

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

ინგა სტეფნაძე

რთულკონტურიანი ფილების და დამრეცი გარსების  
განგარიშების საკითხი

დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად  
წარდგენილი დისერტაციის

ავტორეფერატი

სადოქტორო პროგრამა „მშენებლობა“

თბილისი 2016 წ.

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში, მშენებლობის ფაკულტეტზე, საინჟინრო მექანიკისა და მშენებლობის ტექნიკური ექსპერტიზის დეპარტამენტში.

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: ასოც. პროფესორი რამაზ ჭყოიძე

რეცენზენტები: პროფესორი ტ. კვიციანი  
პროფესორი მ. ყალაბეგაშვილი

დაცვა შედგება 2016 წლის 16 თებერვალს 12 საათზე საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის სხდომაზე, I სასწავლო კორპუსი მისამართი: თბილისი 0175, კოსტავას 72.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ს ბიბლიოთეკაში, ხოლო ავტორეფერატისა - სტუ-ს ვებგვერდზე.

სადისერტაციო საბჭოს

სწავლული მდივანი:

სრული პროფესორი დ. ტაბატაძე

## ნაშრომის საერთო დახასიათება

### თემის აქტუალობა:

ფირფიტები დღევანდელ დღეს ფართოდ გამოიყენება ტექნიკის სხვადასხვა სფეროში - მშენებლობაში, ავიაციაში, გემთმშენებლობაში, მანქანათმშენებლობაში, და ა.შ. ეს აიხსნება თხელკედლიანი კონსტრუქციების სიმსუბუქით და რაციონალურ ფორმებთან ერთად ეკონომიურობით და კარგი ტექნოლოგიურობით. ფირფიტების ყველაზე გავრცელებული სახეა ეგრეთწოდებული თხელი ფირფიტები  $8 \div 10 \leq a/d \leq 80 \div 100$ , სადაც  $a$  გეგმაში უმცირესი გვერდია;  $d$  სისქე.

როგორც ცნობილია გეგმაში რთული მოხაზულობის ფირფიტების გაანგარიშება ნებისმიერი დატვირთვის და სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით წარმოადგენს საკმაოდ რთულ ამოცანას და ხშირად მისი ამოხსნა შეუძლებელია.

### დისერტაციის მიზანი:

წარმოდგენილი ნაშრომის მიზანს წარმოადგენს ღუნვაზე მომუშავე ფირფიტების ახალი საანგარიშო სქემების შექმნა, გაანგარიშებების სრულყოფა და უფრო ზუსტი შედეგების მიღება სხვა სამეცნიერო შრომებზე დაყრდნობით. მართკუთხა ფირფიტებისთვის ენერგეტიკული მეთოდის გამოყენებით აიგოს გრინის გავლენის ფუნქცია სხვადასხვა სასაზღვრო პირობებში (ოთხივე გვერდზე სახსრულად დაყრდნობილი, სამი გვერდით სახსრულად დაყრდნობილი და მეოთხე გვერდზე თავისუფალი).

ოთხკუთხა ფირფიტის ძირითად სისტემად არჩევის გზით და ძალთა მეთოდის (მოცემული სისტემის გაფართოების მეთოდის) გამოყენებით ჩატარდეს სამკუთხა ფირფიტის გაანგარიშება.

განხილული იქნას პოტენციური ენერგიის გამოთვლის ორი ვარიანტი: პირველი, როგორც ეს მიღებულია კლასიკურ დრეკადობის თეორიაში და მეორე მოდიფიცირებული მეთოდით, რომელიც უფრო რეალურად ასახავს დაძაბულ მდგომარეობას და არსებულთან შედარებით იძლევა ფირფიტების ღუნვის

ამოცანების დაზუსტებულ ამონახსნებს. ძირითადი მიზანია განვსაზღვროთ იმ ცვლილებების პრაქტიკული ღირებულება, რასაც გამოიწვევს ამოცანების ჩვენს მიერ შემოთავაზებული გადაწყვეტა არსებულთან შედარებით.

### **მეცნიერული სიახლე:**

2007 წელს შედგენილი პოტენციური ენერჯის გამოსათვლელი მოდიფიცირებული გამოსახულება წარმოადგენს ფუნდამენტალურ სამეცნიერო ნაშრომს. ჩვენს მიერ პირველად ხდება აღნიშნული გამოსახულების გამოყენება:

- მართკუთხა ფირფიტებისათვის გრინის ფუნქციის შესადგენად;
- რთულკონტურიანი ფირფიტის გაანგარიშებისას ძალთა მეთოდის კანონიკური განტოლებების შესადგენად;
- აღნიშნულის შედეგად ვღებულობთ დაზუსტებულ გრინის ფუნქციებს და დაზუსტებულ ძალთა მეთოდს.

### **შედეგების პრაქტიკული ღირებულება:**

მართკუთხა იზოტროპული მთელ კონტურზე სახსრულად დაყრდნობილი ან სამ გვერდზე სახსრულად დაყრდნობილი და მეოთხე გვერდზე თავისუფალი ფირფიტებისათვის შედგენილი დაზუსტებული გრინის ფუნქციების მეშვეობით აღნიშნული სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში შეიძლება დაზუსტებულად გაანგარიშებული იქნას მართკუთხა ფირფიტები ნებისმიერ დატვირთვაზე. ზემოთ აღნიშნული ფირფიტები შეიძლება განხილული იქნას, როგორც ძირითადი სისტემები და ძალთა მეთოდის გამოყენებით შესაბამისი დაზუსტებული გრინის ფუნქციების გათვალისწინებით ამოიხსნას რთულკონტურიანი ფირფიტების განივი ღუნვის ამოცანები ნებისმიერი დატვირთვისას.

### **ნაშრომის აპრობაცია და გამოქვეყნებული პუბლიკაციები:**

ნაშრომის შედეგები მოხსენებული იქნა:

სტუ-ს სტუდენტთა 82-ე ღია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციაზე თემა: „ ფილის გაანგარიშება ვარიაციული მეთოდის გამოყენებით“, თბილისი, 2014;

სტუ-ს სტუდენტთა 83-ე ღია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციაზე თემა: „ გრინის გავლენის ფუნქციის აგება კონტურზე სახსრულად დაყრდნობილი სწორკუთხოვანი ფირფიტისათვის“, თბილისი, 2015.

დისერტაციის ძირითადი შედეგები მოყვანილია შრომებში, რომლებიც მოყვანილია ავტორეფერატის ბოლოში.

### **ნაშრომის სტრუქტურა:**

დისერტაცია შედგება შესავლის, ოთხი თავის, ძირითადი დასკვნების და გამოყენებული ლიტერატურისაგან.

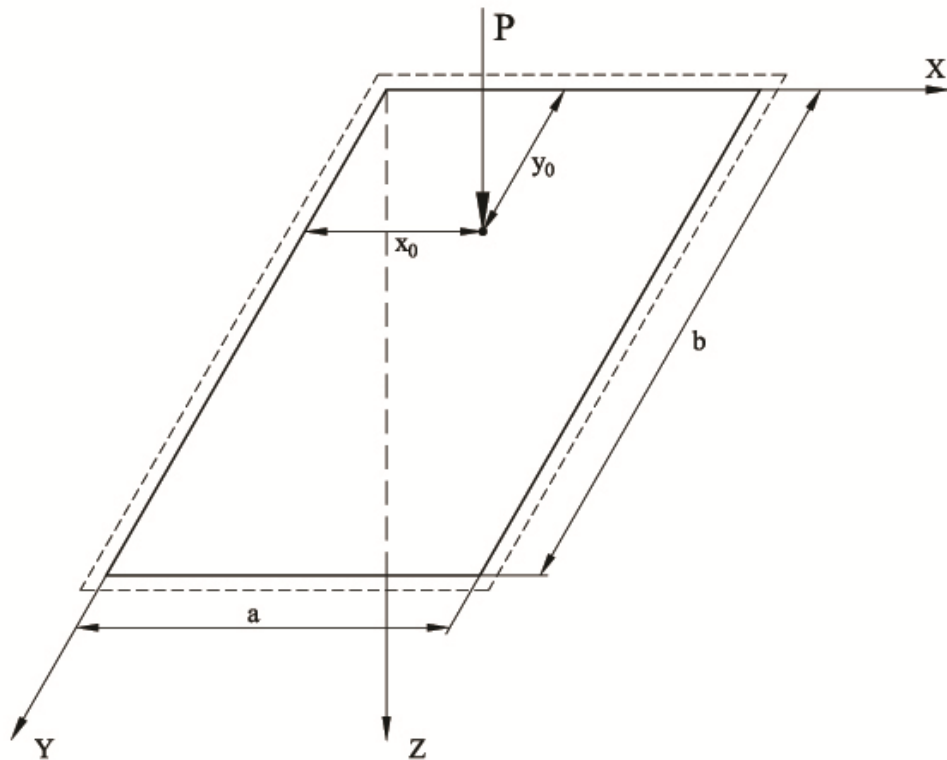
### **ნაშრომის შინაარსი**

**პირველი თავში** მოყვანილია მასალა თემის აქტუალობის შესახებ და განხილულია ფირფიტების ღუნვის ის ზოგადი საკითხები, რომლებზეც დაყრდნობით მიღებული იქნა დისერტაციის შედეგები.

