ნანა მაღლაკელიძე

არაწრფივი დინამიკური ობიექტების მართვის სისტემების სინთეზი სინერგეტიკული მეთოდებით

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
თბილისი, 0175, საქართველო
დეკემბერი, 2008

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემორე ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით ნანა მაღლაკელიძის მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: ''არაწრფივი დინამიკური ობიექტების მართვის სისტემების სინთეზი სინერგეტიკული მეთოდებით'' და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

ხელმძღვანელი:	ვალიდა სესაძე
	ვლადიმერ კეკენაძე
რეცენზენტი:	ზურაბ გასიტაშვილი
რეცენზენტი:	დავით გორგიძე

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

2008

ავტორი: ნანა მღლაკელიძე

დასახელება: არაწრფივი დინამიკური ობიექტების მართვის სისტემების სინთეზი სინერგეტიკული მეთოდებით

ფაკულტეტი : ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

აკადემიური ხარისხი: დოქტორი

სხდომა ჩატარდა: 6 .12.08 სტუ-ს მე-6 კორპუსი, II სართული, ოთახი 210

დისერტაციას დიდი სიყვარულით ვუძღვნი ჩემი ოჯახის წევრებს.

რეზიუმე

თანამედროვე პერიოდში ვითარდება ახალი მეცნიერება-სინერგეტიკა, რომელიც შეისწავლის თვითორგანიზების ზოგად საკითხებს და მოიცავს პრაქტიკულად მეცნიერების ყველა დარგს. ეს ზოგადი მეცნიერება დაფუძნებულია არაწრფივი დინამიკისა და შეუქცევადი პროცესების თერმოდინამიკაზე. ამ ახალი, ინტეგრირებული მეცნიერების არსი მდგომარეობს იმაში, რომ ღია სისტემებში, რომლებშიც ხორციელდება ენერგიის, ნივთიერებისა და ინფორმაციის გაცვლა გარემოსთან წარმოიქმნება თვითორგანიზების პროცესები, ე.ი. ფიზიკური (ბიოლოგიური, ეკონომიკური, სოციალური) ქაოსიდან წარმოიქმნება მდგრადი მოწესრიგებული სტრუქტურები ახალი თვისებებით.

სინერგეტიკა ბერძნული წარმომავლობის სიტყვაა და წარმოსდგება სიტყვისაგან "სინერგენა", რაც ნიშნავს შემწეობას, თანამშრომლობას. სინერგეტიკაში ძირითადი კვლევის საგანია სისტემის ელემენტებს შორის შეთანხმებული ურთიერთქმედებების პროცესის შესწავლა, რაც ერთიანი სტრუქტურის ჩამოყალიბების საფუძველია. სინერგეტიკასთან, როგორც მეცნიერებასთან, რომელიც შეისწავლის არაწრფივი სისტემების ყოფაქცევას წონასწორობის მდგომარეობისაგან დაშორებით ზოგიერთი მმართველი პარამეტრების ცვლილებისას, თავისი იდეოლოგიით ახლოა მართვის გამოყენებითი თეორია. სინერგეტიკის ძირითად ცნებებს წარმოადგენს: ბიფურკაცია, დაქვემდებარება, წესრიგის პარამეტრი, მართვის პარამეტრი და ატრაქტორი. მმართველი პარამეტრების ცვლილების შედეგად არაწრფივმა სისტემამ შეიძლება დაკარგოს წონასწორობა წრფივ მიახლოებაში. იმისათვის, რომ დინამიკურ სისტემაში წონასწორობიდან მოშორებით არსებობდნენ მოწესრიგებული სტრუქტურები, ამ სისტემებზე მუდმივად უნდა მოედინებოდეს ენერგიის, ნივთიერებებისა და ინფორმაციის უწყვეტი ნაკადი. სწორედ თვითორგანიზაცია წარმოადგენს ზემოთ ჩამოთვლილი მრავალფეროვანი სისტემების საერთო თვისებას, რომლებიც შედგებიან ელემენტებისაგან და სხვადასხვა ბუნების ქვესისტემებისაგან-ატომების, მოლეკულების, უჯრედების, ცხოველების და ა.შ. თვითორგანიზაცია რაც არ უნდა პირველი შეხედვით მოგვეჩვენოს უცნაურად საშუალებას გვაძლევს შევისწავლოთ თავისი ბუნებით სხვადასხვანაირი დინამიკური სისტემების თვისებები, ერთიანი მათემატიკური პოზიციებიდან და ერთიანი ცნებებით.

ჩაკეტილი ოპტიმალური დისიპატიური მართვის სისტემების სინთეზი, კერძოდ ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების პრობლემა გადაწყვეტილია სინერგეტიკული მეთოდების გამოყენებით. ნაჩვენებია, რომ ამ ამოცანის გადაწყვეტისას მნიშვნელოვან და დამოუკიდებელ პრობლემას წარმოადგენს შესაბამისი ხარისხის კრიტერიუმის ფორმირება. აღწერილია, რომ მართვის არაწრფივი ობიექტების ოპტიმალური ალგორითმების სინთეზის პრობლემის გადაწყვეტამ მიგვიყვანა ОРАК-ის მეთოდის შექმნასთან, სადაც ოპტიმიზირებულ ფუნქციონალს გააჩნია ნახევრადგანსაზღვრული სახე. ამ შემთხვევაში სინთეზის ამოცანა დაიყვანება კერძოწარმობულებიანი

წრფივი განტოლების ამოხსნამდე, რაც საშუალებას იძლევა ზოგიერთი კლასის არაწრფივი ობიექტების მართვის მოსაძებნად ავაგოთ სინთეზის რიცხვითი პროცედურები.

ჩაკეტილი ოპტიმალური დისიპატიური მართვის სისტემების კლასიფიკაციის მიზნით განხილულია, აგრეთვე, სკალარული და ვექტორული მართვის შემთხვევა ცალ-ცალკე. განხილულუა რიგი მაგალითები, რომლებიც გვაძლევენ საშუალებას შევაფასოთ მართვის ოპტიმალური დისიპატიური სისტემების სინთეზის მეთოდის ეფექტურობა ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების კლასიკურ მეთოდთან შედარებით. ამ თავში შესწავლილია ჩაკეტილი დისიპატიური სისტემების ფუნდამენტალურ ფიზიკური თვისებები, რომლებიც საშუალებას იძლევიან ძირეულად წამოვწიოთ ОРАК –ის პრობლემის გადაწყვეტა. რასაკვირველია ეს მიდგომა მოითხოვს შემდგომ განვითარებას მართვის სისტემების სხვადასხვა კლასებთან მიმართებაში.

არაწრფივი რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების ამოცანის გადაწყვეტა სინერგეტიკული მეთოდით, რომელიც ემყარება მდგომარეობათა სივრცეში სისტემის კოორდინატებს შორის ფუნქციონალური დამოკიდებულების-ატრაქტორების შემოღებას, რომლებზედაც ობიექტის ბუნებრივი თვისებები საუკეთესოდ ეთანადება მართვის ტექნოლოგიურ მოთხოვნებს. სინერგეტიკული მიდგომის მიხედვით დამყარებულია შესაბამისობა ინვარიანტულ მრავალსახეობებსა და საოპტიმიზირებელ ფუნქციონალებს შორის. განხილულია არაწრფივი აგრეგირებული რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების განზოგადოებული მეთოდი, რომელიც დაფუძნებულია ფაზურ სივრცეში მიმზიდავი მრავალსახეობების თანმიმდევრობის შემოტანაზე, წარმოადგენს სინთეზირებული სისტემების შეშფოთებული მოძრაობის ასიმპტოტური მდგრადობის გარანტიას ე.ი. გადავწყვეტილია არაწრფივი სისტემების სტაბილიზაციის ამოცანა. უზრუნველყოფილია გარდამავალი პროცესების მილევადობის საჭირო დრო და ა.შ. განხილულია არაწრფივი რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების მეთოდის თავისებურებები სხვადასხვა ბუნების არაწრფივი ობიექტების სკალარული მართვის სისტემების სინთეზის ამოცანის გადაწყვეტისას.

Abstract

In the present period the new science-Synergetics is developed, which studies the general questions of the self-organisations and covers practically all branches of the science. It is the general science based on thermodynamics of irreversible processes and dynamics of nonlinear systems. The essence of this integrated science is that in open systems the exchange of energy, substance and information with environment is carried out. There are processes of self-organising. It means that from physical(biological, economic and social) chaos steady ordered structures with new properties will be formed.

The synergetics-is a derivative from ancient Greek “synergos”, which means cooperation. In synengetics the main subject of studying is mutually coordinated processes between system elements that is a basis for a statement of uniform structure. The applied theory of management is close to synenmetics as studying behaviour of nonlinear systems in a distance from an equilibrium condition at change of same operating parameres on the ideology to the science. The basic concepts of synergetics are: bifurcation, subordination, order parameter, parameter of management and attractor, As a result of changes of operating parameters the nonlinear system can lose a pile stability in linear approach, That is dynamic system in the distance from balance there were ordered structures, on this system should arrive continuous streams of energy, substances and information.

Self-organising is the general property of diverse systems,, which consist of elements and various subsystems-atoms, molecules, cages, animals etc.

Self-organising gives possibility to study properties of dynamic systems different in the nature from united mathematical positions and united concepts.

Synthesis of closed optimum dissipative operating systems and privately the problem of analytical designing of optimum regulators is solved by the use of synergetic methods. It is shown, that while solving this, considerable and independent problem is formation of corresponding qualities. It is described that the decision of the problem of optimum algorithms synthesis has resulted nonlinear objects to creation of the method of analytical designing of aggregated regulations, where optimizing functional has a semicertain appearance.

In this case a synthesis problem is lead to the decision of private linear equation that gives possibility for finding managements of same nonlinear objects to construct digital procedures of synthesis.

For classification of closed optimum dissipative systems are cinsiderer\d also a case of scalar and vector control separately. Are considered a number of examples, which give the chance to estimate efficiecy of a method of synthesis optimum dissipative systems of control in comparison with Classical metod of analytical designing of optimum regulators. In this work fundamental physical propertiesof closed dissipative systems are studied, witch give the cgance to bring up thoroughly problem of the decision of analytical designing of optium regulators. Obviously, this approach demands the subsequent development in relation to different classes of control systems.

Problem decisions of synergetic method, wich is based on carried in functional dependence in space of positions of attrectors on wich natural properties are arranged with technological requirements of control. By the synergetic approachis established conformity between invariant diverses and optimizing functions.

The generalized method of analytical designing of the nonlinear aggregated regulators wich is based on carried in phase space of sequence drawind variety is a guaranteeaf asymtotive stability of the synthesized systems raising movement. The problem of stabilization of nonlinear systems is solved. Necessary time of repayment of transients is provided etc.

Features of the method of analytical designin of the aggregated regulations at the decision of problems of synthesis of systems of scalar management for nonlinear objects of the different nature are considered.

შინაარსი

ნახაზების ნუსხა

მადლიერება

მადლობა მინდა გადავუხადო ყველა იმ ადამიანს, ვინც მეხმარებოდა სადისერტაციო ნაშრომის შესრულობის პროცესში.

უპირველეს ყოვლისა, მინდა დიდი მადლიერების გრძნობით ავღნიშნო აწ გარდაცვლილი, ბატონ ალმასხან გუგუშვილის უდიდესი მხარდაჭერა და წვლილი, ვისი თანადგომაც ჩემთვის ფასდაუდებელი იყო.

უნდა აღვნიშნო ჩემი ხელმძღვანელების, ქალბატონ ვალიდა სესაძის და ბატონ ვლადიმერ კეკენაძის, მხარდაჭერა და დახმარება, რისთვისაც მადლიერების გრძნობით მინდა გამოვხატო მათდამი უდიდესი პატივისცემა.

დიდი მადლობა ჩემს მეგობარს და კოლეგას, ია მოსაშვილს, დახმარებისა და თანადგომისათვის.

შესავალი

თანამედროვე პერიოდში სწრაფად ვითარდება ახალი დისციპლინათშორისი მიმართულება ბუნებისმეტყველებაში-მეცნიერება თვითორგანიზაციის პროცესების შესახებ, რომელიც მოიცავს ჩვენი გარემოცვისა და არსებობის ყველა სფეროს. საერთაშორისო მათემატიკურ ლიტერატურაში ამ ფუნდამენტალურ მიმართულებას სულ უფრო ხშირად უწოდებენ “არაწრფივ მეცნიერებას” (nonlinear science), ხოლო ჩვენში -“არაწრფივ დინამიკას”. სინერგეტიკის არსი მდგომარეობს სხვადასხვა ბუნების არაწრფივი დინამიკური სისტემებში (ფიზიკური, ქიმიური, ბიოლოგიური, ეკოლოგიური, ტექნიკური და ა.შ.) უნივერსალური კანონზომიერებების გამოვლენაში. ამ ზოგადი თვითორგანიზაციის პრინციპების გამოვლენისათვის საჭიროა სისტემური მიდგომა და სხვადასხვა მეცნიერების გაერთიანება.

სინერგეტიკის ძირითად ცნებებს წარმოადგენს: ბიფურკაცია, დაქვემდებარება, წესრიგის პარამეტრი, მართვის პარამეტრი და ატრაქტორი. აღმოჩნდა, რომ წონასწორობის დაკარგვას წრფივ მიახლოებაში, წესრიგის პარამეტრების წარმოშობასა და დაქვემდებარების პრინციპის რეალიზაციას შორის არსებობს მნიშვნელოვანი შინაგანი ურთიერთკავშირი. მმართველი პარამეტრების ცვლილების შედეგად არაწრფივმა სისტემამ შეიძლება დაკარგოს წონასწორობა წრფივ მიახლოებაში. სინერგეტიკულ სისტემებში შეიძლება წარმოიშვეს, როგორც მოწესრიგებული, ასევე ქაოსური რხევები. იმისათვის რომ დინამიკურ სისტემაში წონასწორობიდან მოშორებით არსებობდნენ მოწესრიგებული სტრუქტურები ამ სისტემებზე მუდმივად უნდა მოედინებოდეს ენერგიის, ნივთიერებებისა და ინფორმაციის უწყვეტი ნაკადი. სწორედ თვითორგანიზაცია წარმოადგენს ზემოთ ჩამოთვლილი მრავალფეროვანი სისტემების საერთო თვისებას, რომლებიც შედგებიან ელემენტებისაგან და სხვადასხვა ბუნების ქვესისტემებისაგან-ატომების, მოლეკულების, უჯრედების, ცხოველების და ა.შ თვითორგანიზაცია რაც არ უნდა პირველი შეხედვით მოგვეჩვენოს უცნაურად საშუალებას გვაძლევს შევისწავლოთ თავისი ბუნებით სხვადასხვანაირი დინამიკური სისტემების თვისებები, ერთიანი მათემატიკური პოზიციებიდან და ერთიანი ცნებებით.

აქტუალობა: სადისერტაციო ნაშრომი ეძღვნება ახალი ინტეგრირებული მეცნიერების-სინერგეტიკის საფუძვლების გამოყენებას, რომელიც მოწოდებულია შეისწავლოს კოლექტიური თვითორგანიზაციის პროცესები და პრაქტიკულად მოიცვას თანამედროვე მეცნიერების ყველა დარგი.

პრაქტიკული ღირებულება. სადისერტაციო ნაშრომში განხილული არაწრფივი დინამიკური სისტემების სინთეზის საკითხებს გააჩნიათ პრაქტიკული ღირებულება, რადგანაც, მასში ნაჩვენებია სინერგეტიკული მიდგომის წარმატებული გამოყენების შესაძებლობა ეკონომიკის, ეკოლოგიის, ბიოტექნოლოგიის და სხვ. სისტემების მართვის ამოცანებში. დისერტაციაში მოტანილია სინერგეტიკული მიდგომის გამოყენების მრავალი მაგალითი სხვადასხვა არაწრფივი დინამიკური ობიექტების სინთეზისათვის.

სიახლე. სინერგეტიკა, რომელიც შეისწავლის არაწრფივი სისტემების ყოფაქცევას მმართველი პარამეტრის ცვლილებისას, თავისი იდეოლოგიით ყველაზე უფრო ახლოა მართვის გამოყენებით თეორიასთან. ამდენად, ძალზე პერსპექტიულია თანამედროვე მართვის თეორიის შესწავლის მიზნით სინერგეტიკული სისტემების თვისებების გადატანა არაწრფივი მართვის ტექნიკური სისტემების კონსტრუირებისათვის. ნაშრომში ნაჩვენებია, რომ არაწრფივი სისტემების სინთეზის ამოცანის გადაწყვეტა სინერგეტიკული პრინციპების გამოყენებით დაიყვანება რიცხვით დამოკიდებულებებზე.

კვლევის მეთოდები: მართვის კლასიკური მეთოდები, არაწრფივი სისტემების მართვის მეთოდები, ოპტიმალური მართვის მეთოდები.

სადისერტაციო ნაშრომი შედგება 3 თავისაგან, დასკვნისაგან, დანართისა და გამოყენებული ლიტერატურის სიისაგან.

სადისერტაციო ნაშრომის პირველ თავში გადმოცემულია სინერგეტიკული კონცეფციის როლი მართვის თეორიაში. ნაჩვენებია, რომ სინერგეტიკულ სისტემებში თვითორგანიზების და დისიპატიური სტრუქტურების (ატრაქტორების) წარმოქმნის პროცესებში ადგილი აქვს თავისუფლების ხარისხის შემცირებას მაკროცვლადების, ხარისხის პარამეტრების, გამოყოფის ხარჯზე, რომლებიც განსაზღვრავენ სისტემის დინამიკის თავისებურებებს. აღწერილია, რომ თვითორგანიზების პროცესის

შედეგს წარმოადგენს ატრაქტორების წარმოქმნა, რომლებიც მიიზიდებიან სისტემის ტრაექტორიისაკენ. მითითებულ ატრაქტორებს აქვთ უფრო მცირე განზომილება სისტემის საწყის განზომილებასთან შედარებით, რაც განაპირობებს სისტემის მიერ საწყისი მდგომარეობის "დავიწყებას", თუ საიდან იწყება სისტემის მოძრაობა ატრაქტორისაკენ. ამის შედეგად მიიღება არაწრფივი დიფერენციალური სისტემების ინვარიანტული ამონახსნები. თითოეულ ატრაქტორს ფაზურ სივრცეში გააჩნია თავისი მიზიდვის არე და შესაძლებელია გამოყოფილი იქნეს ამ არეების გამყოფი საზღვარი. ამიტომაც ამ საზღვართან მცირე ცვლილებამ საწყის პირობებში შეიძლება გამოიწვიოს არაწრფივი სისტემის განსხვავებული ყოფაქცევა ამ საზღვართან. ამ მოვლენას უწოდებენ თვითორგანიზების პროცესს დისიპატიურ სისტემებში. ამ თავში განმარტებულია სინერგეტიკის ძირითადი ცნებები, კერძოდ ქაოსი და ბიფურკაცია.

სადისერტაციო ნაშრომის მეორე თავში განხილულია ჩაკეტილი ოპტიმალური დისიპატიური მართვის სისტემების სინთეზი, კერძოდ ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების პრობლემის გადაწყვეტა სინერგეტიკული მეთოდების გამოყენებით. ნაჩვენებია, რომ ამ ამოცანის გადაწყვეტისას დამოუკიდებელ პრობლემას წარმოადგენს შესაბამისი ხარისხის კრიტერიუმის ფორმირება. აღწერილია, რომ მართვის არაწრფივი ობიექტების ოპტიმალური ალგორითმების სინთეზის პრობლემის გადაწყვეტამ მიგვიყვანა ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების მეთოდის შექმნასთან, სადაც ოპტიმიზირებულ ფუნქციონალს გააჩნია ნახევრადგანსაზღვრული სახე. ამ შემთხვევაში სინთეზის ამოცანა დაიყვანება კერძოწარმობულებიანი წრფივი განტოლების ამოხსნამდე, რაც საშუალებას იძლევა ზოგიერთი კლასის არაწრფივი ობიექტების მართვის მოსაძებნად ავაგოთ სინთეზის რიცხვითი პროცედურები.

ჩაკეტილი ოპტიმალური დისიპატიური მართვის სისტემების კლასიფიკაციის მიზნით განხილულია, აგრეთვე, სკალარული და ვექტორული მართვის შემთხვევა ცალ-ცალკე. მოტანილია რიგი მაგალითები, რომლებიც გვაძლევენ საშუალებას შევაფასოთ მართვის ოპტიმალური დისიპატიური სისტემების სინთეზის მეთოდის ეფექტურობა ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების კლასიკურ მეთოდ-

თან შედარებით. ამ თავში შესწავლილია ჩაკეტილი დისიპატიური სისტემების ფუნდამენტალურ ფიზიკური თვისებები, რომლებიც საშუალებას იძლევიან ძირეულად წამოვწიოთ ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების გადაწყვეტა. რასაკვირველია ეს მიდგომა მოითხოვს შემდგომ განვითარებას მართვის სისტემების სხვადასხვა კლასებთან მიმართებაში.

სადისერტაციო ნაშრომის მესამე თავში განხილულია არაწრფივი რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების ამოცანის გადაწყვეტა სინერგეტიკული მეთოდით, რომელიც ემყარება მდგომარეობათა სივრცეში სისტემის კოორდინატებს შორის ფუნქციონალური დამოკიდებულების-ატრაქტორების შემოღებას, რომლებზედაც ობიექტის ბუნებრივი თვისებები საუკეთესოდ ეთანადება მართვის ტექნოლოგიურ მოთხოვნებს. სინერგეტიკული მიდგომის მიხედვით დამყარებულია შესაბამისობა ინვარიანტულ მრავალსახეობებსა და საოპტიმიზირებელ ფუნქციონალებს შორის. განხილულია ახალი სინერგეტიკული მიდგომის შესაძლებლობანი, რომლებიც დაფუძნებულია შემოტანილი ინვარიანტული მრავალსახეობების-ატრაქტორების კონცეპციაზე, რათა გამოვლენილ იქნეს ახალი პერსპექტიული მიმართულებები ფართო კლასის არაწრფივი, მრავალგანზომილებიანი და მრავალკავშირიანი ობიექტების მართვის სისტემების კონსტრუირების პრობლემების გადაწვეტისათვის. ამ პრობლემის არსი მდგომარეობს უარყოფითი და დადებითი არაწრფივი უკუკავშირების გენერაციის ანალიზური მეთოდების დამუშავებაში.
განხილულია არაწრფივი აგრეგირებული რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების განზოგადოებული მეთოდი, რომელიც დაფუძნებულია ფაზურ სივრცეში მიმზიდავი მრავალსახეობების თანმიმდევრობის შემოტანაზე, წარმოადგენს სინთეზირებული სისტემების შეშფოთებული მოძრაობის ასიმპტოტური მდგრადობის გარანტიას ე.ი. გადავწყვეტილია არაწრფივი სისტემების სტაბილიზაციის ამოცანა. უზრუნველყოფილია გარდამავალი პროცესების მილევადობის საჭირო დრო და ა.შ.

შემოთავაზებული სინთეზის მეთოდი თავისი არსით ეფუძნება საწყისი n რიგის ამოცანის განზომილებათა კლებადი r რაოდენობის ქვეამოცანის $(n-r)$ რიგის ქვეამოცანაზე მიმდევრობით დეკომპოზიციას. ამასთან, საწყის ფაზურ სივრცეში საერთო მოძრაობის დაყოფა

პარციალურ მოძრაობებად დაფუძნებულია განსახილეველი ობიექტების არა რომელიმე მიახლოვებულ თვისებაზე, არამედ გამომსახველი წერტილის ერთი მრავალსახეობებიდან სხვანაკლები განზომილების მრავალსახეობაზე დროში მიმდევრობით გადაყვანაზე

ზემოთ აღწერილი მიმზიდველი მრავალსახეობების სიმრავლეთა პარალელურად და მიმდევრობით შემოტანის მეთოდების გაერთიანების ამოცანა გავაერთიანებულია ერთ განზოგადოებულ მეთოდად, რომელსაც შენარჩუნებული ექნება ორივე მეთოდის უპირატესობანი. ამ თავში ჩამოყალიბებული არაწრფივი რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების განზოგადოებული მეთოდი რამოდენიმე მართვის შემთხვევაში ემყარება ორ ძირითად პროცედურას: პირველ რიგში $u_s(x_1,...,x_n)$ მართვის სინთეზს, რომელიც უზრუნველყუფს გამომსახველი წერტილის გადაყვანას მრავალსახეობა $\psi_s = 0$-ის გადაკვეთაზე და მეორე რიგში შიგა მართვის $\varphi_1(x_1,...,x_{n-2}),...,\varphi_{n-1}(x_1)$ სინთეზს, რომელთაც მიმდევრობით გადაჰყავს გამომსახველი წერტილი პირველი მრავასახეობის $\varphi_{\mu 1} = 0$ მიდამოში, შემდეგ მეორის $\varphi_{\mu 2} = 0$ და ა.შ. მის მოხვედრამდე ფაზური სივრცის კოორდინატთა სათავეში.

განხილულია არაწრფივი რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების მეთოდის თავისებურებები სხვადასხვა ბუნების არაწრფივი ობიექტების სკალარული მართვის სისტემების სინთეზის ამოცანის გადაწყვეტისას.

1. სინერგეტიკული კონცეფცია მართვის თეორიაში

1.1 ერთიანი მიდგომა მართვის მეთოდებისადმი

ჩვენს გარემომცველ სამყაროზე თანამედროვე ხოლისტიკური (ერთიანი) შეხედულებები ხასიათება სისტემური მიდგომით, რომელშიც კლასიკურ ბუნებისმეტყველებაში ტრადიციულ რედუქციონისტულ მიდგომასთან შედარებით უპირველესია სინთეზის პროცესები. რასაკვირველია, ხოლისტიკური მიდგომა არ არის ხისტად ანტაგონისტური რედუქციონისტურისადმი, ამ სიტყვის პირდაპირი გაგებით, იგი მიისწრაფის შეუნარჩუნოს მისი დადებითი მხარეები, მიანიჭოს მათ დიდი ორიგინალობა და სისტემურობა. მნიშვნელოვანია აღვნიშნოთ, რომ კლასიკურ ბუნებისმეტყველებაში, რომელშიც მთავარია რედუქციონისტური მიდგომა, ხოლისტიკური აზრის ელემენტი ბუნებრივ მოვლენაზე ყოველთვის იყო შეტანილი თვით მეცნიერების სტრუქტურაში, მისი ფუნდამენტალური პრინციპების ფორმის სახით (მაგალითად ფიზიკის ვარიაციული პრინციპები, მონანდ ლეიბნიცის თეორია და სხვ. ნათელია განეკუთვნებიან ხოლისტიკურ მიდგომას).

თანამედროვე ხოლისტიკური ხედვა სამყაროს ბუნებრივ მეცნიერულ სურათზე, რომელიც მოიცავს ფიზიკურ, ბიოლოგიურ და სხვა პროცესებს, ეფუძვნება ბუნებრივ მოვლენების საყოველთაო კავშირის ფუნდამენტალურ პრინციპსა და განვითარების პრინციპს. ამასთან ერთად გამოიყოფა ბუნებრივი სისტემების ფიზიკური (ბიოლოგიური) ბირთვი, როგორც ერთობლიობა, მატერიის დაბალი რედუქციონისტული ფორმებისა თავისი მოძრაობის კანონებით. უმაღლესი ხოლისტიკური წარმოდგენები ეფუძნება უდაბლეს ფორმებს, აკუთვნებს რა პირველხარისხობრივ როლს სტრუქტურულ მახასიათებლებლებსა და ბუნებრივ მოვლენებს შორის კავშირებს და მათ თვისებებს. ნათელია რომ ეს ორი მიდგომა-რედუქციონისტული და ხოლისტიკური შეფარდებითია და ურთიერთშექცევადია, რადგანაც ეს მიდგომები თავისი შინაარსითა და აზრით მიისწრაფვიან ერთი და იგივე მიზნისაკენ-გამოავლინოს ინტეგრაციული და სინთეზირებადი მდგომარეობები მეცნიერებაში და ამით მიღწეულ იქნეს მისი ერთიანობა და მთლიანობა. მნიშვნელოვანია შევე-

ცადოთ გამოვავლინოთ ძირითადი რედუქციონისტული თავისებურებები და ხოლესტიკური ტენდენციები მართვის თეორიაში.

ცნება „მართვა" ძველთაგანვე ატარებდა პასიურ, დამკვირვებლურ ხასიათს ე.ი. ის არ ითვალისწინებდა შესასწავლი სისტემის დინამიკაზე მიზანმიმართულ ზემოქმედებებს. ნიუტონისებრი და განსაკუთრებით მეცნიერებაზე თანამედროვე შეხედულებები დიდად არის დამოკიდებული მმართველობით მიდგომაზე, ამასთან ერთად, სისტემის მდგომარეობის დამოუკიდებელი კოორდინატები საწყისი მნიშვნელობიდან მართვის ზემოქმედებით შეიძლება გადაიქცეს ნაწილობრივ ან მთლიანად დამოკიდებულად სისტემის საჭირო ტრაექტორიაზე მოძრაობის მიზნის უზრუნველსაყოფად. შემდგომში ჩვენ ძირითადათ განვიხილავთ მართვად დინამიკურ სისტემებს და მათ თვისებებს.

გადავიდეთ მართვის თეორიაში რედუქციონისტულ და ხოლისტიკური ტენდენციების გამოვლენაზე. თანამედროვე მართვის თეორიებში პროცესების გავრცელებული აღწერა მდგომარეობის სივრცის განტოლებების სახით, უფრო ახლოა რედუქციონისტურ მიდგომასთან. ეს აიხსნება იმით, რომ გამოყენებული მდგომარეობის კოორდინატები ფაქტიურად მნიშვნელოვნებით უტოლდება ერთმანეთს და მათ შორის არ მყარდება რაიმე კავშირი ან იერარქიული დაქვემდებარება, აქ კოორდინატები არ არიან დაჯგუფებული ფუნქციონალურ ბლოკებში ან ქვესისტემებში, რაც მოგვცემდა საშუალებას გაგვეხორციელებინა დეკომპოზიცია მისი ფიზიკური სტრუქტურის საფუძველზე. მაგალითად, ამ აზრით სისტემის გარეგანი აღწერა „შესასვლელი–გამოსასვლელი" კავშირის სახით უფრო ახლოს არის ხოლისტიკურ მიდგომასთან, რადგან ის არ შეიცავს ინფორმაციას ლოკალურ პროცესებზე და დაფუძნებულია მხოლოდ იმ ასახვასთან, რომელიც აკავშირებს სისტემის შესასვლელს გამოსასვლელთან. თუმცა სისტემის შინაგანი აღწერა შეიცავს არსებითად უფრო მეტ ინფორმაციას მისი მოქმედების საშუალებებზე, რადგანაც ასეთი აღწერა ქმნის მის გარეგან აღწერას. ცნობილია, რომ სისტემის მოდელის აგებისას დაისმება ეგრეთწოდებული რეალიზაციის ამოცანა, რომლის თანახმადაც აუცილებელია გაირკვეს შინაგანი და გარეგანი აღწერის სრულყოფილება [1].

მართვის თეორიაში, მაგალითად კრიტერიალური მიდგომის გამოყენება, ახლოს არის ხოლისტიკურ შეხედულებასთან, რადგან უშუალოდ დაკავშირებულია მეცნიერების ვარიაციულ პრინციპებთან. არჩეული ოპტიმიზირებული ფუნქციონალი (ან ხარისხის კრიტერიუმი) უნდა ასახავდეს სისტემის გლობალურ თვისებებს, რომლებიც უწესებს შეზღუდვებს მის ნებისმიერ ლოკალურ მოძრაობებს. ეს მოძრაობები უცილობლად უნდა აკმაყოფილებდნენ რომელიმე ფუნქციონალის ექსტრემუმს. აქედან გამომდინარე მართვის სისტემების თვისებების შეფასება გარდამავალი პროცესების კონკრეტული პარამეტრებით, განეკუთვნება რედუქციონისტულ მიდგომას, რადგანაც მდებარეობს იერარქიული კიბის ყველაზე დაბალ საფეხურზე: ფუნქციონალი (ხარისხის კრიტერიუმი)-მდგომარეობის განტოლება, რომლებიც ანიჭებს ფუნქციონალს ექსტრემუმს მოძრაობის ტრაექტორიებზე-გარდამავალი პროცესები, რომლებიც წარმოადგენენ ამ განტოლებების ამონახსნებს სისტემის კერძო სასაზღვრო პირობებისათვის.

გავაგრძელოთ მართვის თეორიაში ხოლისტიკური ტენდენციების შესწავლა და შევეცადოთ გამოვავლინოთ მათი არსი ზოგად ფიზიკური კანონზომიერებებზე დაყრდნობით. ერთ-ერთი ყველაზე გავრცელებული ხოლისტიკური ცნებაა „კავშირი", რადგანაც ის წარმოადგენს ერთ-ერთ საბაზო ხარისხობრივ მაჩვენებელს. ცნება „სისტემა" გულისხმობს კავშირს ზოგიერთი ელემენტების ერთობლიობისა, რომლებიც ქმნიან სისტემის სტრუქტურას და ამიტომაც სტრუქტურული კავშირების რღვევისას ქრება თვით სისტემაც. მართვის სისტემებში, რომლებიც აღიწერება დიფერენციალური განტოლებებით, კავშირურთიერთობა ასახავს დინამიკური ურთიერთობების ხასიათს კომპონენტებს შორის, რომლებიც იერარქიულად განეკუთვნება შესაბამის სისტემას [2].

როგორც ცნობილია, მართვის სისტემების განმასხვავებელ თავისებურებას წარმოადგენს მათი დინამიკური აღწერილობა, ე.ი. ფიზიკური (ქიმიური, ბიოლოგიური) ობიექტის წარმოდგენა მოძრაობაში. ამ სისტემებში მიმდინარე პროცესები ასახავენ ზოგიერთი ლოკალური იმ ქვესისტემების (ელემენტების), ურთიერთზემოქმედების რეაქციას, რომლებისგანაც შედგება მართვის სისტემა.

ამრიგად, ჩვენი გარემომცველი რეალური სამყაროს აღწერაში მნიშვნელოვანი როლი უკავია მართვის სისტემაში კომპონენტებს შორის ურთიერთქმედებას. ამასთან, ნებისმიერი ბუნებრივი მოვლენა შეცნობადია მხოლოდ სხვა მოვლენებთან ურთიერთკავშირით. ეს დაკავშირებული მოვლენები შეიძლება აღწერილ იქნეს ჰოლისტიკური ხედვით როგორც ერთობლივი წარმოდგენა ბუნებრივ პროცესზე. ყველა ბუნებრივი სისტემა, მათ შორის ცოცხალი ორგანიზმებიც, ცალკეული პოპულაციიდან ბიოსფერომდე-ეკოლოგიურ კომპლექსებამდე ორგანიზებულნი არიან გარკვეულ ფუნქციონალურ ერთიანობაში, რომლებიც აწარმოებენ ურთიერთგაცვლას ერთმანეთთან ნივთიერებებით, ენერგიით და ინფორმაციით. ცხადია, რომ ამათგან ინფორმაცია წარმოადგენს მართვის წყაროს როგორც ცალკეული კომპონენტების ასევე მთლიანი სისტემის მართვისა და მდგომარეობისა.

ამჟამად წარმოიშვა აუცილებლობა გამოვლენილიყო მართვის ისეთი მექანიზმები, რომლებიც მოქმედებენ ბუნებრივ სისტემებში და საფუძვლად უდევს მათ ფუნქციონირებას და განვითარებას. თვალნათლივ შეიძლება წარმოვიდგინოთ, რომ მოცემული მექანიზმები უნდა ბაზირებდნენ, ბუნებრივი სისტემების, ნივთიერებების ენერგიისა და ინფორმაციის მართვადი ურთიერთქმედების კონცეფციას.

შევჩერდეთ ისეთ მნიშვნელოვან ჰოლისტიკურ ცნებაზე, როგორიცაა, სიმეტრია. სიმეტრია ბუნებრივ სისტემებში წარმოადგენს ფიზიკური ურთიერთქმედების თანამედროვე თეორიის ერთ-ერთ ფუნდამენტალურ ცნებას. ის არსებობს ყველგან სადაც კი არსებობს კავშირები რომელიმე ობიექტის ან სისტემის ნაწილებს შორის [1,3,7].

სიმეტრიის ძალოვან ველებსა და ნაწილაკებს შორის ურთიერთკავშირის თეორიის საფუძველზე თანამედროვე ფიზიკოსები მივიდნენ არაორდინალურ დასკვნამდე,რომ ჩვენ ვცხოვრობთ მრავალგანზომილებიან (უფრო ზუსტად თერთმეტგანზომილებიან) სამყაროში. ამ თეორიის თანახმად, სამგანზომილებიან სამყაროს, რომელიც ჩვენ გარშემო გვაკრავს ემატება სივრცულ-დროებითი განზომილებები, რომლებიც წარმოადგენენ ძალებს ან ზემოქმედებებს. სიმეტრიაში გამოვლინდება სტრუქტურებისა და სისტემების თვისებების ერთობლიობა. ამავე დროს, სიმეტრია ეს არის გარკვეული სახის აკრძალვა ბუნებრივი პროცესების

ვარიანტების შესაძლო რაოდენობაზე. ნაჩვენები აკრძალვები რეალიზდება ბუნებრივ მოვლენების შესაბამისი შენახვის კანონების მეშვეობით. მაგალითად, ფიზიკაში სიმეტრიის იდეა საფუძვლად უდევს ელემენტარულ ნაწილაკების კლასიფიკაციას. ქიმიაში ის გამოვლინდება პერიოდული კანონის სახით, ბიოლოგიაში - მემკვიდრეობის შენარჩუნების კანონში, მათემატიკაში კი - ჯგუფების თეორიაში და ა.შ

ზოგადად, სიმეტრია წარმოადგენს ნაწილაკების გარკვეული მოწესრიგებულობას, რომლებიც ქმნიან მთლიანს. თავის მხრივ მოწესრიგებულობა იძლევა შესაძლებლობას შეკუმშოს ინფორმაცია ბუნებრივი ობიექტების სტრუქტურის შესახებ მასში გარკვეული ბლოკების გამოყოფის გზით და ამ ბლოკების აგების წესის ცოდნით. თუმცა ბუნებრივ სისტემებში სიმეტრიის თვისებას სისტემაში ყოველთვის ერთვის ასიმეტრია ე.ი რღვევა. სიმეტრიის გამოვლინდება ბუნებრივი პროცესების თვისებების ერთგვარი განზოგადება, ხოლო ასიმეტრიაში კი განსხვავება და მრავალფეროვნება. ჩვენი გარემომცველი სამყაროს ყველა მოვლენა მოიცავს სიმეტრიისა და ასიმეტრიის დიელექტრიკულ ერთობას, რომელიც ასახავს შენახვისა და ცვლილების თვისებებს და წარმოადგენს წესრიგისა და უწონასწორობის მიზეზებს, კანონზომიერებისა და შემთხვევითობის ერთიანობას. მნიშვნელოვანია აღვნიშნოთ, რომ ბუნებრივ სისტემებში სიმეტრიისა და ასიმეტრიის ფუნდამენტალური თვისება არის არა მხოლოდ ზოგადმეცნიერული კონცეფცია, რომელსაც გააჩნია გარკვეული ფილოსოფიური შინაარსი. ის გვაძლევს საშუალებას გამოვავლინოთ რაღაც კონსტრუქციული საწყისი რომელიც უდევს საფუძვლად განსახილველ ბუნებრივ პროცესს. ასეთი მნიშვნელოვანია სიმეტრიის და სტრუქტურის ცნება. სიმეტრიის და სტრუქტურის ცნება განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია არაწრფივი დისიპატიური სისტემების გამოკვლევისას რომელთათვისაც დამახასიათებელია ინტენსიური დინამიკური ურთიერთქმედებები. ასეთ სისტემებში შეიძლება წარმოიშვას ე.წ თვითმოძრაობის პროცესები (თვითორგანიზაცია), რომლებიც შეუძლებელია არსებობდეს წრფივ სისტემებში. ასეთი სისტემებისათვის, რომლებიც აღიწერებიან არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებებით, როგორც ცნობილია არ არსებობს მათი ამოხსნის ზოგადი მეთოდები. სწორედ აქ სიმეტრიის თვისება გვაძ-

ლევს საშუალებას გამოვყოთ ზოგიერთი კერძო ე.წ ინვარიანტული ამონახსნები, რომლებიც როგორც აღმოჩნდა ხშირად შეიცავს მნიშვნელოვან და მდიდარ ინფორმაციას ბუნებრივი სისტემების თვისებების შესახებ. თვითორგანიზების მოვლენების გამოკვლევები, გვაძლევს საშუალებას მიუთითოთ ბუნებრივი სისტემების აგებულების პრინციპების გაგების ახალ გზებზე. ვითვალისწინებთ რა რომ ამ პრინციპების გადატანა ადამიანის კონკრეტულ საქმიანობაზე გვაძლევს საშუალებას გამოვავლინოთ ახალი მიდგომები (ქიმიური, ბიოლოგიური) ობიექტების, ბუნებრივი სისტემების თვითორგანიზციის მოვლენის უფრო დაწვრილებით შესწავლაზე. ამისათვის მიზანშეწონილია კლასიკურ თანამედროვე მეცნიერებაში შევისწავლოთ თვითორგანიზაციის იდეის განვითარების გზები და ტენდენციები.

1.2 დინამიკური სისტემების დივერგენცია

თანამედროვე მეცნიერებამ მიაღწია თვალსაჩინო წარმატებებს ბუნებისმეტყველებისა და ტექნიკის მრავალ დარგში. მაგრამ ბუნებრივი მოვლენებისა და ტექნიკური პროცესების უმეტესობა შეიძლება აღიწეროს მათემატიკურ ენაზე. მნიშვნელოვანია ის ფაქტი, რომ მათემატიკის ეფექტური გამოყენება უშუალოდ დაკავშირებულია მათემატიკური მოდელების აგებასთან, რომლებიც ამა თუ იმ ხარისხით ადექვატურად აღწერენ შესაბამის მოვლენებსა და პროცესებს. ბუნებისმეტყველების განვითარების ისტორია გვიჩვენებს, რომ მათემატიკური აღწერა გვაძლევს საშუალებას მოვახდინოთ რაციონალური ახსნა უამრავი სხვადასხვა ფორმის მოძრაობებისა, რომლებიც განსაზღვრავენ გარემომცველ სამყაროს.

მოძრაობის აღმწერ განტოლებების აგებას საფუძვლად უდევს მიზეზობრიობის პრინციპი, რომლის თანახმადაც ყველა სხეულისა ან სისტემის მდგომარეობა თანმიმდევრულად ვითარდება დროში, რადგანაც სხეულის ესა თუ ის მდგომარეობა დროის მოცემულ მომენტში წარმოადგენს წინა მდგომარეობების შედეგს: 300 წელზე მეტი ხნით

ადრე ნიუტონმა და მისგან დამოუკიდებლად ლეიბრიცმა შემოგვთავაზეს მოძრაობის აღწერის მეთოდი, რომელიც იმის შემდეგ ყველაზე უფრო გავრცელებულია [1]. ამ მეთოდის არსი მდგომარეობს ბუნებაში მოძრაობების კანონების აღწერა დიფერენციალური განტოლებების სახით:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, ..., x_n), i = 1, 2, ..., n, \tag{1.1}$$

სადაც x_i – შესაბამისი სისტემის მდგომარეობის კოორდინატებია.

(1.1) დიფერენციალური განტოლებების საშუალებით აღწერილი დინამიკური სისტემის ფუნდამენტალურ თვისებას წარმოადგენს დეტერმინირება, რეგულირება და შექცევადობას. მითითებულ დებულებების გამოყენებით შეიძლება ნებისმიერი ბუნების დინამიკური სისტემის მოძრაობის ტრაექტორიის გამოთვლა. ამისათვის საჭიროა მხოლოდ საწყისი x_{i0}-მდგომარეობის დაკვეთა, რომელიც აღწერს სისტემის მომენტალურ მდგომარეობას. სხვა სიტყვებით, ვიცით რა მოძრაობის ზოგადი კანონები, რომლებიც ჩაწერილია დეტერმინირებული დიფერენციალური განტოლებების სახით (1.1) შეგვიძლია მოცემული საწყისი პირობებიდან ყოველთვის ზუსტად გამოვიყვანოთ მდგომარეობათა ის უსასრულო სიმრავლე, რომელსაც გადის სისტემა დროთა განმავლობაში. ე.ი. თუ ვიცით რა მოძრაობის კანონები (1.1), სისტემის მდგომარეობის აბსოლუტური და ზუსტი აღწერისათვის როგორც მომავალში, ასევე წარსულში საკმარისია მხოლოდ ერთადერთი საწყისი მდგომარეობის ცოდნა. ყველაფერი მოცემულია და ყველაფერი შესაძლებელია-ასეთია აბსტრატული დინამიკის ფუძემდებლური დასკვნა, რომელიც საფუძვლად უდევს კლასიკურ მეცნიერებას [6,7].

კლასიკურ მექანიკაში დიდი ხანია დადგენილია, რომ დიფერენციალურ განტოლებების ინვარიანტულ–ჯგუფურ თვისებებს, რომლებიც აღწერენ მექანიკური სისტემის მოძრაობას, და ფიზიკურ შენახვის კანონებს შორის არსებობს ღრმა და მეტად არატრავიალური კავშირი. ეს ნიშნავს, რომ ამა თუ იმ სისტემის ფიზიკური თვისებების აღწერა მისი ინვარიანტების სახით საშუალებას გვაძლევს წარმატებულად გადავწყვიტოთ სისტემების სინთეზის პრობლემები.

ინვარიანტობის პრინციპთან უშუალოდ არის დაკავშირებული წესრიგის იდეების განვითარება როგორც მათემატიკაში ისე სხვა ნე-

ბისმიერ მეცნიერებაში. ამ პრინციპიდან გამომდინარეობს ზოგადი ფიზიკური შენანახვის კანონი. ზოგადად, ინვარიანტობის თვისების არსებობა მიგვითითებს ბუნებრივ სისტემებში წესრიგის წარმოშობაზე.

(1.1) სისტემის ინტეგრალური მრუდების ერთობლიობა აღწერს x_1, x_2, ... x_n ფაზურ სივრცეში მოძრაობას რაც გვაძლევს მის ფაზურ პორტრეტს. თუ (1.1) სისტემა ორგანზომილებიანია $(n=2)$, მაშინ მისი ყოფაქცევა აღიწერება x_1, x_2 ფაზურ სიბრტყეში. აქედან გამომდინარეობს რომ ნაზრდების ნამრავლი Δx_1, Δx_2 განისაზღვროს როგორც ფაზური სიბრტყის ფართობის ელემენტები. ცხადია, რომ ცნება „ფართობი" შეიძლება განზოგადებულ იქნეს მრავალგანზომილებიანი სისტემებისათვისაც $(n \geq 3)$ მოცულობის ცნებაზე ფაზურ სივრცეში. (1.1) სისტემის დინამიკური თვისებები პრინციპიალურად დამოკიდებულია იმაზე, თუ როგორი სახით იცვლებიან ფართობები $(n=2)$ ან მოცულობები $(n \geq 3)$ მათ ფაზურ სივრცეში. ზოგად შემთხვევაში n-ური რიგის სისტემის მოცულობის ცვლილების ფარდობითი სიჩქარე ფაზურ სივრცეში როგორც ცნობილია განისაზღვრება ლის წარმოებულის მიხედვით:

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i}, \tag{1.2}$$

სადაც x_i და $x_i(t)$ შესაბამისად სისტემის i-ური კორდინატაა და მისი წარმოებულია დროში.

