩვენი მიზანია, იმპულსური ავტომატური რეგულირების სისტემების (იარს) ანალიზისა და სინთეზის ჩატარება ფესვური ჰოლოგრაფების გამოყენებით, რომლითაც ხშირად სარგებლობენ წრფივი ავტომატური რეგულირების სისტემის (არს) დინამიკის ანალიზის და სინთეზის ამოცანებში, როცა გასარკვევია ერთი პარამეტრის ცვლილების შედეგად, როგორ იცვლება არს-ის დინამიკა და მისი თვისებრივობის მაჩვენებელი.

2. ძირითადი ნაწილი

ფესვური ჰოლოგრაფებით, იმპულსური არს-ის ანალიზისა და სინთეზის საილუსტრაციოდ, განვიხილოთ იარს-ის მდგრადობის ამოცანის ამოხსნა.

დავუშვათ, განრთული იარს-ის გადაცემის ფუნქციაა:

$$G(Z) = \frac{k(Z+a)}{(Z-1)(Z-b)} \quad (1)$$

ფესვური ჰოლოგრაფების გამოყენებით დავადგინოთ სისტემის k გადაცემის კოეფიციენტის ის მნიშვნელობათა არე, რომლის დროსაც შეკრული იარს-ი იქნება მდგრადი; მივუთითოთ a და b პარამეტრების ცვალებადობის გავლენა სისტემის მდგრადობაზე.

შეკრული იარს-ის მახასიათებელი განტოლება იქნება: $1+G(Z)=0$ ანუ

$$(Z-1)(Z-b) + k(Z+a) = 0 \quad (2)$$

დავადგინოთ (2) განტოლების ფესვების მოძრაობის ტრაექტორიები (ჰოლოგრაფები), როცა k იცვლება 0-დან $+\infty$ -მდე. ამის შემდეგ, დავადგინოთ k -ს ის მნიშვნელობათა არე, რომლის

დროსაც (2) განტოლების ფესვები მოთავსებული იქნება ერთეულოვანი წრეწირის შიგნით. Z კომპლექსურ სიბრტყეში ამ წრეწირის განტოლებაა:

$$\delta^2 + \omega^2 = 1, \quad (3)$$

სადაც δ არის Z კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი ნაწილი და ω არის Z -ის წარმოსახვითი ნაწილის კოეფიციენტი ანუ $Z = \delta + j\omega$.

(2) განტოლების ფესვური პოლოგრაფების ასაგებად დავადგინოთ (1) გადაცემის ფუნქციის პოლუსები და ნულები; კერძოდ, პოლუსები იქნება $Z_1 = 1$ და $Z_2 = b$, ხოლო ნული იქნება $Z_3 = -a$. ფესვური პოლოგრაფების თეორიის თანახმად, ფესვური პოლოგრაფები გამოდინან პოლუსებიდან ($k=0$) და შედიან ნულებში ($k \rightarrow +\infty$); ჩვენს შემთხვევაში გვაქვს ერთი ნული $Z_3 = -a$, ამიტომ ერთი ფესვური პოლოგრაფი შევა $(Z_3; 0) = (-a; 0)$ წერტილში და მეორე პოლოგრაფი წავა უსასრულობაში.

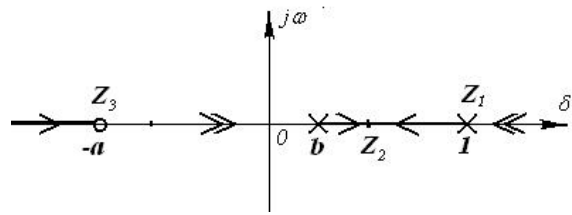
ე. წ. დადებითი ფესვური პოლოგრაფი ($k > 0$) დაიწყება პოლუსებში ($Z_1 = 1$ და $Z_2 = b$), ხოლო უარყოფითი პოლოგრაფები ($k < 0$) გამოდინან ნულებიდან ან მოდინან უსასრულობიდან.

კომპლექსური სიბრტყის ნამდვილი ღერძის ის ნაწილი, რომლის მარჯვნივ მოთავსებულია პოლუსების ან ნულების კენტი საერთო რაოდენობა, შეიძლება იყოს დადებითი ფკ ($k > 0$), ხოლო თუ 0δ ნამდვილი ღერძის მონაკვეთის ან სხივის მარჯვნივ პოლუსების და ნულების ლუწი რაოდენობაა, მაშინ ეს მონაკვეთი ან სხივი უარყოფითი პოლოგრაფია ($k < 0$).