**მეორე თავში** განხილულია იზოტროპიული გეგმაში მართკუთხა ფორმის ფირფიტა (ნახ. 2.1), როგორც ძირითადი სისტემა რთული ფორმის ფირფიტების გაანგარიშებისთვის მოცემული სისტემის გაფართოების მეთოდის გამოყენებით.

სისტემისთვის აგებულია გავლენის გრინის ფუნქცია რიტცის ენერგეტიკული მეთოდის გამოყენებით. სრული ენერგიის გამოსახულების შედგენისას, დეფორმაციის პოტენციური ენერგია (შიდა ძალების პოტენციალი) გაანგარიშებული იქნა როგორც კლასიკურ დრეკადობის თეორიაში არსებული გამოსახულებით, ასევე მოდიფიცირებული გამოსახულებით.

ამოცანების ამოხსნა ზემოთმოყვანილი პირობების დაცვით განხორციელდა ორ ვარიანტად. განვიხილოთ ერთგვაროვანი და იზოტროპიული ფირფიტის ღუნვის ამოცანა, როცა ფირფიტა კონტურზე დაყრდნობილია სახსრულად და დატვირთულია შეყურსული  $P$  ძალით მოდებული წერტილში კოორდინატებით  $X=X_0$  и  $Y=Y_0$



(ნახ. 2.1)

ჩალუნვის ფუნქციის გამოსახულებას ვიღებთ მწკრივის სახით:

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn} \varphi_{mn} = \\ &= \omega_{11}\varphi_{11} + \omega_{12}\varphi_{12} + \omega_{21}\varphi_{21} + \omega_{22}\varphi_{22} + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

სადაც ფუნქცია  $\varphi_{mn}$  აკმაყოფილებს ფილის სახსრულად დაყრდნობის სასაზღვრო პირობებს. კონტურით სახსრულად დაყრდნობილი ფირფიტისთვის გვაქვს შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{როცა } x = 0 \text{ и } x = a \\ \text{უნდა იყოს } \omega = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right. \quad (ა)$$

და

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{როცა } y = 0 \text{ и } y = b \\ \text{უნდა იყოს } \omega = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \end{array} \right. \quad (ბ)$$

დავრწმუნდეთ, რომ მწკრივი (2.1) აკმაყოფილებს ამ პირობებს. მართლაც ფირფიტის კიდეზე, როცა  $X=0$

$$\sin \frac{m\pi x}{a} = \sin 0 = 0$$

შედეგად მივიღებ,  $\omega(0, y) = 0$ . კიდეზე როცა  $x = a$

$$\sin \frac{m\pi x}{a} = \sin m\pi = 0,$$

ხოლო ჩალუნვა  $\omega(a, y) = 0$ . ასევე ჩალუნვები ნულის ტოლია კიდეებზე  $y = 0$  და  $y = b$ . ამრიგად სასაზღვრო პირობები (ა) და (ბ) ჩალუნვებისთვის კმაყოფილდება.

მეორე წარმოებულები ჩალუნვებისთვის:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = - \sum_m \sum_n \omega_{mn} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = - \sum_m \sum_n \omega_{mn} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

ამ ფორმულებში შედის სინუსები იგივე არგუმენტებით, როგორც ჩალუნვის ფუნქციაში (2.1). ამიტომ მეორე რიგის ჩალუნვის წარმოებულები  $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$  და  $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$  ნულის ტოლია ფირფიტის ყველა კიდეზე, როცა  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $y = b$ . ამრიგად სასაზღვრო პირობები (ა) და (ბ) ღუნვადი ელემენტებისთვის ასევე კმაყოფილდება.

(2.1) მწკრივის ელემენტების რაოდენობის მიხედვით, ამონახსნის მიღება შეიძლება ნებისმიერი სიზუსტით.

მუდმივ პარამეტრებს  $\omega_{mn}$  ირჩევენ პირობიდან, რომ ფუნქცია  $\omega_{mn}$  შესაძლებლობის მიხედვით რაც შეიძლება ზუსტად ასახავდეს საწყის ფუნქციას  $\omega(x, y)$ . მუდმივი პარამეტრების გამოთვლის სახვადასხვა მეთოდებიდან ვირჩევთ რიტცის მეთოდს.

გამოვთვალოთ სისტემის პოტენციური ენერგია:

$$\mathfrak{E} = U + \Pi; \tag{2.2}$$

### ვარიანტი „ა“

ფირფიტის დეფორმაციის პოტენციური ენერგია (შიდა ძალების პოტენციალი):

$$U = \frac{D}{2} \iint_S \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right]^2 dx dy \quad (2.3)$$

(2.3)-ის გათვალისწინებით (2.1) უდრის:

$$\begin{aligned} (2.1), (2.3) \Rightarrow U &= \frac{D}{2} \iint_S \left( -\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn} \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right)^2 dx dy = \\ &= \frac{\pi^4 D}{2} \iint_S \left( \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn} \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right)^2 dx dy \quad (2.4) \end{aligned}$$

ორმაგი მწკრივის კვადრატში აყვანა, ტოლფასია ორი მრავალწევრის გადამრავლების, სადაც ყოველი წევრი პირველი მრავალწევრის მრავლდება მეორე მრავალწევრის ყოველ წევრზე და იღება ამ ნამრავლების ალგებრული ჯამი. რომ განვასხვავოთ ერთი მრავალწევრის წევრები მეორე მრავალწევრის წევრებისგან, ერთერთ მათგანში ინდექსები  $m$  და  $n$  შევცვალოთ შესაბამისად  $k$  და  $l$ -ით.

მაშინ გამოსახულება (2.4) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} (2.4) \Rightarrow U &= \frac{\pi^4 D}{2} \iint_S \left( \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn} \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) \cdot \\ &\cdot \left( \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \omega_{kl} \left( \left( \frac{k}{a} \right)^2 + \left( \frac{l}{b} \right)^2 \right) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \right) dx dy = \\ &= \frac{\pi^4 D}{2} \iint_S \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \omega_{mn} \omega_{kl} \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right) \left( \left( \frac{k}{a} \right)^2 + \left( \frac{l}{b} \right)^2 \right) \cdot \\ &\cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} dx dy = \end{aligned}$$



$$= \frac{\pi^4 D}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \omega_{mn} \omega_{kl} \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right) \left( \left( \frac{k}{a} \right)^2 + \left( \frac{l}{b} \right)^2 \right) \cdot$$

$$\cdot \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{k\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{l\pi y}{b} dy \quad (2.5)$$

ინტეგრალები შემავალი (2.5)-ში:

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{k\pi x}{a} dx \quad \left\{ \begin{array}{l} = 0 \quad | \quad \text{при } m \neq k \\ \neq 0 \quad | \quad \text{при } m = k \end{array} \right\}; \quad \int_0^a \sin^2 \frac{m\pi x}{a} dx = \frac{a}{2} \quad (2.6)$$

ანალოგიურად პირველისა:

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{l\pi y}{b} dy \quad \left\{ \begin{array}{l} = 0 \quad | \quad \text{при } n \neq l \\ \neq 0 \quad | \quad \text{при } n = l \end{array} \right\}; \quad \int_0^b \sin^2 \frac{n\pi y}{b} dy = \frac{b}{2} \quad (2.7)$$

(2.6) და (2.7)-ის გათვალისწინებით, ვღებულობთ:

$$(2.5), (2.6), (2.7) \Rightarrow U = \frac{\pi^4 D a b}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn}^2 \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2 \quad (2.8)$$

სადაც

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}$$

-ფირფიტის ცილინდრული სიხისტა, E-დრეკადობის მოდული, h-ფირფიტის სისქე,  $\nu$ - პუასონის კოეფიციენტი.