(1.2) გამოსახულების მარჯვენა ნაწილს უწოდებენ (1.1) სისტემას ფაზური სიჩქარის ვექტორის დივერგენციას.

$$div\dot{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(x_1,...,x_n)}{\partial x_i} \tag{1.3}$$

რომელიც წარმოადგენს კერძო წარმოებულების (1.1) სისტემის მარჯვენა ნაწილების შესაბამისი წარმოებულების სრულ ჯამს. (1.3) დივერგენცია უშუალოდ დაკავშირებულია (1.3) სისტემის შესაბამისი ბუნების ფიზიკურ და დინამიკურ თვისებებთან. ამასთან, სახელდობრ დივერგენცია (უფრო ზუსტად მისი ნიშანი) ბუნებრივი და ტექნიკური სისტემების უსასრულო მრავალსახეობებს ყოფს ორ კლასად, რომლებსაც გააჩნიათ პრინციპიალურად განსხვავებული თვისებები. პირველ კლასს განეკუთვნებიან სისტემები, რომლებისთვინაც

$$div\dot{x} = \frac{1}{V}\frac{dV}{dt} \equiv 0, \qquad (1.4)$$

ე.ი. მათი ფაზური მოცულობა რჩება უცვლელი. ეს თვისება გამომდინარეობის ლუიკილის ცნობილი თეორემის მიხედვით და გამომდინარეობს (1.2)-დან, რადგანაც (1.4) პირობებიდან სიდიდე v=const. ასეთ სისტემებს ეწოდება კონსერვატიული [13].

კლასიკური და კვანტური ფიზიკის ყველა კანონი აღწერს სწორედ ასეთი კონსერვატული სისტემების ყოფაქცევას. დინამიკური სისტემების თვისება შეინარჩუნოს ფაზური მოცულობა წარმოადგენს მათ უმთავრეს თვისებას. ამ თვისების შედეგს წარმოადგენს ენერგიის შენახვა და დინამიკის განტოლებების შექცევადობა დროში და აგრეთვე, მათ ფაზურ სივრცეში მიზიდვის ან იზოლირებული ფაზური ტრაექტორიების არ არსებობა. სხვანაირად რომ ვთქვათ ამ სისტემებში განმსაზღვრელი მნიშვნელობა ღებულობს საწყისი პირობები მნიშვნელობას. კონსერვატული სისტემებისა განზომიკლება *(n)* არის ლუწი. ასე, რომ კლასიკური დინამიკის სისტემების დივერგენცია ტოლია ნულის და შესაბამისად, ინარჩუნებენ ფაზურ მოცულობას დროში.

აღწერილი სისტემების ტიპების გარდა, ბუნებაში უფრო გავრცელებულია მნიშვნელოვანი კლასი დინამიკური სისტემებისა, რომელთაც ეწოდებათ დისიპატიური. ზოგადად, ბუნებაში ყველა სისტემა დისიპატიურია. ხოლო ამ შემთხვევაში როდესაც დისიპატია ძალიან მცირეა და შესაბამისად დროის გარკვეულ მონაკვეთზე შესამჩნევად ვერ ავლენს თავს, მაშინ შესაბამისი სისტემები ფაქტიურად იქცევიან ისევე როგორც კონსერვატულები.

დისიპატიური სისტემები შეიძლება დაყოფილი იქნენ პასიური სისტემების კლასად, რომლებიც არ შეიცავენ ენერგიის წყაროს და აქტიური სისტემების კლასად, რომლებსაც გააჩნიათ ენერგიის მუდმივი ან ცვლადი წყაროები [15]. დისიპატიური სისტემების პრინციპულ განმასხვავებელ ნიშანს წარმოადგენს დროთა განმავლობაში ფაზური მოცულობის შემცირება ე.წ. დივერგენციის

$$div\dot{x}(t) < 0 \qquad (1.5)$$

მნიშვნელობა ამ სისტემებში-უარყოფითია. დისიპატიური სისტემების თვისებები უპირისპირდება კონსერვატიული სისტემების დინამიკურ

თვისებებს. კერძოდ. ფაზური მოცულობები იკუმშებიან, ენერგია არ შეინახება ხოლო მათი მოძრაობის განტოლებები შეუქცევადია დროში. ამასთან დაკავშირებით, გამოსახულება (1..2) შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით.

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = -a, a > 0 \tag{1.6}$$

(1.6) განტოლების ინტეგრირებით, მივიღებთ

$$V(t) = V_0 \exp(-at)$$

ე.ი. როცა $t \to \infty$ მოცულობა $V(t) \to 0$-კენ და გამომდინარეობს ძალიან მნიშვნელოვანი დასკვნა:

- დისიპატიურ სისტემებში ყველა ტრაექტორია (როცა $t \to 0$) მიისწრაფის რომელიღაც კომპაქტურ სიმრავლემდე-ატრაქტორისაკენ ფაზურ სივრცეში.
- ატრაქტორს (მიმზიდველს) გააჩნია ნულოვანი მოცულობა. თუმცა მის მიზიდულობის არეს ფაზურ სივრცეში გააჩნია სასრულო მოცულობა. მათემატიკაში მიზიდულობის არედ მიჩნეულია საწყისი მონაცემების ისეთი არე $x_{in} \in \Re$, რომ მისგან გამომავალი ტრაექტორიები აუცილებლად მიისწაფიან ატრაქტორისკენ.
- ატრაქტორთან მიზიდულობის გამო ხდება დისიპატური სისტემის მახსიერების დაკარგვა მისი საწყისი მონაცენების შესახებ.
- ატრაქტორის ზომის განზომილების მაჩვენებელი r ყოველთვის ნაკლებია გამომავალი დისიპატიური სისტემის ფაზური სივრცის n.-განზომილების მაჩვენებელზე $r<n$.
- ზოგად შემთხვევაში სისტემების ფაზურ სივრცეში შეიძლება იყოს რამოდენიმე განსხვავებული ატრაქტორი თავის მიზიდულობის არეებით.

ასე რომ, დისიპატიურ სისტემებში (1.2) ლის წარმოებულისა და დივერგენციის (1.5) უარყოფით ნიშანს შესაბამისად მივყევართ იქამდე, რომ დროის განმავლობაში *($t \to \infty$)* სისტემის ტრაექტორიები (1.1) აუცილებლად მიიზიდებიან ატრაქტორისკენ, ხოლო (1.1) სისტემის საწყისი პირობების ნებისმიერ სიმრავლეს V მოცულობით გარდაისახება ნულოვან სიმრავლეში, რადგანაც ატრაქტორის მოცულობა ნულის ტოლია

[13]. სხვანაირად რომ ვთქვათ, სისტემის საწყისი მდგომარეობები (1.1) რომელიც იმყოფება ატრაქტორს გარეთ, რაღაც დროის შემდეგ აუცილებლად მოხვდებიან ატრაქტორზე. ატრაქტორთან ასეთი მიზიდულობის შედეგად წარმოიქმნებიან აღწერილი დისიპატიური სისტემების მნიშვნელოვანი მახასიათებლები. პრინციპიალურ განმასხვავებელ თავისებურებას რომლებისთვისაც წარმოადგენს ფაზური მოცულობის დროზე დამოკიდებულება. დივერგენცია მთლიანობაში ახასიათებს სისტემის ფაზური მოცულობის (შეკუმშვის) სიჩქარეს.

დისიპატიური სისტემების ზემოთ აღნიშნულ თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ მათი მოძრაობა შეიძლება დაიყოს ორ არსებითად განსხვავებულ კლასად: გარდამავალი პროცესების კლასი სისტემის კონკრეტული საწყისი პირობებიდან ზღვრულ სიმრავლემდე-ატრაქტორამდე და ატრაქტორების გასწვრივ სტაციონარული მოძრაობების კლასი [12].

საერთო შემთხვევაში (1.1) სისტემის (1.3) დივერგენცია გარკვეულ შეზღუდულ დროში შეიძლება იყოს დადებითი, ხოლო ფაზური მოცულობა შეიძლება გაიზარდოს. ფიზიკური თვალთახედვიდან ასეთი ხანგრძლივი სტაციონალური რეჟიმის არსებობა შეუძლებელია, რადგანაც ამისათვის საჭიროა უსასრულო ენერგია. თუმცა ბევრ რეალურ არაწრფივ სისტემებში დროის სასრულო ინტერვალებში ფაზური მოცულობა შეიძლება გაიზარდოს, რაც ნიშნავს ახალ დამყარებულ მდგომარეობაში გადასვლის პროცესს.

ნათელია, რომ სისტემის (1.1) დივერგენცია დაკავშირებულია იაკობიანის ფუნდამენტალურ მატრიცასთან [9]

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \tag{1.7}$$

ასე რომ, სისტემები რომლებისთვინაც ფაზური სივრცის ნებისმიერ წერტილში სრულდება პირობა

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1.8}$$

უწოდებენ სისტემას პირდაპირი კავშირის გარეშე. სხვა კლასი სისტე-მებისა, რომელთაც გააჩნიათ „დიაგონალური“ კერძო წარმოებულები

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = const, \quad (1.9)$$

ეწოდებათ სისტემები პირდაპირი არაწრფივი კავშირებით.

(1.1)-სისტემას (1.4), (1.6), (1.8), (1.9) თვისებები შეიძლება მივანი-ჭოთ, თუ ჩავრთავთ მის მარჯვენა ნაწილში $U_2(x_1...., x_n)$ მართვის ფუ-ნქციას. მაშინ სისტემა (1.1) შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს სახით.

$$x_i(t)=f_i(f_1,..., x_n, U_1,...,U_r)\ i=1,2,..., n, r=1,2..., m\leq n \quad (1.10)$$

განტოლება (1.10) აღწერს მართვადი დინამიკური სისტემების კლასს.

თუ შევირჩევთ შესაბამის მართვას $U_1(x_1...., x_n)$ შეიძლება მივიღოთ სისტემა სასურველი დინამიკური თვისებებით მის ფაზურ სივრცეში.

დისიპატიური სისტემების ფაზურ სივრცეში შეიძლება წარმოიშ-ვას ატრაქტორები და რეპელერები. შეგახსენებთ [15], რომ ატრაქტორად იწოდება კომპაქტური სიმრავლე, რომლისკენაც მიისწრაფის ყველა ტრაექტორია მისი მიზიდვის არეში, და მას გააჩნია სასრულო ფაზური მოცულობა. ეს არე წარმოადგენს სისტემის ისეთი საწყისი პირობების ერთობლიობას, რომ მისგან გამომავალი ფაზური ტრაექტორიები აუცი-ლებლად იკრიბებიან ატრაქტორთან. არსებობს ატრაქტორების ორი ძირითადი სახე:

- უმარტივესი ატრაქტორები რომლებიც არსებობენ სისტემის სტაციონალური წერტილების სახით; ზღვრული ციკლის სახით, რომელსაც გააჩნია საკუთარი ამპლიტუდა და პერი-ოდი: და, ბოლოს ტორის სახით, რომელიც აღწერს კვაზი-პერიოდულ პროცესს რამოდენიმე დამოუკიდებელი სიხ-შირით.
- „უცნაური“ ე.წ. ქაოტური ატრაქტორები, რომელთაც რიგში გააჩნიათ განმასხვავებელი თვისებები, მაღალ მგრძნობია-ლური დამოკიდებულებით სისტემის საწყისი პირობებისად-მი, ფრაქტალური (არასრულრიცხვიანია) განზომილება და თავისი ყოფაქცევის წინასწარგანუსაზღვრელობა. საოცარია რომ „უცნაური“ ატრაქტორები აღიწერებიან დაბალი ხა-

რისხის $n \geq 3$ არაწრფივი დეტერმინირებული დიფერენციალური განტოლებებით და წარმოადგენენ ქაოსის წყაროს დინამიკურ სისტემებში [15].

სისტემის ფაზურ სივრცეში შეიძლება იყოს რამოდენიმე ატრაქტორი. როცა მათი მიზიდვის არეები იშლებიან ზოგიერთი არამდგრადი სიმრავლეებით-რეპელერებით, რომლებისგანაც განიზიდებიან სისტემის მეზობელი ფაზური ტრაექტორიები. რეპელერების უმარტივეს ტიპიურ მაგალითს წარმოადგენს არამდგრადი განსაკუთრებული წერტილი, არამდგრადი ზღვრული ციკლი და არამდგრადი ტორი ფაზურ სივრცეში. საჭიროა განსაკუთრებით აღვბიშნოთ, რომ, ტრაექტორიები რომლებიც განთავსებულია ატრაქტორებზე და რეპელერებზე, იკავებენ ნულოვან ფაზურ მოცულობას. აქედან გამომდინარეობს რომ ატრაქტორების და რეპელერების განზომილებანი ყოველთვის ნაკლებია საწყისი სისტემის ფაზური სივრცის განზომილებებთან შედარებით. ეს თვისება ძალიან მნიშვნელოვანია მრავალგანზომილებიანი არაწრფივი დინამიკური ობიექტების მართვის პრობლემების გადაწყვეტისათვის, რადგანაც წარმოიქმნება ერთმანეთში ჩაწყობილი სასურველი ატრაქტორების სინთეზის შესაძლებლობა. ასეთ შემთხვევაში შეიძლება უგულვებელყოფილი იქნეს გარდამავალი მოვლენები და ყურადღება ძირითადად უნდა მივაქციოთ მოძრაობის (ასიმპტოტურ) რეჟიმებს, რასაც მივყავართ არაწრფივი ობიექტების სინთეზის პრობლემის არსებით გამარტივებამდე. უფრო დაწვრილებით ატრაქტორების თვისებები განხილულ იქნა შემდეგ თავში.

ამრიგად, ფიზიკურ, ქიმიურ და ბიოლოგიურ სისტემებში ნებისმიერი პროცესები შეიძლება დავყოთ ორ არსებით განსხვავებულ კლასად. პირველ კლასს განეკუთვნება პროცესები იზოლირებულ (თერმოდინამიკური აზრით) სისტემებში. მათ მივყევართ წონასწორულ მდგომარეობამდე, რომელსაც შეესაბამება ფიზიკური ქაოსი. ეს პროცესები მართვადია გარეგანი ზემოქმედების გზით. მეორე კლასს უნდა მივაკუთვნოთ პროცესები ღია სისტემებში, რომელთა მიმდინარეობისას შეიძლება წარმოიშვას მოწესრიგებული სტრუქტურები – ატრაქტორები, რაც დამახასიათებელია თვითორგანიზააციის პროცესებისათვის. ამასთან ერთად, მიზანშეწონილია შემოვიღოთ წესრიგის ხარისხის რაოდენობრივი შეფასება-სისტემის სხვადასხვა მდგომარეობების თვითორგა-

ნიზაცია, სისტების ეფექტური სტრუქტურული თვითორგანიზაციის გზების ასარჩევად. მოწესრიგებული სტრუქტურები ღია სისტემებში წარმოიშვებიან მმართველი პარამეტრების ცვლილების შედეგად, რედესაც ეს პარამეტრები რამოდენიმეა, მაშინ ცხადია გამოვლინდება თვითორგანიზაციის სხვადასხვა გზა.

1.3 სინერგეტიკის ძირითადი ცნებები

რთული სისტემების ფართო კლასის გამოკვლევისას აღმოჩენილ იქნა შესანიშნავი მოვლენა-თავისუფლების ხარისხის მნიშვნელოვანი შემცირება, რომელიც ეფექტურად აღწერს სისტემის ყოფაქცევას მოძრაობის ფინალურ ეტაპზე. ამასთან აღმოჩნდა, რომ შესაძლებელია გამოვყოთ თავისუფლების რამოდენიმე ხარისხი – წესრიგის პარამეტრები, რომლებსაც ბიფურკაციის მოვლენის შედეგად მოერგებიან სხვა დანარჩენი ცვლადები, რომელთა რაოდენობაც შეიძლება იყოს საკმაოდ დიდი. ზუსტად წესრიგის პარამეტრებით, განისაზღვრება მრავალგანზომილებიან წრფივ სისტემებში მიმდინარე პროცესების დაკვირვების ქვეშ მყოფი დინამიკა. ამ ფაქტის აღმოჩენა შეიძლება მივაკუთვნოთ თანამედროვე არაწრფივი მეცნიერების ფუნდამენტალურ აღმოჩენას, რაც გვაძლევს საშუალებას გავაკეთოთ დიდი ნაბიჯი დისიპატიურ (disipato-გაფანტვა) სისტემებში მოულოდნელი მოვლენების შესწავლაში.

წესრიგის პარამეტრები წარმოადგენს მრავალკომპონენტურ მაკროცვლადს, რომელიც აღწერს სისტემის ფაზურ გადასვლებს გარკვეულ მოწესრიგებულ მოძრაობაში. ის ახასიათებს კომპონენტებს შორის კორელაციას და რაც უფრო ძლიერია კორელაცია, მით მეტია წესრიგის ხარისხი მაკროსისტემაში. მოცემული წესრიგი სისტემაში წარმოიქმნება შესაბამისი შინაგანი და გარეგანი ძალების მოქმედებით მისი ენერგიის ცვლადებით.

თუმცა წესრიგის პარამეტრი ასახავს არა წესრიგის წარმოქმნის საზომს სისტემაში რაიმე ფაზური გადასვლის შედეგად, არამედ აღწერს მიკროსისტემის საფინიშო მოწესრიგებული მდგომარეობის უმნიშ-

ვნელოვანეს თვისებებს. მას მივყავართ სისტემის განზომილების მნიშვნელოვან შემცირებამდე ე.ი. ხდება თავისუფლების ხარისხის მაჩვენებელი რიცხვის რედუქცია. წესრიგის პარამეტრები მჭიდროდ არის დაკავშირებული სისტემის შინაგან სტრუქტურასთან, რომელიც წარმოიქმნება მისი ევოლუციის შედეგად. არსებობს მჭიდრო დინამიკური კავშირი სისტემის წესრიგსა და სიმეტრიას შორის [11,12].

გადავიდეთ ზემოთ ნახსენები სინერგეტიკის საბაზო ცნებების მათემატიკურ აღწერაზე, არაწრფივი სისტემების ტიპიური, ევოლუციური განტოლებების ტიპიურ მაგალითებზე, რომელთაც გააჩნიათ სპონტანური თვითორგანიზაციის უნარი. მოკლედ განვიხილოთ არაწრფივი სისტემების ბიფურკაციის თეორიის ძირითადი ცნებები.

არაწრფივი დინამიკური სისტემების ბიფურკაციის თვისებას სწრაფად განვითარებადი თანამედროვე არაწრფივი მეცნიერებისათვის გააჩნია ფუნდამენტალური მნიშვნელობა, რომელიც სულ უფრო და უფრო მეტი ხარისხით აღწევს დარგებში - ღია სისტემების ფიზიკიდან, ბიოლოგიიდან და მათემატიკიდან ფსიქოლოგიამდე, ეკონომიკამდე და სოციოლოგიამდე. მითუმეტეს ეს ცნება მნიშვნელოვანია როგორც გამოყენებითი მეცნიერებისა და ტექნიკის სხვადასხვა სფეროებისათვის, ასევე მართვის თეორიისათვის.

განვიხილოთ დიფერენციალური ვექტორული განტოლება

$$\dot{X}(t) = F_{\mu}(X, \mu), \; X \in \Re^{n}, \mu \in \Re^{\mu}, \mu \le n, \qquad (1.11)$$

რომელიც აღწერს სხვადასხვა ობიექტების ქცევას და მართვის სისტემებს. იგი შეიძლება ინტერპრეტირებული იქნეს როგორც რომელიღაცა ავტონომიური ნაკადი ფაზურ სისტემებში $\Re^n$, რომელიც დამოკიდებულია გარკვეული ბიფურკაციული პარამეტრებზე $\mu_k (k = 1,2,...,k < n)$. ფიზიკურად ამ პარამეტრებს შეიძლება წარმოადგენდნენ მაგალითად ტემპერატურა, მოცულობა, კონცენტრაცია და ა.შ. (1.11) ნაკადის სტაციონალური რეჟიმი განისაზღვრება ალგებრული განტოლებების სისტემების ამონახსნებით

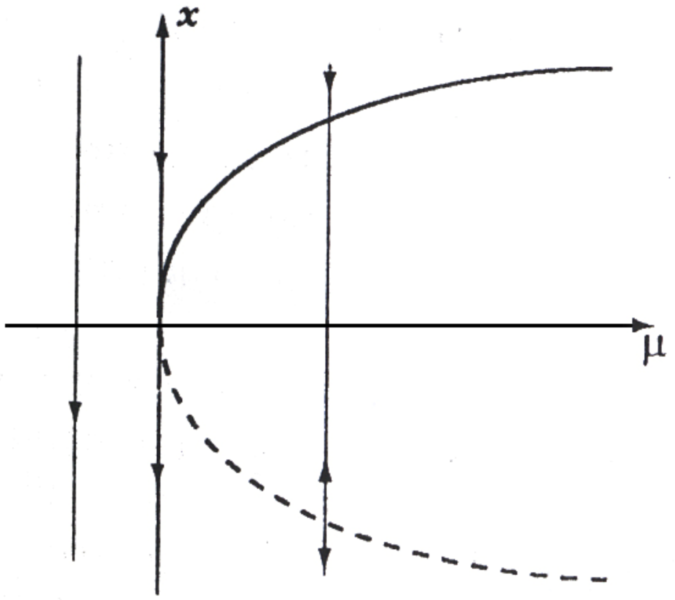
$$F_{\mu}(x, \mu) = 0, \qquad (1.12)$$

რომლებიც წამოადგენენ ნაკადის უძრავ სტაციონალურ წერტილებს. ნათელია რომ ნაკადს შეიძლება ქონდეს სხვა ამონახსნებიც – პერიოდული ტორები და ა.შ. ნაჩვენები ამონახსნები პარამეტრების სივრცეში $\mu(\mu_1,..,.\mu_k)$ შეიძლება წარმოვიდგინოთ გრაფიკის სახით, რომელიც ასახავს ზემოთ მოყვანილი განტოლებას (1.12). იგი იწოდება ბიფურკაციული პარამეტრ μ ცვლადების მიმართ ამონახსნის შტოდ. მაშინ წერტილს პარამეტრების სივრცეში, რომლისგანაც იშლებიან შტოები, ეწოდება სისტემის ბიფურკაციის წერტილი. პარამეტრების სივრცის უმცირესი განზომილება, რომელშიც შესაძლებელია ბიფურკაცია, იწოდება შესაბამისი ტიპის კოგანზომილების ბიფურკაციად. ბიფურკაციის თეორიაში კოგანზომილების ცნების შემოტანით საშუალება გვეძლევა მოვახდინოთ აბსტრაქცირება სივრცის პარამეტრების კონკრეტული განზომილებიდან და გამოვიყენოთ მხოლოდ შესაბამისი სივრცის გეომეტრიული თვისებები.

განვიხილოთ ბიფურკაციის ტიპიური სახეები:

ბიფურკაცია „უნაგირა კვანძი". ასეთ შემთხვევაში სისტემის ნორმალურ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$\dot{x}(t) = \mu - x^2, \tag{1.13}$$



ნახ. 1.1 ბიფურკაცია „უნაგირა კვანძი".

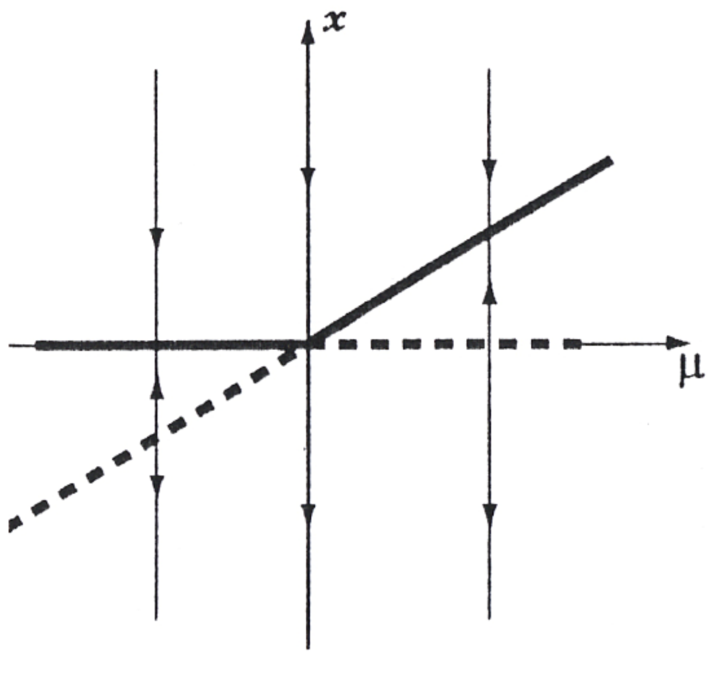
მისი სტაციონალური ამონახსნი $x_s = \pm\sqrt{\mu}$ განსაზღვრულია როცა $\mu > 0$ და პირველად წარმოიქმნება პირობისას $\mu = 0$. როცა $\mu < 0$ ამონახსნები არ არსებობს. ნახ.1.1-ზე ნაჩვენებია (1.13) განტოლების შესაბამისი μ ბიფურკაციული დიაგრამა. როგორც ნახ.1.1-დან ჩანს ბიფურკაციის $(x = 0, \mu = 0)$ წერტილიდან გამოდის სტაციონალური მდგომარეობის ორი შტო, რომელთაგანაც ერთი მდგრადია (მთლიანი წირი), ხოლო მეორე არამდგრადი–(წყვეტილი წირი) [13].

ტრანსკრიტიკული ბიფურკაცია. ასეთ ტიპის ბიფურკაციისათვის სისტემის ნორმალურ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

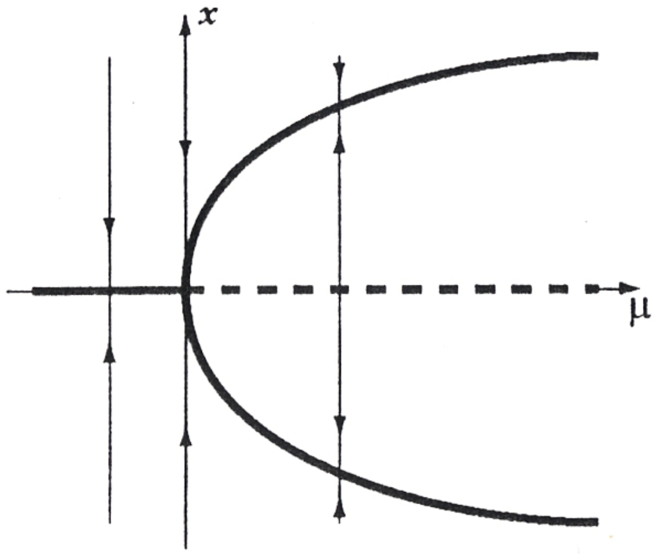
$$\dot{x}(t) = \mu x - x^2 \tag{1.14}$$

(1.14) განტოლებას გააჩნია ორი სტაციონალური ამონახსნი $x_s = 0$ და $x_s = \mu$. პირველი ამონახსნი მდგრადია როცა $\mu < 0$ და არამდგრადია, როცა $\mu > 0$ მეორე ამონახსნისათვის-პირიქით. ორივე ამონახსნი მდგრადობას ცვლიან ბიფურკაციის წერტილში. ნახ.-ზე 1..2 ნაჩვენებია შესაბამისი ბიფურკაციული დიაგრამა. ნორმალური განტოლება

$$\dot{x}(t) = \mu x - x^3 \tag{1.15}$$



ნახ. 1.2 ბიფურკაციული დიაგრამა.



ნახ. 1.3 ბიფურკაციულ დიაგრამის სიმეტრიული ფორმა

ამ სახის ბიფურკაციისათვის არსებობს სამი სტაციონალური ამონახსნი $x_s = 0$ და $x_s = \pm\sqrt{\mu}$. შესაბამის ბიფურკაციულ დიაგრამას გააჩნია სიმეტ-რიული ფორმა და წარმოდგენილია ნახ. 1.3-ზე [13]

ანდრონოვ-ჰოპფის ბიფურკაცია. შედარებით ამ რთულ შემთხვე-ვაში ნორმალურ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\dot{z}(t) = (\mu + iy)z - z|z|^2 \tag{1.16}$$

სადაც z კომპლექსური ცვლადია, ხოლო y - რომელიღაც კონსტან-ტაა, რომელიც არ თამაშობს ბიფურკაციული პარამეტრის როლს, $i-$არის წარმოსახვითი ერთიანი. განტოლება (1.16) წარმოადგენს „ჩან-გლის" (1.15) სახის კომპლექსურ ბიფურკაციის ანალოგს. იმისათვის რომ მოძებნილ იქნეს (1.16) განტოლების სტაციონალური ამონახსნები, მიზანშეწონილია გადავიდეთ ნამდვილ მართკუთხა ან პოლარულ ცვლა-დებზე, მაშინ, თუ დავუშვებთ, რომ

$$z = x_1 + ix_2, \tag{1.17}$$

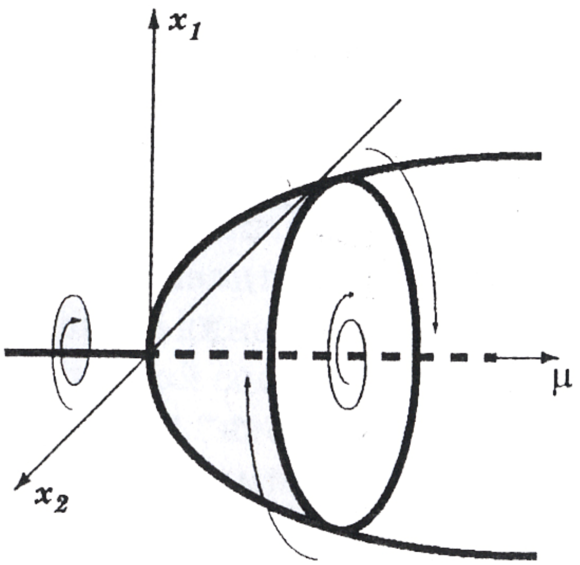
მივიღებთ ნამდვილი კოორდინატებიან ევოლუციური განტოლების ნორ-მალურ ფორმას:

$$\dot{x}_1(t) = \left[\mu - (x^2{}_1 + x^2{}_2)\right] x_1 - yx_2 \qquad \dot{x}_2(t) = yx_1 + \left[\mu - (x^2{}_1 + x^2{}_2)\right] x_2. \tag{1.18}$$

ევოლუციური განტოლებები (1.8) დაკავშირებული არიან ერთმანეთთან (1.17) კომპლექსური ცვლადის საშუალებით და გააჩნიათ შემდეგი ორი სახის სტაციონალური ამონახსნი

$$x_1 = x_2 = 0 \quad \text{თუ} \quad z = 0 \tag{1.19}$$

$$|z|^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 = \mu \tag{1.20}$$



ნახ. 1.4 ანდროპოვ-ჰოპფის ბიფურკაცია

პირველი ამონახსნი (1.19) წარმოადგენს არამდგრადს და ემთხვევა ბიფურკაციის წერტილებს, ხოლო მეორე ამონახსნი (1.20) განსაზღვრავს წრეწირის რკალს რადიუსით $\sqrt{\mu}$. ნახ. 1.4-ზე გამოსახულია შესაბამისი ბიფურკაციული დიაგრამა, რომელზედაც ისრები უჩვენებენ სისტემის ვექტორული ველის ძალოვანი წირების მიმართულებას.

ბიფურკაციული განტოლებების (1.13)–(1.16) ნორმალური ფორმებს უწოდებენ სუპერკრიტიკულს. ეს ნიშნავს რომ შესაბამისი განტოლებების არაწრფივი წევრები x^2 და x^3 ახდენენ უწონასწორობის არამდგრადობის თვისების საწინააღმდეგო ზემოქმედებაზე, რომლებიც აღიძვრებიან უფრო დაბალი რიგის წევრების მოქმედების შედეგად. თუმცა არაწრფივი წევრების წინ ნიშნის შეცვლისას ისინი უკვე განახორციელებენ მადესტაბილიზირებელ ზემოქმედებას სისტემაზე. ასეთ შემთხვევებში წარმოიქმნებიან სუბკრიტიკული ან უკუბიფურკაციები.

ზემოთ აღწერილი ბიფურკაციები ყველაზე უფრო გავრცელებულია სხვადასხვა ბუნების მქონე არაწრფივ მრავალგანზომილებიან დინამიკურ სისტემებში. რასაკვირველია ეს ბიფურკაციები არ მოიცავენ ასეთი ტიპის არაწრფივი მოვლენების მრავალსახოვნებებს.

ბიფურკაციული დიაგრამები ასახავენ არაწრფივი დინამიკური სისტემების სტატიკურ მდგომარეობებს ბიფურკაციული (მმართველი) პარამეტრების ცვლილებისას. საინტერესოა სისტემების ბიფურკაციულ მდგომარეობაზე გადასვლის პროცესების შესწავლა დროსა და სივრცეში. ამასთან დაკავშირებით განვიხილოთ დინამიკური პროცესების ისეთი არაწრფივი სისტემების მაგალითები, რომელთა ევოლუციური განტოლებებია "ჩანგალი" და "ანდროპოვ-ჰოპფის ბიფურკაცია"[15].

„ჩანგლის" ტიპის ბიფურკაცია. მათემატიკური თვალსაზრისით დაქვემდებარების პრინციპი სინერგეტიკაში ეყრდნობა ადიაბატური მიახლოვების მეთოდს. ან სხვა სიტყვებით, საწყისი სისტემების დაყოფის იდეაზე ნელ და სწრაფ ქვესისტემებად. ამასთან ერთად, ხორციელდება ცვლადების ადიაბატური გამორიცხვის პროცედურა. დაქვემდებარების პრინციპის გარდა, სინერგეტიკისათვის ძალზე მნიშვნელოვანია, აგრეთვე, წესრიგის პარამეტრის ცნება. ამ ცნებების არსი განვიხილოთ მეორე რიგის არაწრფივი სისტემების კონკრეტულ მაგალითზე, რომელიც აღიწერება შემდეგი სახის განტოლებით [10]:

$$\dot{\mathrm{X}}(t) = \lambda_1 \mathrm{X} - \mathrm{XY}$$
$$\dot{\mathrm{Y}}(t) = -\lambda_2 \mathrm{Y} + \mathrm{X}^2 \qquad (1.21)$$

სადაც $\lambda_1 \geq 0; \lambda_2 > 0$. ასეთი დიფერენციალური განტოლებებით აღიწერება რიგი პროცესები ფიზიკაში, ქიმიაში, ეკოლოგიაში და ა.შ. ვივარაუდოთ რომ კოეფიციენტი λ_1 ძალიან მცირეა და $\lambda_2 >> |\lambda_1|$. თუ ცვლადები X და Y მცირეებია, მაშინ შეიძლება კვადრატული ფორმა XY უგულებელვყოთ, მაშინ X ცვლადი შეიცვლება ძალზე ნელა. მეორე განტოლებიდან ჩანს, რომ ნაზრდი Y განისაზღვრება წევრით და რადგანაც ცვლადი X იცვლება ძალიან ნელა, უნდა ველოდოთ, რომ Y-იც შეიძლება საკმაოდ ნელა შეიცვალოს. რადგანაც $\lambda_2 > 0$ და ბევრად მეტია λ_1-ზე, ამიტომ წარმოებული $\dot{\mathrm{Y}}(t)$ შეიძლება უგულებელვყოთ $\lambda_2 \mathrm{Y}$

სიდიდესთან შედარებით. ჩამოყალიბებული ანალიზი არსებითად აღნიშნავს, რომ სისტემა შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს, როგორც ნელი სისტემა აღწერილი პირველი განტოლებით და სწრაფი სისტემა აღწერილი მეორე განტოლებით. ნელი და სწრაფი ქვესისტემების ყოფაქცევის ცვალებადობა განისაზღვრება გარდამავალი პროცესებით, რომელთა ხანგრძლიობაც (შესაბამისად τ_2 და τ_1) შეიძლება შეფასდეს უტოლობით:

$$\tau_2 \sim \lambda_2^{-1} << \tau_1 \sim \lambda_1^{-1}$$

ეს უტოლობა ზემოთ ჩამოყალიბებული მოსაზრებების გათვალისწინებით გვაძლევს საშუალებას აღვნიშნოთ, რომ $\dot{Y}(t) \approx 0$. ე.ი ჩავწეროთ საწყისი განტოლებები შემდეგი სახით:

$$\dot{x}(t) = \lambda_1 x - xy\,; \qquad 0 \approx -\lambda_2 y + x^2$$

ან $$\dot{x}(t) \approx \lambda_1 x - \frac{x^3}{\lambda_2} \quad . \tag{1.22}$$

ასეთი მიახლოებითი დეკომპოზიციის შედეგად ხორციელდება y ცვლადის ადიაბატური გამორიცხვა ე.ი. წარმოებს (1.21) სისტემის განზომილების ასიმპტოტური რედუქცია. (1.21) საწყისი სისტემის ყოფაქცევა განისაზღვრება ძირითადად (1.22) ნელი ქვესისტემის ევოლუციით. რომელიც თითქოს და „მართავს" სწრაფ ქვესისტემას. ამასთან ცვლადი y დაქვემდებარებულია სისტემის x ცვლადზე რომელსაც შეეწყობა სწრაფი ცვლადი y და მას უწოდებენ წესრიგის პარამეტრს. განტოლება (1.22) წარმოადგენს სინერგეტიკის ერთ-ერთ ევოლუციურ განტოლებას და აღწერს ე.წ „ჩანგლის" ტიპის ბიფურკაციას.

გამოვიკვლიოთ (1.22) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი. სტაციონალური მდგომარეობა შეესაბამება შემდეგი სახის ალგებრულ განტოლებას

$$\lambda_1 x_3 - \frac{1}{\lambda_2} x^3{}_s = 0\,, \tag{1.23}$$

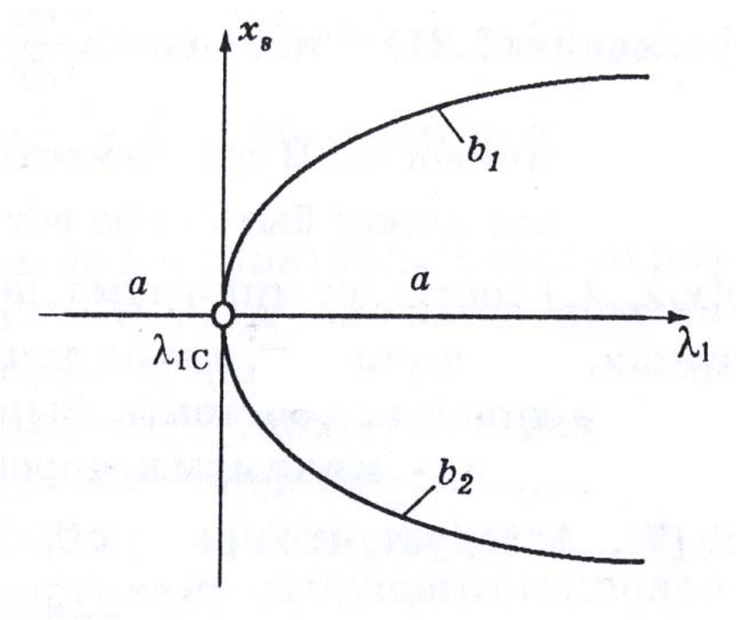
რომელსაც $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ მნიშვნელობებისთვის გააჩნია ერთი ტრივიალური $x_s = 0$ და ორი სპეციფიკური ამონახსნი $x_{s\pm} = \pm\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$. ეს ამონახსნები ერწყმიან $x_s = 0$, როცა $\lambda_1 = 0$ და განშტოვდება მისგან, როცა $\lambda_1 > 0$. ეს ისეთი მოვლენაა, როცა იცვლება განტოლებათა ამონახ-

სნების რიცხვი (ან მდგრადობა) ზოგიერთი მმართველი პარამეტრების ცვლილებისას. მას მათემატიკაში ბიფურკაციას უწოდებენ. ცნება ბიფურკაცია (გაორება) შემოტანილია მეცნიერულ ტერმინოლოგიაში ა.პუანკარეს მიერ და განეკუთვნება უმნიშვნელოვანეს ძირეულ ცნებას მათემატიკასა და საერთოდ არაწრფივი მეცნიერებაში.

აქ განხილულ ამოცანაში მმართველ პარამეტერს წარმოადგენს λ_1, რომლის ვარიაციაც იწვევს დიფერენციალური განტოლების (1.22) ყოფაქცევის ხარისხობრივ ცვლილებას.

ნახ. 1.5-ზე გამოსახულია „ბიფურკაციული დიაგრამა", რომელიც ასახავს სტაციონალური ამონახსნების ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას λ_2 მმართველი პარამეტრის ცვალებადობისას. (1.22) დიფერენციალური განტოლებას გააჩნია ზუსტი ამონახსნი

$$x(t) = \pm\sqrt{\frac{\lambda_1\lambda_2 {x_0}^2}{{x_0}^2 + (\lambda_1\lambda_2 - {x_0}^2)e^{-2\lambda_1 t}}} \quad . \qquad (1.24)$$



ნახ.1.5 ბიფურკაციული დიაგრამა

(1.24)-დან გამომდინარეობს, რომ როცა $\lambda_1 < 0$ და $\lambda_2 > 0$ ერთადერთი ამონახსნი $x_s = 0$ არის ასიმპტოტურად მდგრადი მთელში, (ნახ. 1.5. ხაზი a), ე.ი $t \to \infty$ პირობის დროს ნებისმიერი საწყისი x_0 პირობე-

ბისათვის. როცა $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ წარმოიქმნება უკვე ორი ამონახსნი $x_{s\pm} = +\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$ და $x_{s\pm} = -\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$, რომლებიც ასიმპტოტურად მდგრადებია, არა მთელში, არამედ მათი მნიშვნელობების გარკვეულ არეში. სხვანაირად რომ ვთქვათ შტოები $x_{s\pm_1} = \pm\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$, (როცა $\lambda_2 = const$) წარმოიშობა ბიფურკაციის შედეგად იმ მომენტში როცა მდგომარეობა $x_s = 0$ კარგავს მდგრადობას, ხოლო b_1 და b_2 შტოები ასიმპტოტურად მდგრადებია (ნახ 1.5). (1.22) მოდელის აღნიშნული თვისებები დაკავშირებულია სტატიკური მდგომარეობის (1.23) განტოლებასთან, რომელიც მდორედ არის დამოკიდებული λ_1 პარამეტრზე $(\lambda_2 = const)$. თუმცა ბიფურკაციის წერტილის მიდამოში $\lambda_{1e} = 0$ წარმოიქმნება განსაკუთრებულობა, რომელიც მდგომარეობს იმაში რომ $\lambda_{1e} = 0$ წერტილის შემოგარენში ამონახსნი $x_{s\pm}$, არ შეიძლება დაშლილი იქნეს ხარისხობრივ მწკრივში λ_1 პარამეტრის მიხედვით. სხვა სიტყვებით, (1..23) განტოლების ამონახსნი $x_{s\pm}$ არ არის დამოკიდებული პარამეტრ λ_1-ზე ანალიზურად. ასეთი სახის განსაკუთრებულობა წარმოადგენს (1.22) მოდელის ახალი ხარისხობრივი ყოფაქცევის მათემატიკურ ასახვას, რომელიც განპირობებულია „ჩანგლის" ტიპის ბიფურკაციის თვისებით [13]. ჩავწეროთ ეხლა (1.22) განტოლება υ პოტენციალური ფუნქციის საშუალებით

$$\dot{x}(t) = -\frac{\partial \upsilon(x_1 \lambda_1 \lambda_2)}{\partial x}$$

მაშინ (1.22) განტოლების მდგრადობის ანალიზი შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი სახის პოტენციალის დახმარებით

$$\upsilon((x) = -\frac{\lambda_1}{2} x^2 + \frac{1}{4\lambda_2} x^4. \tag{1.25}$$

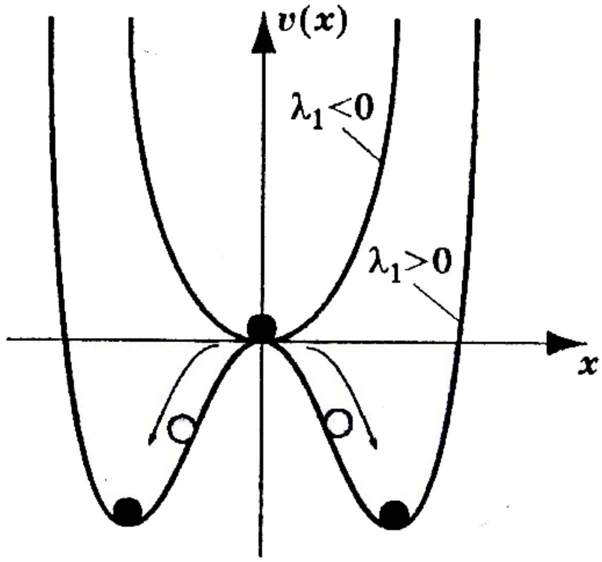
$\upsilon(x)$ ფუნქციის საფუძველზე შეიძლება მოვახდინოთ (1.21) განტოლების ამონახსნების საერთო კლასიფიკაცია სტაციონალური მდგომარეობების მდგრადობის ცვლილების წერტილის მოძებნის საშუალებით, სადაც $\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = 0$. ამ ტიპის კლასიფიკაცია დაკავშირებულია (1.21) განტოლების სტრუქტურული მდგრადობის დაკარგვასთან, რადგან წერ-

ტილებში $\frac{\partial \upsilon}{\partial x}=0$ ხდება მდგრადობის ხასიათის ცვლილება. λ_q და λ_2 პარამეტრების მნიშვნელობებზე დამოკიდებულებით, ამ წერტილებში შეიძლება ამონახსნებს ჰქონდეს განშტოება ან პოტენციალი $\upsilon(x,\lambda_1,\lambda_2)$ აღწევს მინიმუმს მინიმუმ ორ წერტილში მაინც. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, ამ წერტილებში ხდება სისტემის დინამიკის ხარისხობრივი ცვლილება. (1.25) გამოსახულება აღწერს „პოტენციურ ორმო"-ს, რომლის მინიმუმიც ასახავს მდგრად მდგომარეობას. (1.25) -დან გამომდინარეობს, რომ როცა $\lambda_1<0$, $\lambda_2>0$ არსებობს ერთადერთი მდგრადი მდგომარეობა $x_s=0$ ნახ 1.6 $(\lambda_1<0)$ როცა $\lambda_1\geq 0,\lambda_2>0$ პოტენციალი (1.25) ფორმა იცვლება პარამეტრის კრიტიკული მნიშვნელობის გავლისას $\lambda_1=0$. ნახ.1.6-ზე $(\lambda_1>0)$ გამოსახულია „პოტენციალური ორმო " $\upsilon(x)$ შემთხვევისათვის როცა $\lambda_1>0,\lambda_2>0$. ამ დროს სტაციონალური მდგომარეობების რიცხვი გახდა სამის ტოლი, რადგანაც (1.23) განტოლების ყველა სამი ფესვი ნამდვილია, თუმცა წინა $(\lambda_1<0,\lambda_2>0)$ მდგრადი მდგომარეობა $x=0$ ხდება უკვე არამდგრადი და წერტილი გადადგილდება ორიდან ერთ თანაბრად შესაძლებელ მდგომარეობაში $x=+\sqrt{\lambda_1}\lambda_2$ ან $x=-\sqrt{\lambda_1}\lambda_2$. მაშინ განტოლება (1.21) შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$\dot{x}(t)=-\frac{1}{\lambda_2}x(x-\sqrt{\lambda_1\lambda_2})(x+\sqrt{\lambda_1}\lambda_2) \tag{1.26}$$

$\pm\sqrt{\lambda_1}\lambda_2$ ფესვები (1.26)-ში დამოკიდებულნი არიან λ_1 „მმართველ პარამეტრზე", რაც განაპირობებს ორ მდგრად მდგომარეობას. წერტილი $x_s=0$, რომელიც იმყოფება არამდგრად მდგომარეობაში ძალიან მცირე აგზნებების და ფლუქტაციების ზემოქმედების შედეგად, რომელიც ყოველთვის არსებობს რეალურ სისტემაში, გადავა ორიდან ერთ-ერთ შესაძლო მდგრად მდგომარეობაში (ნახ. 1.6, $\lambda_1>0$). რაც ნიშნავს რომ, მარტო ერთი წრფივი არამდგრადობით „პატარაში" სრულიად საკმარისია, რომ წარმოიშვას სისტემის არაპროგნოზირებადი ყოფაქცევა, რომელიც შეიძლება დავაკავშიროთ არაწრფივი სისტემების სტოქასტიკურობასთან. უფრო მეტი თვალსაჩინოებისათვის, შეიძლება წარმოვიდგინოთ

ბურთულა, რომელიც ჩამოცურდება „ლარნაკის" $\upsilon(x)$ კედელზე, მაშინ როდესაც „ლარნაკს" აქვს (1.6) ნახაზზე ნაჩვენები ფორმა $\lambda_1 < 0$ წირით, მაშინ ბურთულა აუცილებლად შეჩერდება $x_s = 0$ წერტილში, თუკი „ლარნაკს როცა $\lambda > 0$, მაშინ ბურთელა შეიძლება შეჩერდეს ორიდან ერთ-ერთ წერტილში $x_s = +\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$ ან $x_s = -\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$.



