АНАЛИЗ ЭКОНОМИКИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ СОЛОУ

Сесадзе Н., Сесадзе В., Гемазашвили В.,
Базуашвили Т. Абрамидзе Е.
Грузинский Технический Университет

Резюме

Рассматривается модель экономического роста, предложенная Р. Солоу. На ее основе осуществлен анализ экономики. Показано, что в устойчивом положении условием ускоренного роста экономики является скорость технологических изменений. А также, увеличение уровня сбережении с использованием внешних воздействий производит ускорение роста экономики.

Ключевые слова: Модель роста экономики. Р.Солоу. Экономический процесс. Анализ. Технологические изменения. Сбережение.

1. Введение

Для изучения состояния экономических объектов значительным является изучение динамики экономических процессов, в которых отражается не только зависимость переменных во времени, но и их взаимосвязи во времени. Например, динамика инвестиции определяет динамику величины основного капитала, что в свою очередь является важнейшим фактором изменения объёма выпуска. Основные показатели, характеризующие динамику экономического объекта - это абсолютные приросты, темпы роста и прироста. [1,2]

Рассмотрим модель экономического роста, предложенную лауреатом Нобелевской премии Р. Солоу, которая позволяет описать некоторые особенности макроэкономических процессов [3]. Рассмотрим однопродуктовую модель, характеризующуюся в каждый момент времени набором эндогенных переменных: X - валовой выпуск, Y - конечный продукт, C - непроизводственное потребление, I - инвестиции, L - трудовые ресурсы (число занятых), K – ОПФ(основные производственные фонды) и экзогенных переменных: λ - темп роста трудовых ресурсов, μ - коэффициент выбытия ОПФ, a - коэффициент прямых затрат, p - доля валовых капиталовложений в конечном продукте. Экзогенные переменные будем считать постоянными во времени [4,5].

Предполагается, что годовой выпуск в каждый момент времени определяется однородной неоклассической ПФ (производственные функции)

$$X = F(K, L) \quad (1)$$

Выпишем основные балансовые соотношение модели. ВВ (Валовый Выпуск) распределяется на производственное потребление и КП (конечный продукт) [6]:

$$X = aX + Y \quad (2)$$

КП распределяется на валовые капитальные вложения (инвестиции) и непроизводственное потребление $Y = I + C$. Обозначим через *A,* амортизационные отчисления в году *t.*

Обычно полагают, что амортизационные отчисления пропорциональны, имеющимся в наличии ОПФ $A = \mu K$.

Капиталовложения направляются на увеличение как ОПФ (здания, станки и т.д.), так и оборотных фондов (запасы, сырье в процессе обработки и т.д.). В этой простой модели капиталовложениями в оборотные фонды будем пренебрегать и считать, что чистые капиталовложения приводят к росту ОПФ. Динамику ОПФ в этом случае можно описать соотношением $\Delta K = - \mu K \Delta t + I \Delta t$, откуда получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K + I, K(0) = K_0$$

Если предположить, что трудящиеся составляют постоянную долю в населении страны, которое растет пропорционально уже имеющемуся населению: $\Delta L = \lambda L \Delta t$, откуда

$$dL/L = \lambda dt, \ln L = \lambda t + \ln C, \; l = Ce^{\lambda t}$$

Используя начальное условие $L(0) = L_0$, получаем $L = L_0 e^{\lambda t}$. Согласно (2) производственное потребление равно aX , а КП - $Y = (1-a)X$, инвестиции $I = p(1-a)X$, фонд потребления $C = (1-p)Y$. Таким образом, модель Солоу в абсолютных показателях имеет вид:

$$X = aX + Y, \; \frac{dK}{dt} = -\mu K + I, \; I = p(1-a)X, \; C = (1-p)Y, (1-a)$$

$$L = L_0 e^{\lambda t}, \; X = F(K, L). \tag{3}$$

Прежде всего, исследуем вопрос о свойствах траекторий модели в стационарном режиме, когда относительные показатели не изменяются во времени $k = k_0, x = x_0, i = i_{0,} c = c_0$

На стационарной траектории $\frac{dk}{dt} = 0$, поэтому

$$-(\lambda + \mu)k + p(1-a)f(k) = 0. \tag{4}$$

2. Основная часть

Построим графики функций $y = p(1-a)f(k)$ и $y = -(\lambda + \mu)k$ (рис.1). Из рисунка видно, что имеются два решения. Это $k = 0$ и $k = k^*$. Точка $k = 0$ является решением уравнения (5) в силу того, что $f(0) = 0$. Ненулевая точка пересечения графиков $y = p(1-a)f(k)$ и $y = (\lambda + \mu)k$ может существовать не всегда или быть не единственной. При некоторых естественных предположениях о народном хозяйстве *(F(K,L)* - неоклассическая и $p(1-a)f^{'}(0) > \lambda$ точка k^* существует и единственна.