ენერგია გარე ძალების (პოტენციალი გარე ძალების) გამოითვლება ფორმულით:

$$\Pi = P \cdot \omega_p, \quad (2.9)$$

სადაც P შეყურსული ძალაა, მოდებული ფირფიტის წერტილში ( $x_0, y_0$ );

$\omega_p$  -ჩაღუნვა ძალის მოდების წერტილში

$$(2.1), (2.9) \Rightarrow \Pi = -P \cdot \omega(x_0, y_0) = -P \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}; \quad (2.10)$$

(2.8) და (2.10)-ის ჩასმით (2.2)-ში ვღებულობთ:

(2.8), (2.10)  $\Rightarrow \vartheta = U + \Pi =$

$$= \frac{\pi^4 Dab}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn}^2 \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2 - P \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\pi^4 Dab}{8} \omega_{mn}^2 \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2 - P \omega_{mn} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \right); \quad (2.11)$$

ცნობილი პოტენციური ენერჯის მინიმუმის პრინციპი: ყველა შესაძლო დრეკადი გადაადგილებიდან, რომელიც აკმაყოფილებს მდგრად წონასწორობის პირობებს, ანიჭებს პოტენციურ ენერჯის მინიმალურ მნიშვნელობას. შესაბამისად მწკრივის კოეფიციენტები (2.11) უნდა შეირჩეს ისე, რომ პორენციურ ენერჯის ჰქონდეს მინიმალური მნიშვნელობა. ამ პრინციპზე დაყრდნობით უნდა დაკმაყოფილდეს პირობა:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \omega_{mn}} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\pi^4 Dab}{8} 2\omega_{mn} \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2 - P \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} = 0$$

$$\omega_{mn} = \frac{4P \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}}{\pi^4 Dab \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2} \quad (2.13)$$

(2.13)-ის ჩასმით (2.1)-ში მივიღებთ:

$$\omega(x, y) = \frac{4P}{\pi^4 Dab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}}{\left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.14)$$

როცა  $P = 1$

$$(2.14), (P = 1) \Rightarrow \omega(x, y) = \frac{4}{\pi^4 Dab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}}{\left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.15)$$

ვღებულობთ წერტილის ჩალუნვის ფორმულას კორდინატებით  $(x, y)$  ერთეულოვანი ძალისგან, მოდებული წერტილში კორდინატებით  $(x_0, y_0)$ , ე.ი. ფირფიტის ჩალუნვა განისაზღვრება ფუნქციით:

$$\omega(x, y) = K(x, y; x_0, y_0). \quad (2.16)$$

### ვარიანტი „ბ“

განვიხილოთ იგივე ამოცანა. ამოვხსნათ ის იგივე მეთოდით, იგივე თანმიმდევრობით, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ პოტენციურ ენერგიას გამოვთვლით არა (2.3) ფორმულით, არამედ მოდიფიცირებული გამოსახულებით.

ნაშრომში (ავტორები ნ.შ. ბერიშვილი, რ.ვ. ჭყოიძე და რ.შ. გიორგობიანი) განხილულია ჰუკის განზოგადებული კანონი და მის საფუძველზე მიღებული დრეკადი პოტენციალი. ნაჩვენებია, რომ ჰუკის განზოგადებულ კანონში დეფორმაციისა და ძაბვის ტენზორების მთავარი დიაგონალის მიმართ სიმეტრიული კოეფიციენტების ტოლობა მიღწეულია ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის შეუსაბამობის წინასწარი დაშვებით, რის შედეგადაც არაკორექტული გამოდის დეფორმაციის ხვედრითი პოტენციალური ენერგიის გამოსახულებაც. ანიზოტროპიის ზოგადი შემთხვევისათვის ნაშრომში გარკვეულია ჰუკის განზოგადებულ კანონში და დრეკად პოტენციალში შემავალი წევრების რეალური ფიზიკური აზრი და მიღებულია შესაბამისად მათი კორექტული გამოსახულებები. დრეკადი პოტენციალი ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$U = \frac{D^*}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \left( \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{4G}{E} \left( \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) dx dy; \quad (2.17)$$

სადაც

$$D^* = \frac{Eh^3}{12};$$

$G$ - ძვრის მოდულია

(2.17) შევიტანოთ (2.1)-ში, მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
(2.1), (2.17) \Rightarrow U &= \frac{D^*}{2} \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k \int_0^a \int_0^b \left( \left( -\omega_{mn} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right)^2 + \right. \\
&+ \left. \left( -\omega_{mn} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right)^2 + \frac{4G}{E} \left( \omega_{mn} \pi^2 \frac{mn}{ab} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \right)^2 \right) dx dy = \\
&= \frac{D^* \pi^4}{2} \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k \omega_{mn}^2 \left( \left( \left( \frac{m}{a} \right)^4 + \left( \frac{n}{b} \right)^4 \right) \int_0^a \int_0^b \left( \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right)^2 dx dy + \right. \\
&+ \left. \frac{4G}{E} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{mn}{ab} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \right)^2 dx dy \right) \tag{2.18}
\end{aligned}$$

(2.5; 2.6; 2.7)-ის გათვალისწინებით (2.18) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$U = \frac{\pi^4 D^* ab}{8} \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k \omega_{mn}^2 \left( \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2 + 2 \left( \frac{2G}{E} - 1 \right) \left( \frac{mn}{ab} \right)^2 \right) \tag{2.19}$$

გარე ძალების ენერჯიას (გარე ძალების პოტენციალი) გამოვთვლით ფორმულით (2.10). ჩავსვათ (2.2)-ში (2.10) და (2.19)-ის მნიშვნელობები:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D} &= U + \Pi = \\
&= \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^k \left( \frac{\pi^4 D^* ab}{8} \omega_{mn}^2 \left( \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2 + 2 \left( \frac{2G}{E} - 1 \right) \left( \frac{mn}{ab} \right)^2 \right) - \right. \\
&\left. - P \omega_{mn} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \right); \tag{2.20}
\end{aligned}$$

პოტენციური ენერჯიის მინიმუმის პრინციპის საფუძველზე ვღებულობთ:

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \omega_{mn}} = 0 \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^4 D^* ab}{8} 2\omega_{mn} \left( \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2 + 2 \left( \frac{2G}{E} - 1 \right) \left( \frac{mn}{ab} \right)^2 \right) - P \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} &= 0 \\
\omega_{mn}^* &= \frac{4P \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}}{\pi^4 D^* ab \left( \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right)^2 + 2 \left( \frac{2G}{E} - 1 \right) \left( \frac{mn}{ab} \right)^2 \right)} \tag{2.22}
\end{aligned}$$

(2.22)-ის ჩასმით (2.1)-ში ვღებულობთ:

$$\omega^*(x, y) = \frac{4P}{\pi^4 D^* ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left(\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right)^2 + 2\left(\frac{2G}{E} - 1\right)\left(\frac{mn}{ab}\right)^2} \quad (2.23)$$

როცა  $P = 1$

(2.23), ( $P = 1$ )  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega^*(x, y) = \frac{4}{\pi^4 D^* ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left(\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right)^2 + 2\left(\frac{2G}{E} - 1\right)\left(\frac{mn}{ab}\right)^2} \quad (2.24)$$

ვღებულობთ ჩაღუნვების გამოსათვლელ ფორმულას კოორდინატებით ( $x, y$ ), ერთეულოვანი ძალისგან, რომელიც მოდებულია წერტილში კოორდინატებით ( $x_0, y_0$ ), ე.ი. ჩაღუნვა ფილის გამოითვლება ფუნქციით:

$$\omega(x, y) = K(x, y; x_0, y_0) \quad (2.25)$$

თუ წერტილის ( $x, y$ ) კოორდინატებს, რომლის გადაადგილება გვანტერესებს ჩავთვლით მუდმივად და ვცვლით ერთეულოვანი ძალის ადგილმდებარეობას ( $x_0, y_0$ ), გამოსახულება  $\omega(x, y)$  გვაძლევს ჩაღუნვებს, ( $x_0, y_0$ ) წერტილში მოდებულ  $P = 1$  ძალისგან.  $K(x, y; x_0, y_0)$  ფუნქციას ეწოდება გრინის ფუნქცია, ხოლო მისგან მიღებულ ზედაპირს - ფირფიტის ჩაღუნვის გავლენის ზედაპირი წერტილში კოორდინატებით ( $x, y$ ). ფირფიტის ჩაღუნვის გავლენის ზედაპირი წერტილში კოორდინატებით ( $x, y$ ) წარმოადგენს ფირფიტის გაღუნულ ზედაპირს გამოწვეულს იმავე წერტილში მოდებულ ერთეულოვანი ძალისგან.