ნახ. 1.6 სტრუქტურული მდგრადობის გრაფიკი

ამ შემთხვევაში $(\lambda_1 > 0)$ მთავარ როლს თამაშობს ფლუქტაციები. ვივარაუდოთ, რომ ბურთულა თავდაპირველად იმყოფებოდა წერტილში $x_s = 0$, მაშინ მარჯვენა ან მარცხენა ორმოებში ბურთულის მოხვედრის შესაძლებლობა დამოკიდებული იქნება მცირე ფლუქტუციებზე, რომლებიც მოქმედებენ სისტემაში.

არაწრფივ სისტემაში მმართველი პარამეტრების შეცვლისას შეიძლება წარმოიშვას სხვადასხვა გარდამავალი მოვლენები, რომლებიც ანალოგიურია ფაზური გადასვლებისა და დამახასიათებელია მრავალ ფიზიკო-ქიმიური სისტემისათვის. ამ მოვლენებს ახასიათებთ ზოგიერთი საერთო თვისებები, რომელთაგანაც ძირითადი მდგომარეობს შემდეგში.

პარამეტრების $(\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0)$ ზოგიერთი მნიშვნელობებისათვის სისტემაში შესაძლებელია არსებობდეს მხოლოდ ერთადერთი შტო (ამონახსნი), რომელიც ხასიათდება მნიშვნელოვანი თვისებით-ასიმპტოტური მდგრადობით (წირი a ნახ.1.5). ამ შემთხვევაში სისტემა აქრობს

შინაგან ფლუქტაციებს ან შეზღუდულ გარეგან აღშფოთებებს. ხოლო მმართველი პარამეტრების $\lambda_{1e}(\lambda_{1c}=0)$ გარკვეული კრიტიკული მნიშვნელობებზე გადასვლისას მდგომარეობა ამ შტოზე (წირი a' ნახ. 1.5) ხდება არამდგრადი და მაშინ არ ხდება ფლუქტაციების ჩაქრობა. სისტემის მოქმედების გაძლიერების ანალოგიურად, დაიწყებს გადახრას ნორმალური მდგომარეობიდან და შემდგომ გადავა ახალ რეჟიმში. ნაჩვენები ორი რეჟიმი ერწყმის ერთმანეთს მმართველი პარამეტრის $\lambda_{1c}=0$ კრიტიკული მნიშვნელობისას და განსხვავდებიან $\lambda>\lambda_{1c}$ მნიშვნელობისათვის, ასეთ მოვლენა წარმოადგენს ბიფურკაციის მოვლენას, რომელიც დაკავშირებულია სისტემის კატასტროფიულ ცვლილებებთან. განსაზღვრულ განსაკუთრებული გადასვლის მომენტში, რომელიც მდებარეობს $\lambda_1=\lambda_{1c}$ სიახლოვის შემოგარენში სისტემას შეუძლია განახორციელოს კრიტიკული არჩევანი [10,20]

სისტემის აღწერილი არჩევანის პროცესების შედეგად წარმოიქმნება ერთგვარი მიმზიდავი სტრუქტურა-ატრაქტორი, და შესაბამისად ხდება მისი თვითორგანიზაცია.

ამრიგად, ევოლუციური ერთცვლადიანი მოდელის (1.22)-ის საფუძველზე, რომელიც აღწერს (1.21) განტოლების „წესრიგის პარამეტრის" ქცევას, დგინდება რომ წარმოიშობა თანაბრადარალბათური წარმოშობის მრავალი (ჩვენ შემთხვევაში ორი) ამონახსნისა, რომლებიც ერთდროულად ფლობენ ასიმპტოტური მდგრადობის თვისებას. ნაჩვენები მოვლენა უშუალოდ ასახავს არაწრფივი სისტემების გადახრის თვისებას, რაც შეესაბამება ამოცანების ამოხსნას. მეორეს მხრივ, აღწერილი ევოლუციური მოდელის „მარტივი" თვისება (1.22) მიუთითებს რთულ ყოფაქცევაზე. ეს ადასტურებს იმას რომ ერთი ცვლადიან სისტემაში, რომელიც შეიცავს უფრო მაღალი რიგის ხარისხობრივ არაწრფივობას, შეიძლება წარმოიქმნას უფრო რთული გარდამავალი მოვლენები. მთავარია, რომ ეს დაბალი განზომილების „მარტივი" არაწრფივი მოვლენები უნდა აღწერდნენ მრავალი კლასის მრავალგანზომილებიან ფიზიკური სისტემების ყოფაქცევას მათი მოძრაობის საფინიშო ეტაპებზე, ანუ ექსპერიმენტალურად აღწერენ რთულ დაკვირვებად გარდამავალ მოვლენებს.

სინერგეტიკის ევოლუციური განტოლებები ანდრონოვ-ჰოპფის ბიფურკაცია. ზემოთ განხილულ შემთხვევაში $x(t)$ „წესრიგის პარამეტრის“ ყოფაქცევა აღიწერება პირველი რიგის (1.22) დიფერენციალური განტოლებით და შესაბამისად, (1.21) საწყისი სისტების ევოლუცია ფინალურ ეტაპზე ფაქტიურად მიმდინარეობს ერთგანზომილებიან ფაზურ სივრცეში, რაც ნიშნავს, რომ ამ სივრცეში შესაძლებელია არსებობდეს მიმზიდველი ინვარიანტული სიმრავლის–ატრაქტორების მხოლოდ ერთი ტიპი უძრავი წერტილების ($x_s = \pm\sqrt{\lambda_1 \cdot \lambda_2}$) სახით, რომელსაც შეესაბამება სტაციონალური მდგომარეობები.

ასეთი სახის დისიპატიური სისტემები იცვლებიან დროთა განმავლობაში. განვიხილოთ ორგანზომილებიანი ევოლუციური განტოლებების ტიპიური მაგალითი.

დავუშვათ, რომ რთული სისტემის ეტაპზე „წესრიგის პარამეტრების“ მიმართ ყოფაქცევა მისი მიძრაობის ფინალურ აღიწერება პუანკარეს შემდეგი ევოლუციური განტოლებებით [10,15]:

$$\dot{x}_1(t) = \left(\lambda - x_1^2 - x_2^2\right)x_1 - \omega x_2 \qquad \dot{x}_2(t) = \omega x_1 + \left(\lambda - x_1^2 - x_2^2\right)x_2 \tag{1.27}$$

შემოვიტანოთ შემდეგი სახის აღნიშვნა: $x_1 = r\cos\varphi$ და $x_2 = r\sin\varphi$ ე.ი. პოლარული კორდინატების r და φ შემოტანით (1.27) განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\dot{r}(t) = \lambda r - r^3 \tag{1.28}$$

$$\dot{\varphi}(t) = \omega \tag{1.29}$$

სადაც λ და ω- პარამეტრებია. (1.29)- დან უშუალოდ გამომდინარეობს:

$$\dot{\varphi}(t) = \varphi_0 + \omega t\,. \tag{1.30}$$

განტოლება (1.28) ზუსტად ემთხვევა ადრე გამოკვლეულ (1.22) განტოლებას $\lambda = \lambda_1$ და $\lambda_2 = 1$ პირობების დროს. ისევე როგორც (1.22) განტოლებისათვის, გვაქვს შემდეგი სტაციონალური მდგომარეობები $r_s = 0$ და $r_s = \sqrt{\lambda}$ (λ>0). ამ შემთხვევაში ამ ორ ამონახსნს r, φ სისტემის ფაზურ სივრცეში (1.28), (1.29) შეესაბამება კორდინატების სათავე r=0 φ=0 და ეგრეთწოდებულ „ზღვრული ციკლი“-ატრაქტორი წრეწირის სახით ცენტრით კორდინატთა სათავეში რადიუსით $\sqrt{\lambda}$, რომელზედაც სის-

ტემა მოძრაობს ω სიჩქარით. ნათელია, რომ როცა $\lambda<0$ სტაციონალური მდგომარეობა $r=0$, $\varphi=0$ ასიმპტოტურად მდგრადია, ხოლო როცა $\lambda>0$ სტაციონალური მდგომარეობა $r=0$, $\varphi=0$ ხდება არამდგრადი. (1.30) გამოსახულების გათვალისწინებით ვპოულობთ (1.27) – განტოლების გარდამავალ ამონახსნებს:

$$x_1(t) = r(t)\cos(\varphi_0 + \omega t) \quad \text{და} \quad x_2(t) = r(t)\sin(\varphi_0 + \omega t) \tag{1.31}$$

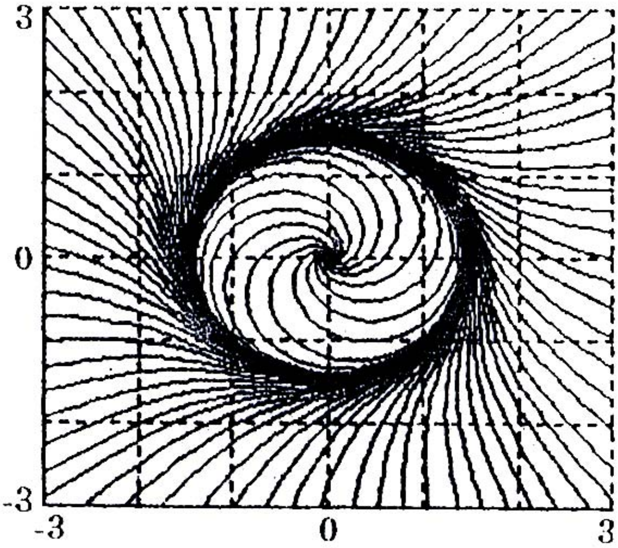
სადაც ფუნქცია r(t) განისაზღვრება (1.24) ტიპის დამოკიდებულებიდან, როცა სრულდება პირობა $r(t)>0$ ე.ი.

$$r(t) = \sqrt{\frac{\lambda r_0^2}{r_0^2 + \left(\lambda - r_0^2\right)e^{-2\lambda t}}} \tag{1.32}$$

(1.31) და (1.32)–დან გამომდინარეობს შემდეგი სტაციონალური ამონახსნები

$$x_{1s}(t) = \sqrt{\lambda}\cos(\varphi_0 + \omega t) \quad \text{და} \quad x_{2s}(t) = \sqrt{\lambda}\sin(\varphi_0 + \omega t)\,. \tag{1.33}$$

(1.31), (1.32) გარდამავალი ამონახსნები გვიჩვენებენ, რომ ნებისმიერი ტრაექტორიები, რომლებიც გადიან ფაზურ სიბრტყის (ნახ. 1.7) ნებისმიერ წერტილებში, სისტემის ფაზურ სივრცეში გარდუვალად „გარსშემოეხვევიან“ შიგნიდან თუ გარედან „ზღვრულ ციკლს“-ჰარმონიულ ატრაქტორს. ეს მტკიცდება (1.33)-ის სტაციონალური ამონახსნებით, რომლებიც აღწერენ ჰარმონიულ რხევებს და შესაბამისად ფაზურ სიბრტყეში შეკრულ წრიულ ტრაექტორიებს.)



ნახ 1.7 ზღვრული ციკლი - ჰარმონიული ატრაქტორი

ახლა განვიხილოთ სისტემის შეკრული ტრაექტორიის მდგრადობა დამყარებულ რეჟიმში პირობით $r_s = \pm\sqrt{\lambda}$. ამისათვის ტრაექტორიას მივანიჭოთ მცირე ნაზრდი. ე.ი. დავუშვათ რომ $r = \sqrt{\lambda} + \Delta r$ და ჩავსვათ იგი (1.28) განტოლებაში. მაშინ მივიღებთ:

$$\Delta\dot{r}(t) = \lambda\left(\sqrt{\lambda} + \Delta r\right) - \left(\lambda^{3/2} + \Delta r^3 + 3\sqrt{\lambda}\Delta r^2 + 3\lambda\Delta r\right) \tag{1.34}$$

ვინარჩუნებთ რა (1.34) განტოლებაში წრფივ წევრებს Δr ვპოულობთ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\Delta\dot{r}(t) \approx \lambda\left(\sqrt{\lambda} + \Delta r\right) - \left(\lambda^{3/2} + 3\sqrt{\lambda}\Delta r^2\right) = -2\lambda\Delta r \tag{1.35}$$

რომელის ამონახსნსაც აქვს სახე $\Delta r(t) = \Delta r_0 e^{-2\lambda t}$. (1.35)-დან გამომდინარეობს რომ შეკრული ტრაექტორია $r_s = \sqrt{\lambda}$ ასიმპტოტურად მდგრადია რადგანაც რადიუსი r მცირდება როცა $\Delta r_0 > 0$-ზე და იზრდება როცა $\Delta r_0 < 0$-ზე. ეს ნიშნავს, რომ ზღვრული ციკლი წარმოადგენს ასიმპტოტურად მდგრად წრიულ ტრაექტორიას რომლისკენაც გარდუვალად მიიზიდება სისტემის ყველა ტრაექტორია არის განსაზღვრულ მიდამოში. ხაზი უნდა გაესვას, რომ მოცემული ტრაექტორიები ($r_s = \sqrt{\lambda}$) არ არის დამოკიდებული (1.28) (1.29) სისტემის საწყისი მდგომარეობაზე. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, შეკრული ტრაექტორიების მოძრაობის პერიოდი განისაზღვრება მხოლოდ სისტემის შინაგანი პარამეტრებით(λ, ω). ამასთან, ამ დროს სისტემა მოძრაობს დროში ზღვრულ ციკლზე – ატრაქტორზე მხოლოდ ერთი მიმართულებით. შევნიშნოთ, რომ ევოლუციური განტოლების (1.22) ტიპიურ ფორმამდე შეგვიძლია დავიყვანოთ დიფერენციალური განტოლებათა სისტემაც (1.28), (1.29). იმისათვის შემოვიღოთ კომპლექსური ცვლადი ($z = x_1 + ix_2$) მაშინ განტოლებები (1.27), (1.28) და (1.29) მიიღებენ სახეს:

$$\dot{z}(t) = (\lambda + i\omega)z - z\left|z\right|^2 \tag{1.36}$$

რომელიც თავისი სტრუქტურით წარმოადგენს (7.22) ევოლუციური განტოლების კომპლექსურ ექვივალენტს. (1.36)-ის განტოლება ამონახსნი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ფორმით

$$(z(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}).$$

ან $z(t)=r(t)\left[\cos\varphi(t)+i\sin\varphi(t)\right]$ (1.37)

სადაც ფუნქცია $\varphi(t)$ და $r(t)$ განისაზღვრება (1.30) და (1.32) გამოსახულებებით. (1.36) ჩავსვათ (1.37)-ში და გავათანაბროთ ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები მივიღებთ კვლავ (1.37) განტოლებას. სტაციონალური რეჟიმისათვის, როდესაც $r_s=\sqrt{\lambda}$, (1.36)-ის ამონახსნი (1.30) გათვალისწინებით ღებულობს სახეს:

$$z_s(t)=\sqrt{\lambda}\left[\cos(\varphi_0+\omega t)+i\sin(\varphi_0+\omega t)\right] \tag{1.38}$$

სტაციონალური ამონახსნი (1.38) გვიჩვენებს რომ სისტემა ასრულებს დამყარებულ ჰარმონიულ რხევებს და ამით მტკიცდება, რომ სისტემის ფაზურ სივრცეში არსებობს ზღვრული ციკლი-ჰარმონიული ატრაქტორი.

ამრიგად, (1.28), (1.29) დისიპატიური სისტემას გააჩნია მიმზიდავი სიმრავლე-ჰარმონიული ატრაქტორები. მასზე მოძრაობა არ არის დამოკიდებული საწყის პირობებზე (სისტემის ტრაექტორია ეხვევა ზღვრულ ციკლს შიგნიდან ან გარედან) და გამოვლენილია დროის მიმართულება.

ზემოთ აღწერილი მოვლენა წარმოადგენს ახალი ტიპის ბიფურკაციის წერტილს (როცა λ=0), რომელსაც მათემატიკურ ლიტერატურაში უწოდებენ ანდროპოვ-ჰოპფის ბიფურკაციას. სწორედაც ორგანზომილებიან ევოლუციურ განტოლებებში ამ დინამიკური თვისებას მივყევართ პერიოდულ ქცევამდე. ამასთან λ პარამეტრის მისი ბიფურკაციული (λ_c=0) მნიშვნელობიდან გადახრისას მდორედ იზრდება პერიოდული ამონახსნის ამპლიტუდა. ძალზე მნიშვნელოვან გარემოებას წარმოადგენს ის ფაქტი, რომ დამყარებული ჰარმონიული რხევების როგორც ამპლიტუდა, ისევე პერიოდი ზღვრულ ციკლზე განისაზღვრება სისტემის ევოლუციურ განტოლებების λ და ω საკუთრივი პარამეტრებით. დისიპატიური სისტემების რხევის ეს თვისება განსხვავდება კონსერვატიული სისტემების რხევების თვისებებისაგან, რომელთა მახასიათებლები დამოკიდებულია საწყისი პირობებზე. კონსერვატიული სისტემები, რომელთაც მიეკუთვნებიან კვანტური და კლასიკური მექანიკის ძირითადი განტოლებები, წარმოადგენენ ლიაპუნოვის მიხედვით მდგრადებს, მაგრამ არა ასიმპტოტურად მდგრადებს. ე.ი. ისინი მგრძნობიარენი არიან ფლუქტაციებისადმი. ამავე დროს დისიპატიური სისტე-

მები ანდრონოვ-ჰოპფის ბიფურკაციით ასიმპტოტურად მდგრადები არიან ზღვრულ ციკლთან მიმართებაში და შესაბამისად მცირედ მგრძნობიარენი არიან ფლუქტაციისადმი და გარეგანი ზემოქმედებისადმი.

ზოგად შემთხვევაში, რთულ მრავალგანზომილებიან სისტემებში შეიძლება იყოს რამოდენიმე წესრიგის პარამეტრი (x_1, x_2......), რომელიც ხშირად მცირე რიცხვია, არსებითად მცირე ვიდრე სისტემის საწყის განზომილება. ამ კოლექტიურ ცვლადებს – წესრიგის პარამეტებს (მიესადაგება) სხვა ცვლადები, რომლებიც შეიძლება გამოვრიცხოთ მაკროსკოპიული ქცევის გამოკვლევისას. სწორედ ევოლუციური განტოლებების მცირე რიცხვი გვეხმარება გამოვავლინოთ წესრიგის პარამეტრები და გამოვიკვლიოთ საწყისი მრავალგანზომილებიანი სისტემების თვისებები. აღწერილი თვისებების მქონე სისტემების განმასხვავებელ თავისებურებას წარმოადგენს საწყისი პირობების „დავიწყება" და უწონასწორო სტრუქტურების ფორმირება. სწორედ უწონასწორობა შეიძლება გახდეს მიზეზი მოწესრიგებულობისა ე.ი დინამიკური არაწრფივი სისტემის თვითორგანიზებისა.

უნდა აღინიშნოს, რომ თვითორგანიზაციის პროცესებს გააჩნიათ სპონტანურ ხასიათი, რომელიც წარმოიქმნება არაწრფივ სისტემებში მათი განზომილებების მოახლოებული რედუქციასთან და მმართველი პროცესების შემთხვევითი შეეცვლისას: თვითორგანიზაციის მიზეზობრივი ხერხი, აღმოჩენაა რომელმაც მოგვცა საშუალება აღმოგვეჩინა არაჩვეულებრივი სხვადასხვა ბუნების კოოპერატიული მოვლენები.

ბიფურკაციები და ქაოსი. არაწრფივი სისტემების კონსერვატულობის და დისიპატიურობის თვისებების კომბინაციამ მიგვიყვანა მათი ქცევის ორ განსხვავებულ ტიპამდე. პირველ შემთხვევაში ეს მოწესრიგებული და რეგულარული მოძრაობებია, რომლებსაც მიეკუთვნებიან უმეტესობა პროცესებისა, რომლებიც მიმდინარეობენ ტექნიკურ და რიგ ბუნებრივ სისტემებში. შეიძლება საკმაოდ საფუძვლიანად ვივარაუდოთ ქცევები ამ სისტემებში, თუ ვიცით მათში მოქმედი კანონები და ზემოქმედებები.

არაწრფივ დინამიკურ სისტემებში სხვა ფართოდ გავრცელებული პროცესები მიეკუთვნება ქაოსურს. არც ისე დიდი ხნის წინ მეცნიერები ფიქრობდნენ რომ რთული ქაოსური მოძრაობა შეიძლება წარმოიქმნას

მხოლოდ ზოგიერთ მრავალგანზომილებიან უამრავი ცვლადების შემცველ სისტემებში. თუმცა, სრულად მოულოდნელად აღმოჩნდა, რომ არაწრფივ დეტერმინირებულ მხოლოდ მესამე რიგის სისტემებში მათ ფაზურ სივრცეში შეიძლება ვიხილოთ ძალიან რთული ქაოსური მოძრაობები. მაგალითისათვის განვიხილოთ შემდეგი დიფერენციალური განტოლებებათა სისტემა:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sigma y - \sigma x \\ \dot{y}(t) &= -y + rx - xz \\ \dot{z}(t) &= -bz + xy \end{aligned} \qquad (1.39)$$

სადაც σ, r, b – მუდმივი პარამეტრებია

(1.39) განტოლება წარმოადგენს ლორენცის ცნობილ მოდელს, რომელიც აღწერს მრავალფეროვან ბუნებრივ პროცესებს. (1.39) სისტემას მის ფაზურ სივრცის რაიმე სიმრავლეზე გააჩნია ფრაქტალური განზომილების „უცნაური" ატრაქტორი. ამ სიმრავლეზე სისტემას გააჩნია, აგრეთვე, საწყისი პირობებისადმი გაზრდილი მგრძნობიარობა, რომლის შედეგედაც წარმოიქმნება მოძრაობის ქაოსური რეჟიმები.

გამოვიკვლიოთ ლორენცის მათემატიკური მოდელის თვისებები [10,15,20]. თავიდან განვიხილოთ მისი სტაციონალური მდგომარეობა, როდესაც $\dot{x}_s(t) = \dot{y}_s(t) = \dot{z}_s(t) = 0$ მაშინ (1.39) სისტემიდან გვაქვს

$$x_s = y_s, \quad y_s - rs_s + x_s z_s = 0, \qquad x_s y_s - bz_s = 0 \qquad (1.40)$$

(7.40)-ის გაერთიანებით ვპოულობთ

$$x_s^3 + b(1-r)x_s = 0 \qquad (1.41)$$

ნათელია, რომ (1.41)-ში შესაძლებელია შემდეგი სტაციონალური მდგომარეობები

$$\text{ა)} \quad x_s = 0, y_s = 0, z_s = 0 \qquad (1.42)$$

$$\text{ბ)} \quad x_s = y_s = \pm\sqrt{b(r-1)}, z_s = r - 1 \qquad (1.43)$$

(1.42) და (1.43)-ის სტაციონალური მდგომარეობების მდგრადობის შესწავლისათვის განვიხილოთ ლორენცის მოდელის წრფივი მიახლოება. ამ შემთხვევაში კვადრატული წევრები შეიძლება უგულვებელვყოთ, მაშინ (1.42) მდგომარეობისათვის მივიღებთ განტოლებების სისტემას

$$\dot{x}(t) = \sigma(y - x)$$
$$\dot{y}(t) = rs - y \tag{1.44}$$
$$\dot{z}(t) = -bz$$

(1.44)-დან გამომდინარეობს რომ მესამე განტოლება არ არის დაკავშირებული პირველ ორთან, ხოლო კომპონენტი $z(t) = z_0 e^{-bt}$ მიილევა როდესაც ($z \to 0$) რადგანაც პარამეტრი $b>0$, კომპონენტების x(t) და y(t) განსაზღვრისათვის საჭიროა მახასიათებელი განტოლების

$$\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r) = 0 \tag{1.45}$$

ამონახსნა.

როდესაც $r<1$-ზე (1.45) განტოლების ფესვები უარყოფითია და შესაბამისად (1.42) სტაციონალური მდგომარეობა წრფივად მდგრადია. როდესაც $r>1$-ზე, მაშინ ფესვებიდან ერთ-ერთი ხდება დადებითი და მდგომარეობა (1.42) წრფივად არამდგრადია. ცხადია, რომ $r_c=1$ მნიშვნელობა წარმოადგენს წრფივი მდგომარეობის საზღვარს და ატარებს ბიფურკაციის წერტილის სახელწოდებას [7.14, 7.20].

ასე, რომ (1.42) წრფივად მდგრადია როცა $0 \le r \le 1$ და არამდგრადია როცა $r>1$-ზე. სინერგეტიკაში r პარამეტრს ჰქვია მმართველი პარამეტრი.

გამოვიკვლიოთ ეხლა (1.43)-ის სტაციონალური მდგრადობა წრფივი მდგრადობა, რომლისათვისაც გაწრფივებულ სისტემას აქვს სახე

$$\dot{x}(t) = \sigma(y - x), \qquad \dot{y}(t) = x - y - \sqrt{b(r-1)}\,z \tag{1.46}$$
$$\dot{z}(t) = -\sqrt{b(r-1)}\,(x + y) - bz\,.$$

(1.46) სისტემის მახასიათებელი განტოლებას ექნება სახე:

$$\begin{vmatrix} -\sigma - 1 & \sigma & 0 \\ 1 & -\lambda - 1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{1.47}$$

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0$$

როცა $r>1$, (1.47) განტოლების ფესვების ნამრავლი არის უარყოფითი რიცხვი, ეს კი როგორც ვიცით ალგებრიდან, ნიშნავს რომ სულ მცირე ერთი მაინც ფესვებიდან ერთი ნამდვილია და უარყოფითი, ხოლო დანარჩენი ორი ნამდვილია ერთი ნიშნით ან კომპლექსურად შეუღლებულია. ისმის კითხვა: რა მოსდის სისტემის (1.46)-ის სტაცი-

ონალურ მდგომარეობას (1.43) მმართველი პარამეტრის r>>1 შემდგომი ზრდისას? ცნობილია, რომ (1.46) მესამე ხარისხის წრფივი სისტემის არამდგრადობა დამოკიდებულია პირობაზე, რომ (1.47) განტოლების კომპლექსურ-შეუღლებული ფესვები არიან ხშირად წარმოსახვითი, რადგანაც $2b\sigma(r-1)>0$. ალგებრიდან ცნობილია, რომ (1.47) განტოლების ფესვების წარმოსახვითობა შეიძლება უზრუნველყოფილ იქნეს მაშინ, როდესაც მისი კოეფიციენტების წარმოებულები ტოლი იქნება თავისუფალი წევრისა (როცა λ^+ და λ). ე.ი. თუ სრულდება პირობა $b(\sigma+b+1)(\sigma+z)=2b\sigma(r-1)$, მაშინ აქედან ვპოულობთ

$$r_c^{'}=\frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1} \qquad (1.48)$$

გამოსახულება (1.48) განსაზღვრავს მმართველი პარამეტრის r-ის კრიტიკულ მნიშვნელობას, რომლის დროსაც (1.43) სტაციონალური მდგომარეობა ხდება წრფივად არამდგრადი. ცხადია, რომ როცა $\sigma<b+1$ დადებითი კრიტიკული მნიშვნელობა r_c' არ არსებობს. ეს ნიშნავს რომ ნებისმიერი r_c დადებითი მმართველი პარამეტრისათვის (1.48) პირობა არ სრულდება და მაშინ (1.43) სტაციონალური მდგომარეობა იქნება წრფივად მდგრადი. იმ შემთხვევისათვის როცა $\sigma<b+1$-ზე ნაჩვენები მდგომარეობა კარგავს მდგრადობას საკმაოდ დიდი $r>r_c'$ – სათვის. აღვნიშნოთ რომ (1.47) განტოლების ფესვების კომპლექსურობას ფიზიკურად მივყევართ (1.46) სისტემის მოძრაობის ძალზედ ინტენსიურ ოსცილაციამდე მისი სტაციონალურ მდგომარეობის მცირე აღშფოთებისას.

ახლა მნიშვნელოვანია თუ როგორ მოიქცევა ლორენცის (1.39)-მოდელი როცა $r>>r_c'$ – ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად გარდავქმნათ საწყისი განტოლებები ახალი ცვლადების

$$\xi=\frac{x}{2\sigma(r-1)},\quad q=\frac{1}{r-1}\left(z-\frac{x^2}{2\sigma}\right),\quad r=\frac{t}{\sqrt{\sigma(r-1)}} \qquad (1.49)$$

შემოტანით [7.20]. იგი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\ddot{\xi}(r)+(q-1)\xi+\xi^3=-\mu\dot{\xi}(t)$$

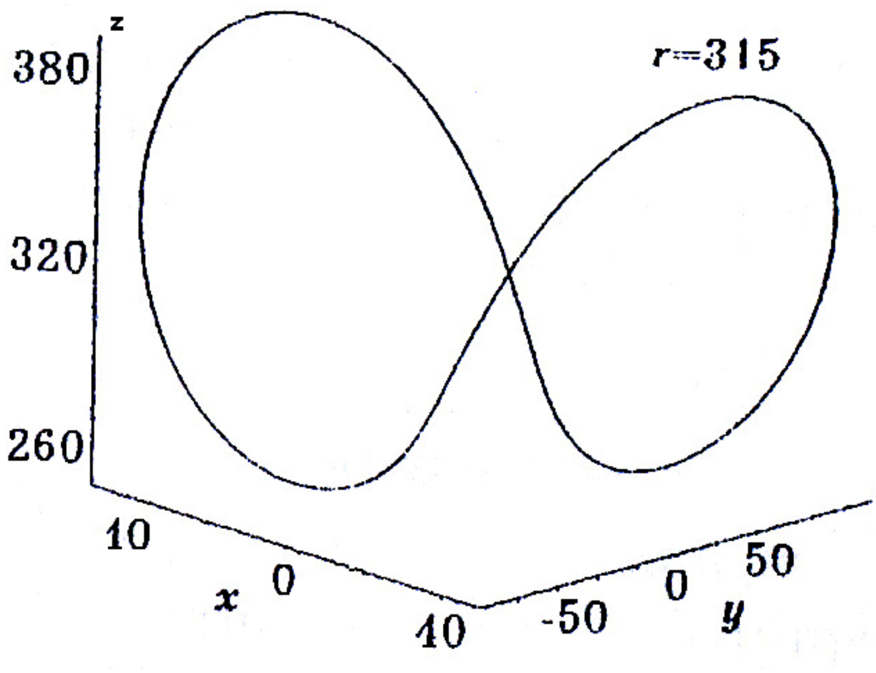
$$\dot{q}(r)=-\frac{\mu}{\sigma+1}\left[bq-(2\sigma-b)\xi^2\right] \qquad (1.50)$$

სადაც $\mu = -\frac{\sigma+1}{\sqrt{\sigma(r-1)}}$ მცირე პარამეტრია.

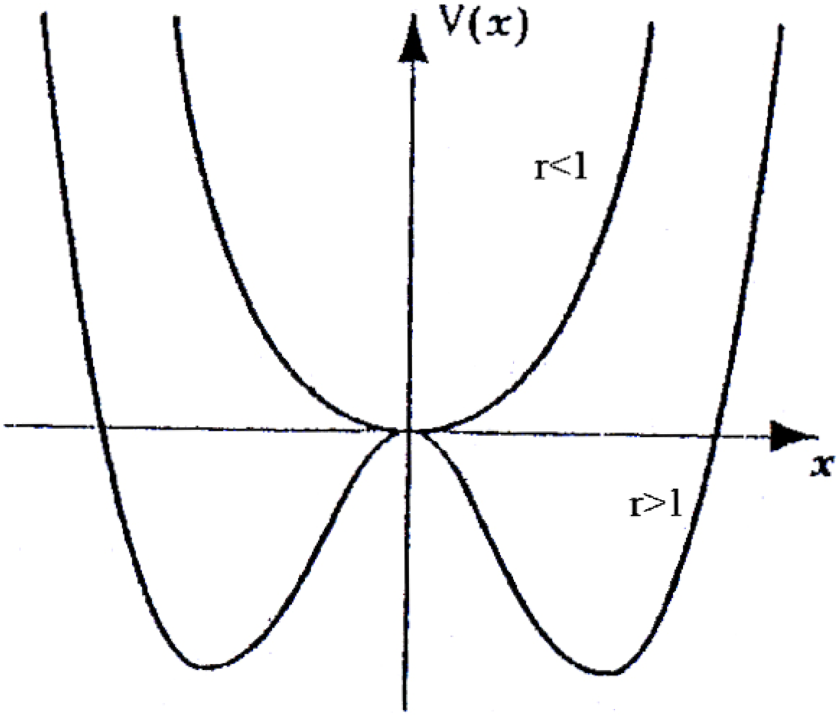
(1.50) სისტემაში პირველი განტოლება აღწერს არაწრფივი ოსცილატორის რხევას $\omega_0^2 = q-1$ სიხშირით, რომელიც მდორედ იცვლება მეორე განტოლების q(t) ამონახსნის შესაბამისად. მცირე პარამეტრი μ დიდი r-ების დროს შეიძლება გავუტოლოთ 0-ს, მაშინ q=const და პირველი განტოლება წარმოადგენს არაწრფივ ოსცილიატორს. გამოკვლევები გვიჩვენებენ [15], ამ შემთხვევაში (1.39) ლორენცის მოდელის ფაზურ სივრცეში წარმოიქმნება ზღვრული ციკლი. სურ 1.8-ზე ნაჩვენებია მისი ფაზური პორტრეტი როცა r=315, σ=10, b=8/3 რომლებიც ამტკიცებენ ზემოთ ჩამოყალიბებული მოსაზრებებს პერიოდული მოძრაობის წარმოშობის შესახებ.

ქაოსურობის წარმოშობის მიზეზების თვალნათელი წარმოდგენისათვის კვლავ გარდავქმნათ (1.39) ლორენცის განტოლება. ჩავსვათ $y = x + \frac{1}{\sigma}\dot{x}(t)$ ცვლადი პირველი განტოლებიდან და ცვლადი $z = \frac{1}{b}(xy - \dot{z})$ მეორე განტოლებაში, მაშინ მივიღებთ [21]:

$$\frac{1}{\sigma}\ddot{x}(t) = F = -\frac{1+\sigma-x^2}{\sigma}\dot{x}(t) + (\dot{r}-1)x - \frac{1}{b}x^3 + \frac{x}{b}\dot{z}(t) \qquad (1.51)$$



ნახ. 1.8. ზღვრული ციკლის ფუნქციის გრაფიკი



ნახ. 1.9 პოტენციალური ფაზური პორტრეტი

შემოვიტანოთ პოტენციალი

$$V = -\frac{r-1}{2}x^2 + \frac{1}{4b}x^4, \tag{1.52}$$

რომელსაც გააჩნია სხვადასხვა სახე როცა r>1-ზე და r<1-ის შემთხვევაში (სურ. 1.9). პოტენციალი (1.52) იზრდება $x_s=0$ სტაციონალური მდგომარეობის ორივე მხარეს. მმართველი პარამეტრის r-ის ერთიანზე გადასვლისას r>1 წარმოიშობა ბიფურკაცია და წარმოიშობა ერთი არამდგრადი ($x_s=0$) და ორი მდგრადი მდგომარეობა

$$x_s = \pm\sqrt{b(r-1)} \tag{1.53}$$

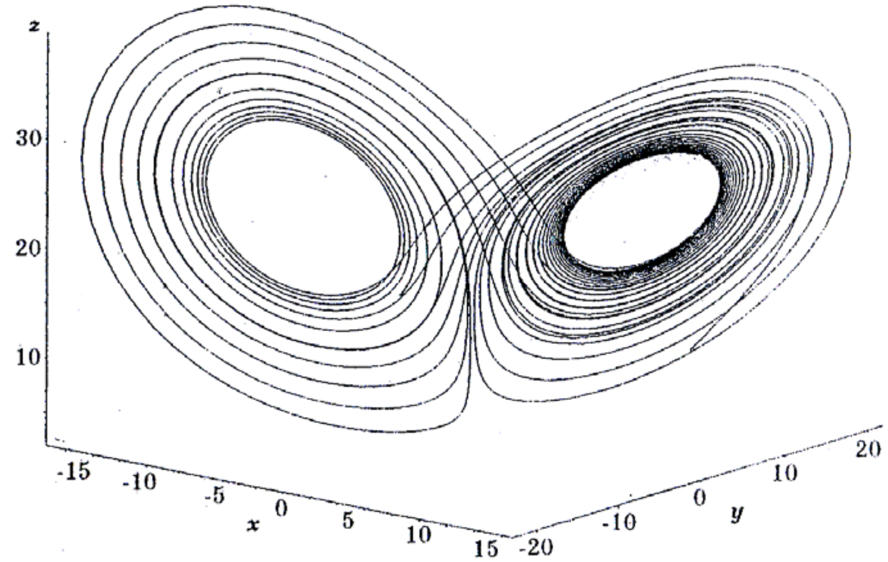
პოტენციალი (1.52)-ის გამოყენებით, (7.51)-ი განტოლება ეხლა შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$\frac{1}{\sigma}\ddot{x}(t) = -\frac{1+\sigma-x^2}{\sigma}\dot{x}(t) - \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{x}{b}\dot{z}(t), \tag{1.54}$$

რომელიც მოსახერხებელია ხარისხობრივი ანალიზისათვის. მიღებული (1.54) განტოლება ბოლო წევრის გარეშე წარმოადგენს მატერიალური წერტილის $V(x)$პოტენციალურ ორმოში მოძრაობის განტოლებას x(t) ხახუნის ძალით რომელსაც გააჩნია ხახუნის კოეფიციენტი, რომლის

ნიშანიც იცვლება დადებითიდან უარყოფითისაკენ, როცა $x^2 \geq 1+\sigma$. (1.54) განტოლების ბოლო წევრს გააჩნია ხისტი ძალის ფორმა, რომლის დრეკადობის კოეფიციენტი $-\frac{1}{b}\dot{z}(t)$ დამოკიდებულია დროზე. როდესაც წარმოებული $\dot{z}(t)$ მცირე სიდიდის არ არის, მაშინ ეს წევრი წარმოადგენს გარკვეულ მაიძულებელ ძალას, რომელიც დამოკიდებულია y და z ცვლადებზე. თუ კავშირს z და x –ს შორის უგულვებელვყოფთ, მაშინ ბოლო წევრი შეიძლება გამოიყურებოდეს როგორც გარკვეული შემთხვევითი ძალა [21]. სხვანაირად რომ ვთქვათ, მატერიალური წერტილი, რომელიც აღიწერება (1.54) განტოლებით შემთხვევით ძალის მოქმედებით იმოძრავებს ორკუზიან პოტენციურ ორმოში (1.52), ამასთან ხახუნის კოეფიციენტმა შეიძლება მიიღოს სხვადასხვა ნიშანი.

წარმოდგენილი მოსაზრებები მიუთითებენ ლორენცის მოდელის ყოფაქცევის, როგორც ატრაქტორის, რთულ ქაოსურ ხასიათზე. ნახ. 1.8 და ნახ.1.10-ზე მოცემულია მოძრაობის პროცესები r პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის, რაც ადასტურებს (1.39) ლორენცის მოდელის ტრაექტორიის რთულ ქაოტურ ხასიათს, რომლებიც აღიწერება მესამე რიგის დეტერმინირებული დიფერენციალური განტოლებებით. დადგენილი ფაქტი ადასტურებს თანამედროვე არაწრფივი დინამიკის ურთიერთგანსაცვიფრებელ მოვლენას.



ნახ 1.10 ლორენცის მოდელის ფაზური ტრაექტორია

ასე რომ, მაღალი რიგის $n \geq 3$ დეტერმინირებულ ობიექტებზე ბიფურკაციული მექანიზმების მოქმედების შედეგად შესაძლებელია წარმოიშვას რთული ქაოსური მოვლენები. ასეთი მოვლენების მათემატიკური მოდელები შეიცავენ ხარისხობრივ და კვადრატულ არაწრფივობას, რომლებიც გავრცელებულია სხვადასხვა ბუნების ობიექტებში. ამასთან წარმოიშვება ქაოსის მართვის პრობლემა, რომელსაც ექცევა სულ უფრო მეტი ყურადღება მეცნიერულ ლიტერატურაში.

აქვე განვიხილავთ მართვის მეთოდების გამოყენები მაგალითი არაწრფივი ობიექტისა ბიფურკაციით, რომელშიც მართვის არარსებობისას წარმოიშვებიან კატასტროფული პროცესები.

განვიხილოთ ამოცანა რომელიმე ბიოლოგიური პოპულაციის ოპტიმალურ დონეზე შენარჩუნებისა, რომელიც, საკვების მოპოვების კონკურენციის გათვალისწინებით, აღიწერება შემდეგი სახის განტოლებით [59].

$$\dot{x}(t) = \alpha x - \beta x^2 - \mu, \tag{1.55}$$

სადაც x პოპულაციის კონკრეტულ სახეობაში წარმომადგენელთა რაოდენობაა; α, β - დადებითი რიცხვები; μ - მმართველი პარამეტრი. (1.55) განტოლებით შეიძლება აღვწეროთ, მაგალითად, თევზჭერის მოდელი. ამ შემთხვევისთვის μ წარმოადგენს თევზჭერის კვოტას (გეგმას). თავდაპირველად დავუშვათ, რომ $\mu = \mu_0$ წინასწარ მოცემული სიდიდეა. მოვძებნოთ თევზჭერის შესაძლო მაქსიმალური კვოტა. ამისათვის (1.55) განტოლების მარჯვენა მხარე გავაწარმოოთ x – ით და შემდეგი გავუტოლოთ ნულით, მივიღებთ:

$$x_{\max} = \frac{\alpha}{2\beta} \quad \text{და} \quad \mu_0 = \frac{\alpha^2}{4\beta} \tag{1.56}$$

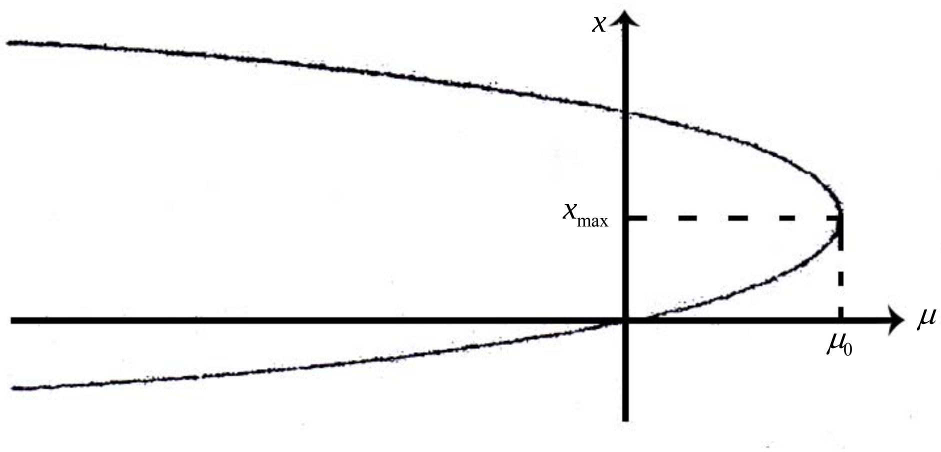
გამოვიკვლიოთ (1.55) განტოლება თვისობრივად. ამისათვის თავდაპირველად შევისწავლოთ მისი სტაციონალური მდგომარეობა:

$$\alpha x_s - \beta x_s^2 - \mu = 0\,. \tag{1.57}$$

(1.57)-დან განვსაზღვროთ დამოკიდებულება $x_s(\mu)$:

$$x_s = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\mu}}{2\beta}\,, \tag{1.58}$$

რომლის გრაფიკული სახეც, α=β=1 პირობის შემთხვევაში, წარმოდგენილია ნახ. 1.11-ზე.



ახ. 1.11. სტაციონალური მდგომარეობის გრაფიკი

$x_s(\mu)$ დამოკიდებულების გრაფიკს გააჩნია ორი ტოტი, რომლებიც ერთმანეთს ერწყმება μ და x_s იმ მნიშვნელობისათვის, რომლებიც განსაზღვრულია (1.56) პირობით. ამ მოვლენას უწოდებენ ბიფურკაციულს, ხოლო წერტილს, რომლის კოორდინატებიც გამოითვლება (1.56) გამოსახულებით, უწოდებენ სისტემის ბიფურკაციულ წერტილს. გამოვიკვლიოთ სისტემა ამ წერტილის მიდამოში ამისათვის შემოვიღოთ გადახრა $y = x - q_0$ და ჩავსვათ პოტენციური ფუნქციის გამოსახულებაში, რომელსაც ჩვენი შემთხვევისათვის აქვს სახე:

$$V = \frac{\mu - 1}{2} x^2 + \frac{1}{4\beta} x^4$$

მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ მოძრაობის განტოლებას

$$\dot{y}(t) = \alpha q_0 - \beta q_0^2 + (\alpha - 2\beta q_0) y - \beta y^2 - \mu \quad (1.59)$$

სადაც q_0 წერტილის კოორდინატაა.