ნახ. 1-ზე დატანილია (2) განტოლების პოლუსები და ნული; პოლუსები X -ჯვრებითაა აღნიშნული, ხოლო ნული o – მცირე წრეწირით.

დავადგინოთ 0δ ღერძის ის ნაწილი, რომელიც (2) განტოლების ფესვების ტრაექტორიაა, როცა k ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

$\delta = 1$ პოლუსის მარჯვნივ არცერთი პოლუსი და ნული არაა; ამიტომ $(1; +\infty)$ სხივი უარყოფითი პოლოგრაფია ($k < 0$) და იგი შედის $(1; 0)$ წერტილში; ასეთ ტრაექტორიებზე ფესვის მოძრაობის მიმართულებას ორმაგი ისრით აღვნიშნავთ, ამიტომ როცა $-\infty < k < 0$ ერთი ფესვი იმოძრაავებს 0δ ღერძზე $+\infty$ -დან $(1; 0)$ პოლუსამდე, რაც ორმაგი ისრითაა აღნიშნული.



ნახ. 1

$[b; 1]$ მონაკვეთის მარჯვნივ ერთადერთი პოლუსია $Z = 1$, ამიტომ $[b; 1]$ მონაკვეთი დადებითი პოლოგრაფის ნაწილია და თანაც ამ მონაკვეთზე ფესვი იმოძრაავებს $Z = 1$ წერტილიდან მარცხნივ (მოძრაობის მიმართულება აღნიშნულია ერთმაგი ისრით);

$Z = b$ წერტილიდანაც გამოდის დადებითი პოლოგრაფი, მაშინ $[b; 1]$ მონაკვეთზე შემხვედრად მოძრაობს ორი ფესვი, რომლებიც ერთმანეთს შეხვდებიან $[b; 1]$ მონაკვეთის რომელიღაც წერტილში; ეს წერტილი შეესაბამება (2) განტოლების ორჯერად ფესვს, რომელიც ჯერ არ გვიპოვნია. $[-a; b]$ მონაკვეთის მარჯვნივ ორი პოლუსია, ამიტომ იგი (2) განტოლების უარყოფითი პოლოგრაფია, რომელიც გამოდის $Z_3 = -a$ წერტილიდან ($-a$ წერტილში $k \rightarrow -\infty$) და შევა $Z_2 = b$ წერტილში, სადაც $k = 0$. ნახ. 1-ზე $[-a; b]$ მონაკვეთზე (2) განტოლების ფესვის მოძრაობის მიმართულება ორმაგი ისრითაა ნაჩვენები მარცხნიდან მარჯვნივ.

$(-\infty; -a)$ სხივის მარჯვნივ ორი პოლუსი და ერთი ნულია (სულ სამი) ამიტომ ეს სხივი დადებითი ჰოლოგრაფია ($k > 0$); ე. ი. $Z_3 = -a$ წერტილში შედის დადებითი ჰოლოგრაფი.

$-a$ წერტილის მარცხნივაც უნდა ველოდოთ (2) განტოლების ორჯერად ფესვს ანუ ორჯერად წერტილს.

ამგვარად, (2) განტოლებას, სავარაუდოდ, ორი ორჯერადი წერტილი აქვს: ერთი $[b; 1]$ მონაკვეთში და მეორე $(-\infty; -a)$ სხივზე. ვიპოვოთ ეს წერტილები.

(2) განტოლების ორჯერადი წერტილების საპონენლად ამოვსნათ განტოლება:

$$P'(Z) \cdot Q(Z) - P(Z) \cdot Q'(Z) = 0, \quad (4)$$

სადაც $P(Z) = (Z-1)(Z-b)$ და $Q(Z) = (Z+a)$, ხოლო შტრიხებით აღნიშნულია $P(Z)$ -ის და $Q(Z)$ -ის Z -ით წარმოებულები.

თუ (4)-ში ჩავსვამთ $P(Z)$ -ს და $Q(Z)$ -ს, მივიღებთ განტოლებას: $Z^2 + 2aZ - a(b+1) - b = 0$, (5)

რომლის ფესვები იქნება:

$$Z_1 = -a - \sqrt{(a+b)(a+1)} \quad (6) \quad Z_2 = -a + \sqrt{(a+b)(a+1)} \quad (7)$$

ცხადია, რომ ამ ფესვებიდან Z_1 იქნება $(-a; 0)$ წერტილის მარცხნივ, ხოლო Z_2 - მარჯვნივ. გამოდის, რომ Z_1 წერტილში ერთმანეთს შეხვდება ორი ფესვი, რომლებიც Z_1 წერტილში მოგვცემს ორჯერად წერტილს; ანალოგიურად, Z_2 ორჯერადი წერტილი აუცილებლად იქნება $[b; 1]$ მონაკვეთში (ნახ. 1).