(2.15) და (2.24) ფორმულების შედარებისთვის განვიხილოთ შემდეგი რიცხვითი მაგალითები:

$$a = b, x = x_0 = \frac{a}{2}, y = y_0 = \frac{b}{2}, \nu = 0.3, G = 8 \cdot 10^4 \text{ მპა}, E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ მპა} \quad (2.26)$$

მწკრივებში შევინარჩუნოთ თითო წევრი:

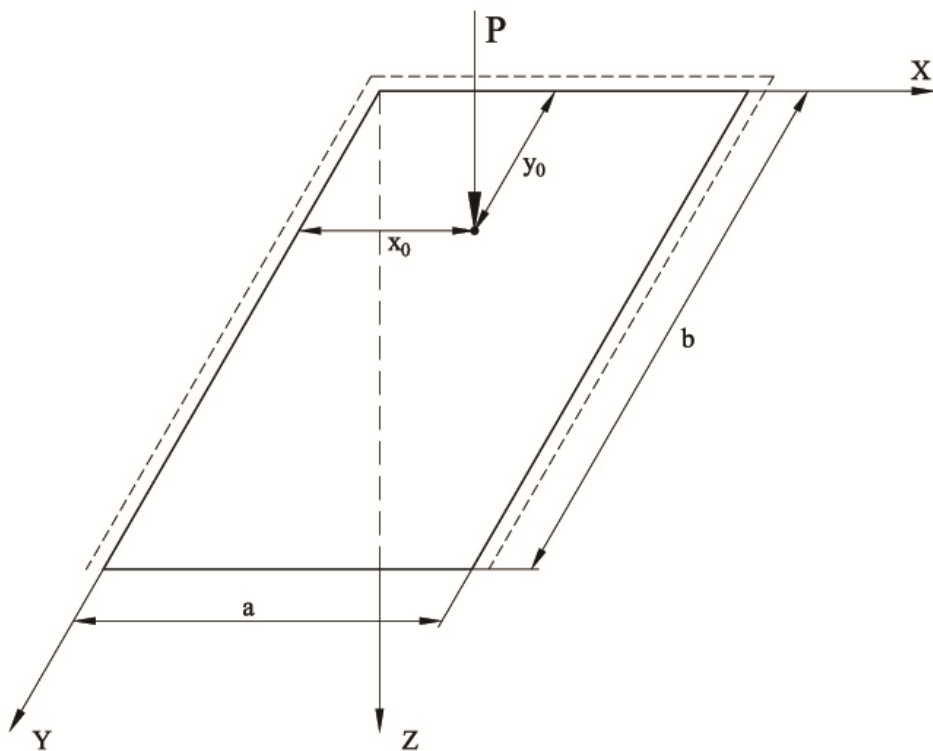
$$(2.15), (2.26) \Rightarrow \omega(x, y) = 0,52 \cdot 10^{-4} \frac{a^2}{\pi^4 h^3}; \quad (2.27)$$

$$(2.24), (2.26) \Rightarrow \omega^*(x, y) = 0,65 \cdot 10^{-4} \frac{a^2}{\pi^4 h^3}. \quad (2.28)$$

განსხვავება 25%-ია.

მასაშე თავში განხილულია ოთკუთხა ფირფიტა (ნახ. 3.1), როგორც ძირითადი სისტემა გეგმაში რთული მოხაზულობის ფირფიტების გაასანგარიშებლად მოცემული სისტემის გაფართოების მეთოდის გამოყენებით. ძირითადი სისტემისთვის გამოითვლება გრინის გავლენის ფუნქცია, ენერგეტიკული რიტცის მეთოდის გამოყენებით. სრული ენერგის გამოსახულების შედგენისას, დეფორმაციის პოტენციური ენერგია (შინაგანი ძალების პოტენციალი) გამოთვლილია როგორც კლასიკურ დრეკადობის თეორიაში არსებული გამოსახულებებით, ასევე მოდიფიცირებული გამოსახულებებით.

ზემოთმოყვანილი პირობების დაცვით ამოცანის ამოხსნა მოხდა ორ ვარიანტად.



(ნახ. 3.1)

განვიხილოთ გეგმაში ოთკუთხა ერთგვაროვანი და იზოტროპიული ფირფიტა, სახსრულად დაყრდნობილი სამ გვერდის კონტურზე და თავისუფალი

მეოთხე გვერდით, დატვირთული შეყურსული P ძალით მოდებული ( $x_0, y_0$ ) წერტილში (ნახ. 3.1). ამოცანის ამოხსნისას გამოყენებული იყო რიტცის მეთოდი. ჩალუნვის ფუნქციის გამოსახულება მიღებულია მწკრივის სახით:

$$\omega_m = \sum_{n=1}^m a_n y \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (3.1)$$

დავრწმუნდეთ, რომ მწკრივი (3.1) აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს: სახსრულად დაყრდნობილ კიდეებზე ჩალუნვები და მლუნავი მომენტები ტოლია ნულის (ნახ.3.1).

$$\begin{aligned} \omega_m(0, y) = \omega_m(a, y) = \omega_m(x, 0) &= \sum_{n=1}^m a_n y \sin \frac{n\pi 0}{a} = \\ &= \sum_{n=1}^m a_n y \sin \frac{n\pi a}{a} = \sum_{n=1}^m a_n 0 \sin \frac{n\pi x}{a} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$M_x = \frac{\partial \omega_m}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial \omega_m}{\partial y^2} = - \sum_{n=1}^m a_n \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 y \sin \frac{n\pi x}{a} + \nu \cdot 0; \quad (3.3)$$

$$M_y = \frac{\partial \omega_m}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial \omega_m}{\partial x^2} = 0 - \nu \sum_{n=1}^m a_n \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 y \sin \frac{n\pi x}{a};$$

$$(3.3) \Rightarrow M_x(0, y) = M_x(a, y) = M_y(x, 0) = 0 \quad (3.4)$$

ფირფიტის თავისუფალ კიდეზე მლუნავი მომენტები და განივი ძალები ტოლია ნულის (ნახ.3.1).

$$M_y = \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x^2}; \quad Q_y^{np} = -D \left( \frac{\partial^3 \omega_m}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 \omega_m}{\partial x^2 \partial y} \right); \quad (3.5)$$

(3.3), (3.4), (3.5)-ი ფორმულების საფუძველზე

$$(3.3), (3.4), (3.5) \Rightarrow M_y(x, b) = Q_y^{np}(x, b) = 0 \quad (3.6)$$

ამრიგად მწკრივი (3.1) აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს.

მწკრივის კოეფიციენტების  $a_n$  – ის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ სისტემის სრული პოტენციური ენერგია:

$$\exists = U + \Pi; \quad (3.7)$$

### ვარიანტი "ა"

ფირფიტის დეფორმაციის პოტენციური ენერგია (შიდა ძალების პოტენციალი) გამოითვლება ფორმულით:

$$U = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \left( \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right) dx dy; \quad (3.8)$$

(3.1), (3.8)  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} U &= \frac{D}{2} \sum_{n=1}^m \int_0^a \int_0^b \left( \left( -a_n y \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{a} \right)^2 - 2(1-\nu) \left( - \left( a_n \frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} \right)^2 \right) \right) dx dy = \\ &= \frac{D}{2} \sum_{n=1}^m \int_0^a \int_0^b \left( a_n^2 \left( \frac{n\pi}{a} \right)^4 \sin^2 \frac{n\pi x}{a} + 2(1-\nu) a_n^2 \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \cos^2 \frac{n\pi x}{a} \right) dx dy \end{aligned} \quad (3.9)$$

ინტეგრირების (3.9) შემდგომ ვღებულობთ:

$$U = \frac{D}{4} \sum_{n=1}^m a_n^2 \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 ab \left( \frac{b^2}{3} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + 2(1-\nu) \right) \quad (3.10)$$

სადაც

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

-ცილინდრული სიხისტეა ფირფიტის,

E-დრეკადობის მოდული, h- ფირფიტის სისქე,  $\nu$ - პუასონის კოეფიციენტი.

შიდა ძალების ენერგია (პოტენციალი გარე ძალებისა გამოითვლება ფორმულით:

$$\Pi = -P \cdot \omega(x_0, y_0) \quad (3.11)$$

სადაც P –შეყურსული ძალაა, მოდებული ფირფიტის  $(x_0, y_0)$  წერტილში;

$\omega(x_0, y_0)$  – ჩაღუნვა ძალის მოდების წერტილში.

$$(3.1), (3.11) \Rightarrow \Pi = -P \sum_{n=1}^m a_n y_0 \sin \frac{n\pi x_0}{a}; \quad (3.12)$$



თუ ჩავსვავთ (3.10) და (3.12)-ს (3.7)-ში მივიღებთ:

(3.7), (3.10), (3.12)  $\Rightarrow$

$$\mathfrak{D} = \sum_{n=1}^m \left( \frac{D}{4} a_n^2 \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 ab \left( \frac{b^2}{3} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + 2(1-\nu) \right) - P a_n y_0 \sin \frac{n\pi x_0}{a} \right) \quad (3.13)$$

მუდმივი კოეფიციენტები(3.1) მწკრივის  $a_n$  გამოითვლება პოტენციური ენერჯის მინიმუმის პირობიდან. გამოვთვლით (3.13) ფუნქციის წარმოებულებს  $a_n$  - ით და ვუტოლებთ ნულს, ვღებულობთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას  $a_n$  - ის მიმართ:

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial a_n} = \frac{Dab}{4} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{b^2}{3} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + (1-\nu) \right) a_n - P y_0 \sin \frac{n\pi x_0}{a} = 0 \quad (3.14)$$

აქედან ვპოვულობთ  $a_n$  - ს.

$$a_n = \frac{2P y_0 \sin \frac{n\pi x_0}{a}}{Dab \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{b^2}{3} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + 2(1-\nu) \right)} \quad (3.15)$$

(3.15)-ის ჩასმით (3.1)-ში ვღებულობთ:

$$(3.1), (3.15) \Rightarrow \omega_m(x, y) = \sum_{n=1}^m \frac{2P y_0 \sin \frac{n\pi x_0}{a}}{Dab \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{b^2}{3} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + 2(1-\nu) \right)} y \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (3.16)$$

იმის მიხედვით, თუ რამდენ წევრს შევინარჩუნებთ მწკრივში (3.16) ჩალუნვა ფირფიტის შეგვიძლია მივიღოთ ნებისმიერი სიზუსტის.