უკანასკნელი განტოლების თვისება დამოკიდებულია μ მმართველი პარამეტრის მნიშვნელობაზე. შევირჩიოთ ოპტიმალური მნიშვნელობები μ=μ_0 და q_0=x_{max}, რომლებიც უზრუნველყოფენ თევზჭერის მაქსიმალურ კვოტას. შედეგად მივიღებთ განტოლებას

$$\dot{y}(t) = -\beta y^2 \tag{1.60}$$

რომლის ამონახსნსაც აქვს სახე:

$$y(t) = \frac{y_0}{\beta q_0 t + 1} \tag{1.61}$$

(1.61) გამოსახულებიდან ჩანს, რომ (1.60) განტოლების ამონახსნი მდგრადია (როცა y=0) საწყისი პირობებისათვის $y_0=x_0-x_{max}>0$ და არამდგრადია (როცა $y\rightarrow 0$) პირობისათვის $y_0<0$. აქედან გამომდინარეობს მნიშვნელოვანი დასკვნა: (1.60) საწყისი განტოლების ამონახსნი, რომელიც აღწერს პოპულაციის მდგომარეობას, მდგრადია, როცა $x_{\max} = \dfrac{\alpha}{2\beta}$ მხოლოდ იმ საწყის პირობებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებს პირობას $x_0 < x_{max}$. ამრიგად, თევზჭერის კვოტის ოპტიმიზაციას (მაქსიმიზაციის) $u = \mu_0 = const$ ხისტი მართვის შემთხვევაში მივყავართ დამყარებულ მდგომარეობის არამდგრადობამდე, რაც მცირე ფლუქტუაციების არსებობის შემთხვევაში იწვევს პოპულაციის განადგურებას, კატასტროფას. ეს კი შედეგია ბიფურკაციის წერტილით გამოწვეული მოვლენისა, რომელიც შეესაბამება თევზჭერის მაქსიმალურ ხისტ გეგმას. აღწერილი მოვლენა შეისწავლება თანამედროვე არაწრფივი სისტემის დინამიკასა და სისტემატიკაში.

ახლა ვაჩვენოთ, თუ როგორ შეიძლება მართვის თეორიის გამოყენებით თავიდან ავიცილოთ პოპულაციის კატასტროფული განადგურება, რომელიც გამოწვეულია თევზჭერის მაქსიმალურად ხისტი გეგმით. ამისათვის გამოვიყენოთ (1.59) განტოლება და μ მმართველი პარამეტრი განვიხილოთ როგორც y-ის ფუნქცია. ე.ი. ხისტი გეგმა $\mu=\mu_0$ შევცვალოთ უკუკავშირით:

$$\mu(t) = -\alpha q_0 + \beta q_0^2 - \gamma y, \tag{1.62}$$

უკანასკნელი გამოსახულების გათვალისწინებით, (1.59) გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$\dot{y}(t) = (\alpha - 2q_0\beta - \gamma)y - \beta y^2$$

თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას $\eta = \alpha - 2q_0\beta - \gamma$, მაშინ (1.63) ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\dot{y}(t)=\eta y-\beta y^2 \tag{1.63}$$

რომლის ამონახსნს აქვს სახე:

$$y(t)=\frac{\eta y_0}{\eta e^{-\eta t}-\beta y_0\left(e^{-\eta t}-1\right)} \tag{1.64}$$

თუ შევირჩევთ $\eta<0$, ე.ი. $\gamma>\alpha-2q_0\beta$, მაშინ (1.64) გამოსახულებიდან მივიღებთ, რომ როცა $t\to\infty$, გადახრა $y\to 0$. ეს კი ნიშნავს, რომ (1.64) გამოსახულება ასიმპტოტურად მდგრადია $y=0$-ის მიმართ. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\mu(y)$ მართვა უზრუნველყოფს პოპულაციის მოცემულ q_0 დონეზე შენარჩუნებას. ამასთან, ეს მნიშვნელობა შეიძლება იყოს ოპტიმალურიც $q_0=x_{\max}=\dfrac{\alpha}{2\beta}$. $\mu(y)$-ის გათვალისწინებით (1.55) განტოლება $x(t)$ საწყისი ცვლადის მიმართ შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\dot{x}(t)=(\alpha-y)x-\beta x^2+\frac{\gamma a}{2\beta}-\frac{a^2}{2\beta}$$

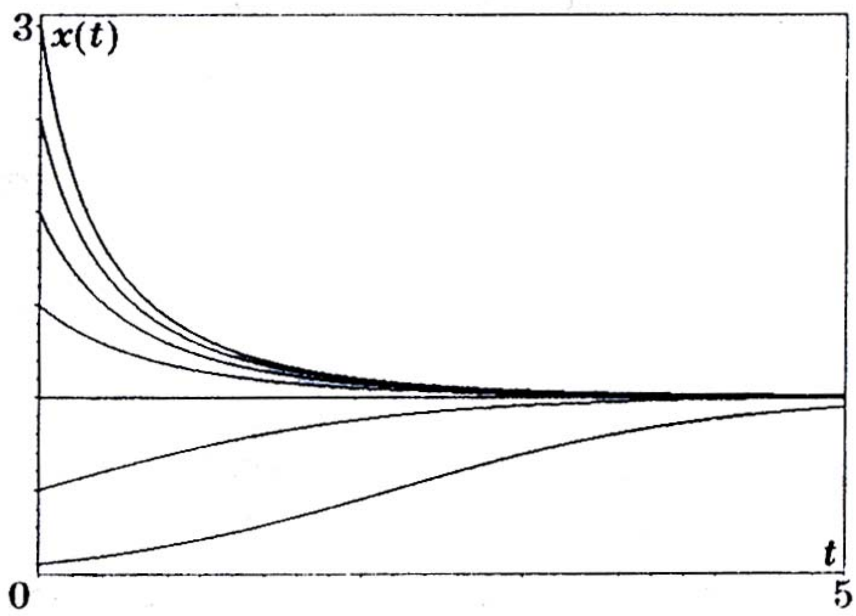
თუ დავუშვათ, რომ $\gamma=\beta q_0=\dfrac{\alpha}{2}$, მაშინ განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\dot{x}(t)=\left(\frac{\alpha}{2}-\beta x\right)x,$$

რომელიც აღწერს კრიტიკულ ბიფურკაციას და წარმოადგენს ლოგისტიკურ განტოლებას. ამ განტოლების ამონახსნს აქვს სახე:

$$x(t)=\frac{\alpha x_0}{\alpha e^{-\frac{\alpha}{2}t}-2\beta x_0\left(\alpha e^{-\frac{\alpha}{2}t}-1\right)}$$

იგი ასიმპტოტურად მდგრადია $x_s=\dfrac{\alpha}{2\beta}$ ატრაქტორის მიმართ და შეესაბამება თევზჭერის ოპტიმალურ კვოტას. ნებისმიერი საწყისი პირობების შემთხვევაში სინთეზირებული სისტემა ყოველთვის გამოდის ამ მდგომარეობაზე, რაც მტკიცდება ნახ. 1.12-ზე წარმოდგენილი მრუდებით, რომლებიც მიღებულია სისტემის მოდელირების შედეგად.



ნახ. 1.12 სინთეზირებული სისტემის გარდამავალი პროცესი

ამრიგად, (γx) უკუკავშირის შემოტანით მართვის კანონმა საშუალება მოგვცა გადავსულიყავით ბიფურკაციიდან (რომელიც მომავალში გამოიწვევდა კატასტროფას) ლოგისტიკურ განტოლებაზე, რომელსაც გააჩნია თვითორგანიზების თვისება. ამასთან, შესაძლებელია განვახორციელოთ თევზჭერის მოცემული კვოტა, რომელიც შეიძლება იყოს მაქსიმალურიც. უკუკავშირში γ კოეფიციენტის მცირე გადახრა გამოიწვევს წარმადობის მცირე დაწევას და არა კატასტროფას, რასაც ადგილი ჰქონდა ხისტი გეგმის $u=\mu_0=const$ არჩევის შემთხვევაში. მიუხედავად იმისა, რომ განხილული ფაქტი გამოვლენილ იქნა თევზჭერის მარტივ მაგალითზე, იგი შეიძლება გამოვიყენოთ მართვის ყველა იმ არაწრფივ სისტემაშიც, სადაც შესაძლებელია წარმოიქმნას ბიფურკაციული და ქაოსური მოვლენები. ცხადია, (μ) მმართველი პარამეტრის შერჩევის გზით შესაძლებელია სისტემა მებისმიერი საწყისი პირობებიდან გავიყვანოთ მისი მდგომარეობათა სივრცის სასურველ ატრაქტორზე და უზრუნველვყოთ მიმართული თვითორგანიზება-მიზიდვა ინვარიანტული მრავალსახეობისაკენ (ატრაქტორისაკენ).

1.4 არაწრფივი თვითორგანიზაცია და დისიპატიური სტრუქტურები.

სინერგეტიკის ძირითად ცნებებს წარმოადგენს: ბიფურკაცია, დაქვემდებარება, წესრიგის პარამეტრი, მართვის პარამეტრი და ატრაქტორი. აღმოჩნდა, რომ წონასწორობის დაკარგვას წრფივ მიახლოებაში, წესრიგის პარამეტრების წარმოშობასა და დაქვემდებარების პრინციპის რეალიზაციას შორის არსებობს მნიშვნელოვანი შინაგანი ურთიერთკავშირი. მმართველი პარამეტრების ცვლილების შედეგად არაწრფივმა სისტემამ შეიძლება დაკარგოს წონასწორობა წრფივ მიახლოებაში. ზემოთ განხილული მეორე რიგის სისტემის (1.11) ასეთ მმართველ პარამეტერს წარმოადგენს პარამეტრი λ_1, რომლის ცვლილების შედეგად $\Re_e(\lambda_1)$ შეიძლება გახდეს ძალიან მცირე სიდიდე ან შეიცვალოს ნიშანი და ამით შეიძლება გახდეს სისტემის არამდგრადობის მაჩვენებელი წრფივ მიახლოვებაში. ასეთ შემთხვევებში გამოიყენება დაქვემდებარების პრინციპი.

აქედან გამომდნარეობს, რომ ბიფურკაციის წერტილებში, რომლებშიც ხდება სტრუქტურული ცვლილებები, სისტემის ყოფაქცევა განისაზღვრება მხოლოდ წესრიგის პარამეტრებით. სხვადასხვა ბუნების არაწრფივ დინამიკური სისტემებში კავშირი დაქვემდებარების პრინციპს, წესრიგის პარამეტრებსა და წონასწორობის დაკარგვას შორის წრფივ მიახლოებაში საშუალებას გვაძლევს გამოვავლინოთ საერთო ანალოგიები. ადიაბატური მიდგომა, რომელიც გამოსახულია მეორე რიგის წრფივი სისტემების მაგალითზე (7.11) არ წარმოადგენს პრინციპიალურ სიახლეს და უკვე საკმაოდ დიდი ხანია გამოიყენება არაწრფივ მექანიკაში, ქიმიასა და სხვა მეცნიერებებში. ეს მიდგომები კი წარმოადგენენ დაქვემდებარების პრინციპის, სინერგეტიკის საბაზო პრინციპის, დასაბუთებას, ამ პრინციპზე აგებულია დინამიკური სისტემების არაწრფივი თვითორგანიზაციის თეორია.

სისტემაში არაწრფივი თვითორგანიზაცია შეიძლება წარმოიშვას მისი ზოგიერთი მმართველი პარამეტრების ცვლილებისას, სისტემის კომპონენტების რიცხვის შეცვლისას და აგრეთვე სისტემის ახალ

მდგომარეობაში გადასვლისას. თვითორგანიზაციის პროცესების მაგალითებს წარმოადგენენ:

მართვის თეორიაში ცნება „დისიპატიური სტრუქტურები" შემოტანილ იქნა ი.პრიგოჟინის მიერ. ის აღნიშნავდა რომ „როგორც წონასწორობიდან დაცილება, აგრეთვე არაწრფივობა შეიძლება სისტემაში უწესრიგობის მიზეზი იყოს. უწესრიგობას, მდგრადობასა და დისიპაციას შორის წარმოიშობა უმაღლესი ხასიათის არატრივიალური კავშირი. იმისათვის რომ გამოვყოთ ეს კავშირი ჩვენ ვუწოდებთ მოწესრიგებულ კონფიგურაციებს, რომლებიც წარმოიქმნებიან თერმოდინამიკური შტოების მდგრადობის არის გარეთ. ასეთი სტრუქტურები შეიძლება არსებობდნენ წონასწორობიდან შორს საკმაოდ დიდი ენერგიისა და ნივთიერებათა მოდინების ხარჯზე. დისიპატიური სტრუქტურები წარმოადგენენ მაგალითს, რომელიც დემონსტრაციას უკეთებს იმ ფაქტს, რომ უწონასწორობის უნარი წარმოადგენს მოწესრიგებულობის წაყროს".

არაწრფივ ღია სისტემებში მოწესრიგებულობის წარმოშობის პარადოქსულობას ხაზი გაესმევა იმ საერთო ცნობილი ფაქტით რომ ჩვეულებრივ წონასწორულ სისტემებში სახელდობრ დისიპაციის ცვლილება საერთოდ სპობს ყოველგვარ წესრიგს და იქ ყოველთვის წარმოიშობა თერმოდინამიკური წონასწორობა ე.ი. ქაოსი. აღმოჩნდა რომ ღია დისიპაციურ სისტემებში დისიპაციას მივყავართ შესაბამისი ზომისა და ფორმის სტრუქტურების წარმოშობამდე ე.ი. წარმოიქმნება თვითორგანიზაციის პროცესი. სხვა სიტყვებით სისტემაზე ზემოქმედებამ გარე სამყაროსთან ძალიან არამდგრად არეში შეიძლება მიგვიყვანოს თავისი თვისებებით ახალ დინამიკურ მდგომარეობამდე, რომელიც პრიგოჟინის მიერ იწოდება დისიპატიურ სტრუქტურებად, აქვე ხაზი გაუსვათ მოულოდნელად მჭიდრო კავშირს სტუქტურასა და დისიპაციას შორის ე.ი კარგვებს სისტემაში. ასეთმა სისტემებმა შეიძლება მიგვიყვანონ პრინციპულად ახალ მოვლენებამდე სისტემის ყოფაქცევაში, კერძოდ, სისტემის შემადგენელი უამრავი რაოდენობის ნაწილაკების და საერთოდ კომპონენტების უმაღლესად მაღალი მოწესრიგებულობის ყოფაქცევამდე. ი.პრიგოჟინის მიერ დისიპატიური სტრუქტურების აღმოჩენა ნიშნავს მატერიის ახალი დინამიკური მდგომარეობის დანახვას, რომელიც ადრე ცნობილი არ იყო კლასიკური მეცნიერებისათვის [6].

მართვის თეორიისათვის ცნება „დისიპატიური მოწესრიგებული სტურქტურები", რომლებიც წარმოიქმნებიან არაწრფივ სისტემებში ძლიერ არამდგრად არეებში, თავისთავად მნიშვნელოვანია სხვადასხვა თვალთახედვის კუთხიდან. საქმე იმაშია, რომ უწესრიგობა (ქაოსი) მიიღება მრავალი მეთოდებით, ხოლო წესრიგი კი პირიქით შეიძლება უზრუნველყოთ ძალზე მცირე რაოდენობის ხერხების მეშვეობით და რაც მაღალია წესრიგის ხარისხი, მით ნაკლებია ეს რიცხვი, რაც ნიშნავს ოპტიმალურ მართვას. ცნება „სტურქტურა" აგრეთვე დაკავშირებულია ცნება მართვასთან, რადგანაც ნიშნავს რომელიღაც ობიექტს, რომელსაც გააჩნია მდგრადობა და უნარი გაუწიოს წინააღმდეგობა შინაგან და გარეგან ზემოქმედებებს და დარჩეს საკუთარი თავის მსგავსი და არ შეიცვალოს მთლიანობაში. თუმცა როგორც აღინიშნა ძალიან მკაცრი მოწესრიგებული სტრუქტურების წარმოშობა ძლიერად არამდგრად არეში შეიძლება გახდეს ნეგატიური ფაქტორი მართვის თვალსაზრისით და მართვის სისტემების მრავალსახოვანი ყოფაქცევის მოთხოვნის შესასრულებლად.

სინერგეტიკულ სისტემებში შეიძლება წარმოიშვეს, როგორც მოწესრიგებული, ასევე ქაოსური რხევები. იმისათვის რომ დინამიკურ სისტემაში წონასწორობიდან მოშორებით არსებობდნენ მოწესრიგებული სტრუქტურები ამ სისტემებზე მუდმივად უნდა მოედინებოდეს ენერგიის, ნივთიერებებისა და ინფორმაციის უწყვეტი ნაკადი. სწორედ თვითორგანიზაცია წარმოადგენს ზემოთ ჩამოთვლილი მრავალფეროვანი სისტემების საერთო თვისებას, რომლებიც შედგებიან ელემენტებისაგან და სხვადასხვა ბუნების ქვესისტემებისაგან-ატომების, მოლეკულების, უჯრედების, ცხოველების და ა.შ თვითორგანიზაცია რაც არ უნდა პირველი შეხედვით მოგვეჩვენოს უცნაურად საშუალებას გვაძლევს შევისწავლოთ თავისი ბუნებით სხვადასხვანაირი დინამიკური სისტემების თვისებები, ერთიანი მათემატიკური პოზიციებიდან და ერთიანი ცნებებით. ასე, რომ ზემოთ ჩამოთვლილ ყველა მრავალფეროვან სისტემებში შეიძლება წარმოიქმნას თვითორგანიზაციის პროცესები, რომლებსაც მივყავართ წონასწორობის მდგომარეობიდან შორს მოწესრგებული მაკროსკოპული სტრუქტურების შექმნამდე, რომლებსაც გააჩნიათ პრინციპულად ახალი თვისებები.

ეს სტრუქტურები, რომლებიც შეიძლება წარმოიშვას კოგერენტული ან ქაოსური რხევებით მიიღეს დასახელება ატრაქტორები რომლებიც მიიზიდავენ ფაზურ სივრცეში სიმრავლეს, ე.წ. წერტილების ერთობლიობას, რომლისკენაც მიიზიდებიან ყველა ახლო ტრაექტორიები და მოძრაობები. როგორც ცნობილია, არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნები საწყისი პირობებისაგან დამოკიდებულებით შეიძლება მოიქცნენ პრინციპიალურად განსხვავებულად, თუ ისინი მოხვდებიან ატრაქტორის მიზიდვის არეში, და ისინი აუცილებლად გაემართებიან მისკენ. სხვა სიტყვებით, ეს ამონახსნები შეიძლება დაემორჩილონ რომელიღაც ყოფაქცევის მკაცრ წესებს, რომელიც ცნობილია, „ანალოგი" სუპერპოზიციის პრინიპისა არაწრფივ სისტემებში. ატრაქტორები არაწრფივი სისტემების ფაზურ სივრცეში შეიძლება იყოს შემდეგი ტიპის: ძირითადს მათ შორის წარმოადგენს წერტილი (კერძოდ მდგრადი ფოკუსი), ზღვრული ციკლი (პერიოდულად ცვლადი მდგომარეობათა სიმრავლე), ტორი და ბოლოს „უცნაური ატრაქტორი ".

ჩვეულებრივი ატრაქტორი (წერტილი, ზღვრული ციკლი ან ტორი) განსაზღვრავს სისტემის მოძრაობის დამყარებულ რეჟიმს, რომლისკენაც მიისწრაფიან ყველა გარდამავალი რეჟიმები, რომლებიც ხვდებიან მისი მიზიდულობის არეში. ამ ატრაქტორების მნიშვნელოვანი კლასი გამოირჩევა თავისი მრავალსახეობებით და ისინი ქმნიან დინამიკური სისტემის ფაზურ სივრცეში ზოგიერთ მარავალსახეობებს, რომლებსაც გააჩნიათ თვისება მიიზიდონ თავისკენ ყველა ატრაქტორი თავისი გარკვეული გარშემოწირულობიდან, მათ ეწოდებათ მიმზიდველები, ხოლო ისინი, რომლებიც რჩებიან უცვლელები სისტემის მოძრაობისას იწოდებიან ინვარიანტულ მრავალსახეობებად.

აღმოჩნდა, რომ რიგ შემთხვევაში ატრაქტორები არ იყვნენ მრავალსახოვანი, თუმცა სისტემის მოძრაობის ტრაექტორია როცა ხვდება ასეთი ატრაქტორის ზემოქმედების არეში რჩება იქ რამოდენიმე ხნის განმავლობაში. ასეთი ატრაქტორის მაგალითს წარმოადგენს ტორი, განთავსებული სისტემის ფაზურ სამგანზომილებიან სივრცეში, თუ მოძრაობა ასეთ ტორზე ხდება არამდგრადი, მაშინ ტორზე მოძრაობის ტრაექტორიები რამდენჯერმე გადაკვეთენ ერთმანეთს ბიფურკაციის (გაორების წერტილებში), მაშინ წარმოიქმნება ქაოსური მოძრაობა. ამასთან

ერთად ტრაექტორიის ყოფაქცევის ხასიათი ძალზე მგრძნობიარეა საწყისი პირობების ცვლილებებისადმი. ეს ნიშნავს, რომ დროთა განმავლობაში სულ მცირე ცვლილებები და ფლუქტაციები სისტემაში შეიძლება მნიშვნელოვნად გაძლიერდნენ, რაც გარდაუვლად მიგვიყვანს ქაოსურ დინამიკამდე. ამ შემთხვევაში როდესაც ბიფურკაციები ხდება მრავლობითი ტრაექტორიების არეში დროთა განმავლობაში ხდება იმდენად რთული და გაურკვეველი, რომ სირთულე გადადის უწესრიგობასა და ქაოსში. სწორედ ეს თვისება დამახასიათებელია უცნაური ატრაქტორებისათვის და მიღებულია დეტერმინირებული ქაოსის ან ქაოსური დინამიკის სახელწოდებით. აღწერილი პარადოქსული თვისება, რომელიც შესაძლებელია არაწრფივ დეტერმინირებულ სისტემებში, გვიჩვენებს, რომ „მოწესრიგებულობას" და „მოუწესრიგებლობას", უბრალოსა და რთულს შორის არცთუ ისე უზარმაზარი უფსკრულია, როგორსაც ამის შესახებ აცხადებდა კლასიკური მეცნიერება.

მეცნიერების სხვადსხვა დარგებში ჩვენი გარემომცველი უძრავი და ცოცხალი სამყარო დაყოფილი იყო დეტერმინირებულ და შემთხვევით პროცესებად. ასეთი ბარიერი დეტერმინირებულ და ქაოსურ სისტემებს შორის დიდიხანია არსებობდა კლასიკურ მექანიკასა და ფიზიკაში. ეს მოჩვენებითი და უდავო ფაქტი გადავიდა თანამედროვე მეცნიერებებში: კიბერნეტიკაში, ინფორმატიკაში, რადიოტექნიკაში და ა.შ. ამასთან ერთად წამოწეული იყო უდავოო დასაბუთება, რომ მრავალი პროცესების სტოხასტიკური ხასიათი სხვადასხვა სისტემებში აიხსნებოდაა მისი შემადგენელი ელემენტების დიდი რაოდენობით და მათი თავისუფლების ხარისხებით. სწორედ ეს დებულება ედო საფუძვლად რთული პროცესების ახსნას. ერთი შეხედვით თვალნათელია, რომ მრავალგანზომილება წარმოადგენს სირთულის არსს. სინამდვილეში მხოლოდ ერთი ნაწილაკის ქცევა, რომლის მოძრაობა აღიწერება ნიუტონის კანონებით, შეიძლება აღმოჩნდეს განუსაზღვრელი და სრულიად მოულოდნელი. $(n \geq 3)$ განზომილების მარტივ დეტერმინირებულ ავტონომიურ დინამიკურ სისტემებს შეიძლება ჰქონდეთ არსებითად შემთხვევითი, სტოქასტიკური მოძრაობები ყოველგვარი გარეგანი ზემოქმედების გარეშე. თანამედროვე სინერგეტიკამ დაამტკიცა, რომ ნამდვილი შემთხვევითობა ჩვენი გარემომცველი სამყაროსი პრინციპიალურად განი-

საზღვრება სწორედ ქაოსური მოძრაობების არსებობით არაწრფივ დეტერმინირებულ დინამიკურ სისტემებში, რომელთაც გააჩნიათ ბიფურკაციის თვისებები და არა სისტემის განზომილებებით. ეს სრულად გასაოცარი აღმოჩენა, რომელიც ძირეულად ცვლის ბუნებისმეტყველების ფუნდამენტალურ წარმოდგენებს ითვლება ბოლო დროის დიდ სენსაციად და შეუძლია ძირეულად შეცვალოს ჩვენი მეცნიერული მსოფლმხედველობა. თვითორგანიზაციის ფუნდამენტალური თვისებების დადგენა, არაწრფივ დინამიკურ სისტემებში საშუალებას გვაძლევს ავხსნათ და გამოვავლინოთ ახალი მოულოდნელი მოვლენები ჩვენს გარემომცველ სამყაროში და შევქმნათ ტექნიკური სისტემები და მოწყობილობები არაჩვეულებრივი თვისებებით.

ზემოთ ჩამოყალიბებული მოსაზრებები გვაძლევს საშუალებას გავაკეთოთ მნიშვნელოვანი დასკვნები: ჩამოყალიბებული ახალი ინტეგრალური მეცნიერება სინერგეტიკა, რომელიც სწავლობს კოლექტიური თვითორგანიზაციის პროცესებს და პრაქტიკულად მოიცავს თანამედროვე მეცნიერების ყველა დარგს უძრავი და ცოცხალი ბუნების შესახებ, ტექნიკურ და ეკონომიკურ მეცნიერებებში. ეს განზოგადოებული მეცნიერება დაფუძნებულია შეუქცევადი პროცესების არაწრფივ დინამიკაზე და თერმოდინამიკაზე, როგორც საბაზო მეცნიერულ დისციპლინებზე.

1.5 სინერგეტიკა და მართვის პროცესები

როგორც უკვე ავღნიშნეთ, სინერგეტიკა - არაწონასწორული პროცესების თეორია წარმოადგენს საყოველთაო განვითარების თეორიას, რომელსაც გააჩნია დიდი მსოფლმხედველობრივი შედეგები. ამ ახალი ინტეგრალური მეცნიერების აზრი და შინაარსი მდგომარეობს იმაში, რომ ღია სისტემებში, რომლებიც გარემომცველ არესთან ახდენენ ენერგიის, ნივთიერებებისა და ინფორმაციის ურთიერთგაცვლას, წარმოიქმნებიან თვითორგანიზაციის პროცესები ე.ი. ზოგიერთი მდგრადი მოწესრიგებული სტრუქტურის ფიზიკური (ბიოლოგიური–ქიმიური და ა.შ) პროცესების ქაოსიდან, წარმოიშვება სრულიად ახალი თვისებების მქონე სისტემები. ნებისმიერ მაღალეფექტურ სინერგეტიკულ სისტემას გააჩნია ორი ფუნდამენტალურ თვისება: გარემომცველ სამყაროსთან ენერგიის,

ნივთიერებების და ინფორმაციის აუცილებელი გაცვლა და დაუყოვნებელი ურთიერთქმედება. ეს ნიშნავს რომ სინერგეტიკასა და სხვა ფიზიკურ, ტექნოლოგიურ, კიბერნეტიკულ, ბიოლოგიურ, ეკონომიკურ მეცნიერებებს შირის არსებობს შინაგანი ურთიერთკავშირი. ამასთან, სინერგეტიკას თითოეულ მათგანში შეაქვს თავისი თავისებურებები და მიდგომები, რომლებიც არ არის დამახასიათებელი ამ მეცნიერებების ტრადიციული მიმართულებებისათვის [7,10,14].

სინერგეტიკა - სინთეტიკური მეცნიერებაა, რომელიც ეფუძნება სხვადასხვა ბუნების დინამიკური სისტემების თვითორგანიზაციის ზოგად კონცეფციას. მისი კანონები ზოგადი ფიზიკური იდეებისა და მათემატიკური მეთოდების ერთობლიობა კი არ არის, არამედ ახალი კონცეპტუალური ხედვაა მეცნიერებაზე. სინერგეტიკული მიდგომა მეცნიერებაში მოგვაგონებს სისტემურ მიდგომას, სინერგეტიკას გააჩნია მნიშვნელოვანი შეხების წერტილები სისტემების ზოგად თეორიასთან. სინერგეტიკისათვის ისევე როგორც სისტემების თეორიისათვის მნიშვნელოვანია, სხვადასხვა ბუნების მქონე მოვლენებს შორის არა მხოლოდ ზედაპირული ანალოგიები, არამედ განსახილველი სისტემის შემადგენელ კომპონენტებს შორის საკმაოდ მკაცრი შესაბამისობები. სინერგეტიკულ მიდგომაში ზოგადი სისტემური მიდგომისაგან განსხვავებით შეისწავლება ბუნებრივი და ტექნიკური სისტემების თვითკონსტრუირების კონკრეტული პრინციპები და მექანიზმები. სხვანაირად რომ ვთქვათ, სისტემების ზოგადი თეორიისაგან განსხვავებით, სინერგეტიკა ამახვილებს ყურადღებას რთულ არაწრფივ სისტემებში წარმოშობილ კოოპერატიულ, კოგერენტულ და თვითშეთანხმებულ პროცესებზე. აუცილებელია ავღნიშნოთ, რომ როგორც სისტემების ზოგადი თეორიისათვის, კიბერნეტიკისათვის, ასევე, სინერგეტიკისათვის გამაერთიანებელ ცნებას წარმოადგენს სისტემების ცნება. თუმცა სინერგეტიკულ მიდგომაში საერთო სისტემური კონცეპციის ფორმირების-თვითორგანიზაციის გარდა აუცილებლი ხდება კონკრეტული ფიზიკური, (ბიოლოგიური, ქიმიური) მოვლენებისა პროცესების გათვალისწინება. მეცნიერების კლასიკურ გაგებას ყოველთვის საფუძვლად უდევს ექსპერიმენტალური შედეგების ერთგვარი ერთობლიობა და მეცნიერთა მიერ გამოთქმული პრინციპები და ჰიპოტეზები. სინერგეტიკა არ არის მეცნიერება

ამ სიტყვის კლასიკური გაგებით, არამედ არსებითად ახალი კონცეფ-ციაა, რომელიც ბაზირებულია სისტემის თვითორგანიზაციის თეო-რიაზე. სინერგეტიკული მიდგომა პირველ რიგში მიისწრაფვის გამოა-ვლინოს ამა თუ იმ პროცესის მაკროსკოპული თვისება მაგ. პოპულა-ციის წარმოქმნის პროცესი და ა.შ. მითითებული მიდგომა არ გამოყოფს ერთი არსების ან ნაწილაკის ყოფაქცევას, როგორც ეს კეთდება კლა-სიკურ მექანიკაში, მისთვის უფრო მეტად მნიშვნელოვანს წარმოადგენს ცალკეული კომპონენტების რაოდენობა, რომელიც შედის საერთო სის-ტემაში. სინერგეტიკულ მიდგომაში ნავარაუდებია, რომ თვით ეს რაო-დენობა-წესრიგის პარამეტრი-მართავს სისტემის თითოეული კომპონენ-ტის (არსების, ნაწილაკის და ა.შ.) ყოფაქცევას.

თვითორგანიზებად პროცესებს საფუძვლად უდევს დაქვემდებარე-ბის სინერგეტიკული პრინციპი, რომლის თანახმადაც საწყისი რთული სისტემა შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს იერარქიული სისტემების სა-ხით, რომელიც შედგება დინამიკური ქვესისტემების ერთობლობისაგან, რომლებიც ექვემდებარებიან ერთმანეთს და იმყოფებიან ერთმანეთთან გარკვეულ დინამიკურ ურთიერთკავშირში.

სინერგეტიკას რთულ წრფივ დინამიკურ სისტემებში საფუძვლად უდევს თვითორგანიზაციის ფუნდამენტალური მოვლენა. თუმცა სინერ-გეტიკაში ჯერ არ შეუქმნიათ ზოგადი და ერთიანი თვითორგანიზაციის თეორია, რომელიც სამართლიანი იქნება ყველა სახის ბუნებრივი და ტექნიკური სისტემებისათვის, ამიტომ, კონკრეტული თვისებებიდან გა-მომდინარე, სინერგეტიკული მიდგომა იძენს განმასხვავებელ თავისებუ-რებებს და შინაარს. ამასთან დაკავშირებით, ჩვენ შეგვიძლია ვი-ლაპარაკოთ სინერგეტიკულ მიდგომაზე, როგორც შესაბამისი მეცნიერე-ბის ერთგვარ მმართველ კონცეფციაზე. სინერგეტიკა ხდება იმ ევოლუ-ციურ ბუნებისმეტყველების დარგად, რომელიც გვაძლევს საშუალებას სხვადასხვა ბუნებრივი და ტექნიკური მოვლენების ერთგვარ საფუძველ-ზე აიგოს სხვადასხვა ბუნებრივი და ტექნიკური მოვლენების ერთიანი მეცნიერული კონცეფციის ერთიანი ენა.

სინერგეტიკასთან როგორც მეცნიერებასთან, რომელიც შეისწავ-ლის არაწრფივი დინამიკური სისტემების ქცევას წონასწორობის მდგო-მარეობიდან მოშორებით ზოგიერთი მმართველი პარამეტრის ცვლი-

ლებისას, ყველაზე უფრო თავისი იდეოლოგიით ახლოს არის ისეთი ფუნდამენტალური მეცნიერება, როგორიცაა მართვის თეორია. ამასთან დაკავშირებით, მართვის თეორიის განვითარებისათვის საჭიროა სინერგეტიკული სისტემების ძირითადი მეთოდების გადატანა არაწრფივი ტექნიკური ობიექტების მართვის სისტემების კონსტრუირებაზე. თუმცა ამ მეცნიერებების მიდგომებში არსებობენ გარკვეული განსხვავებები. ასე მაგალითად, ამტკიცებენ, რომ „როგორც კიბერნეტიკა ისე სინერგეტიკა პირველხარისხოვან მნიშვნელობას ანიჭებს მართვის ცნებას, თუმცა თითოეული ისახავს სხვადასხვა მიზანს. კიბერნეტიკა აწარმოებს ალგორითმების და მეთოდების დამუშავებას, რომელიც გვაძლევს საშუალებას ვმართოთ სისტემა, რათა იგი ფუნქციონირებდეს წინასწარ დასახული წესით. სინერგატიკაში კი ჩვენ ვცვლით მმართველ პარამეტრებს წინასწარ განუსაზღვრელი წესით და შევისწავლით ამ პროცესში სისტემის თვითორგანიზაციას.

საბოლოოდ, ნებისმიერი მეცნიერების, მათ შორის სინერგეტიკის არსი მდგომარეობს პირველ რიგში, ადამიანის მიერ მისი გარემომცველი სამყაროსა და საკუთარი თავის შეცნებაში. მიღებული ცოდნის კონსტრუქციულად გამოყენებაში. კიბერნეტიკა და შესაბამისად მართვის თეორია, ასახავს თანამედროვე შეხედულებას მეცნიერებაზე, როგორც გარკვეულ კონსტრუქციულ საწყისზე, და არა პასიურ დაკვირვებას ბუნებრივი პროცესებსა და მოვლენებზე.

მართვის კლასიკურმა თეორიაში ძალზე წარმატებულად გამოიყენებას ობიექტებზე გარეგანი ზემოქმედების მეთოდები, თუმცა მართვის ამოცანების გადაწყვეტაში მნიშვნელოვანია ძალოვანი მიდგომიდან სინერგეტიკის თვითორგანიზაციის იდეაზე გადასვლა. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, წარმოიშვა აუცილებლობა შეიქმნას ხერხები ურთიერთქმედების შინაგანი ძალების ფორმირებისა და მოქმედებისა, რომელთა მეშვეობითაც სისტემის ფაზურ სივრცეში წარმოიშვება მყარი დისიპატიური სტრუქტურები, რომლებიც ადექვატურნი იქნებიან შესაბამისი სისტემების ფიზიკური (ქომიური, ბიოლოგიური) არსისა.

გამოვყოთ სინერგეტიკის შემდეგი მეთოდოლოგიური დებულებები, რომლებიც პრინციპულად მნიშვენლოვანია თანამედროვე სინერგეტი-

კული გამოყენებითი მართვის თეორიის სინერგეტიკული საფუძვლების ფორმირებისათვის:

- სისტემის მოძრაობა როგორც წესი უნდა მიმდინარეობდეს მისი სივრცის არაწრფივ არეში;
- სისტემა უნდა იყოს ღია, რაც იგივეა ენერგიის ან ნივთიერების (შესაძლოა ინფორმაციისაც) გარემომცველ გარემოსთან გაცვლისა;
- კოოპერატიულობა, სისტემებში მიმდინარე პროცესების კოგერენტულობა;
- არაწონასწორული თერმოდინამიკური სიტუაციის არსებობა, რომლის თანახმადაც ენერგიის მოდინება სისტემისკენ, უნდა იყოს საკმარისი, არამარტო ენტროპიის ზრდის შესაჩერებლად, არამედ მისი შემცირებისთვისაც, რაც აძლიერებს სისტემაში წესრიგს;
- მოძრაობის საფინიშო ეტაპზე სისტემაში უნდა არსებობდეს ევოლუციის რამოდენიმე გზა, რომელიც აღიწერება წესრიგის პარამეტრების მიმართ ტიპიური განტოლებებით.

თვითორგანიზაციის ეს ნიშნები გვიჩვენებს, რომ სინერგეტიკას საქმე აქვს ფიზიკის, მათ შორის მართვის თეორიის, არაკლასიკურ პროცესებთან და მოვლენებთან.

2. ჩაკეტილი ოპტიმალური დისიპატიური მართვის სისტემების სინთეზი სინერგეტიკული თეორიის გამოყენებით

ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების ამოცანა თანამედროვე ეტაპზე წარმოადგენს ოპტიმალური მართვის სისტემების მნიშვნელოვან ამოცანას. ამდენად მნიშვნელოვანია ამ ამოცანების გადაწყვეტის ახალი მეთოდების შემუშავება., რომლებშიც ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების ამოცანა ეფუძნება თანამედროვე მართვის სინერგეტიკულ თეორიას.

2.1. ჩაკეტილი ოპტიმალური მართვის სისტემების დისიპატიურობა

განვიხილოთ ოპტიმალური დისიპატიური მართვის სისტემების სინთეზის საკმაოდ ეფექტური მეთოდი, რომელსაც საფუძვლად უდევს ლეტოვ-კალმანის მეთოდი და დინამიკური სისტემების ასიმპტოტური მდგრადობის აუცილებელი პირობა [28].

თანამედროვე თვითორგანიზაციის თეორიაში სისტემების დისიპატიურობის თვისების ფუნდამენტალურ მნიშვნელობაზე ი.პრიგოჟინი აღნიშნავდა: „დისიპატიური სისტემები წარმოადგენენ განსაცვიფრებელ მაგალითს, რომელიც დემონსტრირებას უკეთებს უწონასწორობის უნარს წარმოადგენდეს მოწესრიგებულობის წყაროს". აქ წარმოდგენილ მეთოდს საფუძვლად უდევს ფიზიკური მიდგომა.

პირველ რიგში მას გააჩნია არსებითი თეორიული მნიშვნელობა, რომელიც დაკავშირებულია იმ ფაქტთან, რომ ოპტიმალური მართვის სინთეზის პროცედურა საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ კავშირი ჩაკეტილი მართვის ოპტიმალურ სისტემებსა და ფუნდამენტალურ ფიზიკურ პროცესებს შორის. ამ კავშირებს საფუძველად უდევს მათემატიკური მოდელი წრფივი დიფერენციალური განტოლებების ან მეორე რიგის კერძო წარმოებულიანი უტოლობას სახით. როგორც ცნობილია, ფართო კლასის ფუნდამენტალური ფიზიკური პროცესების კლასიფიკაცია დაკავშირებულია ასეთი ტიპის განტოლებების ან უტოლობების განსაზღვრებებთან. მართვის ოპტიმალურ სისტემებში პროცესებსა და ფიზიკურ პროცესებს შორის კავშირი საშუალებას გვაძლევს მოვახ-

დინოთ მართვის ოპტიმალური დისიპატიური სისტემების ახალი კლასიფიკაცია, რომლებიც დაფუძნებულია ბუნების ფუნდამენტალურ კანონებზე. ოპტიმალური სისტემების ანალიზისა და სინთეზისადმი ასეთი მიდგომა პასუხობს მართვის თეორიის განვითარების თანამედროვე დონეს, რომელიც დაკავშირებულია მართვის ფიზიკური თეორიის განვითარებასთან [29]. ოპტიმალური მართვის სინთეზის შემოთავაზებულ მეთოდს გააჩნია ანალიტიკური თვისებები, რომელიც განასხვავებს მას არსებული ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების (ორაკ)-ის მეთოდებისაგან.

გადავიდეთ ორაკ-ის პრობლემების გადაწყვეტის ახალ მიდგომაზე, რომელიც ეფუძნება სინთეზირებულ ოპტიმალურ სისტემებში დისიპატიურობის ფიზიკურ თვისებას. ეს თვისება განეკუთვნება მართვის ზოგად სინერგეტიკულ თეორიის ერთ-ერთ საკვანძო საკითხს. ქვემოთ განხილული თეორია ეყრდნობა დისიპატიური სისტემების თვისებას და შეიძლება დახასიათებულ იქნას როგორც ოპტიმალური მართვის სინერგეტიკული თეორიის ერთი ნაწილი.

დავუშვათ მართვის ობიექტი აღიწერება დიფერენციალური განტოლებებით, რომელიც ჩაწერილია ვექტორულ-მატრიცული ფორმით:

$$\dot{x} = (t) = f(x) + G(x)u \qquad (2.1)$$

სადაც $x=(x_1,...,x_n)^T$, $u=(u_1,...,u_n)^T$-შესაბამისად ფაზური კორდინატების და მართვების ვექტორებია; $f(x,u)=(f_1(x,u),\ f_2(x,u),...f_n(x,u))^T$–ვექტორ-ფუნქცია; $G(x)=(g_{ij}(x))$-$n\times m$ განზომილების მატრიცაა.

მართვის ოპტიმალური სინთეზის ამოცანა ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი სახით: მოიძებნოს მართვის კანონი $u=u(x)$, რომელსაც გადაყავს (2.1) ობიექტი ნებისმიერი საწყისი $x(0)=x_0$ მდგომარეობიდან, ფაზური სივრცის $x=0$ კორდინატთა სათავეში, უზრუნველყოფს ჩაკეტილი სისტემის ასიმპტოტიკურ მდგრადობას და მინიმუმს ანიჭებს ფუნქციონალს

$$I = \int_0^\infty \left(F_0\left(x\right) + \left\langle u, Du \right\rangle \right) dt \ . \qquad (2.2)$$

აქ $F_0(x)$ - ნიშანგანსაზღვრული x-ის მიმართ დადებითი ფუნქციაა. $D=diag(d_{ii})$ განტოლების დიაგონალური მატრიცაა, $m\times m$; $\langle .,. \rangle$ - ვექტორების სკალარული წარმოებულია.

ოპტიმალური მართვის სინთეზის ფორმულირებული ამოცანა წარმოადგენს ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების ცნობილ ამოცანას. ოპტიმალური სისტემების სინთეზში ყველაზე მეტი გავრცელებულია (ორაკ) ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების პროცედურა, რომელიც დაფუძნებულია დინამიკური პროგრამირების მეთოდზე. სინთეზის მოცემული პროცედურის მთავარ ნაწილს წარმოადგენს ფუნქციონალური განტოლების ამონახსნის მოძებნა გარკვეული – დადებითი ფუნქციის სახით, რომელიც იქნება ლიაპუნოვის ოპტიმალურ ფუნქცია ჩაკეტილი ოპტიმალური მართვის სისტემებისათვის რეგულატორები რომლებიც აგებულია ლიაპუნოვის ოპტიმალური ფუნქციების საფუძველზე უზრუნველყოფენ ასიმპტოტურ მდგრადობას და კონსტრუირებული სისტემების ხარისხის ფუნქციონალს ანიჭებენ ოპტიმალურობის თვისებას.

მართვის წრფივი სტაციონალური ობიექტების შემთხვევაში, ლიაპუნოვის ოპტიმალურ ფუნქციას ირჩევენ განსაზღვრული დადებითი კვადრატული ფორმით $v(x)=x^TCx$. თუ ასეთ ფორმას ჩავსვამთ ძირითად ფუნქციონალურ განტოლებაში და კოეფიციენტების გავუტოლებთ ნულს, მივიღებთ სხვადასხვა ხარისხის მქონე ბაზური კოორდინატების მიმართ რიკატის ტიპის არაწრფივი ალგებრული განტოლებათა სისტემას. განტოლებების ასეთი ტიპის სისტემის ამოხსნის მეთოდების შეფასება და მათთან დაკავშირებული პრობლემები აღწერილია [9.14] ნაშრომში, სადაც, აღნიშნულია, რომ ასეთი ტიპის განტოლებათა სისტემის ამოხსნის უნივერსალური მეთოდი ჯერ-ჯერობით არ არსებობს.

მართვის წრფივი არასტაციონალური ობიექტებისათვის ლიაპუნოვის ფუნქციას ეძებენ დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმის სახით $v(x)=x^TC(t)x$. ამ შემთხვევაში ღებულობენ რიკატის ტიპის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას-რომლის საწყისი პირობა განისაზღვრება ფუნქციონალის ტერმინალური წევრის სახის მიხედვით. მისი ამოხსნისათვის სარგებლობენ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრირების რიცხვით მეთოდს (ეილერის, რუნგე-კუტას და ა.შ.) ამ შემთხვევაში გვაქვს არაწრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის კოშის ამოცანა. ასეთი სისტემების ამოხსნის პროცედურას ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში გააჩნია

თავისი თავისებურებები და სიძნელეები, რომლებიც დაკავშირებულნი არიან სიზუსტესთან, მდგრადობასთან და ა.შ.

თუ მართვის ობიექტი აღიწერება რთული არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებების სისტემით (2.1), მაშინ, ამ შემთხვევაში არ არსებობს ლიაპუნოვის ოპტიმალური ფუნქციის განსაზღვრის რეგულარული მეთოდი. ეს დაკავშირებულია ძირითადი ფუნქციონალური განტოლების ამოხსნის აუცილებლობასთან, რომელიც წარმოადგენს კერძო წარმოებულებიან არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებას, ასეთი კლასის განტოლებების ამოხსნა დაკავშირებულია დიდ სიძნელეებთან. ასე რომ ლეტოვ-კალმანის ОРАК-ის მეთოდის გამოყენება არაწრფივი ობიექტების მართვის სინთეზისათვის კრიტერიუმი (2.2)-ის მიხედვით დაკავშირებულია მნიშვნელოვანი წინააღმდეგობასთან, ძირითადი ფუნქციონალური განტოლების რიცხვითი და უფრო მეტად ანალიზურ ამონახსნებთან ძიებაში [25].

