

## ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Сесадзе В., Чикадзе Г., Кекенадзе В., Каишаури Т.  
Грузинский Технический Университет

### Резюме

Сформулированы общие принципы прикладной геометрии и геометрического моделирования. Метод геометрического моделирования, сводящий исследование явлений внешнего мира к математическим задачам, занимает ведущее место среди других методов исследования, особенно в связи с появлением ЭВМ. Он позволяет проектировать новые технические средства, работающие в оптимальных режимах, для решения сложных задач науки и техники, прогнозировать новые явления. Геометрические модели проявили себя как важное средство управления. Они применяются в самых различных областях знания, стали необходимым аппаратом в области экономического планирования и являются важным элементом автоматизированных систем управления. Все это зародило появление нового направления под названием компьютерная графика.

**Ключевые слова:** Прикладная геометрия. Геометрические модели. Геометрическое моделирование. Математические задачи. Управление. Экономическое планирование. АСУ. Компьютерная графика.

### 1. Введение

Предметом геометрического моделирования в обобщенном смысле оказываются не только пространственные формы и отношения, но любые формы и отношения, которые, будучи взяты в отвлечении от своего содержания, оказываются сходными с обычными пространственными формами и отношениями. Эти пространственно-подобные формы действительности называют «пространствами» и «фигурами». Пространства в этом смысле есть непрерывная совокупность однородных объектов, явлений, состояний, которые играют роль точек пространства, причем в этой совокупности имеются отношения, сходные с обычными пространственными отношениями, как, например, расстояние между точками, равенство фигур включения, принадлежность и т.д. (фигура – вообще часть пространства).

Геометрическое моделирование рассматривает эти формы действительности в отвлечении от конкретного содержания, изучение же конкретных форм и отношений в связи с их качественно своеобразным содержанием составляет предмет других наук а геометрическое моделирование служит для них методом. Примером может служить любое приложение абстрактной геометрии. Для геометрического моделирования характерен такой подход к объекту, который состоит в обобщении и перенесении на новые объекты обычных геометрических понятий и наглядных представлений. Этот геометрический подход вовсе не является чистой условностью, а соответствует самой природе явлений. Но часто одни и те же реальные факты можно изображать или аналитически, или геометрически, так же как одну и ту же зависимость можно задавать уравнением или линией на графике.

Не следует, однако, представлять развитие геометрического моделирования так, что она лишь регистрирует и описывает на геометрическом языке уже встретившиеся на практике формы и отношения, подобные пространственным. В действительности геометрическое моделирование определяет широкие классы новых пространств и фигур в них, исходя из анализа и обобщения данных наглядной геометрии и уже сложившихся геометрических теорий. При обстрактном определении эти пространства и фигуры выступают как возможные формы действительности. Они, стало быть, не являются чисто умозрительными конструкциями, а должны служить, в конечном счете, средством исследования и описания реальных фактов.

Легкость, с которой математики, физики, инженеры оперируют теперь с разными «пространствами» и «отображениями» этих пространств, достигнута в результате долгого развития геометрии в темной связи с развитием математики в целом и прикладных наук. Именно вследствие этого развития сложилась и приобрела большое значение вторая сторона - геометрическое моделирование.

Таким образом, выясняется двоякое значение истолкования геометрии – физико-техническое и теоретико-математическое. Если речь идет об истолковании на конкретных объектах, то получается опытное доказательство истинности теории; если же сами объекты имеют обстрактный характер, то теория связывается с другими математическими теориями.

## **2. Общие принципы прикладной геометрии**

Одна и та же геометрическая теория допускает разные приложения, разные истолкования (осуществления, модели и интерпретации). Всякое приложение теории и есть не что иное, как осуществление некоторых ее выводов в соответствующей области явлений.

Возможность разных осуществлений является общим свойством всякой математической теории. Так, арифметические соотношения реализуются на самых различных наборах предметов; одно и то же уравнение описывает часто совсем разные явления. Математика рассматривает лишь форму явления, отвлекаясь от его содержания, а с точки зрения формы многие качественно различные явления оказываются часто сходными. Разнообразие приложений математики, и в частности, геометрического моделирования, обеспечивается именно ее абстрактным характером. Считают, что некоторая система объектов (область явлений) дает осуществление теории, если отношения в этой области объектов могут быть описаны на языке теории так, что каждое утверждение теории выражает тот или иной факт, имеющий место в рассматриваемой области. В частности, если теория строится на основе некоторой системы аксиом, то истолкование этой теории состоит в таком сопоставлении ее понятий с некоторыми объектами и их отношениями, при котором аксиомы оказываются выполненными для этих объектов.