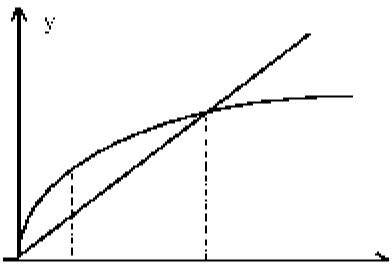

Рис. 1. Графическое решение уравнения (4)

Если в начальный момент система находилась в равновесной точке $k = 0$, то любое малое возмущение приведет ее в точку с $k > 0$, а далее система начнет все дальше уходить от исходного значения $k = 0$. В этом случае такая равновесная точка неустойчива. Рассматривать ее нет смысла. В этом случае для любого значения k из интервала $0 < k < k^*$ имеем $(\lambda + \mu)k < p(1-a)f(k)$, поэтому для всех таких точек $dk/dt > 0$, т. е. на всех траекториях, начинающихся в любой точке интервала $(0, k^*)$, значение k будет расти до тех пор, пока величина k не достигнет значения k^*. При $k > k^*$ имеем $dk/dt < 0$, поэтому величина k, будет уменьшаться до тех пор, пока не достигнет значения k^*. Из проведенного анализа ясно, что все траектории уравнения (5) при любом исходном значении $k > 0$ стремятся к k^*. Это означает, что равновесная точка $k = k^*$ устойчива.

Если $k(t) = k^*$, то для модели (3) получаем $K(t) = k^* L_0 e^{\lambda t}$. Аналогичным образом можно получить $X(t) = f(k^*) L_0 e^{\lambda t}$.

С тем же темпом растут потребление $C(t)$ и капиталовложения $I(t)$. Такую ситуацию называют режимом *сбалансированного роста.* Для модели (3) режим сбалансированного роста обладает тем свойством, что к нему сходятся все траектории модели при постоянной доле капиталовложений. Режим сбалансированного роста сам зависит от нормы капиталовложений p, так как от p зависит значение k^*: при росте p величина k^* возрастает.

Поскольку все траектории роста модели (3) сходятся к сбалансированному росту, который зависит от величины постоянной доли капиталовложений ***p***, то возникает вопрос о том, какой режим сбалансированного роста предпочтительнее. Для этого прежде всего необходимо ввести критерий, по которому мы будем, сравнивать различные режимы. В модели сбалансированного роста в качестве критерия можно взять уровень потребления в расчете на одного трудящегося, т. е. Величину $c = (1-p)(1-a)f(k^*)$, причем k^* также зависит от величины *p.* Зависимость $k^*(p)$ определяется соотношением (4). Поэтому $c(p) = (1-a)f(k^*) - (\lambda + \mu)k^*$, где $k^* = k^* p$. Условие экстремума этой функции во внутренней точке отрезка [0,1], к которому принадлежат допустимые значения управления *p,* выписывается в виде $((1-a)f^{'}(k^{*})-(\lambda+\mu))dk^{*}/dp=0.$

Согласно (5) $dk^{*}dp>0$ условие экстремума принимает вид:

$$f^{'}(k^{*})=(\lambda+\mu)/(1-a). \qquad (5)$$

Заметим, что в случае интересующих нас ПФ народного хозяйства, для которых характерны большое значение $f^{'}(0)$ и малое значение $f^{'}(k)$ при достаточно больших *к,* всегда существует единственная k^{*}, удовлетворяющая соотношению (5). Наилучшее значение доли капиталовложений в конечном продукте p можно определить из соотношения (4):

$$p^{*}=(\lambda+\mu)k^{*}/(1-a)f(k^{*}). \qquad (6)$$

Легко проверить, что полученное значение *p* приведет к максимальному, а не минимальному потреблению, а также то, что максимальное потребление не достигается при крайних значениях величины *p,* т. е. при $p=0$ или $p=1$.

Для расчета оптимальной нормы накопления нужно задать конкретную ПФ. Для ПФ Кобба-Дугласа $f(k)=Ak^{a}$. Из (6) получаем $(1-a)\alpha Ak^{\alpha-1}=(\lambda+\mu)$, откуда

$$k^{*}=\left(\frac{(\lambda+\mu)}{(1-a)Aa}\right)^{(\lambda a-1)}$$

Подставляя k в (6), получаем $p^{*}=a$.

Для ПФ Кобба-Дугласа оптимальная норма накопления совпадает с ее эластичностью по ОПФ («Золотое» правило накопления).

Подведем предварительный итог исследования модели (3) при постоянной норме накопления p. В любом случае траектории системы асимптотически сходятся к сбалансированному росту, темп роста на котором равен темпу роста населения страны. Такой результат неутешителен, поскольку потребление на душу населения при сбалансированном росте экономики остается постоянным. Возникает вопрос о том, нельзя ли добиться лучших результатов, если использовать изменяющееся во времени управление *p(t).* Проведем соответствующий анализ.