მართვის არაწრფივი ობიექტების ოპტიმალური ალგორითმების სინთეზის პრობლემის გადაწყვეტამ მიგვიყვანა ОРАК-ის მეთოდის შექმნასთან, სადაც ოპტიმიზირებულ ფუნქციონალს გააჩნია ნახევრადგანსაზღვრული სახე. ამ შემთხვევაში სინთეზის ამოცანა დაიყვანება კერძოწარმობულებიანი წრფივი განტოლების ამოხსნამდე, რაც საშუალებას გვაძლევს ზოგიერთი კლასის არაწრფივი ობიექტების მართვის მოსაძებნად ავაგოთ სინთეზის რიცხვითი პროცედურები.

ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების ლეტოვ-კალმანის მეთოდი დაფუძნებულია ლიაპუნოვის წონასწორობის თეორიისა და ოპტიმალური მართვის თეორიის ერთობლივი გამოყენების კონცეპციაზე. ასეთი მიდგომა ავტომატური მართვის თეორიის ორი ძირითადი მიმართულების შერწყმამ ერთ შესაძლებელი გახადა ლიაპუნოვის ოპტიმალური ფუნქციის შემოტანამ. ფაზური სივრცის წერტილი $x=0$, რომელშიც მინიმალურ მნიშვნელობას ღებულობს, როგორც ხარისხის ფუნქციონალი (2.2), ასევე ლიაპუნოვის ოპტიმალური ფუნქცია, წარმოადგენს წონასწორობის მდგრად წერტილს. ეს ნიშნავს, რომ ჩაკეტილი მართვის ოპტიმალური სისტემების ტრაექტორიები მიიზიდება მდგრადი წონასწორობის ამ წერტილისკენ-ატრაქტორისკენ მის ფაზურ სივრცეში.

სინთეზირებული ჩაკეტილი ოპტიმალური მართვის სისტემა ზოგად შემთხვევაში თვითონ წარმოადგენს დინამიკურ სისტემას, რომლებიც აღიწერება წრფივი დიფერენციალურ ვექტორულ-მატრიცული განტოლებით.

$$\dot{x}(t) = \varphi(x), \qquad (2.3)$$

სადაც $\varphi(x) = f(x) + G(x)u(x)$; $u(x)$ – მართვის ოპტიმალური კანონების ვექტორია.

(2.3) სისტემის ფაზური ტრაექტორიების ყოფაქცევა, ხასიათდება ვექტორული ველით $\varphi(x) = (p_1(x),..., p_1(x))^T$. ამიტომ ტრაექტორიის შესასწავლად მოცემული სისტემის ფაზურ სივრცეში შეიძლება შემოვიტანოთ ველის თეორიის ზოგიერთი მაჩვენებლები. კერძოდ, რადგანაც ჩაკეტილი ოპტიმალური სისტემა ასიმპტოტურად მდგრადია, მაშინ მისი ტრაექტორიის ყოფაქცევის შესაფასებლად ყველაზე უფრო მისაღებია ისეთი მაჩვენებლის შემოტანა, როგორიცაა ვექტორის დივერგენცია $\varphi(x)(div\varphi(x))$. რომელიც ახასიათებს ფაზური ტრაექტორიების კლებადობას წონასწორობის მდგრადი წერტილის შემოგარენში. შემოტანილი ვექტორული ველის $div\varphi(x)$ მაჩვენებელი საშუალებას გვაძლევს გავუკეთოთ ფორმულირება შემდეგ მტკიცებულებას [28].

ასიმპტოტური მდგრადობის აუცილებელ პირობას წარმოადგენს წონასწორობის წერტილის $x=0$-ს უარყოფითობა ზოგიერთ Ω არეში, რომლისთვისაც წერტილი $x=0$ წარმოადგენს ზღვრულს.

ჩაკეტილი ოპტიმალური სისტემა (2.3) სინთეზირებული ლეტოვკელმანის ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების მეთოდი დისიპატიურია. ე.ი. მისთვის სრულდება უტოლობა

$$div\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \bigg|_{x \in \Omega} < 0, \qquad (2.4)$$

ჩაკეტილი ოპტიმალური სისტემა (2.3), რომელიც (2.4) უტოლობას აკმაყოფილებას, ვუწოდებთ ჩაკეტილ ოპტიმალურ დისიპატიურ სისტემას. ასე, რომ დისიპატიური სისტემებისათვის დივერგენცია (2.4) ყოველთვის უარყოფითი სიდიდეა, რომელიც ახასიათებს ფაზური მოცულობის შეკუმშვის სიჩქარეს. ასეთ შემთხვევაში ყველა ტრაექტორიები აუცილებლად მიიზიდებიან რომელიღაც მიმზიდავი სიმრავლისკენ-

ატრაქტორისკენ ფაზურ სივრცეში, ხოლო მისი განზომილებები ყოველთვის ნაკლებია საწყისი სისტემის განზომილებებთან შედარებით.

დინამიკური სისტემების თანამედროვე თეორიაში დისიპატიურ სისტემებს უკავიათ განსაკუთრებული ადგილი, რომელიც ბოლო პერიოდში სწრაფად ვითარება. უკანასკნელი პერიოდში წარმოიშვნენ და ვითარდებიან ისეთი მეცნიერული მიმართულებები, რომლებიც დაკავშირებული არიან არაწრფივ დინამიკასთან, ასეთებია სინერგეტიკა სოლიტონიკა და კატასტროფების თეორია. აუცილებელია ავღნიშნოთ რომ დისიპატიური სისტემები განეკუთვნებიან ყველაზე ნაკლებად შესწავლილი დინამიკური სისტემების კლასს, ამასთან ერთად ის წარმოადგენს უფრო ფართო კლასს კონსერვატიული და ერგოდიული სისტემების კლასთან შედარებით. მასთან ერთად შეგვიძლია ვამტკიცოთ, რომ ბოლო ორი დინამიკური სისტემის კლასი წარმოადგენენ დისიპატიური სისტემების ერთგვარ იდეალიზაციას. ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ დისიპატიური სისტემები და აგრეთვე მისი ქვეკლასი-ჩაკეტილი ოპტიმალური დისიპატიური სისტემები, ასრულებენ მნიშვნელოვან როლს როგორც დინამიკური სისტემების ზოგად თეორიაში და ასევე განსაკუთრებით მართვის სინერგეტიკულ თეორიაში [30].

2.2. ოპტიმალური დისიპატიური სისტემების კლასიფიკაცია

ოპტიმალური სისტემები მათი ექსტრემალურ-ფუნქციონალური მახასიათებლების მიხედვით დაყოფილნი არიან კლასებად, მაგალითად, ოპტიმალურები სწრაფმოქმედების, ენერგიისა საწვავის ხარჯის მიხედვით, და ა.შ. ოპტიმალური მართვის სისტემებისა და მათი კლასიფიკაციისადმი ასეთი მიდგომა საკმარისია სისტემების მომხმარებლებისათვის, მაგრამ შეზღუდულია მათი დამმუშავებლებისთვის. ეს დაკავშირებულია, პირველ რიგში, იმასთან რომ ოპტიმალური სისტემების შექმნისას კონსტრუქტორს გააჩნია ინფორმაცია ექსტრემალური პროცესების მახასიათებლებზე, მაგრამ არ ფლობენ ცოდნას ამ პროცესების კავშირზე ბუნების ფუნდამენტალურ კანონებთან.

ამ პარაგრაფში განხილულია ჩაკეტილი ოპტიმალური დისიპატიური მართვის სისტემების კლასიფიკაციის საწყისები, რომლებიც დაფუძნებულია კერძო წარმოებულიანი (2.5) მეორე რიგის დიფერენციალური უტოლობის გამოკვლევაზე.

$$\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_t}-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(G(x)D^{-1}G^T(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right)<0. \tag{2.5}$$

გადავწეროთ (2.5) უტოლობა შემდეგი სახით

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)v_{x_i x_j}+\sum_{j=1}^{n}b_j(x)v_{x_j}+c(x)>0\,, \tag{2.6}$$

სადაც

$$a_{ij}(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{g_{ik}(x)g_{jk}(x)}{2d_k} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} b_j(x)&=\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{g_{ij}(x)}{d_k}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}+\frac{1}{2d_k}\frac{\partial}{\partial x_{n+1-j}}\left(\prod_{i=1}^{n}g_{ik}(x)\right)\right),\\ c(x)&=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_1},\\ v_{x_j}&=\frac{\partial v}{\partial x_i},v_{x_i x_j}=\frac{\partial v}{\partial x_i\partial x_j},x\in\Omega \end{aligned} \tag{2.8}$$

განვიხილოთ მეორე რიგის ოპერატორი

$$L[v]=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(x)v_{x_i x_j}+\ldots \tag{2.9}$$

და დიფერენციალური უტოლობა

$$L[v]>0\,, \tag{2.10}$$

სადაც წერტილები აღნიშნავენ დიფერენცირების მეორე რიგის ოპერატორს v-სთან მიმართებით. ოპერატორი, რომელიც შეიცავს მხოლოდ მეორე რიგის წარმოებულებს, იწოდებიან დიფერენციალური ოპერატორის მთავარ ნაწილად (2.9). ამ სახის დიფერენციალური ოპერატორების კლასიფიკაცია განისაზღვრება იმის მიხედვით, თუ როგორ მოქმედებს

$$y_i=t_i(x_1,\ldots x_n)\ (i=1,2,\ldots,n) \tag{2.11}$$

ცვლადების გარდასახვა დიფერენციალური ოპერატორის ფორმაზე $P:(x^p)=\left(x_1^P,\ldots,x_n^P\right)$ ზოგიერთ წერტილში. აღვნიშნოთ t_{ik} $\frac{\partial t_i}{\partial x_k}$ მივიღებთ,

$$v_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} v_{ij}, \qquad v_{x_i x_s} = \sum_{i,j=1}^{n} t_{ji} t_{is} v_{y_i y_j} + \dots,$$

სადაც წერტილები ცვლიან წევრებს, რომლებიც შეიცავენ v ფუნქციის წარმოებულებს, არა უმეტეს პირველი ხარისხისა. (2.11) გამოსახულება (2.9) ოპერატორის მოქმედებით, დადის შემდეგ სახემდე:

$$L_1[v] = \sum a_{ij}\left(y^p\right) v_{y_i y_j} + \dots, \tag{2.12}$$

სადაც კოეფიციენტი $a_{ij}\left(y^p\right)$ გამოისახება ფორმულით:

$$a_{ij}\left(y^p\right) = \sum_{l,s=1}^{n} t_{ji} t_{is} a_{ls}\left(x^p\right) \tag{2.13}$$

ამგვარად, ოპერატორის მთავარი ნაწილის $L[v]$ კოეფიციენტები x^p წერტილში გარდაიქმნება ისევე, როგორც კვადრატული ფორმის კოეფიციენტები

$$Q = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} z_i z_j \tag{2.14}$$

თუ კოეფიციენტები Z_i დაექვემდებარება აფინურ წრფივ გარდაქმნას

$$z_i = \sum_{l=1}^{n} t_{it} \eta_i \tag{2.15}$$

(2.15) ტიპის კვადრატული ფორმა აფინური გარდაქმნის დახმარებით შეგვიძლია მივიყვანოთ კანონიკურ სახემდე.

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \eta_i \tag{2.16}$$

სადაც კოეფიციენტები ღებულობენ მხოლოდ მნიშვნელობებს +1, -1 ან 0. უარყოფითი კოეფიციენტების რიცხვს, რომელსაც ეწოდება ინერციის ინდექსი და აგრეთვე კოეფიციენტების რაოდენობას, რომლებიც გარდა-იქმნებიან ნულის ტოლად, წარმოადგენენ ფორმის აფინურ ინვარიან-ტებს. ეს რიცხვები ახასიათებენ დიფერენციალურ ოპერატორს x^p– წერ-ტილში.

დიფერენციალურ ოპერატორს ეწოდება ელიპტიკური x^p – წერტილში თუ x_i ყველა მნიშვნელობები მარტო დადებითებია, ან მხო-ლოდ უარყოფითები. დიფერენციალურ ოპერატორს ეწოდება ჰიპერბო-ლიკური, თუ λ_i-ის ყველა მნიშვნელობას გააჩნიათ ერთი ნიშანი მაგა-ლითად დადებითი, ერთის გამოკლებით, რომელიც უარყოფითია, დიფე-

რენციალურ ოპერატორს ეწოდება პარაბოლიური, თუ Q-ს ფორმა სინგულარულია, ე.ი. ერთი ან რამოდენიმე λ_i კოეფიციენტები გადაიქცევა ნულად. დიფერენციალური ოპერატორის (2.9) კლასიფიკაცია უშუალოდ გადადის დიფერენციალურ უტოლობა (2.10)-ში. მოვახდინოთ დიფერენციალური უტოლობა (2.6)-ის კლასიფიკაცია, ამისათვის განვიხილოთ სკალარული და ვექტორული მართვის შემთხვევა ცალ-ცალკე.

სკალარული მართვა. სკალარული მართვისას დიფერენციალური უტოლობის (2.6)-ის კოეფიციენტები (2.7) ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$a_{ij}\left(x^p\right)=\frac{g_i\left(x^p\right)g_j\left(x^p\right)}{2d},x^p\in\Omega \qquad (2.17)$$

იმისათვის, რომ მოვახდინოთ დიფერენციალური (2.6) უტოლობის კლასიფიცირება, (2.7) კოეფიციენტებით, განვსაზღვროთ კოეფიციენტები λ_i. ამისათვის ამოვხსნათ განტოლება

$$\det\left[A-\lambda E\right]=0\,, \qquad (2.18)$$

სადაც

$$A=\frac{1}{2d}\begin{bmatrix} g_1^2 & g_1g_2 & \cdots & g_1g_n \\ g_2g_1 & g_2^2 & \cdots & g_2g_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_ng_1 & g_ng_2 & \cdots & g_n^2 \end{bmatrix}$$

g_i – $g_i(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა წერტილში x^p, E – ერთეულოვანი მატრიცაა.

გადავწეროთ (2.18) განტოლება შემდეგი სახით:

$$\lambda^n\left(\sum_{i=1}^n g_i^2+2\lambda d\right)=0 \qquad (2.19)$$

საიდანაც გამომდინარეობს

$$\begin{cases}\lambda_i=0,i=1,2,...,n-1\\ \lambda_n=-\dfrac{1}{2d}\displaystyle\sum_{i=1}^n g_1^2<0\end{cases}$$

კანონიკურ ფორმამდე დაყვანის შემდეგ გვექნება

$$\begin{cases}\lambda_i=0,i=1,2,...,n-1\\ \lambda_n=1\end{cases} \qquad (2.20)$$

ამრიგად, სკალარული მართვის შემთხვევაში დიფერენციალური უტოლობა (2.6) მიეკუთვნება პარაბოლურ ტიპს. აქედან გამომდინარეობს, რომ ოპტიმალურ დისიპატიურ სისტემებში სკალარული მართვით შესაძლებელია მიმდინარეობდნენ პროცესები, რომლებიც შეიძლება განვსაზღვრული იქნან, როგორც პარაბოლური. ფიზიკაში პარაბოლური განტოლებებით აღიწერება დიფუზიური ტიპის ამოცანები.

ამგვარად, ოპტიმალური სისტემები სკალარული მართვით, რომლებშიც მიმდინარეობენ პარაბოლური ტიპის მოვლენები. შეიძლება მივაკუთვნოთ დიფუზიური ტიპის ოპტიმალურ სისტემებს.

ვექტორული მართვა: ვექტორული მართვისა შემთხვევაში დიფერენციალური უტოლობის (2.6) მთავარი ნაწილის კოეფიციენტები განისაზღვრებიან (2.7) ფორმულით რომელიღაც Ω არის წერტილებში. ისევე როგორც სკალარული მართვის შემთხვევაში დიფერენციალური უტოლობის (2.6) კლასიფიკაციისათვის აუცილებელია მოიძებნოს კოეფიციენტი λ_i. (2.18) განტოლების ამოხსნით, სადაც მატრიცა A-ს აქვს სახე

$$A=\begin{bmatrix} \sum\limits_{k=1}^{m}\frac{g_{1k}^2}{2d_k} & \sum\limits_{k=1}^{m}\frac{g_{1k}g_{2k}}{2d_k} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{m}\frac{g_{1k}g_{nk}}{2d_k} \\ \sum\limits_{k=1}^{m}\frac{g_{2k}g_{1k}}{2d_k} & \sum\limits_{k=1}^{m}\frac{g_{2k}^2}{2d_k} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{m}\frac{g_{2k}g_{nk}}{2d_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{k=1}^{m}\frac{g_{nk}g_{1k}}{2d_k} & \sum\limits_{k=1}^{m}\frac{g_{nk}g_{2k}}{2d_k} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{m}\frac{g_{nk}^2}{2d_k} \end{bmatrix} \qquad (2.21)$$

შემოვიფარგლოთ შემთხვევით $n=2,3$. $n=2$ შემთხვევაში მატრიცა $G(x)$ ვექტორული მართვის ზემოქმედებით, ზოგად შემთხვევაში აქვს სტრუქტურა

$$G(x)=\begin{bmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) \end{bmatrix} \qquad (2.22)$$

ხოლო (2.18) განტოლება ღებულობს სახეს:

$$\lambda^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{g_{ij}^2}{d_j}\lambda+\frac{1}{2^2}\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{2}d_i}\Delta^2=0 \qquad (2.23)$$

რომელშიც კოეფიციენტები უცნობი λ-ს შემთხვევაში განისაზღვრება ყოველი $P:\left(x^p\right)$ Ω-არეში;. Δ-მატრიცის განსაზღვრულია (2.22).

ვიეტას ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$\begin{cases} \lambda^2 - \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}\dfrac{g_{ij}^2}{d_j} = \sum_{i=1}^{2}\lambda_i > 0 \\ \dfrac{1}{2^2}\dfrac{\Delta^2}{\prod_{i=1}^{2}} = \prod_{i=1}^{2}\lambda_1 > 0 \end{cases} \tag{2.24}$$

საიდანაც გამომდინარეობს რომ (2.19) განტოლების ფესვებისათვის უნდა განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1) თუ $\Delta \neq 0$, მაშინ $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$

2) $\Delta = 0$, მაშინ $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$ ან $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$

პირველ შემთხვევაში უტოლობა (2.6) განეკუთვნება ელიფსურ ტიპს და შესაბამისად მეორე რიგის ჩაკეტილ ოპტიმალურ დისიპატიურ სისტემებში $\Delta \neq 0$ პირობისათვის შესაძლებელია პროცესები, რომლებიც შეიძლება განისაზღვროს როგორც ელიფსური. მეორე შემთხვევაში როცა $\Delta = 0$, სინთეზირებულ ოპტიმალურ დისიპატიურ სისტემებში გააჩნია პარაბოლური თვისებები.

განვიხილოთ ეხლა მესამე რიგის ობიექტი ვექტორული განტოლებით და მატრიცით

$$G(x) = \begin{bmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) & g_{13}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) & g_{23}(x) \\ g_{31}(x) & g_{32}(x) & g_{33}(x) \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

ამ შემთხვევაში განტოლება (2.18) ღებულობს სახეს:

$$\lambda^3 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{d_i}\sum_{j=1}^{3} g_{ij}^2\lambda^2 + \frac{1}{2^2}\frac{1}{\prod_{k\in(1,2,3)\setminus i} d_k}\Delta_{ij}^2\lambda - \frac{1}{2^3}\frac{1}{\prod_{i=1}^{3} d_i}\Delta^2 = 0 \tag{2.26}$$

სადაც Δ_{ij}- ელემენტ g_{ij}-ის მინორია Δ მატრიცით განმსაზღვრელი (2.25).

(2.26) განტოლებისათვის სრულდება ვიეტას ფორმულა

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\dfrac{1}{d_i}\sum_{j=1}^{3} g_{ji}^2 = \sum_{i=1}^{3}\lambda_i > 0 \\ \dfrac{1}{2^2}\sum_{i=1}^{3}\dfrac{1}{\prod_{k\in(1,2,3)\setminus i} d_k}\sum_{j=1}^{3}\Delta_{ji}^2 = \sum_{i=1}^{3}\prod_{k\in(1,2,3)\setminus i}\lambda_j > 0 \\ \dfrac{1}{2^2}\left(\prod_{i=1}^{3} d_i\right)^{-1}\Delta^2 = \prod_{i=1}^{3}\lambda_i > 0 \end{cases} \tag{2.27}$$

როგორც (2.27) ფორმულიდან გამომდინარეობს (2.26) განტოლების ფესვებისათვის შესაძლებელია არსებობდეს ორი შემთხვევა:

1) თუ $\Delta\neq 0$, მაშინ $\lambda_1>0,\ \lambda_2>0,\ \lambda_3>0$

2) $\Delta=0$, მაშინ $\lambda_i>0,\ \lambda_j=0,\ \lambda_k=0,\ i\neq j\neq k;\ i, j, k=1,2,3$

ან $\lambda_i>0,\ \lambda_j=0,\ \lambda_k=0,\ i\neq j\neq k;\ i, j, k=1,2,3$

პირველ შემთხვევაში უტოლობა (2.6) წარმოადგენს ელიფსურს, შესაბამისად მოცემულ სისტემაში შესაძლებელია ელიპსური ტიპის პროცესები. მეორე შემთხვევაში უტოლობა (2.6)-პარაბოლურია, შესაბამისად, ამ შემთხვევაში სისტემებში შეიძლება მიმდინარეობდეს პარაბოლური ტიპის პროცესები.

პროცესები, რომლებიც მიმდინარეობენ მართვის ჩაკეტილ ოპტიმალურ სისტემებში, დაფუძნებულნი არიან (2.6) უტოლობის ტიპის კლასიფიკაციაზე რომლებიც საფუძველს უყრის ფიზიკო-მათემატიკურ მიდგომას ახალ თანამედროვე ოპტიმალური მართვის თეორიაში.

(2.6)-ტიპის უტოლობების კლასიფიკაცია უდევს საფუძვლად აგრეთვე ჩაკეტილი ოპტიმალური დისიპატიური მართვის სისტემების სინთეზის მეთოდს.

2.3. ჩაკეტილი ოპტიმალური მართვის დისიპატიური სისტემების სინთეზი

განვიხილოთ ოპტიმალური მართვის ამოცანა, რომელიც მოცემულია შემდეგი პირობებით

$$\begin{cases} J=\displaystyle\int_0^\infty\left(\sum_{i=1}^n c_i x_i^2+du^2\right)dt, & (2.28)\\ \dot{x}_k(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^n a_{ki}x_i+b_k u,\ k=1,2,\dots,n, & (2.29)\end{cases}$$

სადაც $x=(x_1,\dots x_n)^T$ – ობიექტის მდგომარეობის კორდინატების ვექტორია, U – მმართველი ზემოქმედებაა (მართვა) ობიექტზე; a_{ki}, b_k, c_i, d – მუდმივებია.

საჭიროა განისაზღვროს მართვის კანონი $u=u(x_1,\dots x_n)^T$ უწყვეტი ფუნქციების კლასში, რომელიც უზრუნველყოფს (2.29) ობიექტის გადა-

ყვანას ნებისმიერი საწყისი მდგომარეობიდან კოორდინატთა სათავეში და ანიჭებს მინიმუმს (2.28) ფუნქციონალს.

ჩავწეროთ ამოცანა ოპტიმალური რეგულატორის ანალიზური კონსტრუირების მთავარი ფუნქციონალური განტოლების სახით

$$\min_u \left[\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i \frac{\partial v}{\partial x_k} + \sum b_k u \frac{\partial v}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^2 + du^2 \right] = 0 \qquad (2.30)$$

(2.30) განტოლებაში u -ს მიმართ მინიმუმი მიიღწევა მაშინ, როცა

$$u = -\frac{1}{2d} \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial v}{\partial x_k}. \qquad (2.31)$$

იმისათვის რომ მოვძებნოთ მართვა u, აუცილებელია მოიძებნოს ფუნქცია $v=v(x)$, რომელიც აკმაყოფილებს კერძო წარმოებულიან განტოლებას

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i \frac{\partial v}{\partial x_k} - \frac{1}{4d} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial v}{\partial x_k} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_1^2 = 0 \qquad (2.32)$$

და სასაზღვრო პირობას

$$v(0)=0\ . \qquad (2.33)$$

(2.29) სისტემა (2.31) მართვის გათვალისწინებით ღებულობს სახეს:

$$\dot{x}_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i - \frac{b_k}{2d} \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial v}{\partial x_j}, k = 1, 2, ..., n \qquad (2.34)$$

და არის ასიმპტოტურად მდგრადი. ე.ი.

$$x(\infty)=0. \qquad (2.35)$$

კლასიკური გაგებით ОРАК-ის ამოცანა (2.32) განტოლებიდან დაიყვანება $\psi(x)$ ფუნქციის მოძებნამდე სასაზღვრო პირობით (2.33).

ცნობილია, რომ ჩაკეტილი (2.34) ოპტიმალური სისტემა (2.34) წარმოადგენს დისიპატიურს. ეს გვაძლევს საშუალებას შევავსოთ (2.32) განტოლება მეორე რიგის შემდეგი სახის წრფივი დიფერენციალური განტოლებით.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_i}{2d} \sum b_j \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} < 0\,, \qquad (2.36)$$

რომელიც წარმოადგენს (2.5) უტოლობას, ჩაწერილს (2.34) სისტემის მარჯვენა ნაწილისთვის.

ჩაკეტილი ოპტიმალური დისიპატიური სისტემების წრფივი ობიექ-ტების მართვის დივერგენცია ვექტორული ველისათვის განსაზღვრულია (2.34) განტოლების მარჯვენა ნაწილით და წარმოადგენს მუდმივ სიდ-იდეს მთელს ფაზურ სივრცეში. (2.36) უტოლობიდან შეიძლება მივი-ღოთ შემდეგი სახის განტოლება:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_i}{2d} \sum b_j \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + c = 0 . \tag{2.37}$$

ამგვარად, მართვის წრფივი ობიექტისთვის ОРАК-ის ამოცანის ამოხსნა შეგვიძლია დავიყვანოთ სისტემის ამოხსნამდე.

ОРАК-ის ამოცანის ამოხსნა დავიწყოთ (2.38)–(2.40) განტოლებათა სისტემის პირველი განტოლებიდან. მისი ამოხსნა საშუალებას მოგ-ვცემს განვსაზღვროთ *U(x)* ფუნქციის სტრუქტურა. მოცემული გან-ტოლება წარმოადგენს მუდმივი კოეფიციენტებიან მეორე რიგის წრფივ განტოლებას.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_i}{2d} \sum b_j \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + c = 0 & (2.38) \\ \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i \frac{\partial v}{\partial x_k} - \frac{1}{4d} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial v}{\partial x_k} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_1^2 = 0 & (2.39) \\ v(0) = 0 & (2.40) \end{cases}$$

როგორც ცნობილია [33], მეორე რიგის განტოლების ამოხსნა ემყარება ამ განტოლებების კანონიკურ სახემდე დაყვანის შესაძლებ-ლობას. (2.38) განტოლების შეესაბამის კვადრატული ფორმა.ს აქვს სახე:

$$Q = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} t_i t_k \tag{2.41}$$

სადაც $b_{ik} = b_i^2$ როცა $i = k; b_{ik} = b_i b_k$ როცა $i \neq k$

(2.41) კვადრატული ფორმა შეიძლება დავიყვანოთ კვადრატების ჯამზე

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tau_i^2 \tag{2.42}$$

ცნობილი წრფივი გარდაქმნების გამოყენებით

$$t_k = c_{1k}\tau_1 + \ldots + c_{nk}\tau_n, k = 1,2,\ldots,n.. \qquad (2.43)$$

თუ x_i-ის ნაცვლად გარდასახვის

$$y_k = c_{k1}x_1 + \ldots + c_{kn}x_n, k = 1,2,\ldots,n. \qquad (2.44)$$

გამოყენებით შემოვიტანთ ახალ დამოუკიდებელ ცვლადებს $y_{i,}$, მაშინ ამ პირობების გამოყენების შედეგად (2.38) განტოლება გარდაიქმნება შემდეგი სახით

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} - \frac{1}{2d}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \sum b_j \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + c = 0\,. \qquad (2.45)$$

განვიხილოთ უფრო დაწვრილებით (2.38) განტოლებიდან (2.45) კანონიკურ განტოლებაზე გადასვლის ტექნიკა მეორე რიგის ობიექტის მაგალითზე. ამ შემთხვევაში (2.38) განტოლება ღებულობს სახეს:

$$2d(a_{11} + a_{22}) - b_1^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - 2b_1 b_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - b_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2dc = 0 \qquad (2.46)$$

ხოლო (2.41) კვადრატული ფორმას, რომელიც შეესაბამება მოცემულ განტოლების აქვს სახეს

$$Q = b_1^2 t_1^2 + 2b_1 b_2 t_1 t_2 + b_2^2 t_2^2\,. \qquad (2.47)$$

ამ ფორმის შესაბამისი მატრიცას აქვს სახე:

$$A = \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 \\ b_2 b_1 & b_2^2 \end{bmatrix}. \qquad (2.48)$$

მახასიათებელ განტოლებას

$$|A - \lambda E| = \lambda^2 - \lambda b_1^2 - \lambda b_2^2 = 0 \qquad (2.49)$$

გააჩნია ფესვები λ_1=0, $\lambda_2 = b_1^2 + b_2^2$. განტოლებიდან

$$Ac_i = \lambda_i c_i; i = 1,2 \qquad (2.50)$$

λ_1=0, $\lambda_2 = b_1^2 + b_2^2$, მნიშვნელობებისათვის მოვძებნოთ საკუთრივი ვექტორები $c_1 = (c_{11}, c_{22})^T$ და $c_2 = (c_{21}, c_{22})^T$).

λ_1=0-თვის მივიღებთ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} b_1^2 c_{11} + b_1 b_2 c_{12} = 0 \\ b_1 b_2 c_{12} + b_2^2 c_{12} = 0 \end{cases} \qquad (2.51)$$

(2.51) სისტემის ამოხსნით მოვნახოთ საკუთრივი C_i - ვექტორის კოორდინატები. მივიღებთ $c_{12} = -\frac{b_1}{b_2} c_{11}$, $c_1 = (c_{11}, c_{12})^T = \left(c_{11}, -\frac{b_1}{b_2} c_{12} \right)^T = c_{11} \left(1, -\frac{b_1}{b_2} \right)^T$. დავუშვათ $C_{11}=1$, საბოლოოდ მივიღებთ

$$c_1 = \left(1, -\frac{b_1}{b_2} \right)^T$$

ანალოგიურად, $\lambda_2 = b_1^2 + b_2^2$ პირობის შემთხვევაში ვპოულობთ საკუთრივ c_2 ვექტრს, რომელსაც აქვს სახე

$$c_2 = \left(1, \frac{b_1}{b_2} \right)^T.$$

C_1 და C_2 საკუთრივი ვექტორები არიან ორთოგონალურები, მართლაც:

$$(c_1, c_2) = 1 \cdot 1 - \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{b_2}{b_1} = 0$$

მოვახდინოთ საკუთრივი C_1 და C_2 ვექტორების ნორმირება

$$\|c_1\| = \frac{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}{b_2}, \|c_2\| = \frac{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}{b_1}.$$

საბოლოოდ მივიღებთ A მატრიცის ორთოგონალურ საკუთრივ ვექტორებს, რომლებსაც აქვს სახე:

$$c_1 = \begin{pmatrix} \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \\ -\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \\ \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \end{pmatrix}. \tag{2.52}$$

ცნობილია, რომ ბაზისში, რომელიც შედგება მატრიცის ორთონორმირებული საკუთრივი ვექტორებისაგან, კვადრატული ფორმა დაიყვანება (2.43) კანონიკურ სახემდე. კანონიკურ გარდასახვას აქვს სახე:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \tau_1 + \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \tau_2 \\ t_2 = \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \tau_1 + \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \tau_2 \end{cases}. \tag{2.53}$$

თუ (2.53) ჩავსვამთ (2.47)-ში შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ კვადრატული ფორმა დაიყვანება (2.42) სახემდე, ე.ი.

$$Q=\left(b_1^2+b_2^2\right)y_2^2$$

(2.44)-ის გარდასახვები ღებულობენ სახეს:

$$\begin{cases} y_1=\dfrac{b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}x_1-\dfrac{b_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}x_2 \\ y_2=\dfrac{b_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}x_1+\dfrac{b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}x_2 \end{cases} \tag{2.54}$$

თუ გავითვალისწინეთ, რომ $\psi(x_1,x_2)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულების x_i დამოუკიდებელი ცვლადის მიხედვით ახალ დამოუკიდებელ y_i – ცვლადზე გადასვლისას, (2.44) წრფივი გარდაქმნების მეშვეობით გამოითვლება ფორმულით

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}=\sum_{k,i=1}^{n} c_{ki}c_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_i}, \tag{2.55}$$

და მივიღებთ (2.46) განტოლების (2.45) კანონიკურ ფორმას. მას ექნება სახე:

$$\frac{b_1^2+b_2^2}{2d}\frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}-a_{11}-a_{22}-c=0\,. \tag{2.56}$$

მოვახდინოთ (2.56) განტოლების ინტეგრირება

$$v=\frac{d(a_{11}+a_{22}+c)}{b_1^2+b_2^2}y_2^2+q_1(y_1)y_2+q_2(y_1)\,, \tag{2.57}$$

სადაც $q_1(y_1)$, $q_2(y_1)$ – გარკვეული დიფერენცირებადი ფუნქციებია. x_1, x_2 საწყის კორდინატებში (2.57) ფუნქცია ღებულობს სახეს:

$$v=\frac{d(a_{11}+a_{22}+c)}{\left(b_1^2+b_2^2\right)^2}\left(b_1x_1+b_2x_2\right)^2+q_1\left(\frac{b_2x_1-b_1x_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}\right)\frac{b_2x_1-b_1x_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}+q_2\left(\frac{b_2x_1-b_1x_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}\right). \tag{2.58}$$

ამრიგად, მიღებულია მეორე რიგი მართვის წრფივი ობიექტისთვის $u(x_1,x_2)$ ფუნქციის სტრუქტურა.

როგორც გამოკვლევებმა გვიჩვენა [33] იმ შემთხვევებში როდესაც მართვის წრფივი ობიექტის რიგი $n>2$, შეიძლება (2.38)-ის ინტეგრირების შედეგად მიღებულ იქნეს $u(x)$ ფუნქციის სტრუქტურა. ეს დაკავშირებულია აგრეთვე (2.38) განტოლების (2.41) კვადრატული ფორმის ერთ-ერთ თვისებასთან. ამოვწეროთ ამ ფორმის შესაბამისი მატრიცა

$$A=\begin{bmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & \dots & b_1b_n \\ b_1b_2 & b_2^2 & \dots & b_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1b_n & b_2b_n & \dots & b_n^2 \end{bmatrix}. \qquad (2.59)$$

A – მატრიცის მახასიათებელ განტოლებას ექნება სახე

$$\left|A-\lambda E\right|=\lambda^n-b_1^2\lambda^{n-1}-b_2^2\lambda^{n-1}-\ldots-b_n^2\lambda^{n-1}=0\,, \qquad (2.60)$$

რომელსაც აქვს ფესვები $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_{n-1}=0, \lambda_n=\sum_{i=1}^{n}b_i^2$.

შესაბამისად, შეიძლება მოინახოს ისეთი წრფივი გარდაქმნა (2.44) რომელსაც (2.38) განტოლებას დაიყვანს შემდეგ სახემდე:

$$\frac{1}{2d}\sum_{i=1}^{n}b_1^2\frac{\partial^2 v}{\partial y_n^2}-\sum_{i=1}^{n}a_{ii}-c=0\,. \qquad (2.61)$$

(2.61) განტოლება წარმოადგენს პარაბოლური ტიპის მეორე რიგის კერძო წარმოებულებინი დიფერენციალური განტოლებას. ამ განტოლების ამონახსნს აქვს სახე:

$$v=\frac{d}{\sum_{i=1}^{n}b_1^2}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+c\right)y_n^2+q_1(y_1,\ldots,y_{n-1})y_n+q_2(y_1,\ldots,y_{n-1}) \qquad (2.62)$$

სადაც $q_1(y_1,\ldots y_{n-1})$, $q_2(y_1,\ldots y_{n-1})$, არგუმენტების მიხედვით დიფერენცირებადი ფუნქციებია.

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ $u=u(y_1,\ldots y_n)$, ფუნქციის სრული სახე, აუცილებელია (2.42) განტოლებაში $x_1,\ldots x_n$ კოდრინატებიდან გადავიდეთ $y_1,\ldots y_n$ კოდრინატებზე და ჩავსვათ მასში (2.62) გამოსახულება. შედეგად მივიღებთ ერთგვარ დიფერენციალურ ტოლობას, რომლისთვისაც ჩავატაროთ კოორდინატობრივი ჩაძირვის პროცედურა.

კორდინატობრივი ჩალაგების პროცედურა მდგომარეობს უცნობი ფუნქციების $q_1(y_1,\ldots y_{n-1})$, $q_2(y_2,\ldots y_{n-1})$-ების მუდმივით c განსაზღვრაში: ეს მეთოდი შემდეგში მდგომარეობს რადგანაც საძებნი ფუნქციები $q_1(y_1,\ldots y_{n-1})$, $q_2(y_2,\ldots y_{n-1})$-არ არიან დამოკიდებული y_n კორდინატაზე, მაშინ (2.62) გამოსახულების (2.32)-ში ჩასმის შედეგად დიფერენციალურ განტოლებაში ვუტოლებთ 0-ს ამ კოორდინატების სხვადასხვა ხარისხების კოეფიციენტებს. მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას, საიდანაც განვსაზღვრავთ ფუნქციის სტრუქტურას. $q_1(y_1,\ldots y_{n-}$

$_{1})$, $q_2(y_2,...y_{n-1})$, რომელიც დამოკიდებულია ახალი $r_1(y_1,...y_{n-1})$, $r_2(y_2,...y_{n-1})$ და მუდმივ c-ზე. ჩავსვათ ფუნქციები $q_1(y_1,...y_{n-1})$, $q_2(y_2,...y_{n-1})$, დიფერენციალურ განტოლებაში და რადგანაც ამ შემთხვევაში ფუნქციები $r_1(y_1,...y_{n-1})$, $r_2(y_2,...y_{n-1})$ არ არიან დამოკიდებული y_{n-1} ცვლადზე. ნულს გავუტოლოთ y_{n-1} კოორდინატების სხვადასხვა ხარისხისას კოე-ფიციენტები. მივიღებთ დიფერენციალური განტოლებების ახალ სის-ტემას... ა.შ. კორდინატობრივი ჩალაგების ბოლო სტადიაზე მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებების სისტემას უცნობი ფუნქციების $K_1(y_1)$, $K_2(y_1)$ და მუდმივა c-ს. ამ სისტემის ამოხსნით მივიღებთ მუდმივის მნიშვნელობას და $K_1(y_1)$, $K_2(y_1)$ ფუნქციის სახეს გარკვეული რომელიღაც c_1 მუდმივამდე სიზუსტით.

c_1-ი მუდმივას სიდიდე შეიძლება განვსაზღვროთ, თუ გავითვა-ლისწინებთ (2.33) სასაზღვრო პირობას.

კორდინატობრივი ჩალაგების პროცედურის დახმარებით $v=v(y_1,...y_n)$, ფუნქციის სრული სახის განსაზღვრის შემდგომ აუცი-ლებელია $y_1,...y_n$ კორდინატებიდან $x_1,..,x_n$ კოორდინატებზე გადასვლა. საბოლოოდ მივიღებთ $v=v(x_1,...x_n)$, ფუნქციას რომლის ჩასმაც (2.31)-ში მოგვცემს $u=u(x_1,...x_n)$ საძებნ ოპტიმალურ მართვის კანონს.

2.4. ოპტიმალური დისიპატიური მართვის სისტემების ანალიზური კონსტრუირება

განვიხილოთ რიგი მაგალითები, რომლებიც გვაძლევენ საშუა-ლებას შევაფასოთ მართვის ოპტიმალური დისიპატიური სისტემების სინთეზის მეთოდის ეფექტურობა ოპტიმალური რეგულატორების ანა-ლიზური კონსტრუირების კლასიკურ მეთოდთან შედარებით.

<u>მაგალითი პირველი</u>. მოვახდინოთ ობიექტის, რომელიც აღიწერება დიფერენციალური განტოლებათა სისტემით

$$\dot{x}_1(t) = x_2, \dot{x}_2(t) = u \qquad (2.63)$$

მართვის ოპტიმალური კანონის სინთეზი. ხარისხის კრიტერიუმს აქვს შემდეგ სახე

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\infty (x_1^2+x_2^2+u^2)dt \qquad (2.64)$$

ჩავწეროთ ძირითადი ფუნქციონალური განტოლება შემდეგი სახით

$$\min_u\left[x_2\frac{\partial u}{\partial x_1}+u\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+u^2)\right]=0 \qquad (2.65)$$

(2.65) განტოლებაში მინიმუმი u-ს მიმართ მიიღწევა მაშინ, როცა

$$u=-\frac{\partial u}{\partial x_2}. \qquad (2.66)$$

(2.65) განტოლება მიიღებს სახეს

$$2x_2\frac{\partial x}{\partial x_1}-\left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\right)^2+x_1^2+x_2^2=0 \qquad (2.67)$$

(2.63) სისტემა, (2.66) შეკრული მართვით შეიძლება ჩავწეროთ სახით:

$$\dot{x}_1(t)=x_2,\dot{x}_2(t)=-\frac{\partial v}{\partial x_2} \qquad (2.68)$$

(2.78) სისტემის დისიპატიურობა ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1}-\frac{\partial x_2}{\partial x_2}<0 \qquad (2.69)$$

ან განტოლების სახით

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}-c=0 \qquad (2.70)$$

(2.70) განტოლებას გააჩნია კანონიკური სახე, ამიტომაც არ არის აუცილებელი x_1, x_2, კორდინატებიდან გადავიდეთ y_1, y_2, კორდინატებზე.

(2.70) განტოლების ინტეგრირებით მივიღებთ

$$v=\frac{1}{2}cx_2^2+q_1(x_1)x_2+q_2(x_1) \qquad (2.71)$$

(2.71) ჩავსვათ (2.67)-ში მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას.

$$x_2^2\frac{dq_1}{dx_1}+x_2\frac{dq_2}{dx_1}-\frac{1}{2}c^2x_2^2-cx_2q_1-\frac{1}{2}q_1^2+\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2=0 \qquad (2.72)$$

(2.72) განტოლების მიმართ გამოვიყენოთ კოორდინატული ჩალაგების პროცედურა

$$x_2^2:\frac{dq_1}{dx_1}-\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}=0 \qquad (2.73)$$

$$x_2^1:\frac{dq_2}{dx_1}-cq_1=0 \qquad (2.74)$$

$$x_2^0: -\frac{1}{2}q_1^2 + \frac{1}{2}x_1^2 = 0 \qquad (2.75)$$

ამოვხსნათ (2.75) განტოლება q_1-ის მიმართ, მივიღებთ

$$\mathrm{q}_1 = \pm\, \mathrm{x}_1 \qquad (2.76)$$

დაუშვათ $q_1=x_1$, მაშინ (2.73)-დან მივიღებთ განტოლებას $c^2=3$, რომლის ამონახსნიც $c = \pm\sqrt{3}$. დავუშვათ $c = \sqrt{3}$, მაშინ (2.74)-დან მივიღებთ

$$q_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1^2 + r \qquad (2.77)$$

სადაც r – ერთგვარი კონსტანტაა, q_1, q_2-ის ჩასმით (2.71)-ში მივიღებთ

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}x_2^2 + x_1x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_1^2 + r \qquad (2.78)$$

სასაზღვრო პირობიდან მივიღევთ, როცა $r = 0$. მაშინ საბოლოოდ მივიღებთ

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}x_2^2 + x_1x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_1^2 \qquad (2.79)$$

მართვის ოპტიმალურ კანონს ექნება სახე

$$u = -\sqrt{3}x_2 - x_1 \qquad (2.80)$$

(2.80) მართვის კანონი ემთხვევა ლეტოვის მიერ მიღებულ კანონს.

მაგალითი მეორე. განვიხილოთ ობიექტის

$$\dot{x}_1(t) = x_2, \dot{x}_2(t) = -x_2 + u \qquad (2.81)$$

მართვის ოპტიმიზაციის ამოცანა კვადრატული ფუნქციონალით

$$J = \int (x_1^2 + x_2^2 + u^2)dt \qquad (2.82)$$

ჩავწეროთ ძირითადი ფუნქციონალური განტოლება შემდეგი სახით

$$\min_u \left[x_2\frac{\partial v}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial v}{\partial x_2} + u\frac{\partial v}{\partial x_2} + (x_1^2 + x_2^2 + u^2) \right] = 0 \qquad (2.83)$$

მინიმუმი u-ს მიხედვით (2.83)-ში მიიღწევა, მაშინ როდესაც

$$u = -\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x_2} \qquad (2.84)$$

მაშინ (2.83) – განტოლება მიიღებს სახეს

$$x_2 \frac{\partial v}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \qquad (2.85)$$

სისტემა (2.81) ჩაკეტილი (2.84) მართვით, შეიძლება წარმოვადგინოთ სახით

$$\dot{x}_1(t) = x_2, \dot{x}_2(t) = -x_2 - \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x_2} \qquad (2.86)$$

(2.86)-განტოლების დისიპატურობის პირობა ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} - 1 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} < 0$$

ან შემდეგი განტოლების სახით

$$1 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - c = 0 \qquad (2.87)$$

(2.87) განტოლება აქვს კანონიკური ფორმა. მისი ინტეგრირების შემდეგ მივიღებთ

$$v = (c-1)x_2^2 + q_1(x_1)x_2 + q_2(x_1) \qquad (2.88)$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.85) მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლობას

$$x_2^2 \frac{dq_1}{dx_1} + x_2 \frac{dq_2}{dx_1} - 2(c-1)x_2^2 - x_2 q_1 - (c-1)^2 x_2^2 -$$

$$-(c-1)q_1 x_2 - \frac{1}{4}q_1^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \qquad (2.89)$$

(2.89) განტოლობის მიმართ გამოვიყენოთ კორდინატული ჩალაგების პროცედურა

$$x_2^2 : \frac{dq_1}{dx_1} - c^2 + 2 = 0 \qquad (2.90)$$

$$x_2^1 : \frac{dq_2}{dx_1} - cq_1 = 0 \qquad (2.91)$$

$$x_2^0 : \frac{1}{4}q_1^2 + x_1^2 = 0 \qquad (2.92)$$

ამოხსნით (2.92) განტოლება q_1-ის მიმართ, მივიღებთ

$$q_1 = \pm 2x_1 \qquad (2.93)$$

დავუშვათ $q_1=2x_1$ (2.90)-დან მივიღებთ განტოლებას $c^2=4$, რომლის ამონახსნიც არის $c=\pm 2$. დავუშვათ $c=2$, მაშინ (2.91)-დან გვაქვს

$$q_2 = 4x_1^2 + r \tag{2.94}$$

სადაც r წარმოადგენს კონსტანტას. ჩავსვათ q_1 q_2 (2.88) განტოლებაში, მივიღებთ

$$v = x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1^2 + r \tag{2.95}$$

v-ს სასაზღვრო პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ $r = 0$, მაშინ საბოლოოდ გვაქვს

$$v = x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1^2 \tag{2.96}$$

(2.96)-დან გამომდინარეობს რომ მართვის ოპტიმალურ კანონს ექნება სახე

$$u = - x_2 - x_1 \tag{2.97}$$

მართვის მიღებული (2.97) კანონი ზუსტად ემთხვევა [25] სამუშაოში მიღებულ მართვის კანონს.