ახლა დავადგინოთ (2) განტოლების ფესვების ტრაექტორიები (ჰოლოგრაფები), როცა $k \in R$ ანუ $k \in [-\infty; +\infty]$.

დავუშვათ, $Z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ (8) არის (2) განტოლების ფესვი, სადაც $Z = \delta + j\omega$ ((2) განტოლების ფესვი ჩაწერილია ალგებრულ სახეში) $r = \sqrt{\delta^2 + \omega^2}$ არის (2) განტოლების ფესვის მოდული, ხოლო φ არის ამ ფესვის არგუმენტი - $\varphi = \arctg \frac{\omega}{\delta}$; $\cos\varphi = \frac{\delta}{r}$ და $\sin\varphi = \frac{\omega}{r}$.

თუ (2)-ში ჩავსვამთ Z -ის (8) მნიშვნელობას, მაშინ მივიღებთ ჭეშმარიტ ტოლობას: $r^2 \cdot (\cos 2\varphi + j\sin 2\varphi) - (b+1) \cdot r(\cos\varphi + j\sin\varphi) + b + k \cdot (r(\cos\varphi + j\sin\varphi) + a) = 0$. (9)

(9) ტოლობა კომპლექსური რიცხვის ნულთან ტოლობის თანახმად, გაიხლიჩება ორ ტოლობად:

$$\begin{cases} r^2 \cdot \cos 2\varphi - (b+1) \cdot r \cdot \cos\varphi + b + k \cdot r \cdot \cos\varphi + k \cdot a = 0 \\ r^2 \cdot \sin 2\varphi - (b+1) \cdot r \cdot \sin\varphi + k \cdot r \cdot \sin\varphi = 0 \end{cases} \quad (10),$$

(11)

(11) ტოლობიდან განვსაზღვროთ k და ჩავსვათ მე-(10)-ში; მივიღებთ:

$$k = -\frac{r^2 \cdot \sin 2\varphi - (b+1) \cdot r \cdot \sin\varphi}{r \cdot \sin\varphi} = -(2r \cdot \cos\varphi - (b+1)) = (b+1) - 2\delta, \quad \text{ე. ი. } k = (b+1) - 2\delta \quad (12)$$

(12) ჩავსვათ (10)-ში:

$$r^2 \cdot \cos 2\varphi - (b+1) \cdot r \cdot \cos\varphi + b + ((b+1) - 2\delta) \cdot (\delta + a) = 0.$$

აქედან, გამარტივების შედეგად, მივიღებთ:

$$r^2 + 2a\delta - b - a(b+1) = 0 \quad \text{ანუ} \quad \delta^2 + \omega^2 + 2a\delta - b - a(b+1) = 0$$

საბოლოოდ, მივიღებთ (2) განტოლების ფესვების ტრაექტორიების ანალიზურ გამოსახულებას ანუ ფესვური ჰოლოგრაფების განტოლებას:

$$(\delta + a)^2 + \omega^2 = (a + b)(a + 1), \quad (13)$$

რომელიც Z კომპლექსურ სიბრტყეში მდებარე წრეწირია, ცენტრით $(-a; 0)$ წერტილში და რადიუსით $R = \sqrt{(a + b)(a + 1)}$. (2) განტოლების ფესვური ჰოლოგრაფები აგებულია ნახ. 2-ზე.

ამ ნახაზიდან ჩანს, რომ ვიდრე (2) განტოლების ფესვები იმოდრავებენ $[b; 1]$ მონაკვეთზე და დიდი წრეწირის BC რკალზე, შეკრული იარს-ი იქნება მდგრადი; დავადგინოთ k -ს მნიშვნელობა B წერტილში (იგივე მნიშვნელობა ექნება k -ს C წერტილში). B წერტილი მდებარეობს ერთეულოვან წრეწირზე და დიდი წრეწირზე, ამიტომ B კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდნენ განტოლებებს:

$$\begin{cases} (\delta + a)^2 + \omega^2 = (a + b)(a + 1) \\ \delta^2 + \omega^2 = 1 \end{cases} \quad (I), (II)$$