Евклидова геометрия возникла как отражение фактов действительности. Ее обычная интерпретация, в которой прямыми считаются натянутые нити, движением-механические перемещение и т.д., предшествует геометрическому моделированию как математической теории.

Принятое в современной математике формально-математическое определение понятий пространства и фигуры исходит из понятия множества. Пространство определяется как множество  $k$ -л элементов («точек») с условием, что в этом множестве установлены некоторые отношения, сходные с обычными пространственными отношениями. Множества цветов, множество состояний физической системы, множество непрерывных функций, заданных на отрезке  $(0,1)$  и т.п. образуют пространства, где точками будут цвета, состояния, функции. Точнее, эти множества понимаются как пространства, если в них фиксируются только соответствующие отношения, например, расстояние между точками, и те свойства и отношения, которые через них определяются. Так, расстояние между функциями можно определить как максимум абсолютной величины их разности. Фигура определяется как произвольное множество точек в данном пространстве. Иногда пространство – это система из множеств элементов. Например, проективной геометрии принято рассматривать точки, прямые и плоскости как равноправные исходные геометрические объекты, связанные отношениями «принадлежности».

## **3. Общие принципы геометрического моделирования**

геометрическое моделирование-встречаемая тема, имеющая пути развития по многим направлениям.

Существуют разные версии определения геометрической модели, которые заключаются в следующем:-геометрическая модель-приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью геометрической символики. Геометрическая модель-один из методов познания внешнего мира, а также прогнозирования и управления. Анализ геометрической модели позволяет проникнуть в сущность изучаемых явлений.

Если модель была в полне определена, т.е. все параметры ее были заданы, то определение отклонений георетических следствий от наблюдений дает решение прямой задачи с последующей оценкой отклонений. Если отклонения выходят за пределы точности наблюдений, то модель не может быть принята.

Часто при построении модели некоторые ее характеристики остаются неопределенными. Задачи, в которых определяются характеристики модели (параметрические, функциональные) таким образом, чтобы выходная информация была сопоставима в пределах точности наблюдений с результатами наблюдений изучаемых явлений, называются обратными задачами.

Если параметрическая модель такова, что ни при каком выборе характеристик эти условия нельзя удовлетворить, то модель не пригодна для исследования рассматриваемых

явлений. Применения критерия практики к оценке математической модели позволяет делать вывод о правильности положений, лежащих в основе подлежащей изучению (гипотетической) модели. Этот метод является единственным методом изучения непосредственно недоступных нам явлений макро и микро мира.

Геометрическое моделирование любого объекта, также как общее математическое моделирование подразумевает четыре основных этапа:

1. Построение геометрической модели;
2. Исследование (анализ) модели;
3. Изучение годности модели;
4. Коррекция модели.

При построении геометрической модели, как правило, различают два типа моделей: графическую(геометрическую) и экспериментальную.

Графические модели строятся на базе теоретических закономерностей объекта; экспериментальные модели получаются с помощью выявления свойств исследуемого объекта-измерении параметров.метод геометрического моделирования, сводящий исследование явлений внешнего мира к математическим задачам, занимает ведущее место среди других методов исследования, особенно в связи с появлением ЭВМ. Он позволяет проектировать новые технические средства, работающие в оптимальных режимах, для решения сложных задач науки и техники, прогнозировать новые явления. Геометрические модели проявили себя как важное средство управления. Они применяются в самых различных областях знания, стали необходимым аппаратом в области экономического планирования и являются важным элементом автоматизированных систем управления. Все это зародило появление нового направления под названием компьютерной графики.

#### **4. О подходах современной прикладной геометрии**

Современная прикладная геометрия является наукой, методы которой применимы к объектам самых различных областей науки и техники.

С математической точки зрения начертательная геометрия является наукой, изучающей способы конструктивного (графического) отображения различных пространств (любых измерений и с любыми метриками) на подпространства и в частном случае-на плоскость. При этом наибольший интерес представляют взаимно-однозначные отображения, при которых отображение является гомеоморфным исходному пространству.

Известно, что каждый метод начертательной геометрии имеет свою определенную техническую область применения. У некоторых методов эта область обширна, у других более узка, но универсального метода нет и не может существовать.

За последние десятилетия разработано множество различных способов отображения пространства на плоскость. Большинство из них обязано своим возникновением практической потребности. Бурный рост техники позволяет считать, что многие из этих способов окажутся полезными для определенного круга технических задач. Разработка новых способов моделирования пространства продолжается и, очевидно, будет продолжаться.