მაგალითი მესამე. განვიხილოთ აეროდინამიკური დამუხრუჭების ამოცანა [25] სამუშაოდან. სამართავი ობიექტის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე.

$$\dot{x}_1(t) = x_2\,,\ \dot{x}_2(t) = x_3\,,\ \dot{x}_3(t) = u \tag{2.98}$$

მოვახდინოთ ავტოპილოტის ოპტიმიზირება ფუნქციონალის თანახმად

$$J = \int_0^\infty (x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + u^2)dt \tag{2.99}$$

ჩავწეროთ ძირითადი ფუნქციონალური განტოლება შემდეგი სახით

$$\min_u \left[x_2 \frac{\partial v}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial v}{\partial x_2} + u \frac{\partial v}{\partial x_2} + (x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + u^2) \right] = 0 \tag{2.100}$$

განტოლება (2.100)-ში მინიმუმი u მართვის მიხედვით მიიღწევა მაშინ, როცა

$$u = -\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x_3}. \tag{2.101}$$

ამასთან განტოლება (2.100) ღებულობს სახეს.

$$x_2 \frac{\partial v}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial v}{\partial x_2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial x_3}\right)^2 + x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 = 0 \tag{2.102}$$

ჩავწეროთ ეხლა სისტემა (2.98) (2.101) მართვით

$$\dot{x}_1(t) = x_2\,,\ \dot{x}_2(t) = x_3\,,\ \dot{x}_3(t) = -\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x_3} \qquad (2.103)$$

(2.103) სისტემის დისიპატიურობის პირობა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ უტოლობის სახით

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial x_3}{\partial x_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} < 0 \qquad (2.104)$$

ან შემდეგი განტოლების სახით.

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - c = 0 \qquad (2.105)$$

(2.105) განტოლების ინტეგრირებით მივიღებთ

$$v = cx_3^2 + q_1(x_1, x_2)x_3 + q_2(x_1, x_2) \qquad (2.106)$$

თუ ჩავსვამთ (2.106) (2.102) -ში მივიღებთ დიფერენციალურ ტოლობას

$$\begin{aligned} &x_2 x_3 \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial q_2}{\partial x_1} + x_3^2 \frac{\partial q_1}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial q_2}{\partial x_2} - c^2 x_3^2 - \\ &- c x_3 q_1 - \frac{1}{4} q_1^2 + x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 = 0 \end{aligned} \qquad (2.107)$$

(2.107) ტოლობას ვიყენებთ კოორდინატური ჩალაგების მეთოდისათვის.

$$x_3^2 : \frac{\partial q_1}{\partial x_1} - c_2 + 5 = 0 \qquad (2.108)$$

$$x_3^1 : \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} - cq_1 = 0 \qquad (2.109)$$

$$x_3^0 : \frac{\partial q_2}{\partial x_1} x_2 - \frac{1}{4} q_1^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \qquad (2.110)$$

(2.108) – ის განტოლების ამოხსნით q_1 მივიღებთ.

$$q_1 = \left(c^2 - 5\right) x_2 + r_1\left(x_1\right) \qquad (2.111)$$

სადაც r_1 (x_1) რომელიღაც ფუნქციაა. (2.109) განტოლებიდან მივიღებთ

$$\frac{\partial q_2}{\partial x_2} = cq_1 - \frac{\partial q_1}{\partial x_1} x_2 \qquad (2.112)$$

(2.111) ჩასმით (2.112)-ში და q_2 მიმართ ამოხსნით

$$q_2 = \frac{c}{2}\left(c^2 - 5\right) x_2^2 + cr_1(x_1)x_2 - \frac{1}{2}\frac{dr_1}{dx_1} x_2^2 + r_2(x_1), \qquad (2.113)$$

სადაც r_2 (x_1) - რომელიღაც ფუნქციაა. თუ ვისარგებლებთ q_1 (2.111)-დან q_2 (2.113) - დან მნიშვნელობებით, (2.107) განტოლებით მივიღებთ

$$cx_2^2\frac{dr_1}{dx_1}-\frac{1}{2}x_2^3\frac{d^2r_1}{dx_1^2}+x_2\frac{dr_2}{dx_1}-\frac{1}{4}\left(c^2-5\right)x_2^2-$$
$$-\frac{1}{2}\left(c^2-5\right)x_2r_1-\frac{1}{4}r_1^2+x_1^2+x_2^2=0 \quad (2.114)$$

(2.114) ტოლობა გამოვიყენოთ კოორდინატული ჩალაგებისათვის

$$x_2^3:\frac{d^2r_1}{dx_1^2}=0 \quad (2.115)$$

$$x_2^2:c\frac{dr_1}{dx_1}-\frac{1}{4}\left(c^2-5\right)^2+1=0 \quad (2.116)$$

$$x_2^1:\frac{dr_2}{dx_1}-\frac{1}{2}\left(c^2-5\right)r_1=0 \quad (2.117)$$

$$x_2^0:-\frac{1}{4}r_1^2+x_1^2=0 \quad (2.118)$$

(2.92) განტოლების ამოხსნით r_1 მიმართ ვიპოვით

$$r_1=\pm 2x_1 \quad (2.119)$$

(2.119)-ში $r_1=2x_1$ ჩასმით, (2.116)-დან მივიღებთ განტოლებას

$$2c-\frac{1}{4}\left(c^2-5\right)^2+1=0 \quad (2.120)$$

რომლის ამონახსნი არის

$$c=\begin{bmatrix} 3.235 \\ 1.163 \\ -2.199+0.863i \\ -2.199-0.863i \end{bmatrix} \quad (2.121)$$

ჩავსვათ (9.117) –ში და ამოვხსნათ განტოლება r_2 მიმართ მივიღებთ $r_2=\frac{1}{2}\left(c^2-5\right)x_1^2+k$, სადაც k ერთგვარი კონსტანტაა. r_1,r_2 (2.111) და (2.113) დან მოყენებით შესაბამისად მივიღებთ

$$q_1=\left(c^2-5\right)x_2+2x_1 \quad (2.122)$$

$$q_2=\left[\frac{c}{2}\left(c^2-5\right)-1\right]x_2^2+2cx_1x_2+\frac{1}{2}\left(c^2-5\right)x_1^2+k \quad (2.123)$$

ავიღოთ (2.121)-ში c=3,235, მაშინ (2.106) გამოსახულებაში (2.122) და (2.123) ჩასმით და იმის გათვალისწინებით რომ $k=0$ ვიპოვით ლიაპუნოვის ოპტიმალურ ფუნქციას შემდეგი სახით

$$v = A_{33}x_3^2 + A_{23}5x_2x_3 + A_{13}x_1x_3 + A_{22}x_2^2 + A_{12}x_1x_2 + A_{11}x_1^2 \qquad (2.124)$$

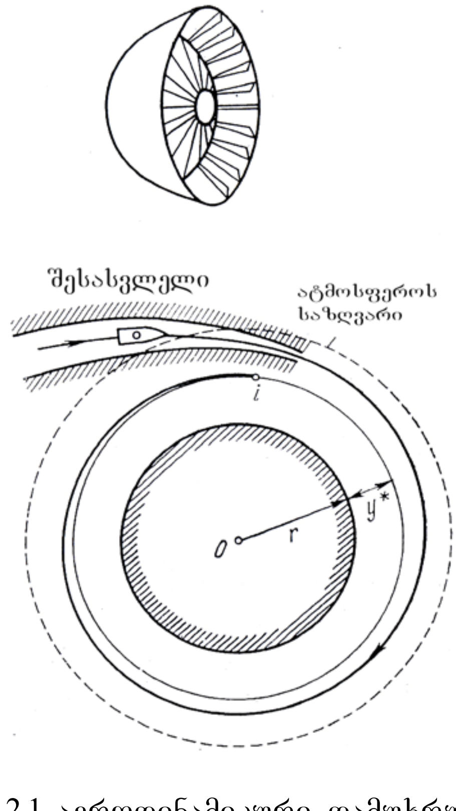
სადაც $A_{11} = 2,732$; $A_{12} = 6,47$; $A_{13} = 2$; $A_{22} = 7,84$; $A_{23} = 5,465$; $A_{33} = 3,235$;
და მართვის ოპტიმალური კანონი

$$u = -x_1 - 2,735x_2 - 3,235x_3. \qquad (2.125)$$

განვიხილოთ ატმოსფეროში ბალისტიკური შესვლის ამოცანა რომლის შემდეგაც შესაძლებელია ხელოვნური თანამგზავრის გამოყენება, როგორც ცნობილია დაჯდომის ტრაექტორია, რომელიც მთავრდება დედამიწის ზედაპირის f წერტილზე, განისახღვრება წრიული ტრაექტორიის i საწყისი წერტილით.

ბალისტიკური შესვლა ეწოდება ხელოვნური თანამგზავრის შესვლის ტრაექტორიას ატმოსფეროს ზედა ფენებში. დავუშვათ, რომ ხელოვნური თანამგზავრი ამ ტრაექტორიაზე მოძრაობისას ასრულებს დედამიწის გარშემო საკმარისი რაოდენობის ბრუნვებს.

აეროდინამიკური დამუხრუჭების ამოცანა მდგომარეობს იმაში რომ მინიმუმამდე უნდა იქნეს დაყვანილი გადახრა წრიული ტრაექტორიიდან. ამ პირობებში i წერტილი განისაზღვრება საკმარისი სიზუსტით, შემდეგ იწყება დაჯდომის ფაზა.



ნახ. 2.1 აეროდინამიკური დამუხრუჭება

დავუშვათ რომ პროგრამული მოძრაობა წარმოადგენს წრიულ მოძრაობას რადიუსით $r+y$ და სიჩქარით $v=\sqrt{g(r+y)}$

დავუშვათ რომ ბალისტიკური შესვლისას სრულდება შემდეგი პირობები:

1. პროგრამული კუთხე θ საკმარისად მცირეა $\theta=-1^0$, და პროგრამული სიჩქარე $v\approx 7800$ მ/წმ.
2. სიმაღლის სრული ცვლილება $|\Delta y|<30$ კმ, რაც უფრო მცირეა ვიდრე r.
3. წევას არ გააჩნია დამატებითი რეგულირება.
4. ამწევი ძალა საკმარისად მცირეა წონასთან შედარებით.
5. წინაღობის რეგულირება Q ხორციელდება აეროდინამიკური დამუხრუჭების ზედაპირის ცვლილებასთან დამოკიდებულებით.

ამ დაშვებების საფუძველზე შევადგინოთ მართვის ობიექტის განტოლება აღმშფოთი ზემოქმედების გათვალისწინებით. ამასთან მხედველობაში უნდა მივიღოთ რომ :

ა) ცვლადები m,ω,β არ იცვლებიან,

ბ) Δx და Δw ცვლადები მათი სპესიფიკიდან გამომდინარე გამოიყოფა წრფივი მოდელის განტოლებიდან აღმშფოთი ზემოქმედების გათვალისწინებით.

გ) Δy ცვლადი არ ახდენს მნიშვნელოვან ზეგავლენას $\dfrac{v\cos\theta}{r+y}$ წევრის ცვლილებაზე.

ასეთი დაშვების საფუძველზე მოძრაობის განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს.

$$\Delta\dot{v}=-g\Delta\theta-g\Delta\left(\frac{Q}{mg}\right),$$

$$\Delta\dot{\theta}=\frac{2}{r+y}\Delta v,$$

$$\Delta\dot{y}=v\Delta\theta,$$

$$\Delta\dot{w}=k\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\Delta v+k\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta y,$$

რომლებიც მართვის ფუნქციის როლში არის სიდიდე $\xi = \Delta\left(\frac{Q}{mg}\right)$

განტოლება იყოფა ორ ჯგუფად, რომელთაგანაც პირველის ინტეგრირება შესაძლებელია მეორისაგან დამოუკიდებლად. მეორე სისტემა საჭიროა სითბოს ნაზრდის შეფასებისათვის კორპუსის შიგნით, ავტოპილოტის მიერ სისტემის სტაბილიზაციის დროს, რომელიც მომავალშიც უნდა განისაზღვროს. ჩვენ უნდა დავუშვათ რომ ეს დაშვებები სრულდება.

ამრიგად გამარტივების შედეგან გვაქვს

$$\left.\begin{aligned} \Delta\dot{v} &= -g\Delta\theta - g\xi, \\ \Delta\dot{\theta} &= \frac{2}{r+y}\Delta v, \\ \Delta\dot{y} &= v\Delta\theta, \end{aligned}\right\} \tag{2.126}$$

რომელიც წარმოადგენს მართვის ობიექტის მათემატიკურ მოდელს, (2.126) განტოლება გარდავქმნათ ისე რომ შევინარჩუნოთ მხოლოდ ცვლადი Δy მივიღებთ

$$\Delta\ddot{y} = -\frac{2g}{r+y}\Delta\dot{y} - \frac{2vg}{r+y}\xi.$$

შემოვიტანოთ ახალი მართვა და ახალი ცვლადები

$$\left.\begin{aligned} &\Delta y = y_1, \Delta\dot{y} = y_2, \Delta\ddot{y} = y_3 \\ &-\frac{2g}{r+y}\Delta\dot{y} - \frac{2gv}{r+y}\xi = \zeta, \end{aligned}\right\} \tag{2.127}$$

მაშინ მათემატიკური მოდელი მიიღებს სახე.

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_3 \\ \dot{y}_3 &= \zeta \end{aligned}\right\} \tag{2.128}$$

ავტოპილოტის ოპტიმიზაცია მოვახდინოთ ფუნქციონალის

$$I = \int_0^\infty \left(y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2 + \zeta^2\right) dt. \tag{2.129}$$

მიხედვით $A_{\alpha\beta}$ კოეფიციენტებისათვის წარმოებული ფუნქციისათვის მივიღებთ:

$$
\left.\begin{aligned}
0 &= 1 - A_{13}^2 \\
0 &= a_2 + 2A_{12} - A_{23}^2 \\
0 &= a_3 + 2A_{23} - A_{33}^2 \\
0 &= A_{11} - A_{13}A_{33} \\
0 &= A_{12} - A_{13}A_{33} \\
0 &= A_{13} + A_{22} - A_{23}A_{33}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.130)
$$

მნიშვნელობათა რიცხვითი მონაცემები სხვადასხვა წონითი კოეფიციენტების შემთხვევაში მოცემულია ცხრილში 2.1

ცხრილი 2.1

	შემთხვევა 1 $a_2 = 1, a_3 = 5$	შემთხვევა 2 $a_2 = a_3 = 5$	შემთხვევა 3 $a_2 = 10, a_3 = 5$
A_{11}, A_{22}	$A_{11} = 2,8;$ $A_{22} = 7,75$	$A_{11} = 3,5;$ $A_{22} = 10,75$	$A_{11} = 4,27;$ $A_{22} = 13,50$
A_{33} A_{12}	$A_{33} = 3,2;$ $A_{12} = 3,25$	$A_{33} = 3,4;$ $A_{12} = 3,45$	$A_{33} = 3,60;$ $A_{12} = 3,65$
A_{13} A_{23}	$A_{13} = 1,04;$ $A_{23} = 2,75$	$A_{13} = 1,04;$ $A_{23} = 3,45$	$A_{13} = 1,04;$ $A_{23} = 4,15$

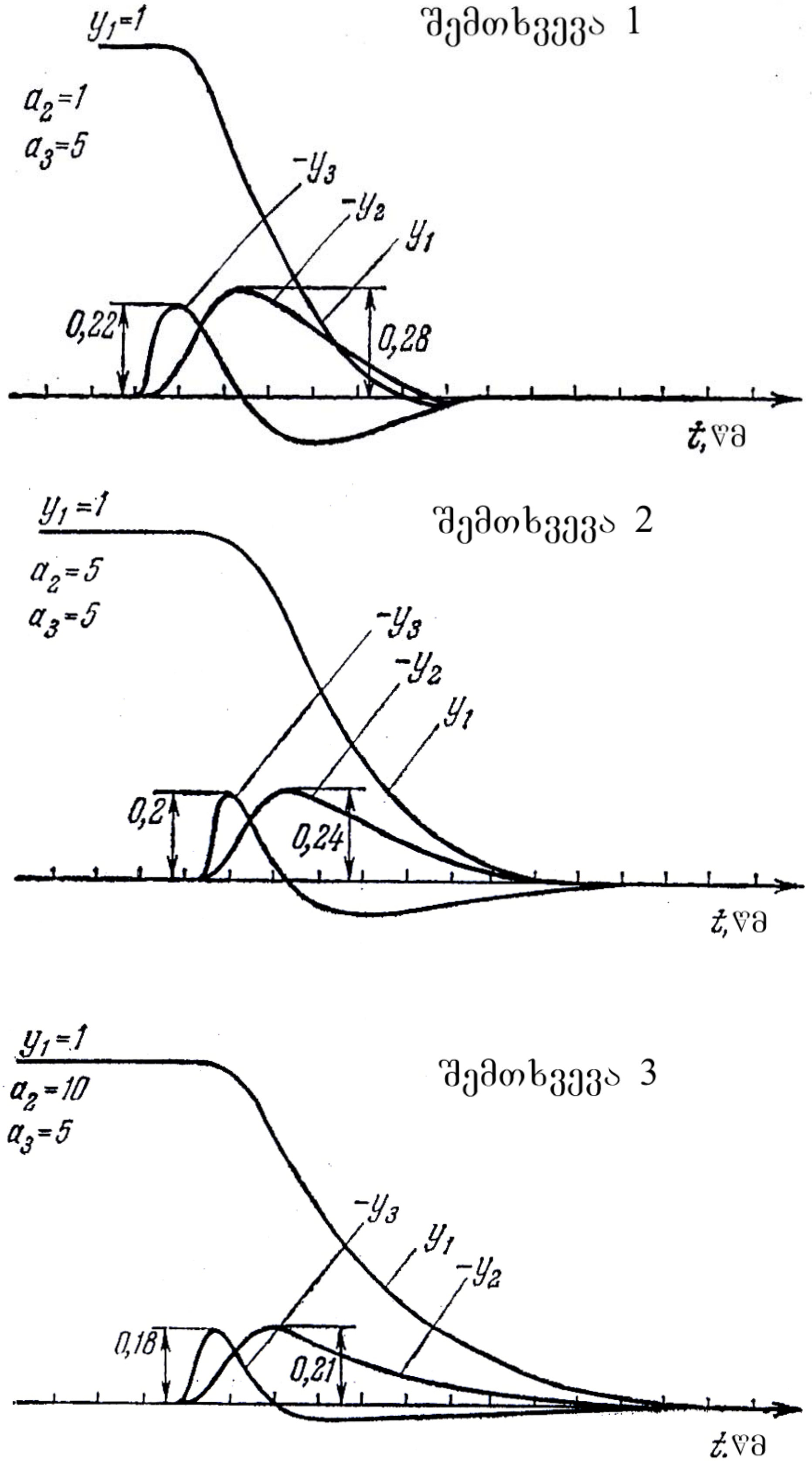
ჩაკეტილ სისტემას აქვს სახე

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= y_2 \\
\dot{y}_2 &= y_3 \\
\dot{y}_3 &= p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3
\end{aligned}\right\} \qquad (2.131)
$$

სადაც ავტოპილოტის გაძლიერების კოეფიციენტები ტოლია

$$p_1 = -A_{13}, p_2 = -A_{23}, p_3 = -A_{33}.$$

განხილული მაგალითიდან ნათლად ჩანს ის უპირატესობანი რომელსაც გვაძლევს ოპტიმალური მართვის სინთეზის მეთოდი ОРАК – ის კლასიკურ მეთოდთან შედარებით სინამდვილეში, სამუშაოში ლიაპუ- ნოვის ოპტიმალური ფუნციქციის კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის აუცილეველია ამოვხსნათ რიკატის ტიპის ალგებრულ განტოლებათა სისტემა.



ნახ. 2.2 აეროდინამიკური დამუხრუჭების გარდამავალი პროცესი

გარდამავალი პროცესის მრუდები წარმოდგენილია ნახ 2.2

$$\begin{cases} 0 = 1 - A_{13}^2 \\ 0 = 1 + 2A_{12} - A_{23}^2 \\ 0 = 5 + 2A_{23} - A_{23}^2 \\ 0 = A_{11} - A_{13}A_{33} \\ 0 = A_{12} - A_{13}A_{33} \\ 0 = A_{13} + A_{22} - A_{23}A_{33} \end{cases}$$

სადაც A_{ij} - საძებნი კოეფინციენტებია, ასეთი სისტემის ამოხსნა მოითხოვს სპეციალური რიცხვითი მეთოდების გამოყენებას, რომელსაც ყოველთვის არ მივყავართ დამაკმაყოფელებელ შედეგებამდე. ზემოთ ჩამოყალიბებულ მაგალითში (2.124) ლიაპუნოვის ოპტიმალური ფუნქციის კოეფიციენტების მისაძებნად და (2.125) მართვის კანონის შესაბამისად აუცილებელია რამოდენიმე უმარტივესი დიფერენციალური განტოლებების და (2.120) მეოთხე რიგის ალგებრული განტოლების ამოხსნა რაც გაცილებით ადვილია და გამოთვლების ზუსტ შედეგს იძლევა შედარებისათვის მოვიყვანოთ (2.124) ლიაპუნოვის ოპტიმალური ფუნქციის კოეფიციენტების მნიშვნელობები და [25] სამუშაოში მიღებული შედეგები. შედეგები მოცემულია ცხრილი 2.1.

ცხრილი 2.1

	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{22}	A_{23}	A_{33}
სამუშაო [25]	2,8	3,25	1,04	7,75	2,75	3,2
მაგ. 2	2,732	6,47	2	7,84	5,465	3,235

ცხრილში მოცემული მონაცემების ანალიზისას, შეიძლება გავაკეთოდ დასკვნა რომ A_{11}, A_{22}, A_{33}, კოეფიციენტების მნიშვნელობები, განხილულ სამუშაო [25] და მაგალით 2-ში მცირედ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან, მაშინ როდესაც A_{12}, A_{13}, A_{23}, კოეფიციენტები მნიშვნელოვნად განხვავდებიან ერთმანეთისაგან, რადგანაც (2.120) მეოთხე რიგის ალ-

გებრული განტოლების ამოხსნის სიზუსტე არსებითად უფრო მაღალია ვიდრე ექვსი ალგებრული განტოლებისაგან შემდგარი სისტემისა.

ამგვარად შეიძლება ვამტკიცოთ რომ წრფივი $n>3$ როგის ობიექტებისთვისაც კი ოპტიმალური დისიპატიური სისტემების მართვის სინთეზის უპირატესობა იქნება უფრო მეტად მეტად მაღალი ОРАК –ის კლასიკურ მეთოდთან შედარებით. ავღნიშნოთ რომ ამ თავში ჩამოყალიბებული ახალი მიდგომა, რომელის ეყრდნობა ჩაკეტილი დისიპატიური სისტემების ფუნდამენტალურ ფიზიკირ თვისებას, საშუალებას იძლევა ძირეულად წამოვწიოთ ОРАК –ის პრობლემის გადაწყვეტა. რასაკვირველია ეს მიდგომა მოითხოვს შემდგომ განვითარებას მართვის სისტემების სხვადასხვა კლასებთან მიმართებაში.

3. არაწრფივი მართვის სისტემების სინთეზი სინერგეტიკული თეორიის გამოყენებით

წინამდებარე თავში განხილულია არაწრფივი რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების ამოცანის გადაწყვეტა სინერგეტიკული მეთოდით, რომელიც ემყარება მდგომარეობათა სივრცეში სისტემის კოორდინატებს შორის ფუნქციონალური დამოკიდებულების-ატრაქტორების შემოღებას, რომლებზედაც ობიექტის ბუნებრივი თვისებები საუკეთესოდ ეთანადება მართვის ტექნოლოგიურ მოთხოვნებს. სინერგეტიკული მიდგომის მიხედვით დამყარებულია შესაბამისობა ინვარიანტულ მრავალსახეობებსა და საოპტიმიზირებელ ფუნქციონალებს შორის.

ინვარიანტული მრავალსახეობების შემოტანა შეკრულ სისტემას ანიჭებს ზოგად გლობალურ თვისებებს და საშუალებას გვაძლევს გამოვავლინოთ მსგავსება იმ სხვადასხვა ფიზიკურ მოვლენებს შორის, რომლებიც მიმდინარეობენ სხვადასხვა ბუნების მართვის ობიექტებში. ამ მოვლენების წარმოდგენა მათემატიკურ ენაზე - სისტემის დიფერენციალური განტოლებების პირველი (კერძო) ინტეგრალების ერთობლიობა-ასახავს მართვის პროცესებში ზოგადი პრინციპის შენახვას.

მართვის არაწრფივი სისტემის სინთეზის პრობლემაში მოცემული კონცეპცია იყენებს ინვარიანტების და ინვარიანტული დამოკიდებულებების ცნებას. თუმცა, ინვარიანტების კლასიკური თეორიისაგან განსხვავებით ის ეფუძნება, პირველ რიგში, დისიპატიური სტრუქტურების

თეორიას და მეორე რიგში, ინვარიანტების-ატრაქტორების (სინერგიების) მიზნობრივ შემოტანას, რომლებშიც ხორციელდება სისტემის მიმართული თვითორგანიზაცია.

სინერგეტიკულ მეთოდში გაერთიანებულია კავშირი ინვარიანტულ მრავალსახეობებსა და სისტემების საოპტიმიზაციო ფუნქციონალებს შორის [35]. სინერგეტიკის თვალსაზრისით ოპტიმიზაციის მეთოდი ეყრდნობა ორ წარმოდგენას: ფუნქციონალის სინერგეტიკულ ინტერპრეტაციას და უშუალო კავშირის დამყარებას ОРАК-ის თეორიის ხარისხის კვადრატულ და სხვა კრიტერიუმებს და თანმხლებ ფუნქციონალებს. უნდა ავღნიშნოთ, რომ ამ მიდგომის გამოყენება არაწრფივი სისტემების მართვის ანალიტიკური კონსტრუირების ამოცანებში ეფუძნება ინვარიანტულ მრავალსახეობებს და არა რომელიმე ოპტიმალურობის კრიტერიუმს, რომლებსაც აქ გააჩნიათ თანმხლები, მეორადი ხასიათი.

მიზანშეწონილია განვიხილოთ ახალი სინერგეტიკული მიდგომის შესაძლებლობანი, რომლებიც დაფუძნებულია შემოტანილი ინვარიანტული მრავალსახეობების-ატრაქტორების კონცეპციაზე, რათა გამოვლენილ იქნეს ახალი პერსპექტიული მიმართულებები ფართო კლასის არაწრფივი, მრავალგანზომილებიანი და მრავალკავშირიანი ობიექტების მართვის სისტემების კონსტრუირების პრობლემების გადაწყვეტისათვის. ამ პრობლემის არსი მდგომარეობს უარყოფითი და დადებითი არაწრფივი უკუკავშირების გენერაციის ანალიტიკური მეთოდების დამუშავებაში.

3.1 მართვის სისტემების სინთეზის ამოცანა

მართვის თეორიაში სინერგეტიკის იდეების გამოყენებისათვის აუცილებელია გამოვავლინოთ თვითორგანიზაციის ძირითადი თვისებების, არაწრფივობა-გახსნილობა-კოგერენტულობა, შესაბამისობა. მათ შორის სისტემების გახსნილობა წარმოადგენს პირველ ხარისხოვანს მართვის ამოცანებისათვის.

მართვის სტანდარტული ამოცანაში ობიექტი აღიწერება დიფერენციალური განტოლებებით, რომელთა შემადგენლობაშიც საძებნი $U(t)$ მართვა, აღმგზნები $q(t)$ და (შესაძლებელია) დამკვეთი $M(t)$ ზემოქმედებები. ამ ძალების მოქმედებით ობიექტმა შეიძლება შეასრულოს

შესაბამისი მოძრაობა. მითითებული გარეგანი ზემოქმედების შედეგად სისტემას შეიძლება გააჩნდეს სპეციფიკური ფუნქციონირება ან სტრუქტურა, რომელიც მთლიანობაში არ ეთანადება გ.ჰაკენის [41] მიერ ჩამოყალიბელი თვითორგანიზაციის მოვლენის განსაზღვრებას. აქედან გამომდინარეობს, რომ მართვის ამოცანის ასეთი ფორმულირება ჯერ კიდევ არასაკმარისია თვითორგანიზაციის მოვლენის წარმოქმნისათვის.

ზემოთ აღწერილი სქემიდან „ობიექტი-გარეგანი ძალები“ თვითორგანიზაციის პრინციპზე გადასვლისათვის საჭიროა ამ ძალების გამორიცხვა. ამისათვის ფაზური სივრცის „შეკუმშვა-გაფართოების“ პრინციპის განხორციელებისათვის, საჭიროა გავაფართოვით სისტემის საწყისი განტოლება „ობიექტი-გარეგანი ძალები“ ისე რომ, სისტემის განტოლებაში ჩართული გარეგანი ძალები აღმოჩნდნენ მისთვის შინაგანნი. შედეგად ახალი, გაფართოებული სისტემისათვის მისი განტოლებები შეიძლება იქცნენ თვითორგანიზაციის განტოლებებად ე.ი. ნაჩვენები გაფართოების შედეგად შეიძლება გადავიდეთ სისტემის ორგანიზაციიდან მის თვითორგანიზაციაზე. ამ კანონებმა, რომლებიც წარმოადგენენ რეგულატორის განტოლებებს უნდა უზრუნველყონ შეკრული სისტემის „ობიექტი-მართვის კანონი“ სასურველი დინამიკური თვისებები. მაშინ ახალ გაფართოებული სისტემებისათვის „ობიექტი-რეგულატორი“ მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ დამოკიდებულებები, რომლებიც ახასიათებენ სინერგეტიკის თვითორგანიზაციას ზემოთ ხსენებულ თვისებების შესაბამისად სხვა სიტყვებით, საწყისი სისტემა, რომელიც შედგება დინამიკური ობიექტისაგან და მასზე მოქმედი გარეგანი ძალების (მართველი, დამკვეთი და აღმგზნები ზემოქმედებები), პირდაპირი და უკუკავშირების შედეგად გარდაიქმნებიან ახალ გაფართოებულ სისტემად. ამასთან, პირველსაწყისი ზემოქმედებები გარენი ძალები საწყისი ობიექტის მიმართ, გადაიქცევიან გაფართოებული სისტემის შინაგან ძალებად. ასეთი გაფართოებული სისტემა ნამდვილად ხდება ღია (თერმოდინამიკური აზრით) და მისით მოხდება შესაბამისი წყაროდან ენერგიის ან ნივთიერების გადინება.

ამრიგად, მართვის პრობლემებში, რომლებიც დაფუძნებული არიან თვითორგანიზაციის კოოპერატიულ პროცესებზე, სინერგეტიკული მიდგომის გამოყენებისათვის აუცილებელია მართვის საწყისი ამოცანი-

დან, რომელიც მოიცავს თავის თავში ობიექტის განტოლებას და გარეშე ძალებს გადავიდეთ ამოცანის გაფართოებულ ფორმირებაზე იმ აზრით, რომ ზემოთ ნახსენები ძალები გადაიქცევიან (ჩაკეტილი) სისტემის შინაგან ურთიერთქმედებებად. ამისათვის საჭიროა გარეგანი აღმზნები *q(t)* და დამკვეთი ზემოქმედება *M(t)* წარმოვიდგინოთ როგორც დამატებითი დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნები, რომლებიც აღწერენ ინფორმაციულ მოდელს და ამით მოვახდინოთ მათი „ჩალაგება" გაფართოებული სისტემის საერთო სტრუქტურაში. შემდგომ თვით მართვის პრობლემა აუცილებელია ჩამოვაყალობოთ როგორც გაფართოებული სისტემის კომპონენტებს შორის ურთიერთმოქმედების კანონების მოძებნის ამოცანა, რომლებიც უზრუნველყოფენ მასში თვითორგანიზაციის პროცესების წარმოშობას. კონკრეტულად ეს პრობლემა დაიყვანება ჩაკეტილი მართვის შესაბამისი კანონების $u(x_1,...,x_n,w_1,...,w_n)$ სინთეზამდე გაფართოებული სისტემის მდგომარეობის კოორდინატების ფუნქციაში. აქ $w_1,...,w_\mu$ ინფორმაციული მოდელების კოორდინატებია დამკვეთი და აღმგზნები ზემოქმედებებისას, რომლებიც ჩაწერილნი არიან დამატებითი დიფერენციალური განტოლებების სახით. სისტემასთან ენერგიის ან ნივთიერების გადადინებით შეგვიძლია შევქმნათ არაწონასწორული სიტუაცია, რომელიც აუცილებელია თვითორგანიზაციის მიმართული პროცესების წარმოქმნისათვის. სწორედ საწყისი სისტემის გაფართოება და თვითორგანიზაციის განტოლებების ფორმირება გვაძლევს საშუალებას დავამყაროთ კავშირი სინერგეტიკის იდეასა და არაწრფივი სისტემის მართვის სინთეზის პრობლემას შორის ინვარიანტული დამოკიდებულებების საფუძველზე. აქედან გამომდინარეობს, რომ მართვის, სინერგეტიკული თეორია პირველ რიგში ჩაკეტილი მართვის სისტემების სინთეზის თეორიაა, რომელიც დაფუძნებულია სხვადასხვა ბუნების სისტემებში თვითშეთანხმებული, კოოპერატიული პროცესების ფორმირებაზე. არაწრფივი დინამიკური სისტემების სინთეზის პრობლემაში ფაზური მოცულობის გაფართოება წარმოადგენს სინერგეტიკული მიდგომის ძირითად იდეას-გაფართოებული დიფერენციალური სისტემების ფორმირება, რომლებიც ასახავენ დამკვეთი ზემოქ-

მედების დამუშავების პროცესებს, შეშფოთებების ჩახშობას, ოპტიმიზაციას, კოორდინატებზე დაკვირვებას და ა.შ.

ჩამოყალიბებული სინერგეტიკული მეთოდის დებულებები ანალიზურად ასე ჩაიწერება. ობიექტის საწყის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_k(t) = f_k(x_1,...,x_n) + M_k(t); k = 1,2,...m-1; m \le n \\ &\dot{x}_{k+1}(t) = f_{k+1}(x_1,...,x_n) + u_{k+1} + M_{k+1}(t); \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dot{x}_n(t) = f_n(x_1,...,x_n) + u_n + M_n(t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

სადაც $x_1,...,x_n$, – ობიექტის მდგომარეობის კოორდინატებია, $u_{k+1},...,u_n$, - მართვებია, $M_1(t),...,M_n(t)$ - აღმშფოთი ზემოქმედებაა.

(3.1) სახის განტოლება აღწერს სხვადასხვა ბუნების ფართო კლასის დინამიკური ობიექტების ყოფაქცევას. (3.1) – განტოლებათა სისტემის არჩევა მასში წრფივი სახით შემავალი მმრთველი ზემოქმედებისას გვაძლევს საშუალებას ნათლად ვაჩვენოთ აგრეგირებული რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების მეთოდის კონსტრუქციულობა (არაპ). ასეთი არჩევანი არ ზღუდავს განსახილველი მოდგომის ზოგადობას, მით უმეტეს რადგანაც არაწრფივი ობიექტების მართვის რეალური ამოცანების უმეტესობა ჩვეულებრივ შეიძლება დავიყვანოთ (3.1) ტიპის სისტემამდე მდგომარეობათა სივრცის გაფართოების ხარჯზე. არაწრფივი მართვიდან წრფივი მართვის სახეზე გადასვლისათვის შეიძლება მაგალითად მმართველ ზემოქმედებად გამოვიყენოთ საწყისი ამოცანის მართვის ვექტორის ცვლილების სიჩქარე ან სხვა მეთოდები.

შემდგომ ეტაპზე (3.1)-სისტემას ემატება μ - რაოდენობის განტოლებები, რომლებიც დაკავშირებულია პროგროზირების და შეშფოთებების ჩახშობის პრობლემასთან

$$\dot{w}_j = g_i(w_1,...,w_\mu, x_1,...,x_n),\ j = 1,...,\mu; \tag{3.2}$$

(3.2) - განტოლების აგებისას წარმოიქმნება ორი დამოუკიდებელი და მნიშვნელოვანი ამოცანა: პირველ რიგში რეალური $M_k(t),...,M_n(t)$ აღწერა როგორც ზოგიერთი დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნებისა, მეორე რიგში საწყისი ობიექტის (3.1) განტოლებებსა და შეშ-

ფოთებებს შორის კავშირის ფორმირება, განვიხილოთ ეს ორი მნიშვნელოვანი ამოცანა ცალ-ცალკე.

აღშფოთებების რეალურად აღწერისათვის ავირჩიოთ შესაბამისად ტალღური განტოლებები ნახევრადდეტერმინირებული გამოსახულებების სახით.

$$M(t) = W\left[M_1(t), M_1(t), \ldots, M_1(t); c_1, \ldots, c_r\right] \tag{3.3}$$

სადაც $M_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n$ – ცნობილი ფუნქციებია, $C_j, \quad j = 1, 2, \ldots, r$ – განუსაზღვრელი პარამეტრებია რომლებსაც შეუძლიათ დროის ნებისმიერ მომენტებში ნახტომისებურად ცვალონ თავისი უბან-უბან უწყვეტი მნიშვნელობები, (3.3) განტოლებებში ცნობილი ფუნქციების $M_i(t)$, ნაკრები უნდა აღწერდეს შეშფოთებების ყველა იმ ტალღურ ფორმას, რომლებიც მოქმედებენ ობიექტზე. რეალური შეშფოთებები შეიძლება წარმოვადგინოთ წრფივი ტალღური სახით.

$$M_1(t) = \sum_{k=1}^{r} c_{1k} M_{1k}(t)\,,\; j = 1, \ldots, \mu; \tag{3.4}$$

როგორც გამოსახულებიდან ჩანს, შეშფოთება შედგება წრფივი კომბინაციებისა და დროის უწყვეტი ფუნქციისაგან. შეშფოთებების ტალღური წარმოდგენა იძლევა საშუალებას განისაზღვროს $M_i(t)$, ცვლილების ხასიათი ბაზური $M_{ik}(t)$, ფაზური ფუნქციის არჩევის მეშვეობით დროის მოკლე ინტერვალევში. ამავე დროს $M_i(t)$, ცვლილების სიდიდე რჩება უცნობი, რადგანაც დამოკიდებულია უცნობ C_{ik} – კოეფიციენტებზე, რომლებსაც გააჩნია უბან-უბან უწყვეტი ხასიათი. უმეტესი ინფორმაცია აღშფოთებაზე სწორედ დროის მოკლე მონაკვეთებზე ხშირად საინტერესოა. როდესაც სტატიკური აღწერა არ არის ეფექტური, უფრო მისაღები იქნება შეშფოთებების წარმოდგენა ტალღური სახით. ამ მნიშვნელოვან შემთხვევებში შესაძლებელია მარტივად შევარჩიოთ $M_{ik}(t)$, ბაზური ფუნქციების კონკრეტული ფორმები ობიექტზე მოქმედი რეალური შეშფოთებების აპროქსიმაციისათვის. ბაზური ფუნქციების შერჩევის შემდეგ საჭიროა გადავიდეთ აღშფოთების ტალღური ფუნქციის სტრუქტურის-დგომარეობის მოდელის ფორმირებაზე გარკვეული დიფერენციალური განტოლებების სისტემის სახით. უწყვეტი ფუნქცი-

ების აღწერა ზოგიერთი დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნის სახით მართვის თეორიაში პირველად წამოაყენა ვ.ს. კოლებაკინმა. აღშფოთების განზოგადოებული წარმოდგენა დიფერენციალური განტოლებების სახით ჩაიწერება შემდეგი წესით.

$$\dot{w}_{jM}(t) = \dot{g}_{jm}(w_1, ..., w_\mu) \tag{3.5}$$

სადაც $w_j(t) = M_j(t)$ (3.4) გამოსახულების წრფივი ტალღური აღწერისათვის შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს მაგალითად კანონიკური სახით

$$\dot{w}_1(t) = w_2, \dot{w}_2(t) = w_3, ..., \dot{w}_{r-1}(t) = w_r,$$
$$\dot{w}_n(t) = -a_1 w_1 - a_2 w_2 - ... - a_r w_r.$$

(3.5) მდგომარეობის მოდელის საფუძველზე შეიძლება გადავიდეთ კავშირის განტოლების (3.2) ფორმირებაზე, რაც წარმოადგენს ზემოთ ნახსენები მეორე მთავარი ამოცანის შინაარსს. აღვწეროთ ამ ამოცანის მოკლე შინაარსი. შეშფოთებების(3.5)- მოდელის განტოლებიდან (3.2) კავშირის განტოლებაზე გადასვლის რამოდენიმე ხერხი არსებობს. შესაბამისი (3.2) განტოლების სტრუქტურის შერჩევა მოქმედებს სინთეზირებული დინამიკური რეგულატორის სტრუქტურაზე, რომელიც შესაბამება შეშფოთებებს. ცხადია, რომ (3.2)-ში კავშირის განტოლებაში მიზანშეწონილია შევიტანოთ საწყისი ობიექტის ის $x_1, ..., x_n$, კოორდინატები, რომელთა წარმოებულებიც $\dot{x}_1(t), ..., \dot{x}_n(t)$ (3.1) განტოლების თანახმად, შეიცავს მარჯვენა ნაწილში შესაბამის $M_1(t), ..., M_n(t)$ აღშფოთებებს. სინერგეტიკული [35] მეთოდის მიხედვით $x_1, ..., x_n$, კოორდინატები შეიძლება ვაინტეგროთ, როგორც გარკვეული „შინაგანი“ მართვები, რომელთა მიერ განსაზღვრული (მაგ. ნულოვან) მნიშვნელობის მიღწევისას (3.2) კავშირის განტოლება გადადის შეშფოთებების (3.5) მოდელზე. ეს კი სწორედ ნიშნავს რეგულატორის მიერ მოქმედი შეშფოთებების „შთანთქმას“. რასაკვირველია ასეთი სახის „შინაგანი“ მართვის არჩევა, რომლის დროსაც შეშფოთებების შთანთქმა ხორციელდება რამოდენიმე მეთოდით, მათ შორის კერძოდ ოპტიმალური მართვის საფუძველზე.

(3.2) კავშირის განტოლების არჩევის შემდგომ ვღებულობთ დიფერენციალური განტოლებების გაფართოებულ სახეს:

$$
\begin{aligned}
&\dot{w}_j = g_i(w_1,...,w_\mu, x_1,...,x_n), && j=1,...,\mu;\\
&\dot{x}_i(t) = f_i(x_1,...,x_n) + w_i, && i=\mu+1,...,m-1\\
&\dot{x}_{i+1}(t) = f_{i+1}(x_1,...,x_n) + w_{i+1} + u_{i+1}; && \qquad (3.6)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots && \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dot{x}_n(t) = f_n(x_1,...,x_n) + w_n + u_n.
\end{aligned}
$$

(3.6) განტოლება საშუალებას გვაძლევს ჩამოვაყალიბოთ $u_{i+1},...,u_n$ მართვის კანონების სინთეზის ამოცანა, რომელიც $M_1(t),...,M_n(t)$ ზემოქმედებებს ახშობს და უზრუნველყოფს ჩაკეტილი სისტემის მოცემულ დინამიკურ თვისებებს. საჭიროა მოვახდინოთ სინთეზი ისეთი $u(u_1,...,u_m)$ მართვის ვექტორისა, რომელიც უზრუნველყოფს გაფართოებული ობიექტის გადასვლას ნებისმიერი საწყისი მდგომარეობიდან თავდაპირველად მრავალსახეობების $\psi_s(x_1,...,x_n,w_1,...,w_\mu)=0$ გადაკვეთაზე, ხოლო შემდგომ მათ გასწვრივ მოძრაობაზე მოცემულ მდგომარეობაში. კერძოდ, მდგომარეობათა გაფართოებული სივრცის, კოორდინატთა სათავეში. ამასთან, ჩაკეტილი სისტემის ტრაექტორიებზე შეიძლება მიღწეულ იქნეს რომელიღაც საოპტიმიზირებული ფუნქციონალის მინიმუმი, ან დაკმაყოფილებულ იქნეს ხარისხის პირველადი მაჩვენებლები. აგრეთვე, გარანტირებულ იქნეს მოძრაობის ასიმპტოტური მდგრადობა გარკვეულ არეში ან მთლიანად.

ჩავთვალოთ, სინთეზირებული სისტემების გამომსახველი წერტილების მოძრაობა უნდა აკმაყოფილებდეს ფუნქციონალურ განტოლებათა სისტემას:

$$T_s\dot{\psi}_s(t) + \varphi_s(\psi_s) = 0, \ s=1,2,...,m, \ T_s > 0, \qquad (3.7)$$

სადაც $\psi_s(x_1,...,x_n,w_1,...,w_\mu)$-რომელიღაც აგრეგირებული მაკროცვლადებია. ამასთან $\varphi_s(\psi_s)$ ფუნქციები უნდა აკმაყოფილებდნენ შემდეგ პირობას: $\varphi(0)=0$ და $\varphi_s(\psi_s)\psi_s > 0$ ნებისმიერი $\psi_s \neq 0$-თვის ე.ი. ისინი ხდებიან 0-ის ტოლი მხოლოდ $\psi_s = 0$ მრავალსახეობებზე, რომელთა მიმართაც სისტემა (3.7) ასიმპტოტურად მდგრადია მთლიანობაში. ამას გარდა, ფუნქცია $\varphi_s(\psi_s)$ შეირჩევა იმგვარად, რომ გარდა (3.7)-ის ასიმპტოტურობისა, უზრუნველყოფილ იქნეს გამომსახველი მიმზიდავი წერტილის ხარისხის სასურველი მაჩვენებლები მიმზიდველ მრავალსახოვნებაზე

$$\psi_s(x_1,...,x_n,w_1,...,w_\mu)=0 \ \ s=1,2,...,m,$$

აგრეთვე უზრუნველყოს (n-m) დეკომპოზირებული მართვის სისტემის დინამიკური თვისებები. ბწ-ს მოძრაობისას მრავალსახეობების $\psi_s = 0$ გადაკვეთის გასწვრივ მოცემული საბოლოო მდგომარეობაში.