## ვარიანტი "ბ"

განვიხილოთ იგივე ამოცანა. ამოვხსნათ ის იგივე მეთოდით, იგივე თანმიმდევრობით, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ პოტენციურ ენერჯას გამოვთვლით მოდიფიცირებული გამოსახულებით:

$$U = \frac{D^*}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \left( \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{4G}{E} \left( \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) dx dy; \quad (3.17)$$

სადაც

$$D^* = \frac{Eh^3}{12};$$

$G$  – ძვრის მოდულია.

ჩავსვათ (3.1)-ი (3.17)-ში, მივიღებთ:

(3.1), (3.17)  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow U = \frac{D^*}{2} \sum_{n=1}^m \int_0^a \int_0^b \left( -a_n \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 y \sin \frac{n\pi x}{a} \right)^2 + \frac{4G}{E} \left( \frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} a_n \right)^2 dx dy; \quad (3.18)$$

ინტეგრირების და გამარტივების შემდგომ ვღებულობთ:

$$U = \frac{D^*}{4} \sum_{n=1}^m a_n^2 \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 ab \left( \frac{b^2}{3} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \frac{4G}{E} \right) \quad (3.19)$$

(3.12) და (3.19)-ის დახმარებით (3.7) ვღებულობს:

$$\vartheta = \sum_{n=1}^m \left( \frac{D^*}{4} a_n^2 \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 ab \left( \frac{b^2}{3} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \frac{4G}{E} \right) - P a_n y_0 \sin \frac{n\pi x_0}{a} \right) \quad (3.20)$$

პოტენციური ენერჯიის მინიმუმის პირობა:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial a_n} = \frac{D^* ab}{2} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{b^2}{3} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \frac{4G}{E} \right) a_n - P y_0 \sin \frac{n\pi x_0}{a} = 0$$

საიდანაც ვპოვულობთ  $a_n$  – ს:

$$a_n = \frac{2P y_0 \sin \frac{n\pi x_0}{a}}{D^* ab \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{b^2}{3} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \frac{4G}{E} \right)} \quad (3.21)$$

ჩავსვათ (3.21) ჩალუნვის განტოლებაში (3.1)-ში, მივიღებთ:

$$(3.1), (3.21) \Rightarrow \omega_m^* = \sum_{n=1}^m \frac{2P y_0 \sin \frac{n\pi x_0}{a}}{D^* ab \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{b^2}{3} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \frac{4G}{E} \right)} y \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (3.22)$$

ერთეულოვანი დატვირთვისას, როცა  $P = 1$ , თუ  $(x, y)$  კოორდინატებს ჩავთვლით მუდმივად და ვცვლით ძალის კოორდინატებს  $(x_0, y_0)$ , მაშინ (3.16) და (3.22) ფუნქციები გამოსახავენ ჩალუნვის დამოკიდებულებას ძალის მოდების წერტილის კოორდინატებზე  $(x_0, y_0)$ .

$$\omega_m(x, y) = K(x, y; x_0 y_0) = \sum_{n=1}^m \frac{2y_0 \sin \frac{n\pi x_0}{a}}{Dab \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{b^2}{3} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + 2(1-\nu)\right)} y \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad (3.24)$$

$$\omega_m^*(x, y) = K(x, y; x_0 y_0) = \sum_{n=1}^m \frac{2y_0 \sin \frac{n\pi x_0}{a}}{D^*ab \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{b^2}{3} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \frac{4G}{E}\right)} y \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (3.25)$$

მათ ეწოდებათ გრინის ფუნქციები, ხოლო მათ გრაფიკებს (x, y) წერტილში ჩაღუნვის გავლენის გრაფიკი.

(3.24) და (3.25) ფორმულების გამოყენებით მიღებული შედეგების შედარებისთვის განხილულია შემდეგი რიცხვითი მაგალითები:

$$a = b, x = x_0 = \frac{a}{2}, y = y_0 = \frac{b}{2}, \nu = 0.3, G = 8 \cdot 10^4 \text{ Мпа} \quad (3.26)$$

მწკრივებში შევინარჩუნოთ მხოლოდ თითო წევრი:

$$(3.24), (3.26) \Rightarrow \omega = 1,17 \frac{a^2}{Eh^3 \pi^2}; \quad (3.27)$$

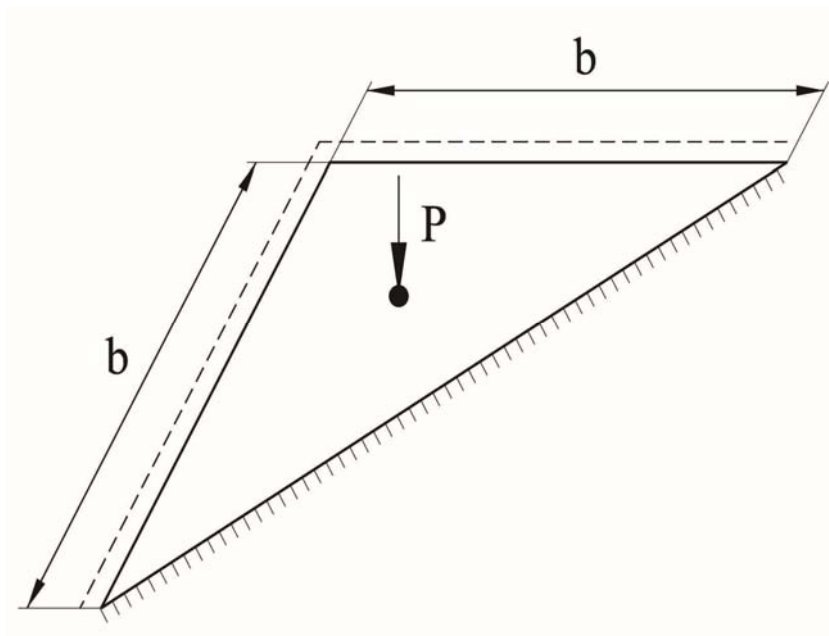
$$(3.25), (3.26) \Rightarrow \omega^* = 1,25 \frac{a^2}{Eh^3 \pi^2}; \quad (3.28)$$

განსხვავება 7%-ია.

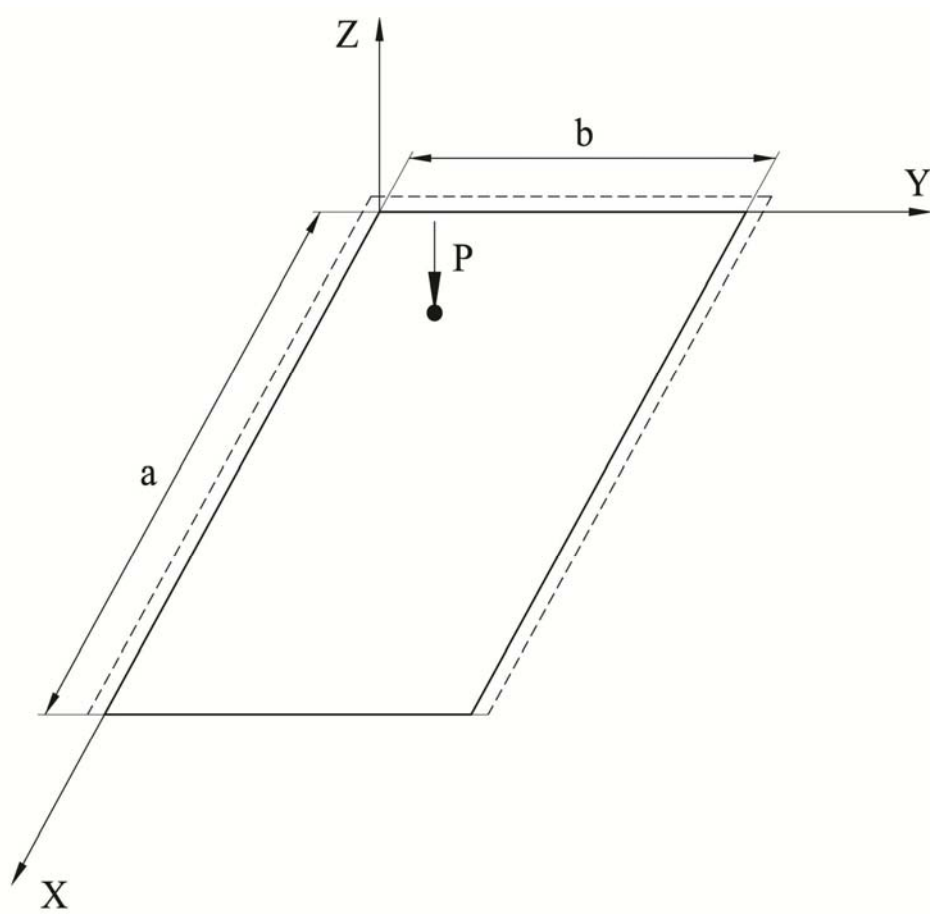
**მეოთხე თავში განხილულია** სამკუთხა ფირფიტა AOB (როგორც გეგმაში რთული მოხაზულობის ფირფიტა), გვერდები AO, BO სახსრულად დაყრდნობილია, ხოლო გვერდი AB ხისტად ჩამაგრებული (ნახ. 4.1).