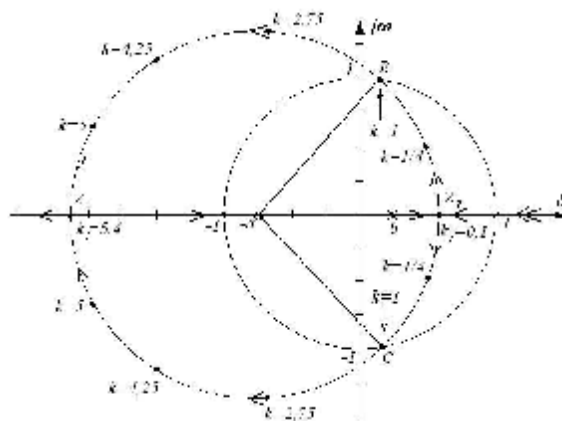
I განტოლებას გამოვაკლოთ II და მივიღებთ: $a(2\delta + a) = (a + b)(a + 1) - 1$. აქედან, $\delta = \frac{b+1}{2} + \frac{b-1}{2a}$.

თუ ამ მნიშვნელობას ჩავსვამთ (12)-ში, მივიღებთ: $k = (b + 1) - 2\delta = (b + 1) - (b + 1) - \frac{b-1}{a}$ ანუ $k = \frac{1-b}{a}$.

ამგვარად, თუ $k \in \left] 0; \frac{1-b}{a} \right[$, მაშინ (2) განტოლების ორივე ფესვი ერთეულოვან წრეშია,

მაშასადამე შეკრული იარს-ი მდგრადია.

თუ $b > 1$, მაშინ a -ს ნებისმიერი დადებითი მნიშვნელობისთვის (2) განტოლების ფესვები k -ს არცერთი მნიშვნელობისთვის არ მოხვდებათ ერთეულოვან წრეწირში; ე. ი. იარს-ი იქნება სტრუქტურულად არამდგრადი.



ნახ. 2

ნახ. 2-ზე აგებულია (2) განტოლების ფესვური ჰოლოგრაფები, როცა $a=0,75$ და $b=0,25$, მაშინ ორჯერადი ფესვები იქნება: $Z_1 = -2,073$ და $Z_2 = 0,573$. ამ წერტილებში k -ს მნიშვნელობები

იქნება: $k_1=5,4$ და $k_2=0,1$; k -ს ზღვრული მნიშვნელობა იქნება $k_{ზღ} = 1$ ანუ შეკრული იარს-ი იქნება მდგრადი, თუ $k \in]0;1[$.

2. დასკვნა

ამგვარად, ჩატარებული ანალიზის საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ იმპულსური ავტომატური რეგულირების სისტემის ანალიზის ჩატარება ფესვური ჰოლოგრაფების საშუალებით შესაძლებელს ხდის ამ ანალიზის გამარტივებას. კერძოდ გრაფო ანალიზური მეთოდით გაცილებით იოლია სისტემის მდგრადობის დადაგენა და პარამეტრების სინთეზის ამოცანის გადაწყვეტა.

ლიტერატურა:

1. Джури Э. Импульсные системы автоматического регулирования. Изд. «Физматгиз», Москва, 1963.
2. Ципкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. Изд. «Физматгиз», Москва, 1968.
3. ფესვური ჰოლოგრაფების აგების ანალიზური საფუძვლები. საერთაშ. სამეცნ. კონფ. „მართვის და ენერგეტიკის პრობლემები“ მოხს. კრ. ა. ელიაშვილის სახელობის მართვის სისტემების ინსტიტუტი, №8, თბილისი, 2004.

ANALYSIS STABILITY AND SYNTHESIS OF PULSED AUTOMATIC CONTROL SYSTEM WITH ROOT LOCUS

Kotrikadze Omar, Kotrikadze Ketevan

Georgian Technical University

Summary

The article consider pulse automatic control systems stability analysis with root locus. With particular example illustrates the possibility of calculating the limit values of the transmission; lists the parameters of the system when the system is structurally unstable.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ И СИНТЕЗА ИМПУЛЬСНОЙ АВТОМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ КОРНЕВЫМИ ГОДОГРАФАМИ

Котрикадзе О., Котрикадзе К.

Грузинский Технический Университет

Резюме

В статье рассматривается анализ устойчивости, импульсной автоматической системы управления, корневыми годографами. С помощью частного примера показана возможность расчёта предельного значения коэффициента передач; приведены значения параметров системы, когда система является структурно неустойчивой.