ფუნქცია $\varphi_s(\psi_s)$ არჩევისას (3.7) განტოლებებში განსაკუთრებული შეზღუდვები არ არის. მთავარია, რომ სწორედ მაკროცვლადები ψ_s ასახავდნენ მრავალდონიანი სინთეზირებადი სისტემების სინერგეტიკული (კოოპერატიულ, კოგერენტულ) თვისებას. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\varphi_s(\psi_s)$ არჩევისას შეიძლება მეტად სასარგებლოდ გამოყენებულ იქნეს ფიზიკური, ეკოლოგიური და სხვა სისტემების ცნობილი კანონზომიერებები, რომლებშიც ყველაზე უფრო ცხადად გამოვლინდება მოქმედებების ერთიანობა და ურთიერთკავშირი, ამ სისტემაში ენერგიის კარგვის მინიმიზაცია და ა.შ. კერძოდ ასეთ კანონზომიერებებს განეკუთვნებიან განტოლებები ხარისხობრივი არაწრფივობებით

$$T_s \dot{\psi}_s(t) + \sum_{k=1}^{r} a_{ks} \psi_s^k = 0,\ s = 1, 2, ..., m. \qquad (3.8)$$

სინერგეტიკული თვალთახედვიდან (3.7) ფუნქციონალური განტოლებები, უშუალოდ დაკავშირებულნი არიან (3.8) ევოლუციურ განტოლებებთან და ატრაქტორებთან $(\psi_s = 0)$, რომლებიც აღწერენ სისტემის მოძრაობის საფინიშო ეტაპებს. ამ ეტაპებზე ძირეულად იზრდება დეტერმინაციის თვისება. ცნობილია [38-42], რომ ევოლუციური განტოლებების უმეტესობა წარმოადგენს ხარისხობრივ ან ექსპონენციალურ ისეთი სახის დამოკიდებულებებს, რომელიც გააჩნია მეცნიერებაში ფართოდ ცნობილ ბერნულის განტოლებას.

$$T_s \dot{\psi}_s(t) + a_{1s}\psi_s + a_{1s}\psi_s^r = 0,\ \ s = 1, 2, ..., m,\ \ r = 2, 3, ..., \qquad (3.9)$$

რომლის ამონახსნი

$$\psi_s^{r-1}(t) = \frac{a_{1s}}{\left(a_{1s}\psi_{s0}^{1-r} + a_{rs}\right)\exp(r-1)\dfrac{a_{1s}}{T_s}t - a_{rs}},$$

როცა $t \to 0$, $a_{1s} > 0,\ \ a_{rs} > 0,$ ექსპონენციალურად მიისწრაფის $\psi_s = 0$-კენ. თუ დავუშვებთ $r = 2$, $a_{1s} < 0$, $a_{rs} > 0,$ მაშინ ბერნულის (10.9) კვადრატული განტოლება გარდაიქმნება ლოგისტიკურ განტოლებად, რომლის ამონახსნიც ექსპონენციალურად მიისწრაფვის $\psi_s = \dfrac{|a_{1s}|}{a_{rs}}$ მნიშვნელობი-

სკენ. ასეთი განტოლება აღწერს, კერძოდ, ეკოლოგიურ წონასწორობას, ხოლო მისი მაკროცვლადები განზოგადოებულად ასახავენ რთულ კოოპერატიულ პროცესებს.

(3.7)-სისტემის განსხვავებულ თავისებურებას წარმოადგენს პირველი ტრივიალური ინტეგრალების სრული $\psi_s = B_s$, $s = 1, 2, ..., m$, ან ნაწილობითი $\psi_s = 0$ ერთობლიობის არსებობა. ეს ნიშნავს რომ ამ სისტემისათვის შეიძლება განისაზღვროს ალბათობის განაწილების ზოგადი კანონი:

$$P = \exp\left[\psi_s(\psi_1, ..., \psi_m) + \int_0^t \sum_{s-1}^m \frac{1}{T_s} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \psi_s} dt\right],$$

სადაც $\psi(\psi_1, ..., \psi_m)-$ პირველი ინტეგრალების ნებისმიერი ფუნქციაა, მაშინ ალბათობის სიმკვრივე მრავალსახეობების გადაკვეთის მიდამოში $\psi_s = 0$ იქნება ტოლი

$$P(0, ..., 0) = P_0 \exp\left(\int_0^t \sum_{s=1}^m \frac{1}{T_s} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \psi_s} dt\right).$$

აქ მიღებული გამოსახულებები $\varphi_s(\psi_s)$ ფუნქციის არჩევის შემდგომ გვაძლევს საშუალებას, გამოვთვალოთ სისტემა (3.7)-ის შესაბამისი ალბათობათა სიმკვრივე. ცხადია, რომ $\varphi_s(\psi_s)$ მიზანშეწონილია ავირჩიოთ ისე, რომ სიმკვრივე P იყოს მაქსიმალურად შესაძლებელი შესაბამისი შეზღუდვების გათვალისწინებისას, რომლებიც დადებული არიან ფუნქციების $\varphi_s(\psi_s)$ სახეობაზე, ზოგიერთი დამატებითი კრიტერიუმებისა და წინაპირობებისაგან გამომდინარე.

ეს დებულება მთლიანად ეთანხმება ალბათობის მაქსიმალური სიმკვრივის პრინციპს, ე.ი. ფაზური სივრცის შეკუმშვის მაქსიმალურად შესაძლო სიჩქარეს. ასე მაგ. სისტემა (3.7) ბერნულის *(r=3)* კუბური განტოლების (3.9) სახით გააჩნია ალბათობათა სიმკვრივე

$$P_3 = \exp\left[\psi(\psi_1, ..., \psi_m) + \int_0^t \sum_{s=1}^m \frac{1}{T_s}\left(a_{1s} + 3a_{3s}\psi_s^2\right) dt\right],$$

რომელიც მეტია კვადრატული *(r=2)* ბერნულის განტოლების სიმკვრივესთან

$$P_2 = \exp\left[\psi(\psi_1,...,\psi_m) + \int_0^t \sum_{s=1}^m \frac{1}{T_s}\left(a_{1s} + 2a_{2s}\psi_s\right)dt\right],$$

შედარებით. ეს ნიშნავს, რომ კუბური განტოლებებისათვის ფაზური მოცულობის შეკუმშვის სიჩქარე იქნება მეტი ფაზური სივრცის განსაკუთრებით გარე არესათვის. ანალოგიურად შეიძლება შევაფასოდ სხვა სახის ფუნქციონალური განტოლებების (3.7) ალბათობათა სიმკვრივე სინერგეტიკული სისტემების სინთეზის ამოცანის გადაწყვეტისას. რასაკვირველია, რომ ბერნულის განტოლების გარდა, ფუნქციონალური განტოლებების აგებისათვის შეიძლება გამოყენებულ იქნეს სხვა ბუნებრივი სისტემების ცნობილი ევოლუციური განტოლებები.

განხილული სინერგეტიკული მიდგომა, შეიძლება გადმოცემული იქნეს ოპტიმალური მართვის თეორიის ტერმინებით, ამისათვის გამოიყენება სტანდარტული ვარიაციული გამოთვლის მეთიდები. ვუჩვენოთ, რომ ძირითადი ფუნქციონალური განტოლებები (3.7) წარმოადგენენ შემდგომი განზოგადებული საოპტიმიზირებული ფუნქციონალის შესაბამისი ეილერ–ლაგრანჟის განტოლებებს.

$$J_\Sigma = \exp\int_0^\infty \left[\sum_{s=1}^m \varphi_s^2\left(\psi_s\right) + \sum_{s=1}^m T_s^2 \psi_s^2(t)\right]dt, \qquad (3.10)$$

სადაც m – მართვის ვექტორის განზომილებაა. ცხადია, რომ განტოლებები (3.7)–(3.9) სახით გამოყოფენ ექსტრემალების ქვესიმრამლეს, რომლებიც ანიჭებენ უპირობო მინიმუმს (3.10) ფუნქციონალს. $\varphi_s(\psi_s)$ (3.10) ფუნქცია ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაში უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობებს:

1. ერთნიშნიანობა, უწყვეტობა და დიფერენცირება ψ_s –ის ყველა მნიშვნელობისათვის
2. $\varphi_s(0) = 0$
3. $\varphi_s(\psi)\psi_s > 0$ ნებისმიერი $\psi_s \neq 0$ –სათვის

სხვანაირად, რომ ვთქვათ, ფუნქციები $\varphi_s(\psi_s)$ ამ პირობების შესრულებისას იქნებიან იმავე ნიშნის, როგორც აქვს $\psi_s = 0$. განვსაზღვროთ ფუნქციის სრული წარმოებული $\frac{\partial \psi_s}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_s(x_1,...,x_n)}{\partial x_k}\dot{x}_k(t)$.

$\dot{x}_i(t)$–ის ჩავსვათ ნაცვლად არაწრფივი ობიექტის საწყისი დიფე-რენციალური განტოლებების მარჯვენა ნაწილები, კერძოდ სკალარული მართვით (m=1)

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1,...,x_n); \qquad i = 1,2,...,n-1;$$
$$\dot{x}_n(t) = f_n(x_1,...,x_n) + u,$$

მაშინ მივიღებთ: $\dfrac{\partial\psi}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial\psi(x_1,...,x_n)}{\partial x_k} f_k(x_1,...,x_n) + \dfrac{\partial\psi}{dx_n}u$.

ვარიაციული აღრიცხვაში (3.10) ცნობილია ინვარიანტობის თვისე-ბის სახელწოდებით. ბოლო გამოსახულების გათვალისწინებით შეიძ-ლება ფუნქციონალი (3.10) შეიძლება ჩაწერილ იქნეს შემდეგი სახით:

$$J_\Sigma = \int_0^\infty \left[\varphi^2(\psi) + T^2 \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial\psi}{\partial x_k} f_k + \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \right)^2 \right] dt,$$

ცხადია, რომ თანმხლები ოპტიმიზირებული ფუნქციონალების ეს ფორმა (3.10) ასახავს, როგორც საწყისი ობიექტის, ასევე მისი სისტემის მართვის ზოგად თვისებებს. ეს ნიშავს რომ განსახილველ მეთოდში საოპტიმიზირებელი ფუნქციონალი წინასწარ არ არის განსაზღვრული, როგორც ეს ხდება ОРАК-ის სტანდარტულ მეთოდში, არამედ კონსტრუ-ირდება შესაბამისი ფუნქციების $\varphi_s(\psi_s)$ და $\psi_s(x_1,...,x_n)$ არჩევის მიხედ-ვით ობიექტის განტოლებების გათვალისწინებით. ასეთი მიდგომა სა-შუალებას გვაძლევს გავითვალისწინოთ საწყისი ობიექტის თვისებები, რადგან ხარისხის კრიტერიუმის არჩევის ეტაპზე გარეგანი პოსტული-რებადი კრიტერიუმისა „თავსმოხვევამ" და ობიექტის თვისებების იგნო-რირებამ შეიძლება მიგვიყვანოს არაწრფივი ობიექტებში საწინააღმდე-გო ან სულაც მიუღებელ გარდამავალი პროცესების მიმდინარეობამდე. ამ აზრით ოპტიმიზირებული ფუნქციონალის ფორმირება ობიექტის განტოლებების გათვალისწინებით ეთანხმება მექანიკაში ცნობილი გაუ-სის პინციპს. რასაკვირველია, რომ ამასთან ობიექტი უნდა გადატანილ იქნეს საწყისი მდგომარეობიდან მოცემულ მდგომარეობაში, რადგან ხდება მოძრაობის მართვის სინთეზი. განსხვავება მდგომარეობს (3.10) ფუნქციონალის მაკროცვლადების ψ_s მიმართ ფორმირებაში, რომლებიც წარმოადგენენ მდგომარეობის კოორდინატების ერთგვარ არჩევით აგრე-გატებს. ეს ამოცანა ცნობილია საოპტიზირებელი (3.10) ფუნქციონალე-

ბის, აგრეგირებული მაკროელემენტების გამოყენებით არაკ-ის ამოცანად. აგრეგირებული მაკროცვლადების ψ_s და $\varphi_s(\psi_s)$ ფუნქცია შეიძლება არჩეულ იქნას სხვადასხვა მოსაზრებით: რომლებიც დაკავშირებულია სასურველ გარდამავალ და ობიექტის მოძრაობის დამყარებულ რეჟიმთან – ატრაქტორებთან სისტემის ფაზურ სივრცეში.

[35,49] ნაშრომებში დასაბუთებული იყო მართვის ამოცანებში ფაზურ სივრცეში ფუნქციონალების გამოყენების მიზანშეწონილობა, რომლებიც საშუალებას გვაძლევდენ უზრუნველვყოთ გარე არეში ასიმპტოტური მდგრადი მოძრაობა და საკმაოდ ეფექტურად ჩახშობილ იქნეს წარმოშობილი გადახრები დროის მცირე მონაკვეთში. ასეთი სახის ფუნქციონალებს განეკუთნებიან საოპტიმიზირებელი ფუნქციონალები (3.10), რომელთა სტრუქტურის შეცვლა შეიძლება განხორციელდეს პირველ რიგში, როგორც $\varphi_s(\psi_s)$ ფუნქციის სტრუქტურის შეცვლით-შესაბამისი რაოდენობა მაღალი ხარისხის ფუნქციის ψ_s ე.ი $\psi_s^3, \psi_s^5, \ldots, \psi_s^r$ წევრების რაოდენობის შენარჩუნება (3.8), ასევე, მეორე რიგში, მაკროცვლადების $\psi_s(x_1, \ldots, x_n)$, ფორმის შეცვლით, რომლებიც დაკავშირებულები არიან სინთეზირებადი სისტემის სასურველ ატრაქტორებთან. პირველ შემთხვევაში საოპტიმიზირებელი ფუნქციონალს (3.10)-ს გააჩნია, მცირედი გადახრების რეჟიმებისათვის არსებითად განსხვავებული სახეები, როდესაც მაღალი ხარისხიანი წევრები ახდენენ მცირე ზემოქმედებას $(\psi^3 = \ldots = \psi^r \cong 0)$, ხოლო დიდი გადახრების რეჟიმებისათვის იგივე წევრები ასრულებენ მნიშვნელოვან როლს გარდამავალ პროცესში. (3.10) ფუნქციონალში მაღალი ხარისხის წევრების არსებობა ნიშნავს იმას, რომ მართვის კანონი, უფრო აქტიურად რეაგირებს უფრო დიდ გადახრებზე და მათ ინტენსიურად ჩაახშობს მცირე დროში. ამავდროულად ფუნქციონალში გაგვაჩნია კვადრატული წევრები ψ_3^2, რომლებიც მოგვცემს საშუალებას საკმაოდ ეფექტურად გადაამუშაოს სისტემამ საწყისი მდგომარეობიდან მცირედი გადახრებით.

სინერგეტიკის ტერმინებში [38,39] მაკროცვლადები ψ_s-ეს ხარისხის განზოდადოებული პარამეტრებია, რომლებიც ასახავენ სინთეზირებადი სისტემების კოლექტიურ თვისებებს, ისინი წარმოადგენენ „ინფორ-

მატორებს”-სინერგეტიკული ინფორმაციის მატარებლებს სისტემაში მიმდინარე პროცესების შესახებ. სწორედ ეს ხარისხის პარამეტრები განსაზღვრავენ თვითორგანიზაციის მიმართული პროცესების მიმდინარეობას სინთეზირებად სისტემაში. მაკროცვლადების ψ_s – განმარტება როგორც ხარისხის განზოგადოებული პარამეტრებისა, ახასიათებენ მრავალდონიან სისტემების საერთო მდგომარეიბას, საშუალებას გვაძლევს განვახორციელოთ (3.10) სახის ფუნქციონალების შემდეგი სინერგეტიკული ინტერპრეტაცია. ჰაკენის [40,41]-ის თანახმად თვითორგანიზებადი სისტემების მაკროსკოპიული მოქმედების ზომად შეიძლება გამოყენებული იქნეს ხარისხის პარამეტრის კვადრატი ამ საზომს პირობითად შეიძლება დავარქვათ სისტემის მიერ შესრულებული სამუშაო. აქედან გამომდინარეობს თანმხლებ ფუნქციონალში (3.9) კვადრატული მდგენელების $\dot{\varphi}_s(\psi_s)$ შემოყვანის მიზანშეწონილობა, რომლებიც ასახავენ სინთეზირებადი სისტემების მაკროსკოპული ზემოქმედების სიდიდეს (საზომს). სისტემების ეფექტურობის საზომად სინერგეტიკაში მითებულია მაკროსკოპიული ზემოქმედების საზომის ცვლილების სიჩქარე, რაც ჩვენს შემთხვევაში აისახება თანმხლებ ფუნქციონალში მდგენელების $\dot{\varphi}_s(\psi_s)$ შემოტანით. უნდა ავღნიშნოთ, რომ ОრАკ-ის თეორიაში ხარისხის კვადრატულ კრიტერიუმებში წონითი კოეფიციენტების შერჩევის ცნობილი რთული პრობლემა ღებულობს (3.10) ფუნქციონალების მიმართ იოლ გადაწყვეტას. აქ წონითი კოეფიციენტები T_s განსაზღვრავენ სისტემის ბწ მოძრაობის დროს მრავალსახეობების გადაკვეთამდე.

საოპტიმიზირებელი ფუნქციონალებმა (3.10), რომლებიც გამოიყენება АრАკ-ის მეთოდში, შეიძლება მოგვცეს შინაარსობრივი ინტერპრეტაცია ვარიაციული აღრიცხვის უკუამოცანებშიც. სინამდვილეში, ვარიაციული აღრიცხვიდან ცნობილია, ლანგრაჟიანი L_ℓ წარმოადგენს ბუნებრივი მოძრაობის კრიტერიუმს, რომელსაც ასრულებს შესაბამისი ობიექტი მისი საკუთარი, არაკორექტირებული $(U=0)$ დინამიკური თვისებებით. ცნობილია, რომ ბუნებრივი მოძრაობისას კრიტერიუმის როლში გამოდის ინტეგრალი

$$J=\int_{t_n}^{t_k} L_e(x_1,...,x_n,t)dt,$$

რომელსაც მექანიკაში უწოდებენ მოქმედებას. ეს მოქმედება მრავალ შესაძლო მოძრაობიდან გამოყოფს ობიექტის იმ რეალურ მოძრაობას, რომელზედაც J კრიტერიუმს გააჩნია სტაციონალური მნიშვნელობა (ჩვეულებრივად მინიმალური). ნათელია, რომ აუცილებლობა შესაბამისი მართვის $u(x_1,...,x_n) = L_u$ შემოტანისა წარმოიქმნება იმ შემთხვევებში, როდესაც ობიექტის ბუნებრივი მოძრაობის ტრაექტორია არ გადის სასურველ (მიზნობრივ) მდგომარეობაზე. მაშინ ობიექტის მიზნობრივი მდგომარეობიდან წარმოშობილი გადახრები შეიძლება ჩამოვაცილოთ შემდეგი სახის ახალი ლაგრანჟიანის შემოყვანით.

$$L_\Sigma = L_\ell + L_u$$

რომელიც ასახავს უკვე მართვადი ობიექტის თვისებებს. აქედან გამომდინარეობს რომ არაკ-ის მეთოდით მართვის კანონის $u(x_1,...,x_n)$ სინთეზი შეიძლება ინტერპრეტირებულ იქნეს როგორც ჩვეულებრივი ლაგრანჟიანის დამატებითი ცვლილება. ე.ი.

$$u(x_1,...,x_n) \equiv L_u .$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, წარმოიშობა ვარიაციული აღრიცხვის ერთგვარი უკუამოცანა, რომელშიც საჭიროა მოინახოს ახალი კრიტერიუმი-ფუნქციონალი, რომელიც უზრუნველყოფს სინთეზირებადი სისტემის დასახული მიზნის მიღწევას. ჩვეულებრივ ეს ოპტიმალური მართვის თეორიის ძნელად გადასაწყვეტი ამოცანაა, თუმცა არაკ-ის მეთოდში ის ღებულობს თავის ეფექტურ ამონახსნს თანხმლები ფუნქციონალების სახით. აქ მთავარია ხაზი გავუსვათ იმ ფაქტს, რომ ასეთი ინტერპრეტაციისას საოპტიმიზაციო ფუნქციონალი იძენს ახალ მეთოდოლოგიურ შინაარს. კერძოდ: ის უკავშირდება პირველ რიგში ობიექტის მართვის საბოლოო მიზანს-მის გადაყვანას ფაზური სივრცის სასურველ საბოლოო მდგომარეობაში ნებისმიერი საწყისი მდგომარეობიდან (ზოგიერთ დასაშვებ არეში), და არა გარდამავალი პროცესების სასურველი თვისებების უზრუნველყოფასთან, როგორც ეს ჩვეულებრივ მოცემულია ოპტიმალური მართვის მათემატიკურ თეორიაში. არაკ-ის მეთოდში ასეთი ინტერპრეტაციას ეძლევა კარდინალური მნიშვნელობა, ხოლო მართვის ძირითადი პრობლემა ფორმულირდება როგორც

მართვის კანონების $u(u_1,...,u_m)$ სინთეზის პრობლემა, რომელიც უზრუნველყოფს სისტემის „ობიექტ-რეგულატორის" ფაზური მოცულობის შეკუმშვისას მისი გწ-ს აუცილებელ მოხვედრას ასიმპტოტურ მრავალსახეობებზე – ატრაქტრებზე ფაზურ სივრცეში.

მეორე ფორმულირება არაპ-ის მეთოდში ვარიაციული უკუამოცანისა საოპტიმიზირებელ (3.10) ფუნქციონალთან მდგომარეობს შემდეგში. დავუშვათ, რომ ოპტიმალური მართვის სისტემაში (3.6) შეიძლება მოიძებნოს ეილერ-ლაგრანჟის განტოლების (3.7) სისტემის ფუნქციონალურად დამოუკიდებელი $\psi_s = 0 \quad (S = 1,...,m)$ პირველი ინტეგრალები, რომლებიც განსაზღვრავენ (3.10) ფუნქციონალისათვის ექსტრემალების ველს და არიან თავსებადნი (10.6) საწყის განტოლებებთან. მაშინ მართვა $u_{i+1},...,U_n$, რომლებიც წარმოდგენილია (3.6) და (3.7)-ის სახით. განტოლებების ერთობლივი ამოხსნის შედეგი საოპტიმიზირებელ ფუნქციონალს (3.10) ანიჭებს უპირობო ექსტრემუმს. უკუ ამოცანის ორივე ტიპის ფორმულირება ვარიაციული აღრიცხვისათვის ამყარებს უშუალო კავშირს არაპ-ის მეთოდსა და ანალიტიკური მექანიკის ძირითად ცნებებს შორის.

იმისათვის, რომ დავაკონკრეტოთ (3.10) საოპტიმიზირებელი ფუნქციონალის სახე და გავითვალისწინებთ სინთეზირებადი სისტემებისადმი დამატებით მოთხოვნებს, საჭიროდ შევარჩიოთ როგორც ფუნქცია ψ_s, აგრეთვე, მაკროცვლადები $\varphi_s(\psi_s)$. განვიხილოთ მოკლედ ამ ფუნქციების აგების ზოგიერთი ხერხი არაპ-ის მეთოდში [35]. შეზღუდვების $|x_k| \le A_k$ გათვალისწინებით. მაკროცვლადების

$$\psi_s = x_k + A_k thF_k(x_1,...,x_n,...), \tag{3.11}$$

გამოყენებით შეიძლება უზრუნველყოთ მითითებული შეზღუდვები კოორდინატებზე და მართვაზე.

არაწრფივი სისტემებში წყვეტილი მართვის სინთეზისათვის შეიძლება გამოყენებულ იქნეს უბან-უბან გლუვი შემდეგი სახის მაკროცვლადები.

$$\psi_s = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k |x_k| + \beta_n |s| \quad \text{ან} \quad \psi_s = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k x_k^2 + \beta_n |s|, \tag{3.12}$$

სადაც $s = x_n + \varphi(x_1,...,x_{n-1})$. საოპტიმიზირებელი ფუნქციონალი (3.10)-ის საფუძველზე $\varphi_s(\psi_s)$ და $\psi_s(x_1,...,x_n)$ ფუნქციების შერჩევით შეიძლება ავაგოთ სხვადასხვა ნახვევები, რომლებიც აღწერენ კრიტერიუმებს. როგორც მცირე ასევე დიდი გადახრების შემთხვევაში სისტემების (3.12) ოპტიმიზირებულ რეჟიმებს (3.11) სახის $\varphi_s(\psi_s)=\psi_s$ – მაკროცვლადებისათვის საოპტიმიზირებელი ფუნქციონალს აქვს სახე:

$$J_{\sup} = \int_{t_{0\sup}}^{t_{k\sup}} \left[\left(\pm A_k + x_k\right)^2 + T_k^2 \dot{x}_k^2(t)\right] dt \qquad (3.13)$$

ვივარაუდოთ, რომ ობიექტის განტოლებებში $\varphi_n = 0$, მაშინ (3.13)-დან გვაქვს

$$J_{\sup} = \int_{t_{0\sup}}^{t_{k\sup}} \left[\left(\pm A_k + x_k\right)^2 + T_k^2 U_k^2(t)\right] dt . \qquad (3.14)$$

მიღებული (3.14) კრიტერიუმი ასახავს მართვაზე დახარჯული ენერგიის მინიმუმს კოორდინატზე $\left|x_k\right| \le A_r$ შეზღუდვის გათვალისწინებით. ასეთი ტიპის ამოცანებს ხშირად განვიხილავთ მართვის გამოყენებით ამოცანებში. ანალოგიურად $\varphi_s(\psi_s) = th\psi_s$ და ψ_s (3.11) დიდი გადახრების რეჟიმში $\psi_k = 0$ დან, როცა $th_{s\sup} \cong \pm 1$, საოპტიმიზირებელი ფუნქციონალი (3.10) ღებულობს სახეს

$$J_{\sup} = \int_{t_{0\sup}}^{t_{k\sup}} \left[1 + T_k^2 \psi_{\sup}^2(t)\right] dt \qquad (3.15)$$

თუ ობიექტის განტოლებებში $f_n = 0$, მაშინ (10.15)-ის საფუძველზე ვღებულობთ საოპტიმიზირებელ ფუნქციონალს.

$$J_{\sup} = \int_{t_{0\sup}}^{t_{k\sup}} \left(1 + T_k^2 U_k^2(t)\right) dt \qquad (3.16)$$

რომელიც თავის თავში მოიცავს სწრაფმოქმედების და ენერგოდანახარჯების კრიტერიუმებს, რომლებსაც გააჩნიათ მნიშვნელოვანი გამოყენებითი აზრი მართვის სხვადასხვა ამოცანებში.

დიდი გადახრების რეჟიმებში აგებული კრიტერიუმები (3.13)-(3.16) უზრუნველყოფენ მხოლოდ სუბოპტიმალურ პროცესებს. თუმცა აქ მნიშვნელოვანია ψ_s (3.11), (3.12) და $\varphi_s(\psi_s)$ შესაბამისი არჩევა, რითაც

შეგვიძლია დავაკმაყოფილოთ მოთხოვნები სისტემების დინამიკური თვისებებისადმი.

ფუნქციონალური განტოლებების აგებისათვის შეიძლება მიღებულ იქნეს აგრეთვე ოპტიმალური მართვის სხვა კრიტერიუმებიც. ასე მაგალითად სწრაფმოქმედების კრიტერიუმი [10.19]-ის გამოყენებით შემდეგი განტოლებები – ორარხიანი მართვისას (m=2)

$$\dot{\psi}_1(t)=\psi_2, \quad \dot{\psi}_{21}(t)=-U_{\psi\max} sign\mu(\psi_1,\psi_2), \quad \mu(\psi_1,\psi_2)=\psi_1+\frac{0,5}{U_{\psi\max}}\psi_2|\psi_2|;$$

სამარხიანი მართვის შემთხვევაში (m=3)

$$\dot{\psi}_1(t)=\psi_2, \quad \dot{\psi}_2(t)=\psi_{32}, \quad \dot{\psi}_3(t)=-U_{\psi\max} sign\mu(\psi_1,\psi_2,\psi_3),$$

სადაც $\mu(\psi_1,\psi_2,\psi_3)=\psi_1+\frac{1}{3}|\psi_3|(2\psi_2+\psi_3|\psi_3|)+(\psi_2+0,5\psi_3|\psi_3|)\sqrt{|\psi_2+0,5\psi_3|\psi_3||}$;

ამ შემთხვევაში სისტემის აღმწერი წერტილი მინიმალურ დროში ხვდება შესაბამისი $\mu=0$ მრავალსახეობების გადაკვეთის წერტილში. შემდგომ იმოძრავებს მის გასწვრივ სასურველ საფინიშო მრავალსახეობაზე მოხვედრამდე.

ანალოგიური განტოლებები შეიძლება ავაგოთ (3.7) ფორმის საფუძველზე. ისეთი არაწრფივი ფუნქციების $\varphi_s(\psi_s)$ გამოყენებით რომელიც არადიფერენცირებადია ნულოვან წერტილში. კერძოდ, შეიძლება ამოვირჩიოთ შემდეგი განტოლებები:

$$T_s\dot{\psi}_s(t)+\dot{\psi}_s^{\frac{1}{2p+1}}=0 \;\; p=1,2,\dots. \tag{3.17}$$

როცა $p\to\infty$ განტოლება (3.19) ჩაიწერება შემდეგი სახით.

$$T_s\dot{\psi}_s(t)+sign\psi_s=0. \tag{3.18}$$

ამ დროს ფუნქციონალი (3.1) გარდაიქმნა შემდეგ ფორმაში

$$J_\Sigma=\int_0^\infty \psi_s^r dt$$

როდესაც გარდაუვალია მოძრაობა მრავალსახეობის $\psi_s=0$ გასწვრივ.

(3.17), (3.18)-დან გამომდინარეობს, რომ დროის განსაზღვრულ მომენტში ა.წ. მათემატიკურად ზუსტად ხვდება $\psi_s=0$ მრავალსახეობების გადაკვეთაზე, შემდგომ შეიძლება წარმოიშვას მოძრაობის მცოცავი რე-

ქიმი, ანალოგიურად სხვა ხარისხის კრიტერიუმების გამოყენებისას, და შეიძლება აგებული იქნას შესაბამისი ფუნქციონალური განტოლებები.

საბოლოოდ, საოპტიმიზირებელი ფუნქციონალის (3.10) ფორმა ყველაზე უფრო მოსახერხებელია ისეთი არაწრფივი ობიექტების მართვის ამოცანებისათვის, რომელთა მათემატიკური მოდელებიც წარმოდგენილია პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებებით. წარმოდგენილი მეთოდი შეიძლება მისაღები აღმოჩნდეს სხვა ცნობილი მოდელებისთვისაც. კერძოდ, მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებების სისტემებისთვისაც. მაგალითად, მექანიკური სისტემების მათემატიკური მოდელები, რომლებიც ჩვეულებრივ ჩაიწერება ნიუტონის მეორე კანონის ან ლაგრანჟის ფორმულის მიხედვით. ამ შემთხვევაში მიზანშეწონილია მოვახდინოთ ფუნქციონალის (3.7) მოდიფიცირება არაკ-ის მეთოდის გამოყენებით, თუ ობიექტის განტოლებებს თუ წარმოვადგენთ შემდეგი სახით:

$$T_s^2\ddot{\psi}_s(t)+\varphi_s(\dot{\psi}_s)+f_s(\dot{\psi}_s)=0 \quad s=1,2,...,m \tag{3.19}$$

სადაც m - მართვის ვექტორული განზომილებაა.

ამ განტოლებებს შეიძლება მიეცეს ენერგომექანიკური ინტერპრეტაცია [47]. ჩავთვალოთ, რომ (3.19) განტოლებები აღწერენ იმ მატერიალური წერტილების ერთობლიობის მოძრაობას, რომლებზედაც მოქმედებენ არაწრფივი აღმდგენი ძალები $\varphi_s(\dot{\psi}_s)$. ამასთან ერთად T_s^2 პარამეტრი შეიძლება ჩავთვალოთ მატერიალური წერტილების მასის ანალოგად. მაშინ [47]-ის თანახმად სისტემის სრული ენერგია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$v_s(t)=0,5\dot{\psi}_s^2+\frac{1}{T_s^2}\int_0^{\psi_s} f(\psi_s)d\psi_s$$

ამ გამოსახულებაში მარჯვენა მხარის პირველი წევრი აღნიშნავს კინეტიკურ ენერგიას, მეორე – სისტემის პოტენციალურ ენერგიას. გარემოს წინაღობის არარსებობის შემთხვევაში $\varphi_s(\dot{\psi}_s)=0$ და, შესაბამისად ენერგიის შენახვის კანონის თანახმად, (3.19) სისტემას – ექნება პირველი ინტეგრალი $v_s=const$. თუმცა რეალურ პირობებში მექანიკური ენერგია სისტემის მოძრაობის პროცესში გარემოს წინაღობის გამო, როგორც ცნობილია, გადადის თბურ ენერგიაში. ეს ნიშნავს რომ ფუნქცია v_s საჭიროების შემთხვევაში კლებულობს (3.19) სისტემის მოძრა-

ობის ტრაექტორიის გასწვრივ. ამის საილუსტრაციოდ გავაწარმოვოთ v_s –გამოსაქხულება დროის მიხედვით:

$$\dot{v}_s(t) = \left[\ddot{\psi}_s(t) + f_s(\psi_s)\right]\dot{\psi}_s(t)$$

ე.ი. (3.19) განტოლების გათვალისწინებით გვაქვს

$$\dot{v}_s(t) = -\frac{1}{T_s^2}\varphi(\dot{\psi}_s)\dot{\psi}_s(t)\ .$$

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ $\varphi_s(\dot{\psi}_s)\dot{\psi}_s(t) > 0$ წარმოებული $\dot{u}_s(t) \le 0$ ე.ი. ამ შემთხვევაში სისტემების სრული ენერგია (3.10) მცირდება. ცხადია რომ v_s –ფუნქცია, რომელიც ასახავს სისტემის ენერგიას იყო განსაზღვრულად დადებითი, ამისათვის აუცილებელია შესრულდეს უტოლობა $f_s(\psi_s)\psi_s > 0$. თუ ვივარაუდებთ, რომ $\varphi_s(\dot{\psi}_s) = 0$, მაშინ $\dot{u}_s(t) = 0$ და შესაბამისად $u_s = const$ ე.ი. გარემოს წინაღობის არარსებობის შემთხვევაში სისტემას (3.19)-ს გააჩნია პირველი ინტეგრალი, რომელიც შეესაბამება ენერგიის შენახვის კანონს იზოლირებულ მექანიკურ სისტემაში.

ასე, რომ [47]-ის თანახმად, (3.19)-სისტემის ასიმპტოტური მდგრადობის პირობას აქვს შემდეგი სახე:

ა) $f(\psi_s)\psi_s > 0 \quad \psi_s \ne 0$; ბ) $\psi_s(\dot{\psi}_s)\dot{\psi}_s(t) > 0 \quad \psi_s(t) \ne 0$

გ) $\int_0^{\psi_s} f_s(\psi_s)d\psi_s \to \infty \qquad |\psi_s| \to \infty$

არაკ-ის მეთოდის შესაბამისად ამ პირობების შესრულება უზრუნველყოფს მართვის სისტემის გამომსახველი წერტილის (გწ) ინვარიანტული მრავალსახოვნებების $\psi_s(x_1,...,x_n) = 0$ და $\dot{\psi}_s(x_1,...,x_n,\dot{x}_1,...,\dot{x}_n) = 0$ გადაკვეთაზე გადაყვანას. ცხადია, რომ ფუნქციონალური განტოლებები (3.19) საოპტიმიზირებელ ფუნქციონალს ანიჭებენ უპირობო ექსტრემუმს:

$$J_\Sigma = \int_0^\infty \left[f_s^2(\psi_s) + \lambda_{1s}\varphi_s^2(\dot{\psi}_s) + \lambda_{2s}\ddot{\psi}_s^2(t_s) \right]dt \tag{3.20}$$

სადაც λ_{ks} -ერთგვარი წონითი კოეფიციენტებია, რომლებიც უშუალოდ დაკავშირებულნი არიან (3.19)-ის განტოლების კოეფიციენტებთან.

წრფივი შემთხვევისათვის (3.19)-განტოლება და საოპტიმიზირებელ ფუნქციონალი (3.20) ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$\ddot{\psi}_s(t) + a_{1s}\dot{\psi}_s(t) + a_{1s}\psi_s = 0$$

და $$J_{\Sigma}=\int_{0}^{x}\left[\psi_s^2+\lambda_{1s}\dot{\psi}_s^2(t)+\lambda_{2s}\ddot{\psi}_s^2(t)\right]dt$$

სადაც კოეფიციენტები a_{ks} და λ_{ks} დაკავშირებულია ერთმანეთთან შემდეგი დამოკიდებულებით:

$$\lambda_{1s}=a_{1s}^2-2a_{0s}\,; \qquad \lambda_{2s}=a_{2s}^2$$

აღვნიშნოთ, რომ ფუნქციის ასიმპტოტური თვისებების ძალით $\psi_s(t)\to 0$ და $\dot{\psi}_s(t)\to 0$ როცა t→0 კვადრატული საოპტიმიზირებელი ფუნქციონალი შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი ექვივალენტური ფორმით

$$J_{\Sigma}=\int_{0}^{x}\left[\ddot{\psi}_s(t)+\lambda_{1s}\dot{\psi}_s+\lambda_{2s}\psi_s\right]dt+c_s$$

სადაც C_s - ერთგვარი მუდმივებია, რომლებიც არ მოქმედებენ ԾՈՑ-ის ექსტრემუმზე.

საოპტიმიზირებელ ფუნქციონალის მინიმიზაციის (3.10) პირობა ანალოგიურად ტოლფასია ფუნქციონალის მინიმიზაციის

$$J_{\Sigma}=\int_{0}^{x}\left[T_s\ddot{\psi}_s(t)+\psi_s\right]^2dt+c_s$$

ეს ნიშნავს, რომ წრფივ შემთხვევაში საოპტიმაზირებელი ფუნქციონალები J_{Σ} და J_{Σ} (3.20) შეიძლება სისტემის დინამიკაში წარმოდგენილ იქნენ ცნობილი კვადრატული შეფასებების სახით.

ამრიგად, (3.19) ფუნქციონალური სახის განტოლებებს შეიძლება მივცემთ ფიზიკური განმარტება. (3.7) განტოლებაც წარმოადგენს კლასიკური მექანიკის ინვარიანტული დამოკიდებულებას. რასაკვირველია, რომ რთული, მაგალითად ელექტრომექანიკური სისტემებისათვის ზოგადი შემთხვევაში შეიძლება აღმოჩნდეს მიზანშეწონილი გამოვიყენოთ პირველი (3.7) და მეორე (3.19) რიგის ფუნქციონალური განტოლებების კომბინაციები და შესაბამისი ოპტიმიზირებადი ფუნქციონალები.

ზემოთ განხილული ფუნქციონალები (3.10) და (3.20) სინერგეტიკულ მიდგომაში, ზოგადად რომ ვთქვათ, არ თამაშობენ განმსაზღვრულ როლს. თუმცა აქ მიდგომაში, რომელიც დაფუძნებულია მიმზიდავი ინვარიანტული მრავალსახოვნებების შემოტანასთან, საშუალებას გვაძლევს გამოვავლინოთ ოპტიმალური მართვის ამოცანებში ახალი თავისებურებები.

3.2. არაწრფივი აგრეგირებული რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების განზოგადოებული მეთოდი

აგრეგირებული რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების განზოგადებული მეთოდი (არაკ) ეფუძნება მართვის თეორიაში სინერგეტიკული მიდგომის კონცეპტუალურ დებულებებს. ამ მიდგომის არსი მდგომარეობს შემდეგში.

ფუნქცების ψ_s და $\psi_s(\psi_s)$ –არჩევის შემდეგ ფუნქციონალური განტოლებების (3.7), (3.8), (3.9) საფუძველზე შესაძლებელია მართვის კანონების სინთეზი. განსაკუთრებით უნდა აღვნიშნოთ, რომ ეს კანონები, მართვის თეორიის კლასიკური მეთოდებისაგან განსხვავებით, პირველ რიგში განსაზღვრავენ, არა მარტო ერთეული ცვლადების, არამედ სისტემების თვითორგანიზაციის კოლექტიური პროცესების მართვის სტრატეგიას. სწორედ ამაში მდგომარეობს დინამიკური სისტემების მიზანმიმართული თვითორგანიზაცია. მართვის სინთეზის სინერგეტიკული მიდგომის არსი მდგომარეობს სასურველი გარე – და შიდა სისტემური ინვარიანტების შენარჩუნებაში $\psi_s=0$ ფაზური სივრცის სტრუქტურაში. კონკრეტულად გარე ინვარიანტების რიცხვი *(m)*, რომელიც პარალელურად შეჰყავთ სისტემის სტრუქტურაში, განისაზღვრება მართვის არხების რიცხვით: $\psi_1=0,... \psi_m=0$ $m\leq n$. ხოლო მიმდევრობით შეყვანილი შიდასისტემური ინვარიანტების რიცხვი შემოსაზღვრულია გაფართოებული სისტემის ხარისხის $\psi_{m-H}=0,... \psi_r=0$ $r\leq n-m$ მიხედვით. ამისგან დამოკიდებულებით, სისტემის წინაშე დასახული მიზნები მუდმივია თუ ცვალებადი, შეიძლება შეიცვალოს შემოსატანი გარე და შიდა ინვარიანტების „კოლექტივი“. სხვა სიტყვებით, ფიზიკური (ქიმიური, ბიოლოგიური) მართვის სისტემაში შეგვიძლია განვახორციელოთ დინამიკური ინვარიანტების შესაბამისი ამონაკრების ტიპების ამორჩევა და ამით რეალიზება გავუკეთოთ მისი მიმართული თვითორგანიზაციის უნარს.

გადავიდეთ აგრეგირებული დინამიკური რეგულატორების სინთეზის კონკრეტული პროცედურების განხილვაზე, რომლებიც ემყარებიან არაკ–ის მეთოდის საერთო იდეალოგიას.

ამ მეთოდის თანახმად სისტემის (3.6) გამომსახველი წერტილები გაფართოებული „გარე“ მართვების $u_{i+1},...u_n$ ზემოქმედებით ხვდება $\psi_1=0,...\psi_m=0$ მრავალსახეობების გადაკვეთის არეში, რომლის გასწვრივაც მოძრაობა აღიწერება დეკომპოზირებული სისტემის „შინაგანი“ დინამიკის განტოლებებით:

$$\begin{aligned}
&\dot{w}_{j\psi}(t) = g_j(w_{1\psi},...,w_{\mu\psi},v_{i+1},...,v_n,x_{1\psi},...,x_{m-1\psi}), j=1,...,\mu;\\
&\dot{x}_{i\psi}(t) = f_i(x_{1\psi},...,x_{m-1\psi},v_{i+1},...,v_n), i=\mu+1,...,m-1
\end{aligned} \tag{3.21}$$

სადაც $v_{i+1},... v_n$ – შინაგანი მართვებია

მართვის $v_{i+1},...,v_n$ სინთეზი წარმოადგენს (3.21) ქვეობიექტის მართვის დამოუკიდებელ შიდა ამოცანას. ამისათვის გამოიყენება ინვარიანტული მრავალსახეობების მიმდევრობი-პარალელური ერთობლიობა.

მართვის შენახვის პრინციპის თანახმად შინაგან მართვას v_k-ს გააჩნია უცვლელი განზომილება $dimv_k=m$, რომელიც ემთხვევა გარე მართვების განზომილებს. შინაგანი მართვები v_k მოქმედებს (3.21) ქვეობიექტს დეკომპოზირებას უკეთებს მას შემდგომ n-m განზომილების ქვეობიექტამდე. ნაჩვენები მიმდევრობითი დეკომპოზიციის პროცესი გრძელდება ბწ-ის მოხვედრამდე არჩეულ საფინიშო მრავალსახეობებამდე-ატრაქტორამდე, რომლის განზომილებაც განისაზღვრება დამოკიდებულებით

$$dimA=n\text{-}rm$$

სადაც n (3.6) გაფართოებული სისტემის განზომილებაა, m – მართვის ვექტორის განზომილებაა, r - მიმდევრობით შემოტანილი ატრაქტორების რიცხვია.

აღწერილი პროცედურის შედეგად შინაგანი მართვები აღმოჩნდებიან რეკურენტულად ერთმანეთთან დაკავშირებული ვიცი რა $v_{i+1},...,v_n$ მართვები, შეიძლება შემოვიტანოთ სასურველი მაკროცვლადები, მაგალითად წრფივი სახის

$$\psi_s = \gamma_{s1}(x_{i+1}-v_1)+...+\gamma_{sm}(x_n-v_n), s=1,...,m \tag{3.22}$$

(3.7) სახის ფუნქციონალური განტოლებების და ასევე სასურველი მაკროცვლადების ψ_s (3.22) და (3.6)-ს გაფართოებული სისტემის საფუძველზე არაკ მეთოდის შესაბამისად მოიძებნება „გარეშე“ მართვები.

$$u_{i+1} = -f_{i+1}(x_1,...,x_n) - w_{i+1} - \frac{D_1}{D};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (3.23)$$
$$u_n = -f_n(x_1,...,x_n) - w_n - \frac{D_n}{D},$$

სადაც

$$D = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1m} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mm} \end{vmatrix} \neq 0, D_1 = \begin{vmatrix} \Phi_1 & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1m} \\ \Phi_2 & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi_m & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mm} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{როცა}\, \Phi_s = 0$$

$$D_n = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots \gamma_{1,m-1} & \Phi_1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots \gamma_{2,m-1} & \Phi_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots \gamma_{m,m-1} & \Phi_m \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{როცა}\, \Phi_s \neq 0 \qquad (3.24)$$

$$\Phi_s = \gamma_{s1}\dot{v}_1(t) + \gamma_{s2}\dot{v}_2(t) + ... + \gamma_{sn}\dot{v}_n(t) - \frac{1}{T_s}\varphi_s(\psi_s) \qquad (3.25)$$

აქ მიღებული შეფარდებები (3.23)-(3.25) გვაძლევს საშუალებას მოვნახოთ (3.23) ვექტორული მართვის კანონები, რომლებსაც გადაყავთ ბწ ინვარიანტული მრავალსახეობების $\psi_1 = 0,...,\psi_m = 0$ გადაკვეთის მიდამოში. ბწ-ის მოძრაობა ამ გადაკვეთების გასწვრივ განისაზღვრება შინაგანი დინამიკის განტოლებებით (3.21). (3.23) მართვის კანონენუ კავშირის განტოლებებთან (3.2) ქმნიან დინამიკურ აგრეგირებული რეგულატორის განტოლებების რომელიც უზრუნველყოფს ჩაკეტილი სისტემის (3.6)–(3.23) სელექტიურ ინვარიანტულობას $M_1(t),...,M_n(t)$ შეშფოთებების მიმართ, მისი მოძრაობის ასიმპტოტურ მდგრადობას და სასურველ დინამიკურ თვისებებს.

მართვის თეორიაში ახალი მეთოდის პრინციალურ განსხვავებას წარმოადგენს შემდეგი მოსაზრებით:

პირველ რიგში: მთავარი ყურადღების კონცენტრირება სინთეზირებადი სისტემების ყოფაქცევაზე მიმზიდავ ინვარიანტულ მრავალსახეობებზე-ატრაქტორებზე, რასაც მივყევართ მართვის სისტემის დინამიკურ დეკომპოზიციამდე და შესაბამისად, მისი ყოფაქცევის არსებით გამარტივებამდე, რადგანაც ამ დროს შესაძლებელია სასურველი ევოლუ-

ციური დაბალი განზომილებანი განტოლებების ფორმირება, რომლებიც აღწერენ მოძრაობის მდგრად ასიმპტოტიურ რეჟიმებს.