ფირფიტაზე მოქმედებს შეყურსული ძალა მოდებული ფირფიტის ცენტრში. ვსარგებლობთ მოცემული სისტემის გაფართოების მეთოდით (ძალთა მეთოდი).

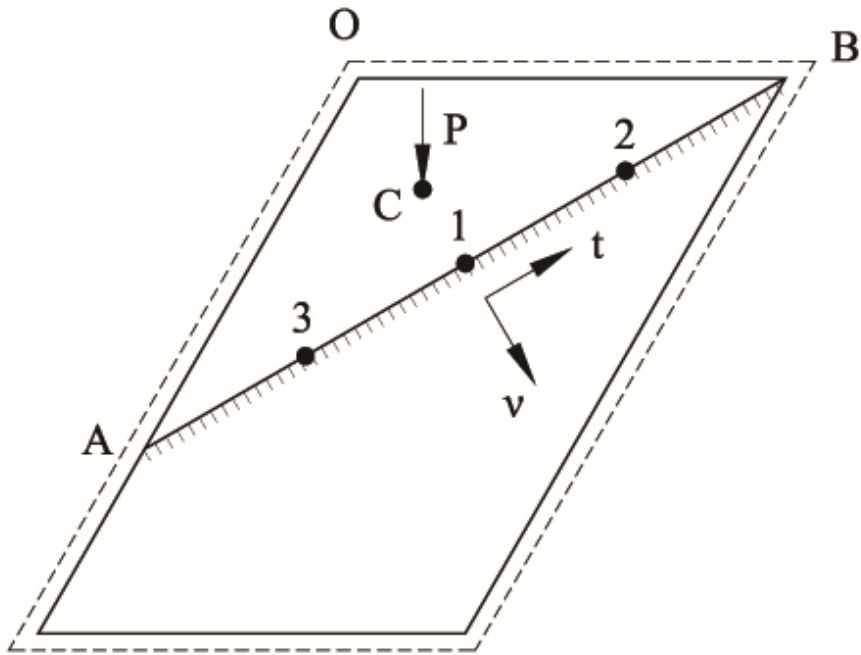
ძირითად სისტემად ვღებულობთ მოცემული ფირფიტის პარამეტრების შემცველ გეგმაში ოთხკუთხა ფირფიტას სამ გვერდზე სახსრულად დაყრდნობილს, ხოლო მეოთხე გვერდით თავისუფალს (ნახ. 4.2). მოცემულ ფირფიტას ვათავსებთ ძირითადი სისტემის კონტურის შიგნით (ნახ. 4.3). ძირითადი სისტემა დატვირთულია იგივე დატვირთვით, როგორც მოცემული სისტემა.



Біб. 4.1



Біб. 4.2



ნახ. 4.3

მოცემული სისტემის გვერდები AO, BO ემთხვევა ძირითადი სისტემისას. მოცემული ფირფიტის AB გვერდზე, რომელიც გადის ძირითადი სისტემის შიდა არეში, ვიღებთ 3 წევრს. ამ წევრებისთვის ძალთა მეთოდის კანონიკურ განტოლებებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N (P_i W_{ki} + M_{vi} W_{vki} + M_{ti} W_{tki} + W_{qk} + W_{pk} + W_{mk}) = 0 ; \\ \sum_{i=1}^N (P_i \varphi_{ki} + M_{vi} \varphi_{vki} + M_{ti} \varphi_{tki} + \varphi_{qk} + \varphi_{pk} + \varphi_{mk}) = 0 ; \\ \sum_{i=1}^N (P_i \psi_{ki} + M_{vi} \psi_{vki} + M_{ti} \psi_{tki} + \psi_{qk} + \psi_{pk} + \psi_{mk}) = 0 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

(4.1) განტოლებაში მიღებულია შემდეგი აღნიშვნები:

$P_i$  – შეყურსული ძალა მომქმედი წერტილში  $i(\xi, \eta)$  ;

$M_{ti}$  – მომენტი, მომქმედი მხების მიმართულებით  $t$  ;

$W_{ki}, W_{vki}, W_{tki}$  -ჩალუნვები  $k$  წერტილში გამოწვეული  $i$  წერტილში მომქმედი შეყურსული  $P_i = 1$  ძალისა და მომენტებისაგან  $M_{vi}=1$  და  $M_{ti}=1$ ;

$N$  –საერთო წერტილების რაოდენობა აღებული კონტურზე საერთო არის;

$\varphi_{ki}, \varphi_{vki}, \varphi_{tki}$  –ნორმალის მობრუნების კუთხეები წერტილ  $k$  – ში,

გამოწვეული არე განაწილებული და შეყურსული  $P_i = 1$  ძალისგან და მომენტებისგან  $M_{vi}=1$  და  $M_{\bar{v}i}=1$ ;

$\varphi_{qk}, \varphi_{pk}, \varphi_{mk}$  – ნორმალის მობრუნების კუთხეები  $v_k$  წერტილ  $k$  – ში,

გამოწვეული გარე განაწილებული და შეყურსული ძალისგან და მომენტებისგან;

$\psi_{qk}, \psi_{pk}, \psi_{mk}$  - მხების მობრუნების კუთხეები  $t_k$  წერტილში  $k$ -ში, მომქმედი  $i$

წერტილში შესაბამისად ერთეულოვანი ძალა  $P_i = 1$  და მომენტები  $M_{vi} = 1$  და  $M_{\bar{v}i} = 1$ ;

$W_{qk}, W_{pk}, W_{mk}$  - ჩალუნვები, გამოწვეული შეყურსული ძალებიდან, განაწილებული დატვირთვისგან და შეყურსული მომენტებისგან.

ამ განტოლებების კოეფიციენტები (ერთეულოვანი ფაქტორები) გამოითვლება გრინის ფუნქციის დახმარებით, შედგენილი ძირითადი სისტემისთვის.

2 და 3 წერტილის სიმეტრიულობის გამო განიხილება მხოლოდ 1 და 2 წერილები. ამ წერილებისთვის კანონიკური განტოლებებიც შედგენა ხდება (4.1) დახმარებით.

$$AX=B \tag{4.3}$$

$$B = \begin{pmatrix} \omega_{p1} \\ \omega_{p2} \\ \varphi_{p1} \\ \varphi_{p2} \\ \psi_{p1} \\ \psi_{p2} \end{pmatrix}; \tag{4.4}$$

$$X = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ M_{v1} \\ M_{v2} \\ M_{t1} \\ M_{t2} \end{pmatrix}; \quad (4.5)$$

$$A = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{v11} & \omega_{v12} & \omega_{t11} & \omega_{t12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{v21} & \omega_{v22} & \omega_{t21} & \omega_{t22} \\ \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{v11} & \varphi_{v12} & \varphi_{t11} & \varphi_{t12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{v21} & \varphi_{v22} & \varphi_{t21} & \varphi_{t22} \\ \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{v11} & \psi_{v12} & \psi_{t11} & \psi_{t12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{v21} & \psi_{v22} & \psi_{t21} & \psi_{t22} \end{pmatrix}; \quad (4.6)$$

მატრიცა (4.5) -ის ელემენტები წარმოადგენენ კონტურის 1, 2, 3 წერტილებში მოქმედ უცნობ ძალოვან ფაქტორებს.