Вышеизложенное позволяет заключить, современная прикладная геометрия особенно тесно связана с проективной геометрией. Эта связь в узком смысле проявляется в приложении приемов проективной геометрией (в частности, проективных преобразований на плоскости) к решению задач начертательной геометрии; некоторые из этих приемов вошли в учебную литературу. Однако, в широком смысле, прикладная геометрия является конструктивной ветвью синтетической проективной геометрии, изучающей проективные связи различных пространств с плоскими моделями этих пространств. В самом деле, если целью прикладной геометрии является изучение различных отображений пространства на плоскость, то это с математической точки зрения является не чем иным, как изучением проективной (в частном случае перспективной) связи пространства с его плоскими моделями.

Все это не могло не усилить интереса к изучению проективных преобразований пространства (коллинеации и корреляции в пространстве) и их отображений на плоскость. Сразу же отметим, что проективные преобразования пространства достаточно хорошо изучены и находят большое применение при решении теоретических и технических задач.

С технической точки зрения она является наукой, изучающей наиболее рациональные способы изображения на плоскости как определенных групп материальных объектов, встречающихся в том или ином разделе техники, так и явлений и процессов, связанных с этими объектами. Общеизвестно, что каждый метод прикладной геометрии имеет свою определенную область применения. У некоторых методов эта область обширна, у других – узка, но универсального метода не существует и не может существовать. Конечно, каждый метод позволяет изображать пространственный объект любого характера, но это совершенно не рационально. Например, изображение земной поверхности в методе Монжа будет более, чем громоздким.

### **5. Заключение**

Таким образом, математический и технический подход близки друг другу, но первый акцентирует теоретическую сторону вопроса, т.е. интересуется главным образом отображением пространства в целом, геометрических многообразий пространственных элементов, их инцидентиями и т.д., а второй ставит во главу конкретные технические формы и процессы.

### **6. Литература**

1. Лашхи А.С., Шавгулидзе А.С. Мировоззренческие аспекты прикладной геометрии. Грузинский технический университет. Тбилиси. 2001.
2. Штофф В.А. О роли моделей в познании. Л.:Изд-во Ленинградского университета. 1993.
3. Сесадзе В.К., Кекенадзе В.М. Геометрическое моделирование и графические методы решения задач. Georgian Engineering News, N2, 2004, pp.12-16.

## **GEOMETRICAL MODELLING AND GRAPHIC METHODS OF THE DECISION OF PROBLEMS**

V.Sesaddze, G.Chikadze, V.Kekenadze, T.Kaishauri  
Georgian Technical University

### **Summary**

The general principles of applied geometry and geometrical modelling are formulated in the article. The method of geometrical modelling reducing research of the phenomena of an external world to mathematical problems, takes leading place among other methods of research, especially in connection with occurrence of the computer. It allows to project the new means working in optimum modes, for the decision of challenges of science and technics, to predict the new phenomena. Geometrical models have proved as the important control facility. They are applied in the most various areas of knowledge, became the necessary device in the field of economic planning and are the important elements of the automated control systems. All this has engendered occurrence of a new direction under the name computer schedules.

### **გეომეტრიული მოდელირება და ამოცანების ამოხსნის გრაფიკული მეთოდები**

ვალაიდა სესაძე, გელა ჭიკაძე, ვლადიმერ კეკენაძე, თინათინ კაიშაური  
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

### **რეზიუმე**

ჩამოყალიბებულია გამოყენებითი გეომეტრიისა და გეომეტრიული მოდელირების ზოგადი პრინციპები. ნაჩვენებია, რომ მოდელირების გეომეტრიულ მეთოდებს, რომლებსაც გარემოს კვლევის პრობლემა დაყავს მათემატიკურ ამოცანებად, კვლევის სხვა მეთოდებს შორის უკავია მნიშვნელოვანი ადგილი. ეს მეთოდები გვაძლევს საშუალებას გადავწყვიტოთ მეცნიერებისა და ტექნიკის რთული ამოცანები, მოვახდინოთ ახალი მოვლენების პროგნოზირება, დავაგეგმაროთ ოპტიმალურ რეჟიმში მომუშავე ტექნიკის ახალი საშუალებები. გეომეტრიული მეთოდები წარმატებულად შეიძლება გამოყენებულ იქნას მეცნიერების სხვადასხვა დარგში, კერძოდ, ეკონომიკურ დაგეგმარებასა და მართვის ავტომატიზებულ სისტემებში. ყოველივე ამან განაპირობა განვითარებულიყო ისეთი ახალი მიმართულება, როგორცაა კომპიუტერული გრაფიკა.