Рассмотрим модель (3) с переменным управлением *p(t).* Прежде всего необходимо решить проблему выбора критерия.

Теперь, при изменяющемся во времени управлении *p(t),* потребление на одного трудящегося в единицу времени также является переменной величиной. Поэтому часто в качестве критерия оптимальности предполагается максимизировать дисконтированную сумму потребления, создаваемого в течение всего периода планирования, т. е.

$$V = \int_0^T \eta(t)c(t)dt \Rightarrow \max, \tag{7}$$

где $\eta(t)$ - функция дисконтирования, отражающая меру предпочтения потребления в данный момент относительно потребления того же продукта в последующие моменты времени, T - время планирования.

Обычно предполагают, что $\eta(0) = 1$ и $\eta(t)$ является монотонно убывающей функцией времени *t*, например, $\eta(t) = e^{-\delta t}$, где δ - заданная неотрицательная величина.

При исследовании роста экономики страны за конечный период времени необходимо подумать и о том, что произойдет с экономикой за пределами этого периода. В нашей простой модели это означает, что необходимо позаботиться о том, чтобы основные фонды в расчете на одного трудящегося в конце исследуемого периода времени были достаточно велики, т. е. наложить ограничение на величину $k(T)$. Это ограничение имеет вид

$$k(T) = k_T \tag{8}$$

где k_T – заданная величина.

Теперь задача может быть поставлена следующим образом: найти такую зависимость от времени доли накопления $\rho(t)$, чтобы для модели (4) с дополнительным условием (8) максимизировать критерий (7), причем величина доли накопления должна удовлетворять ограничению $0 \le \rho(t) \le 1$.

Поставленная задача не всегда имеет решение. Можно выбрать настолько большое значение k_T, что такая фондовооруженность окажется недостижимой для системы за период времени [0, T]. Рассмотрим множество всех достижимых за период [0, T], значений $k(T)$ и $c(T)$. Анализируя это множество, можно выбрать наиболее подходящее достижимое сочетание величин $k(T)$ и $c(T)$. Если в качестве k_T взять выбранную величину $k(T)$, то сформулированная здесь задача оптимизации будет иметь решение.

3. Выводы

Оказывается, что при достаточно больших значениях времени планирования T оптимальное управление $\rho(t)$ состоит в следующем: сначала необходимо выбрать такое значение $\rho(t)$, чтобы как можно быстрее выйти в точку k^*, определяемую из соотношения (6); затем в течение почти всего периода времени величина $\rho(t)$ должна быть равна ρ; в конце периода необходимо за минимальное время перевести систему из точки k^* в k_T. Таким образом, мы опять пришли к сбалансированному росту в модели (3) с максимальным потреблением на одного трудящегося.

Литература

1. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления.»– М.: Наука, 1983.

2. *Замков О.О.,Толстопятенко А.В.,Черемных Ю.Н.* Математические методы в экономике М.: Дело и Сервис/ МГУ, 2004.

3. *Кротов В.Ф., Лагоша Б.А., Лобанов С.М. и др.*.Основы теории оптимального управления. М.: Наука,1990.

4. *Лагоша Б.А.*Оптимальное управление в экономике.М.: Финансы и статика, 2008.

5. *Bryson, Arthur E., and Yu-Chi Ho.* – "Applied Optimal Control*":* Optimization, Estimation, and Control. New York, NY: Routledge, 1975

6. *Kirk, Donald E*.-"Optimal Control Theory*": An Introduction*. New York, NY: Dover, 2004.

THE ANALYSIS OF ECONOMY ON THE BASIS OF MODEL SOLOU

Sesadze Neli, Sesadze Valida, Gemazashvili Viktoria,
Bazuashvili Tekla, Abramidze Erekle

Georgian Technical University

Summary

There is the description of model of economic growth of R. Solou. The article also includes all the basic conclusions, made as a result of the analysis of economy on the basis of given model. It is shown, that a condition of the accelerated growth in a steady condition is speed of technological changes and increase of a level of savings can lead to increase in rates of growth if to use spillovers.

ეკონომიკის დინამიკის ანალიზი სოლოუს მოდელის გამოყენებით

ნელი სესაძე, ვალიდა სესაძე, თეკლა ბაზუაშვილი,
ვიქტორია გემაზაშვილი, ერეკლე აბრამიძე

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

განხილულია სოლოუს ეკონომიკური ზრდის მოდელი. მისი განხილვის საფუძველზე განხორციელებულია ეკონომიკის ანალიზი. ნაჩვენებია, რომ მდგრად მდგომარეობაში ეკონომიკის დაჩქარებული ზრდის პირობას წარმოადგენს ტექნოლოგიური ცვლილებების სიჩქარე. აგრეთვე, გარეშე ზემოქმედებების გამოყენებით დანაზოგის გაზრდა იწვევს ეკონომიკური ზრდის დაჩქარებას.