ელემენტები მატრიცების (4.4), (4.6) განისაზღვრებიან გავლენის ფუნქციის დახმარებით, აგებული ძირითადი სისტემისთვის (ნახ. 4. 2).

ამოცანების ამოხსნა მოყვანილია ორ ვარიანტად "ა" და "ბ".

გრინის ფუნქციის შედგენისას დეფორმაციის პოტენციური ენერგია (შიდა ძალების პოტენციალი), გამოითვლება როგორც კლასიკურ დრეკადობის თეორიაში არსებული ფორმულით, ასევე მოდიფიცირებული გამოსახულებით.

### ვარიანტი "ა"

კლასიკურ დრეკადობის თეორიაში გრინის გავლენის ფუნქცია გეგმაში ოთკუთხა ფორმის, სახსრულად დაყრდნობილი სამ გვერდზე და თავისუფალი მეთხე გვერდით ფირფიტისათვის აქვს სახე (3.24):

$$\begin{aligned} \omega(x, y) = K_m(x, y, x_0, y_0) &= \sum_{n=1}^m \frac{2 y_0 \sin \frac{n\pi x_0}{a} \cdot y \cdot \sin \frac{n\pi x}{a}}{Dab \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{b^2}{3} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + (1 - \nu)\right)} = \\ &= \sum_{n=1}^m V_n \cdot y_0 \cdot \sin \frac{n\pi x_0}{a} \cdot y \cdot \sin \frac{n\pi x}{a} \end{aligned} \quad (4.7)$$

სადაც

$$V_n = \frac{2}{Dab \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{b^2}{3} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + 2(1 - \nu)\right)} \quad (4.8)$$

### ვარიანტი "ბ"

ვარიანტ "ბ"-ში ფორმულა (4.7) - ის ნაცვლად გამოყენებულია დაზუსტებული გრინის ფორმულა (3.25):

$$\begin{aligned} \omega_m(x, y) = K(x, y; x_0 y_0) &= \sum_{n=1}^m \frac{2y_0 \sin \frac{n\pi x_0}{a}}{D^*ab \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{b^2}{3} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \frac{4G}{E}\right)} y \cdot \sin \frac{n\pi x}{a} = \\ &= \sum_{n=1}^m V_n^* \cdot y_0 \cdot \sin \frac{n\pi x_0}{a} \cdot y \cdot \sin \frac{n\pi x}{a} \end{aligned} \quad (4.9)$$

სადაც

$$V_n^* = \frac{2}{D^*ab \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{b^2}{3} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \frac{4G}{E}\right)} \quad (4.10)$$

მატრიცის ელემენტები (4.4), (4.6) გამოითვლება ფორმულებით (4.11):



$$W_{vki} = \frac{\partial W_{ki}}{\partial v_i} = \frac{\partial W_{ki}}{\partial x_i} \cos(\widehat{v_l, x}) + \frac{\partial W_{ki}}{\partial y_i} \cos(\widehat{v_l, y}),$$

$$W_{tki} = \frac{\partial W_{ki}}{\partial t_i} = \frac{\partial W_{ki}}{\partial x_i} \cos(\widehat{t_l, x}) + \frac{\partial W_{ki}}{\partial y_i} \cos(\widehat{t_l, y}),$$

$$\varphi_{ki} = \frac{\partial W_{ki}}{\partial v_{ik}} = \frac{\partial W_{ki}}{\partial x_k} \cos(\widehat{v_k, x}) + \frac{\partial W_{ki}}{\partial y_k} \cos(\widehat{v_k, y}),$$

$$\psi_{ki} = \frac{\partial W_{ki}}{\partial t_k} = \frac{\partial W_{ki}}{\partial x_k} \cos(\widehat{t_k, x}) + \frac{\partial W_{ki}}{\partial y_k} \cos(\widehat{t_k, y}),$$

$$\begin{aligned} \varphi_{vki} &= \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial v_i \partial v_k} = \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial x_i \partial x_k} \cos(\widehat{v_l, x}) \cos(\widehat{v_k, x}) + \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial y_i \partial x_k} \cos(\widehat{v_l, y}) \cos(\widehat{v_k, x}) + \\ &+ \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial x_i \partial y_k} \cos(\widehat{v_l, x}) \cos(\widehat{v_k, y}) + \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial y_i \partial y_k} \cos(\widehat{v_l, y}) \cos(\widehat{v_k, y}), \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{tki} &= \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial t_i \partial v_k} = \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial x_i \partial x_k} \cos(\widehat{t_l, x}) \cos(\widehat{v_k, x}) + \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial y_i \partial x_k} \cos(\widehat{t_l, y}) \cos(\widehat{v_k, x}) + \\ &\frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial x_i \partial y_k} \cos(\widehat{t_l, x}) \cos(\widehat{v_k, y}) + \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial y_i \partial y_k} \cos(\widehat{t_l, y}) \cos(\widehat{v_k, y}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{vki} &= \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial v_i \partial t_k} = \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial x_i \partial x_k} \cos(\widehat{v_l, x}) \cos(\widehat{t_k, x}) + \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial y_i \partial x_k} \cos(\widehat{v_l, y}) \cos(\widehat{t_k, x}) + \\ &\frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial x_i \partial y_k} \cos(\widehat{t_k, y}) \cos(\widehat{v_l, x}) + \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial y_i \partial y_k} \cos(\widehat{t_k, y}) \cos(\widehat{v_l, y}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{tki} &= \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial t_i \partial t_k} = \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial x_i \partial x_k} \cos(\widehat{t_l, x}) \cos(\widehat{t_k, x}) + \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial x_i \partial y_k} \cos(\widehat{t_l, x}) \cos(\widehat{t_k, y}) + \\ &\frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial y_i \partial x_k} \cos(\widehat{t_l, y}) \cos(\widehat{t_k, x}) + \frac{\partial^2 W_{ki}}{\partial y_k \partial y_i} \cos(\widehat{t_k, y}) \cos(\widehat{t_l, y}), \end{aligned}$$

სადაც წარმოებულები (4.7)-ის ფუნქციის გამოითვლება:

$$\frac{\partial W(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} = \sum_m \sum_n V_{mn} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} \eta \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

$$\frac{\partial W(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} = \sum_m \sum_n V_{mn} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} \eta \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

$$\frac{\partial W(x, y, \xi, \eta)}{\partial x} = \sum_m \sum_n V_{mn} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{a} \xi \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} \eta \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

$$\frac{\partial W(x, y, \xi, \eta)}{\partial y} = \sum_m \sum_n V_{mn} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} \eta \cos \frac{n\pi}{b} y,$$

(4.12)

$$\frac{\partial^2 W(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi \partial x} = \sum_m \sum_n V_{mn} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \cos \frac{m\pi}{a} \xi \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} \eta \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

$$\frac{\partial^2 W(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta \partial y} = \sum_m \sum_n V_{mn} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin \frac{m\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} \eta \cos \frac{n\pi}{b} y,$$

$$\frac{\partial^2 W(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi \partial y} = \sum_m \sum_n V_{mn} \frac{m\pi^2}{a} \frac{n}{b} \cos \frac{m\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} \eta \cos \frac{n\pi}{b} y,$$

$$\frac{\partial^2 W(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta \partial x} = \sum_m \sum_n V_{mn} \frac{m\pi^2}{a} \frac{n}{b} \sin \frac{m\pi}{a} \xi \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} \eta \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

კოსინუსების მნიშვნელობები შემავალი (4.11)-ში წერტილებისთვის 1, 2 განლაგებული AB გვერდზე (ნახ.4.3):

$$\cos(\widehat{v_{k(l)}, x}) = \cos(\widehat{v_{k(l)}, y}) = \cos(\widehat{t_{k(l)}, y}) = \cos 45 = 0.7071068,$$

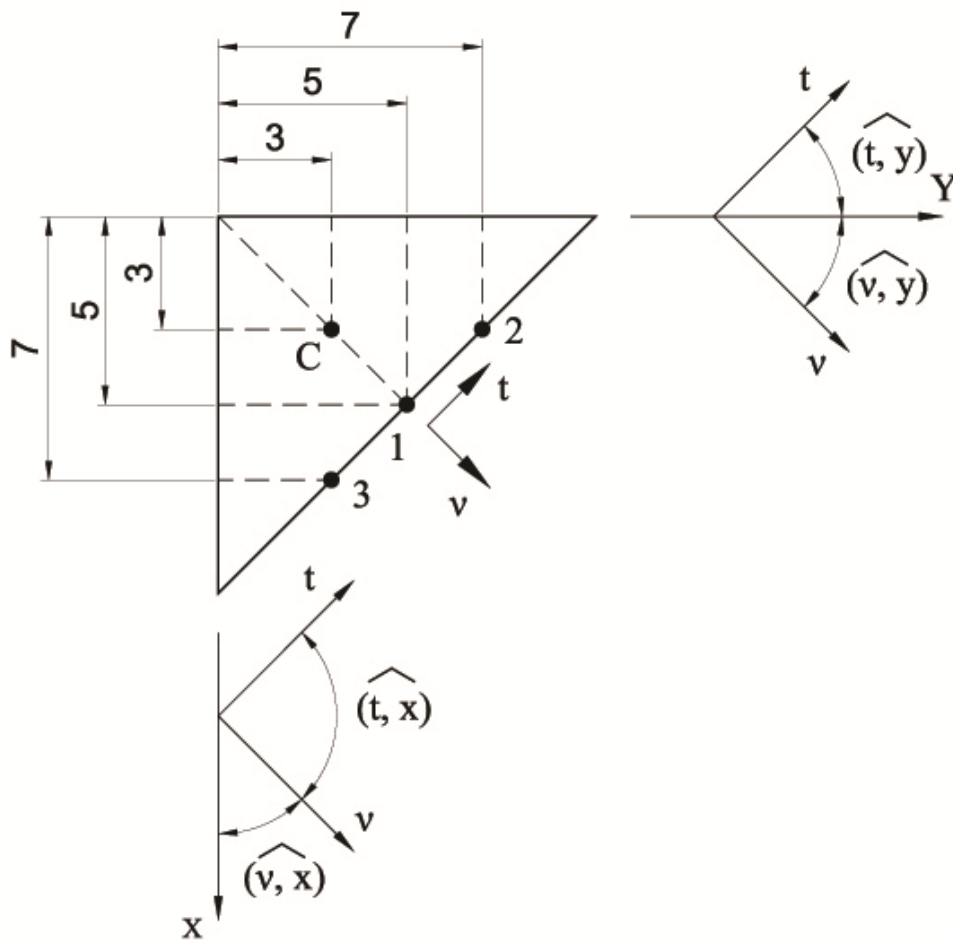
$$\cos(\widehat{t_{k(l)}, x}) = -\cos 45 = -0.7071068. \quad (4.13)$$

უცნობი ძალების გამოთვლის შემდგომ  $P_1; P_2; P_3; M_{v1}; M_{v2}; M_{v3}; M_{t1}; M_{t2}; M_{t3}$  – ჩაღუნვის პოვნა შეიძლება ფირფიტის ნებისმიერ წერტილში  $K(x, y)$  კოორდინატებით  $(x, y)$ .

$$\begin{aligned} \omega(x, y) = & P_1 \omega_k(x, y, x_1 y_1) + P_2 \omega_k(x, y, x_2 y_2) + P_3 \omega_k(x, y, x_3 y_3) + \\ & + M_{v1} \omega_{vk1}(x, y, x_1 y_1) + M_{v2} \omega_{vk2}(x, y, x_2 y_2) + M_{v3} \omega_{vk3}(x, y, x_3 y_3) + \\ & + M_{t1} \omega_{tk1}(x, y, x_1 y_1) + M_{t2} \omega_{tk2}(x, y, x_2 y_2) + M_{t3} \omega_{tk3}(x, y, x_3 y_3) + \\ & + P \omega_k(x, y, x_p y_p) \end{aligned} \quad (4.14)$$

### რიცხვითი მაგალითები

განხილულია სამკუთხა ფირფიტა შემდეგი პარამეტრებით (ნახ. 4.4)



(ნახ. 4.4)

C, 1, 2, 3 წერტილების კოორდინატები

C (3; 3); 1 (5; 5); 2 (3; 7); 3 (7; 3);

შეყურსული ძალა

$P=1 \cdot 10^4$  ან 1 ტ.

გეომეტრიული ზომები

$a = b = 10 \text{ მ} \quad h = 20 \text{ სმ}$

მექანიკური მახასიათებლები

$E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ მპა}; \quad G = 8 \cdot 10^4 \text{ მპა}; \quad \nu = 0.3;$

(4.15)

მოცემული პარამეტრებისთვის (4.15) სისტემა ამოხსნილია შებრუნებული მატრიცის ხერხით და გამოყენებული პროგრამა MATLAB-ი

ანგარიშის შედეგები:

$$\left( \begin{array}{l} (4.7), (4.9), (4.14) \\ (4.15)(\text{ნახ. 4.4}) \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega(3, 3) = V_1 \cdot 69965 = 2.83 \cdot 10^{-10} \cdot 69965 (\text{მ}) = 0.0198 (\text{მმ}) \\ \omega^*(3, 3) = V_1^* \cdot 69965 = 3.03 \cdot 10^{-10} \cdot 69965 (\text{მ}) = 0.0212 (\text{მმ}) \end{array} \right.$$

განსხვავება 7%-ია.

შედარების მიზნით იგივე ამოცანა გადაწყვეტილია სასრული ელემენტების მეთოდითაც. გამოყენებულია პროგრამული კომპლექსი ЛИРА (ПК ЛИРА).

## დასკვნა

მართკუთხა ფირფიტების განივი ღუნვის ამოცანები გადაწყვეტილია რიტცის ენერგეტიკული მეთოდით. დეფორმაციის პოტენციური ენერჯის განსაზღვრისათვის გამოყენებულია ახალი მოდიფიცირებული (დაზუსტებული) გამოსახულება, შედგენილი რ. ჭყოიძის მიერ (სხვებთან თანაავტორობით).

ნათქვამის საფუძველზე მეთოდი, რომელიც ზემოთ აღნიშნულ გარდაქმნას ითვალისწინებს შეიძლება განხილული იქნას, როგორც დაზუსტებული რიტცის ენერგეტიკული მეთოდი.

ერთგვაროვანი იზოტროპიული მართკუთხა ფირფიტისათვის სასაზღვრო პირობების სხვადასხვა შემთხვევაში (კონტურზე სახსრულად დაყრდნობილი; სამ გვერდზე სახსრულად დაყრდნობილი და მეოთხე გვერდი თავუსუფალი) დაზუსტებული ენერგეტიკული მეთოდის გამოყენებით შედგენილია დაზუსტებული გრინის გავლენის ფუნქციები. ძალთა მეთოდით (მოცემული სისტემის გაფართოების მეთოდი) გადაწყვეტილია სამკუთხა ფირფიტის (როგორც რთულკონტურიანის) განივი ღუნვის ამოცანა. ძირითად სისტემად მართკუთხა ფირფიტის და კანონიკურ განტოლებების შესადგენათ ფირფიტის შესაბამისი დაზუსტებული გრინის გავლენის ფუნქციების გამოყენების საფუძველზე ჩამოყალიბდა რთულკონტურიანი ფირფიტების გაანგარიშების დაზუსტებული ძალთა მეთოდი.

განხილულია რიცხვითი მაგალითები. გამოყენებულია როგორც კლასიკურ მექანიკაში არსებული მეთოდები ისე იგივე მეთოდები დაზუსტებული გამოსახულებებით.

შედეგებში განსხვავება მნიშვნელოვანია.

## დისერტაციის ძირითადი შიანაარსი გამოქვეყნებულია

### შემდეგ ნაშრომებში

1. Р. Чкоидзе, И. Степнадзе „Построение функции влияния Грина для прямоугольной пластины, шарнирно опертой по трем и свободной по четвертой стороне“ Научно-технический журнал “Строительство”, #4 (35), 2014 г.
2. Р. Чкоидзе, И. Степнадзе „Построение функции влияния Грина для прямоугольной пластины, шарнирно опертой по контуру“ Научно-технический журнал “Строительство”, #2 (37), 2015 г.
3. Р. Чкоидзе, И. Степнадзе „Построение функции влияния Грина для прямоугольной пластины, шарнирно опертой по трем и свободной по четвертой стороне“ Научно-технический журнал “Архитектура и строительство в Азербайджане” #2 (5). 2015, Баку
4. Р. Чкоидзе, И. Степнадзе „Расчет пластины треугольного очертания в плане“ Научно-технический журнал “Строительство”, #3 (38), 2015 г.

### **Abstract:**

Energy method is used for building Green function for rectangular plate for two cases of contour fixing:

- Hinge supported;
- Three sides - hinge supported and the fourth side free.

Rectangular plate is taken as a basis and the task of lateral bending of triangular plate is solved by using the method of forces (the method of expansion of the given system).

There are two variants of calculation of potential energy given:

- Calculation by formulas adopted in classical theory of elasticity;
- Calculation by modified formulas.

Based on the above mentioned, Green function for main rectangular systems is built using both the method of classical theory of elasticity and the corrected method. Use of corrected formulas for building canonical equations and for solving them enable to solve the problem of triangular plate (complicated contour) bending applying both classical and corrected methods.

Numerical examples are solved.