მეორე რიგში: სასურველი დაბალი რიგის განზომილებიანი ევოლუციური განტოლებების ფორმირების შესაძლებლობა, რომლებიც აღწერენ მოძრაობის მდგრად ასიმპტოტურ რეჟიმებს და წარმოადგენენ მრავალსახეობებზე სინთეზირებად სისტემებს, დინამიკური მდგომარეობის განტოლებებს.

მესამე რიგში: „შინაგანი" მართვების პარალელურ-მიმდევრობითი ერთობლიობის კასკადური სინთეზი, რომლებიც დინამიკურად დაკავშირებულნი არიან ერთმანეთთან და უზრუნველყოფენ ატრაქტორებზე დეკომპოზირებული სისტემების სასურველ ყოფაქცევას.

აგრეგირებული რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების (არაკ)-ის მეთოდში, რომელიც დაფუძნებულია აგრეგირების – დეკომპოზიციის პროცედურაზე, მაღალი განზომილების სინთეზირებადი არაწრფივი სისტემების ასიმპტოტური მდგრადობის უზრუნველსაყოფად, გამოიყენება ლიაპუნოვის პარალელურ-მიმდევრობითი ფუნქციათა ერთობლიობა. ამასთან ერთად თავდაპირველად შემოგვაქვს (3.7) განტოლებებისათვის ლიაპუნოვის უმარტივესი ფუნქციები $V_s = 0,5\psi_s^2$, $\psi_s(x_1,...,x_n)$ მაკროცვლადების მიმართ, და შემდეგ საბოლოო მრავალსახეობებზე $\psi_r = 0$ გამოიკვლევა მოძრაობის მდგრადობა *(n-rm)* კოორდინატთა ნაწილის მიმართ, რომლებიც აღწერენ დეკომპოზირებული სისტემის გამომსახველი წერტილის ყოფაქცევას მოძრაობის დამამთავრებელ ეტაპზე.

ზემოთ მოყვანილი ლიაპუნოვის ფუნქციათა ერთობლიობა წარმოადგენს თავისებურ ანალოგს ლიაპუნოვის ვექტორული ფუნქციისა, და გამოყენებულია არაწრფივი სისტემების სინერგეტიკულ თაორიაში აგრეგირებული რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების ლიაპუნოვის ვექტორულ ფუნქციათა მეთოდი გამოირჩევა საწყისი სისტემების ასიმპტოტურად ზუსტი დინამიკური დეკომპოზიციით. გარდა ამისა არაკ-ის მეთოდში განიხილება მართვის დინამიკური სისტემების მდგრადობის ამოცანები. სხვანაირად რომ ვთქვათ სინერგეტიკულ მიდგომაში ლიაპუნოვის ვექტორული ფუნქციის მეთოდი დაკავშირებულია აგრეგირებული რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების პროცედურასთან. სწორედ მართვის სტრუქტურული სინთეზის

პროცედურას. რომელსაც სწორედ მართვის გამომსახველი წერტილი გადაჰყავს ერთი მრავალსახეობიდან მეორე დაბალი განზომილების მრავალსახეობაში, საშუალებას იძლევა არაკ-ის მეთოდში განხორციელდეს ლიაპუნოვის ვექტორული ფუნქციის ანალიტიკური აგების მკაცრი პროცედურა სინთეზირებადი არაწრფივი სისტემების ასიმპტოტური მდგრადობის ანალიზისათვის.

არაკ-ის მეთოდის ეს თავისებურებები საშუალებას აღვჭურვოთ სინთეზირებად სისტემების გარდამავალი პროცესებისთვის, დამახასიათებელი რობასტიკული თვისებებით სტრუქტურული ვარიაციებით პარამეტრული შეშფოთებები. ცნობილია, რომ ფაზური სივრცის გარკვეულ არეში სისტემის ასიმპტოტური მდგრადობა წარმოადგენს უხეშ თვისებას, რომელიც იცვლება და ძლიერდება სისტემის ექსპონენციალური მდგრადობისას. მართვის სისტემები, რომელთა სინთეზიც ხორციელდება სინერგეტიკული პრინციპებით წარმოადგენენ როგორც ასიმპტოტურად მდგრადებს მთელში (ე.ი. ფაზური სივრცის მთელ არეში), აგრეთვე ექსპონენციალურად მდგრადებს შემოყვანილი ინვარიანტული მრავალსახეობების $\psi_s = 0$ მიმართ. ეს ნიშნავს რომ ასეთ სისტემებს გააჩნიათ გარდამავალი პროცესების რობასტულობის განმასხვავებელი თვისება.

3.3. აგრეგირებული რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების მეთოდი მიმდევრობით ჩართული ინვარიანტული მრავალსახოვნების მიხედვით

აგრეგირებული რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების მეთოდის თანახმად, დინამიკური სისტემების ფაზურ სივრცეში შეიძლება არსებობდნენ მრავალსახეობები, რომლებისკენაც მიიზიდებიან ფაზური ტრაექტორიები. ზოგად შემთხვევაში შეიძლება რამოდენიმე ისეთი მრავალსახეობის აგება რომლებიც მოიცავენ მიზიდულობის გარკვეულ ზედაპირებს. ამიტომაც წარმოიქმნება ისეთი მიზიდულობის ზედაპირების ერთიბლიობის კონსტრუირების იდეა, რომ გამომსახველი წერტილები დაიწყებენ რა მოძრაობას ნებისმიერი საწყისი მდგომარეობიდან, მიმდევრობით გადაადგილდებიან მიზიდულობის ერთი ზედაპი-

რიდან მეორეზე ვიდრე არ მოხვდებიან ზედაპირზე, რომელსაც მივყავართ ფაზური სივრცის კოორდინატთა სათავესთან. ამ შემთხვევაში გამომსახველი წერტილები უახლოვდებიან მრავალსახეობებს $\psi_1 = 0$, შემდეგ $\psi_2 = 0$ და ა.შ. საბოლოო მრავალსახეობასთან $\psi_m = 0$ მიახლოების შემდეგ ჩამოყალიბდება განსაზღვრული მდგომარეობა, კერძოდ, კოორდინატთა სათავემდე მდგრადი მოძრაობის პროცესი.

ზოგად შემთხვევაში r მიმზიდველი მრავალსახეობების გამოყენებისას ყოველი i-ური მრავალსახეობის განზომილება იქნება ერთით ნაკლები წინამდებარესთან შედარებით, ე.ი. გამომსახველი წერტილი თავიდან უახლოვდება $(n-1)$ განზომილების მრავალსახეობას, შემდგომ $(n-2)$ და ა.შ. $(n-r)$ გამზომილების მრავალსახეობამდე. მოძრაობის ბოლო ეტაპზე მოძრაობს კოორდინატთა სათავისაკენ აღიწერება $(n-r)$ რიგის დიფერენციალური განტოლებებით. მიმზიდველი მრავალსახეობების შერჩეული r რაოდენობის მიხედვით შეიძლება მივიღოთ არაწრფივი სისტემების განსხვავებული თვისებები.

აღვწეროთ არაწრფივი სისტემების სინთეზის პროცესები მათემატიკურად. დავუშვათ, რომ ობიექტის შეშფოთებული მოძრაობა აღიწერება შემდეგი დიფერენციალური განტოლებების სისტემით:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i(t) = f_i(x_1,\dots,x_n), \qquad i = 1,2,\dots,p; \\ &\dot{x}_j(t) = f_j(x_1,\dots,x_j) + a_{j+1}x_{j+1}, \; j = p+1, p+2,\dots,n-1; \\ &\dot{x}_s(t) = f_n(x_1,\dots,x_n) + u, \end{aligned} \tag{3.26}$$

სადაც x_i, x_j - ობიექტის მდგომარეობის კოორდინატებია; u - მმართველი ზემოქმედებაა, $f_i(x_1,\dots,x_n)$ უწყვეტი ფუნქციებია $f_i(0,\dots,0)$; $f_j(x_1,\dots,x_j)$- უწყვეტი ფუნქციებია, რომლებიც დიფერენცირდება თავისი ცვლადების მიხედვით:

$$f_i(0,\dots,0) = 0; \; = \frac{d}{dt}.$$

მიუხედავად განსახილველი (3.26) დიფერენციალური განტოლებების სპეციფიკურობისა, ამ სახის მათემატიკური მოდელით შეიძლება აღწერილი იქნეს სხვადასხვა მნიშვნელოვანი ობიექტების კლასები. ასე მაგალითად, (3.26) განტოლების კერძო შემთხვევას წარმოადგენს დიფერენციალური განტოლებების სისტემა $(p=0)$

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t) = f_1(x_1) + a_2 x_2;\\
&\dot{x}_2(t) = f_2(x_2) + a_3 x_3;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\dot{x}_{n-1}(t) = f_{n-1}(x_{n-1}) + a_n x_n;\\
&\dot{x}_n(t) = f_n(x_n) + u,
\end{aligned}$$

აღწერს ტექნიკის მრავალ დარგში ფართოდ გავრცელებული ობიექ-ტების კლასს, რომელიც შედგება მიმდევრობით შეერთებული არაწ-რფივი დინამიკური რგოლებისაგან. ასეთ ობიექტებს განეკუთვნებიან ქიმიური რეაქტორების ერთობლიობა, სხვადასხვა გამათბობელი ხელ-ასწყოები, სატრანსპორტო და გამამდიდრებელი მანქანები, ელექტრო, ჰიდრავლიკური და პნევმატური ამძრავები, მძლავრი მანქანები და სხვა.

გადავიდეთ აგრეგირებული რეგულატორების ანალიზური კონ-სტრუირების (3.26) მეთოდის აღწერაზე არაწრფივი ობიექტებისათვის მიმდევრობით ჩართული ინვარიანტული (მიმზიდავი) მრავალსახეობების ერთობლიობის გამოყენებით. განსახილველად შემოვიყვანოთ პირველი აგრეგირებული მაკროცვლადი

$$\psi_1 = \sum_{k=1}^{n} \beta_{1k} x_k + \varphi_1(x_1,\ldots,x_{n-1}). \tag{3.27}$$

ამოცანა მდგომარეობს $u_s\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ ისეთი მართვის სინთეზში, რომელ-საც გადაყავს (3.26) ობიექტი ნებისმიერი საწყისი მდგომარეობიდან (რო-მელიღაცა არის) (3.27) მრავალსახეობის მიდამოში. ამ ამოცანის ამოხსნისათვის გამოვიყენოთ ფუნქციონალური განტოლება

$$T_1\dot{\psi}_1(t) + \psi_1 = 0 \tag{3.28}$$

მაშინ არაპ-ის მეთოდის შესაბამისად (3.27) და (3.28)-ის თანახმად მართვას ექნება სახე

$$u_1 = -\frac{1}{\beta_{1n}} \sum_{i-1}^{p} \left(\beta_{2n} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \right) f_i - \frac{1}{\beta_{1n}} \sum_{j=p+1}^{n-1} \left(\beta_{ij} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} \right) (f_j + a_{j+1} x_{j+1}) - \frac{1}{\beta_{1n} T_1} \psi_1 - f_n. \tag{3.29}$$

u_1 მართვას გამომსახველი წერტილი გადაყავს $\psi_1 = 0$ მრავალ-სახეობებზე, რომლის გასწვრივაც მოძრაობა აღიწერება განტოლებებით

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_i(t) = f_i(x_1,\ldots,x_n), i = 1,2,\ldots,p;\\
&\dot{x}_j(t) = f_j(x_1,\ldots,x_j) + a_{j+1} x_{j+1}, j = p+1,\ldots,n-2;\\
&\dot{x}_{n-1}(t) = f_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) - \frac{a_n}{\beta_{1n}} \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{1k} x_k - \frac{a_n}{\beta} \varphi_1(x_1,\ldots,x_{n-1}).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

თუ აღვნიშნავთ $\beta_{1n}u_2 = a_n\varphi_1(x_1,...,x_{n-1})$, φ_1 - ვუწოდოთ შინაგანი მართვა, რომელსაც გადაყავს სისტემის მოძრაობის ტრაექტორიის აღმწერი წერტილი მეორე მრავალსახეობაზე

$$\psi_2 = \sum_{k=1}^{n-1}\beta_{2k}x_k + \varphi_2(x_1,...,x_{n-2}) = 0. \qquad (3.31)$$

$\psi_2 = 0$ განზომილება რომელიც ჩაწერილია (3.31) გამოსახულებით ერთი ერთეულით ნაკლებია $\psi_1 = 0$ მრავალსახეობის განზომილებაზე. (3.30) ქვეობიექტის მართვას $u_2(x_1,...,x_{n-1})$, რომლის სინთეზიც ხორციელდება აგრეგირებული ცვლადის ψ_2-ის ბაზაზე, აქვს სახე

$$\begin{aligned} u_2 = {} & \frac{1}{\beta_{2,n-1}}\sum_{i=1}^{p}\left(\beta_{2i} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}\right)f_i + \frac{1}{\beta_{2,n-1}}\sum_{j=p+1}^{n-2}\left(\beta_{2j} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varphi_j}\right)(f_j + a_{j+1}x_{j+1}) - \\ & -\frac{a_n}{\beta_{1n}}\sum_{k=1}^{n-1}\beta_{1k}x_k + \frac{1}{\beta_{2,n-1}T_2}\psi_2 + f_{n-1}. \end{aligned} \qquad (3.32)$$

u_2- (3.32) მართვა უზრუნველყოფს სისტემის მოძრაობის ტრაექტორიის აღმწერი წერტილის გადაყვანას (3.31)-ის მრავალსახეობის შემოგარენში. მის გასწვრივ მოძრაობა აღიწერება დიფერენციალური განტოლებების სისტემით

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i(t) = f_i(x_1,...,x_n), i = 1,2,...,p; \\ &\dot{x}_j(t) = f_j(x_1,...,x_j) + a_{j+1}x_{j+1}, \ j = p+1, p+2,...,n-3; \\ &.................. \\ &\dot{x}_{n-2}(t) = f_{n-2}(x_1,...,x_{n-2}) - \frac{a_{n-1}}{\beta_{2,n-1}}\sum_{k=1}^{n-2}\beta_{2k}x_k - \frac{a_{n-1}}{\beta_{2,n-1}}\varphi_2(x_1,...,x_{n-2}). \end{aligned}$$

შემოვიტანოთ აღვნიშვნა $\beta_{2,n-1}u_3 = a_{n-1}\varphi_2(x_1,...,x_{n-2})$, თავის მხრივ შეიძლება მოინახოს მართვა $u_3(x_1,...,x_{n-2})$ რომელიც უზრუნველყოფს სისტემის მოძრაობის ტრაექტორიის აღმწერი წერტილის გადაყვანას მრავალსახეობების მიდამოში.

$$\psi_3 = \sum_{k=1}^{n-2}\beta_{3k}x_k + \varphi_3(x_1,\dots,x_{n-3}) = 0 .$$

ანალოგიურად ზოგად შემთხვევაში შეიძლება განხორციელდეს გამომსახველი წერტილის გადატანა მრავალსახეობების $\psi_4 = 0, \psi_5 = 0$

მიდამოში და ა.შ. $\psi_1 = 0$ მრავალსახეობამდე. ამასთან შინაგანი მართვების სიმრავლე გამოისახება გამოსახულებით

$$u_i(x_1,...,x_{n-i+1}) = \frac{a_{n-i+1}}{\beta_{i-1,n-i+2}}\varphi_{i-1}(x_1,...,x_{n-i+1}), i = 1,2,...r;$$

$$u_i = \frac{1}{\beta_{i,n-i+1}}\sum_{i=1}^{p}\left(\beta_{li} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}\right)f_i + f_{n-i+1} + \frac{1}{\beta_{i,n-i+1}}\sum_{j=p+1}^{n-1}\left(\beta_{ij} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)(f_j + a_{j+1}x_{j+1}) - \tag{3.33}$$

$$-\frac{a_{n-i+2}}{\beta_{i-1,n-i+2}}\sum_{k=1}^{n-i+1}\beta_{i-1,k}x_k + \frac{1}{T_1\beta_{i,n-i+1}}\psi_i.$$

გამომსახველი წერტილის მოძრაობა

$$\psi_i = \sum_{k=1}^{n-i+1}\beta_{ik}x_k + \varphi_i(x_1,...,x_{n-1}) = 0 \tag{3.34}$$

შესაბამისი მრავალსახეობების გასწვრივ აღიწერება დიფერენციალური განტოლებათა სისტემით

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_i(t) = f_i(x_1,...,x_n), i = 1,2,...,p;\\
&\dot{x}_j(t) = f_j(x_1,...,x_j) + a_{j+1}x_{j+1}, j = p+1, p+2,...,n-i+1;\\
&\qquad\qquad ....\\
&\dot{x}_{n-i}(t) = f_{n-1}(x_1,...,x_{n-i}) - \frac{a_{n...i+1}}{\beta_{i,n...i+1}}\sum_{k=1}^{n-i}\beta_{ik}x_k - \frac{a_{n...i+1}}{\beta_{i,n...i+1}}\varphi_i(x_1,...,x_{n-i}),\\
&i = 1,2,...,r, r \le n-1
\end{aligned} \tag{3.35}$$

ჩამოყალიბებული პროცედურის მიხედვით (3.29) მართვას $u_1(x_1,...,x_n)$ სისტემის მოძრაობის ტრაექტორიის აღმწერი წერტილი ჯერ გადაყავს მრავალსახეობების შემოგარენში, შემდგომ (3.33) შინაგან მართვას გადაყავს ის $\psi_i = 0$ (3.34), $(l = 2,...,r)$ მრავალსახეობების მიდამოში რომლის გასწვრივაც მოძრაობა აღიწერება (3.35)-სახის დიფერენციალური განტოლებებით. (3.33) მართვის $u_i(x_1,...,x_{n-i+1})$ სინთეზი განხორციელდა ყოველ ეტაპზე ფუნქციონალური განტოლებების

$$T_i\dot{\psi}_1(t) + \psi_1 = 0, l = 1,2. \tag{10.36}$$

საფუძველზე. (3.33) მართვის u_i კანონები უზრუნველყოფენ სისტემის მოძრაობის ტრაექტორიის აღმწერი წერტილი გადასვლას i-ური მრავალსახეობებიდან $(i+1)$ მრავალსახეობაზე, რომელთა გასწვრივაც მოძრაობა აღიწერება (3.35) სახის განტოლებებით. (3.34) $\psi_1,...,\psi_r$ გამო-

სახულებიდან გამომდინარეობს რომ *i*-ური მრავალსახეობების $\psi_i = 0$ განზომილება ერთით ნაკლებია *(i-1)* მრავალსახეობის განზომილებას-თან შედარებით. ფაზური სივრცის განზომილების აღწერილი თანმიმ-დევრულად შემცირება, სისტემის მოძრაობის ტრაექტორიის აღმწერი წერტილის მოძრაობისას $(i-1)$ მრავალსახეობების გასწვრივ ანალოგიურია პროცესების ოპტიმალურებისა სწრაფმოქმედების მიხედვ-ით, რომელთა თავისებურებას წარმოადგენს გადართვის ჰიპერზედაპი-რების განზომილებების თანმიმდევრული შემცირება.

ამრიგად მიმზიდავი მრავალსახეობების $\psi_i = 0$ გარკვეული თან-მიმდევრობების შემოღება საშუალებას იძლევა დაჩქარდეს გარდამა-ვალი პროცესების მიმდინარეობის დრო. შემოთავაზებული მეთოდის თანახმად სინთეზის პროცედურა მდგომარეობს მართვის $u_1(x_1,...,x_n)$ (3.29) კანონის ფორმირებაში. ამასთან მთავარ ამოცანას წარმოადგენს $\varphi_1(x_1,...,x_n)$ ფუნქციის და მისი *(n-1)* წარმოებულების $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}$ განსაზღვრა. ფუნქცია $\varphi_1(x_1,...,x_{n-1})$ შეიძლება მოძებნილი იქნეს დამხმარე ფუნქცი-ების $\varphi_2(x_1,...,x_{n-2}),...,\varphi_r(x_1,...,x_{n-r})$ თანმიმდევრული განსაზღვრის შედე-გად, რომლებიც შედიან შესაბამის შინაგან (3.33) მართვაში $u_r(x_1,...,x_{n-i+1})$ კონკრეტულად ეს ამოცანა იხსნება უკუთანმიმდევრობით: ჯერ ირჩევა ფუნქცია $\varphi_r(x_1,...,x_{n-r})$ ასიმპტოტური მდგრადობის პირო-ბიდან და მოძრაობის დამამთავრებელ *r* ეტაპზე ხარისხის მოთხოვნი-ლებიდან გამომდინარე, შემდგომ იძებნება $\varphi_{r-1}(x_1,...,x_{n-r+1})$ ფუნქცია, ამის შემდგომ $\varphi_{r-2}(x_1,...,x_{n-r+2})$ ფუნქცია და ა.შ. და იმ ფუნქციამდე რომელიც უშუალოდ დაამთავრებს მართვის სისტემის კანონის $u_i(x_1,...,x_{n-i+1})$ (3.33) სინთეზის პროცედურას. ფუნქციის განსაზღვრის მოცემული თანმიმ-დევრობის რეალიზაციისათვის და u_1 შინაგანი მართვების გამოთ-ვლისათვის, რომლებიც მოძრაობენ შესაბამისი მრავალსახეობების $\psi_i = 0$ გასწვრივ, ზემოთ მოყვანილია საჭირო თანაფარდობები (3.29)-(3.36). მათ საფუძველზე შეგვიძლია მოვნახოთ შესაბამისი კონკრეტული გამოსახულებები $u_{i,}\psi_i$ და ψ_i და ჯამში მოვახდინოთ მართვის

მასტაბილიზებელი კანონების სინთეზი. სინთეზის დამამთავრებელ ეტაპზე აგრეგირებული ცვლადის საფუძველზე განისაზღვრება მართვა შემდეგი გამოსახულების საფუძველზე:

$$\psi_r = \sum_{k=1}^{n-i+1} \beta_{rk} x_k + \varphi_i(x_1, ..., x_{n-r}) = 0$$

$\varphi_r(x_1, ..., x_{n-r})$ ფუნქციის და β_i კოეფიციენტების შერჩევით შეიძლება დასრულდეს არაწრფივი სისტემის სინთეზის ამოცანის ამოხსნა, არაწრფივი სისტემების სინთეზის წარმოდგენილი მიდგომა დაფუძნებულია ფაზურ სივრცეში მიმზიდავი მრავალსახოვნების სიმრავლეთა შემოტანაზე, და მთლიანად შეესაბამება სისტემების თანმიმდევრულ ოპტიმიზაციას რადგანაც გამომსახველი წერტილები გარე არედან ხვდება პირველ მრავალსახოვნებაზე, შემდგომ მეორეზე და ა.შ. r-მდე. ამასთან ყოველი i-ური მრავალსახეობების გასწვრივ მოძრაობა არის ასიმპტოტურად მდგრადები მთელში. ამგვარად, ხორციელდება მოძრაობის თანმიმდევრული ოპტიმიზაცია გამომსახველი წერტილების ფაზურ სივრცეში საბოლოო მრავალსახეობებზე, მოხვედრის პროცესში. სისტემებისთვის, რომელთა სინთეზიც ხორციელდება აქ ჩამოყალიბებული მეთოდით, საშუალებას გვაძლევს გამოვავლინოთ რიგი საერთო კანონზომიერებანი მათ დინამიკურ თვისებებში და ხარისხის მაჩვენებლებში.

განვიხილოთ მაგალითად გარდამავალი პროცესების მილევის დროის შეფასების ამოცანა. განსახილველ სისტემებში რეგულირების დრო განისაზღვრება გამომსახველი წერტილების r მრავალსახეობებთან მიახლოების დროისა და მათი $\psi_r = 0$ საბოლოო მრავალსახეობების გასწვრივ ფაზური სივრცის კოორდინატთა სათავემდე მოძრაობის დროის ჯამით. ამასთან ყოველი მოძრაობა აკმაყოფილებს განტოლებებს

$$T_i \dot{\psi}_i(t) + \psi_r = 0, l = 1, 2, ... \qquad (3.37)$$

მაშინ (3.37)-ის თანახმად რეგულირების დროის ჯამური შეფასება მიიღებს სახეს:

$$t_{\Sigma p} \leq (4...5) \sum_{i=1}^{r=1} T_i + t_{\psi r}, \qquad (3.38)$$

სადაც $t_{\psi r}$- საფინიშო მრავალსახეობების $\psi_r = 0$ გასწვრივ კორდინატთა სათავისკენ მოძრაობის დროა.

ამგვარად, არაწრფივი აგრეგირებული რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების შემოთავაზებული მეთოდი, რომელიც დაფუძნებულია ფაზურ სივრცეში მიმზიდავი მრავალსახეობების თანმიმდევრობის შემოტანაზე, წარმოადგენს სინთეზირებული სისტემების შეშფოთებული მოძრაობის ასიმპტოტური მდგრადობის გარანტიას ე.ი. გადაწყვეტილია არაწრფივი სისტემების სტაბილიზაციის ამოცანა. უზრუნველყოფილია გარდამავალი პროცესების მილევადობის საჭირო დრო და ა.შ.

შემოთავაზებული სინთეზის მეთოდი თავისი არსით ეფუძნება საწყისი n რიგის ამოცანის განზომილებათა კლებადი r რაოდენობის ქვეამოცანის $(n-r)$ რიგის ქვეამოცანაზე მიმდევრობით დეკომპოზიციას. ამასთან, საწყის ფაზურ სივრცეში საერთო მოძრაობის დაყოფა პარციალურ მოძრაობებად დაფუძნებულია განსახილეველი ობიექტების არა რომელიმე მიახლოვებულ თვისებაზე, არამედ გამომსახველი წერტილის ერთი მრავალსახეობებიდან სხვანაკლები განზომილების მრავალსახეობაზე დროში მიმდევრობით გადაყვანაზე

3.4. ინვარიატული მრავალსახეობების პარალელურ – მიმდევრობითი ერთობლიობა და მრავალკავშირიანი სისტემების სინთეზი

ზემოთ აღწერილი მიმზიდველი მრავალსახეობების სიმრავლეთა პარალელურად და მიმდევრობით შემოტანის მეთოდების გაერთიანების ამოცანა გავაერთიანოთ ერთ განზოგადოებულ მეთოდად, რომელსაც შენარჩუნებული ექნება ორივე მეთოდის უპირატესობანი.

დავუშვათ, რომ ობიექტის მოძრაობა აღიწერება შემდეგი სახის დიფერენციალური განტოლებების სისტემით:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i(t) = f_i(x_1,...,x_n), && i = 1,2,...,p; \\ &\dot{x}_j(t) = f_j(x_1,...,x_j) + a_{j+1}x_{j+1}, && j = p+1,...,\mu; \\ &\dot{x}_s(t) = f_s(x_1,...,x_j) + b_s u_s, && s = \mu+1,...,n, \end{aligned} \tag{3.39}$$

სადაც $x_1,...,x_n$ ობიექტის მდგომარეობის კოორდინატებია; $f(\cdot)$ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციებია.

გადავიდეთ მართვის კანონების $u_s\left(x_1,...,x_n\right)$ სინთეზის პროცესის აღწერაზე. ჯერ თავდაპირველად ვახორციელებთ „გარე“ $u_s\left(x_1,...,x_n\right)$ მართვების სინთეზს ადრე განხილული მეთოდის მიხედვით. ამასთან ერთად საჭიროა ამოვირჩიოთ აგრეგირებილი ცვალადებიდან ერთ-ერთი, შემდეგი სახით:

$$\psi_s = \sum_{k=1}^{n} \beta_{sk} x_k + \varphi_s(x_1,...,x_\mu).$$

მაშინ მართვა $u_s\left(x_1,...,x_n\right)$ უზრუნველყოფს ფაზურ სივრცეში გამომსახველი წერტილის გადაყვანას ნებისმიერი საწყისი მდგომარეობიდან მრავალსახეობების გადაკვეთის მიდამოში

$$\psi_{1,2...\mu} = \sum_{k=1}^{n} \xi_{sk} x_k + b_{sk}\mu_k(x_1,...,x_\mu) = 0,$$

რომლის გასწვრივაც მოძრაობა აღიწერება განტოლებათა სისტემით

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1,...,x_n), \qquad i = 1,2,...,p;$$

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1,...,x_n) - \frac{a_{\mu+1}}{\xi_{\mu+1}} \sum_{k=1}^{\mu} \xi_{sk} x_k - \frac{b_{s\mu} a_{\mu+1}}{\xi_{\mu+1}} \varphi_s(x_1,...,x_\mu). \qquad (3.40)$$

(3.40) სისტემის განზომილება ტოლია μ. პირველი შიგა მართვა განისაძღვრება შემდეგი განტოლებიდან:

$$u_{\mu 1} = \frac{b_{s\mu} a_{\mu+1}}{\xi_{\mu+1}} \varphi_s(x_1,...,x_\mu),$$

მოვახდინოთ იმ შიგა მართვის კანონის სინთეზი, რომელსაც გამომსახველი წერტილი გადაჰყავს პირველი მიმზიდველი ქვემრავალსახეობების

$$\psi_{\mu 1} = \sum_{k=1}^{\mu-1} a_{sk} x_k + \varphi_s(x_1,...,x_{\mu-1}) = 0.$$

მიდამოში. $\psi_{\mu 1}$ - მრავალსახეობების განზომილება ერთით ნაკლებია გადაკვეთის $\psi_{12\mu}$ მრავალსახეობების განზომილებისა. შემდგომ ავღნიშნოთ მეორე შიგა მართვა

$$u_{\mu 2} = \frac{a_\mu}{a_{\mu-1}} \varphi_{\mu 1}(x_1,...,x_{\mu-1}),$$

შეგვიძლია თავის მხრივ მოვახდინოთ მართვის $u_{\mu 2}(x_1,...,x_{\mu-1})$ კანონის სინთეზი რომელიც უზრუნველყოფს გამომსახველი წერტილის გადაყვანას შემდგომ მრავალსახეობაზე

$$\psi_{\mu 2} = \sum_{k=1}^{\mu-2} a_{2k} x_k + \varphi_{\mu 2}(x_1,...,x_{\mu-2}) = 0.$$

აღნიშნული პროცესი გაგრძელდება ადრე აღწერილი პროცედურის ანალოგიურად. ამასთან ერთად ხორციელდება კლებადი განზომილებიანი მიმზიდველი მრავალსახეობების შემოტანა. მოძრაობა ბოლო ეტაპზე ხორციელდება შემდეგი მრავალსახეობების გასწვრივ.

$$\psi_{\mu p} = \sum_{k=1}^{\mu-p} a_{pk} x_k + \varphi_{\mu p}(x_1,...,x_{\mu-p}) = 0.$$

თუ ჩავსვამთ $\psi_{1...\mu=0,...,}\psi_{\mu p} = 0$ განტოლებებიდან $x_\mu, x_{\mu-1},...$ კოორდინატებს ობიექტის (3.39) პირველ p განტოლებაში, მივიღებთ დიფერენციალური განტოლებათა სისტემას

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1,...,x_n), \qquad i = 1,2,...,p;$$

რომელიც აღწერს მოძრაობას ბოლო მრავალსახეობების $\psi_{\mu-p+1} = 0$ გასწვრივ ფაზური სივრცის კოორდინატთა სათავსაკენ. შესაბამისი ფუნქციების $\varphi_s \varphi_{\mu 1},...,\varphi_{\mu p}$ და კოეფიციენტების $\beta_{sk}, a_{1k},...,a_{pk}$ არჩევით შეიძლება უზრუნველყოთ ასიმპტოტური მდგრადობა და სისტემების მოთხოვნილი დინამიკური თვისებები.

განზოგადოებული ანალიზური კონსტრუირების მოცემული მეთოდი დაფუძნებულია ორ ძირითად პროცედურაზე. პირველ რიგში მართვის $u_s(x_1,...,x_n)$ სინთეზი, რომელიც უზრუნველყოფს გამომსახველი წერტილის დადაადგილებას მრავასახეობების $\psi_{12\mu} = 0$ გადაკვეთაზე და მეორე რიგში შიგა მართვების

$$u_\mu(x_1,...,x_\mu),...,u_{\mu-p+1}(x_1,...,x_{\mu-p+1}),$$

სინთეზი რომელსაც გადაჰყავს გამომსახველი წერტილი მრავალსახეობების $\psi_{12\mu} = 0$ გადაკვეთიდან $\psi_{\mu 1} = 0$ პირველ მიმზიდველ ქვესიმრავლეზე, შემდეგ მეორეზე $\psi_{\mu 2} = 0$ ა.შ. თვით ბოლო ქვემრავალსახეობამდე $\psi_{\mu p} = 0$, მითითებული პროცედურების შესრულების შემდეგ ჯერ

ხორციელდება s მრავალსახეობის პარალელური შემოტანა, ხოლო შემდეგ ხდება სისტემის ფაზურ სივრცეში $\mu - p$ მიმზიდველი ქვემრავალსახეობების ერთობლიობის მიმდევრობითი შეყვანა.

(3.39) ობიექტებისათვის როცა $p = 0$, აღიწერება არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემით

$$\begin{aligned} \dot{x}_j(t) &= f_j(x_1,...,x_j) + a_{j+1}x_{j+1}, \qquad & j &= p+1,...,\mu; \\ \dot{x}_s(t) &= f_s(x_1,...,x_j) + b_s u_s, \qquad & s &= \mu+1,...,n, \end{aligned} \tag{3.41}$$

რომელსაც გააჩნია სამკუთხა ფუნქციონალერი მატრიცა μ კოორდინატამდე, პარალელურ-მიმდევრობითი მიმზიდველი მრავალსახეობების სიმრავლის შემოყვანით შეიძლება ანალიზურად მოვახდინოთ $u_s\left(x_1,...,x_n\right)$ სინთეზი რომელიც უზრუნველყოფს გარდამავალი პროცესებისა და ჩაკეტილი სისტემების თვისებების გარანტირებულ ასიმპტოტურ მდგრადობას. ამ შემთხვევაში თავიდან პარალელურად შემოიტანება s მრავალსახეობა $\psi_s = 0$ და არაწრფივი რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების ზემოთ მოცემული მეთოდის თანახმად u_s მართვები. ამასთან ერთად ერთ-ერთი მაკროცვლადი ψ_s საჭიროა ავირჩიოთ შემდეგი სახით:

$$\psi_s = \sum_{k=1}^{n} \beta_{sk} x_k + \varphi_s(x_1,...,x_\mu).$$

მაშინ $u_s\left(x_1,...,x_n\right)$ მართვები უზრუნველყოფენ გამომსახველი წერტილის გადაყვანას ნებისმიერი საწყისი მდგომარეობიდან მრავალსახეობების გადაკვეთაზე

$$\psi_{1-p} = \sum_{k=1}^{\mu} a_{sk} x_k + b_{p+1}\varphi_s(x_1,...,x_\mu) = 0,$$

რომლის გასწვრივაც მოძრაობა აღიწერება განტოლებების სისტემით:

$$\dot{x}_j(t) = f_j(x_1,...,x_j) - \frac{a_{\mu+1}}{a_{\mu+1}} \sum_{k=1}^{\mu} a_{sk} x_k - \frac{\beta_{p+1} a_{\mu+1}}{a_{\mu+1}} \varphi_s. \tag{3.42}$$

(3.42) სისტემის განზომილება ტოლია μ. (3.42) ქვეობიექტების შიგა მართვების სინთეზისათვის შეიძლება შემოვიტანოთ კლებად განზომილებიანი მიმზიდველი მრავალსახეობების მიმდევრობითი ერთობლიობა.

ამისათვის ჯერ შემოვიტანოთ პირველი მიმზიდველი მრავასახეობა μ ფაზურ ქვესიმრავლეში

$$\psi_{\mu 1} = \sum_{k=1}^{\mu} \gamma_{1k} x_k + \varphi_{\mu 1}(x_1, ..., x_{\mu-1}) = 0 . \qquad (3.43)$$

(3.39) - (3.35) გამოსახულებების შესაბამისად მოვახდინოთ შიგა მართვის $\varphi_s(x_1,...,x_n)$ სინთეზი, რომელსაც გადაყავს გამომსახველი წერტილი $\psi_{p1} = 0$ (3.43) მრავალსახეობის მიდამოში, რომლის გასწვრივაც მოძრაობა უკვე აღიწერება $\mu - 1$ განზომილების დიფერენციალური განტოლებებით, შემდეგ უნდა მოინახოს მომდევნო შიგა მართვა და ა.შ. ამასთან ერთად ხორციელდება კლებადი განზომილების მიმზიდველ ქვესიმრავლეთა მიმდევრობითი შემოტანა. არაწრფივი ქვეობიექტების (3.43) შესაბამისი მართვის არჩევით და (3.41)-ობიექტებისათვის შეიძლება ყოველთვის გარანტირებულ იქნეს მოძრაობის ასიმპტოტური მდგრადობა მთელში, გარდამავალი პროცესების აპერიოდული ხასიათი და არაწრფივი სინთეზირებადი პროცესების რიგი მთავარი თვისებები.

კონკრეტულობისათვის მოვიყვანოთ (3.41) – ობიექტებისათვის ძირითადი დამოკიდებულებები ორი მართვით:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f_i(x_1,...,x_n) + a_{j+1} x_{j+1}, \\ \dot{x}_j(t) &= f_j(x_1,...,x_j) + b_2 u_{n-1}, \qquad i = 1,2,...,\mu = n-2; \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1,...,x_n) + b_i u_n. \end{aligned} \qquad (3.44)$$

შემოვიყვანოთ პარალელურად ორი მრავალსახეობა

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sum_{k=1}^{n} \beta_{1k} x_k + \varphi_1(x_1,...,x_{n-2}) = 0; \\ \psi_2 &= \sum_{k=1}^{n} \beta_{2k} x_k = 0; \end{aligned} \qquad (3.45)$$

მაშინ მივიღებთ მართვებს

$$\begin{aligned} Bb_1 u_n = -\sum_{k-1}^{n-2} \left(\beta_{2n}\beta_{1k} - \beta_{1n}\beta_{2k} + \beta_{2n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_k} \right) \left[f_n\left(x_1,...,x_k\right) + \right. \\ \left. + a_{k+1} x_{k+1} \right] - B f_{n-1} - \frac{\beta_{2n}}{T_1} \psi_1 + \frac{\beta_{1n}}{T_2} \psi_1; \end{aligned} \qquad (3.46)$$

$$Bb_2u_{n-1}=-\sum_{k-1}^{n-2}\left(\beta_{2,n-1}\beta_{1k}-\beta_{1,n-1}\beta_{2k}+\beta_{2n}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_k}\right)\left[f_n\left(x_1,...,x_k\right)+\right.$$
$$\left.+a_{k+1}x_{k+1}\right]-Bf_{n-1}-\frac{\beta_{2,n-1}}{T_1}\psi_1+\frac{\beta_{1,n-1}}{T_2}\psi_1, \tag{3.47}$$

სადაც $B=\beta_{1,n-1}\beta_{2n}-\beta_{1n}\beta_{2,n-1}$, რომელსაც გადაჰყავს გამომსახველი წერტილები (3.45) მრავალსახეობების გადაკვეთაზე

$$\psi_{1-2}=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\beta_{1n}\beta_{2k}-\beta_{2n}\beta_{1k}\right)x_k+\beta_{2n}\varphi_1(x_1,...,x_{n-2})=0. \tag{3.48}$$

(3.48)-დან კოორდინატის მოძებნით

$$x_{n-1}=\frac{1}{B}\sum_{k=1}^{n-2}\left(\beta_{1n}\beta_{2k}-\beta_{2n}\beta_{1k}\right)x_k-\frac{\beta_{2n}}{B}\varphi_1$$

და მისი ჩასმით (3.44) მივიღებთ განტოლებათა სისტემას

$$\dot{x}_j(t)=f_j(x_1,...,x_j)+a_jx_{j+1},\ j=1,2,...,n-3;$$
$$\dot{x}_{n-2}(t)=f_{n-2}(x_1,...,x_{n-2})+\frac{a_{n-1}}{B}\sum_{k=1}^{n-2}\left(\beta_{1n}\beta_{2k}-\beta_{2n}\beta_{1k}\right)x_k-\frac{\beta_{2n}a_{n-1}}{B}\varphi_1, \tag{3.49}$$

რომელიც აღწერს გამომსახველი წერტილის მოძრაობას $\psi_{1-2}=0$ (3.48) გასწვრივ. შემოვიტანოთ მიმდევრობით ქვემრავალსახეობა

$$\psi_{\mu 1}=\sum_{k=1}^{n-2}\gamma_{1k}x_k+\varphi_2(x_1,...,x_{n-3})=0,...,$$
$$,...,\psi_{\mu,n-3}=\gamma_{n-3,1}x_1+\gamma_{n-3,2}x_2+\varphi_{n-1}(x_1)=0 \tag{3.50}$$

და არაწრფივი რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების მეთოდების შესაბამისად, მოვნახავთ ქვეობიქტების $\varphi_1(x_1,...,x_{n-2})$ (3.49) მართვას, შემდეგ $\varphi_2(x_1,...,x_{n-2})$ მართვას და ა.შ. $\varphi_{n-1}(x_1)$ - მართვამდე, რომელიც უზრუნველყოფს გამოსახველი წერტილის მოძრაობის სასურველი თვისებების ფაზური სივრცის კოორდინატთა სათავისაკენ ბოლო ინტერვალში. ჩავსვათ $\varphi_{n-1},...,\varphi_1$ (3.50)-დან (3.46) და (3.47)-ში მოვნახავთ მართვას $u_{n-1}(x_1,...,x_n)$ და ვუზრუნველყობთ მოძრაობის ასიმპტოტურ მდგრადობას მთელში დროის განსაზღვრულ პერიოდში და გარდამავალი პროცესების (აპერიოდული) მილევადობას მართვის სინთეზირებულ სისტემაში. ანალოგიური სახით შეგვიძლია მოვნახოთ (3.41) ობიექტების შესაბამისი მართვები სამი და მეტი რაოდენობის მართვის შემთხვევაში.

ამგვარად, აქ ჩამოყალიბებული არაწრფივი რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების განზოგადოებული მეთოდი რაომოდენიმე მართვის შემთხვევაში ემყარება ორ ძირითად პროცედურას: პირველ რიგში $u_s(x_1,...,x_n)$ მართვის სინთეზს, რომელიც უზრუნველყუფს გამომ-სახველი წერტილის გასდაყვანას მრავალსახეობა $\psi_s = 0$-ის გადაკვე-თაზე და მეორე რიგში შიგა მართვის $\varphi_1(x_1,...,x_{n-2}),...,\varphi_{n-1}(x_1)$ სინთეზს, რომელთაც მიმდევრობით გადაჰყავს გამომსახველი წერტილი პირველი მრავასახეობის $\varphi_{\mu 1} = 0$ მიდამოში, შემდეგ მეორის $\varphi_{\mu 2} = 0$ და ა.შ. მის მოხვედრამდე ფაზური სივრცის კოორდინატთა სათავეში.

3.5. არაწრფივი დინამიკური ობიექტების სკალარული რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირება

განვიხილოთ არაწრფივი დინამიკური ობიექტების სკალარული რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების მეთოდის თავისებურებე-ბი სხვადასხვა ბუნების არაწრფივი ობიექტების სკალარული მართვის სისტემების სინთეზის ამოცანის გადაწყვეტისას. კომპიუტერული მოდე-ლირება შესრულდა პროგრამული უზრუნველყოფა Maple-ის გამოყენე-ბით.

მაგალითი 1. ვივარაოდოთ, რომ ობიექტი აღიწერება დიფერენციალური განტოლებით

$$\dot{x}_1(t) = ax_1^3 + x_2; \dot{x}_2(t) = u . \qquad (3.51)$$

(3.51) ობიექტის თავისებურებას როცა $a > 0$, წარმოადგენს მისი არსებითი არამდგრადობა, რადგან როცა $x_2(t) \to 0$ კოორდინატა $x_1(t) \to \infty$, რაც უყენებს მართვის კანონებს $u(x_1, x_2)$ დამატებით მოთხოვნებს რომლებმაც უნდა უზრუნველყონ $(x_1 \to 0, x_2 \to 0)$ სისტემის სტაბილიზაცია ნებისმიერი საწყისი პირობებისას. გამოვიყენოთ არაკ-ის მეთოდი ასეთი მართვის სისტემების სინთეზისათვის. ამისათვის ამოვირჩიოთ ψ ფუნქცია თავიდან შემდეგი სახით

$$\psi_1 = x_2 + \beta x_1 + bx_1^3 \qquad (3.52)$$

თუ (3.52)-ს ჩავსვავთ განტოლებაში

$$T_1\dot{\psi}_1 + \varphi(\psi_1) = 0$$

მივიღებთ შემდეგ ზოგად გამოსახულებას

$$u_1(x_1, x_2) = -(3bx_1^2 + \beta)(ax_1^3 + x_2) - \frac{1}{T_1}\varphi(\psi), T > 0 \qquad (3.53)$$

რომელიც შერჩეული $\varphi(\psi_1)$ ფუნქციის მიხედვით გვაძლევს საშუალებას მივიღოთ მართვის სხვადასხვა კანონები. ეს კანონები უზრუნველყოფენ გამომსახველი წერტილის მოძრაობის ასიმპტოტურ მდგრადობას მრავალსახეობის $\varphi(\psi_1) = 0$ (3.52) შემოგარენში, რადგანაც ფუნქცია $\varphi(\psi_1)$ ამოირჩევა ისე, რომ $\varphi(\psi_1)\cdot\psi_1 > 0$. დიფერენციალური განტოლება, რომელიც აღწერს მოძრაობას $\psi_1 = 0$-ის გასწვრივ აქვს სახეს

$$\dot{x}_{1\psi 1}(t) = -\beta x_{1\psi 1} - (b-a)x_{1\psi 1}^3. \qquad (3.54)$$

(3.54) განტოლების მდგრადობის შეფასებისათვის ვიყენებთ ლიაპუნოვის ფუნქციას $V = 0{,}5x_{1\psi 1}^2$, მაშინ მისი წარმოებული დროის მიხედვით (3.54) მიიღებს სახეს:

$$\dot{V}(t) = -\beta x_{1\psi 1}^2 - (b-a)x_{1\psi 1}^4 < 0.$$

აქედან გამომდინარეობს რომ უტოლობები $\beta > 0, b \geq a, T_1 > 0$ წარმოადგენენ სინთზირებულ ჩაკეტილ სისტემის (3.51), (3.53) მთელში ასიმპტოტური მდგრადობის პირობას

$$\dot{x}_1(t) = ax_1^3 + x_2;\ x_2(t) = -(3bx_1^2 + \beta)(ax_1^3 + x_2) - \frac{1}{T_1}\varphi(\psi_1). \qquad (3.55)$$

განვსაზღვროთ (3.55) სისტემის პირველი ინტეგრალები, რისთვისაც იგი წარმოვადგინოთ შემდეგი სიმეტრიული ფორმით:

$$\frac{dx_1}{ax_1^3 + x_2} = -\frac{T_1 dx_2}{T_1(3bx_1^2 + \beta)(ax_1^3 + x_2) + \varphi(\psi_1)} = dt. \qquad (3.56)$$

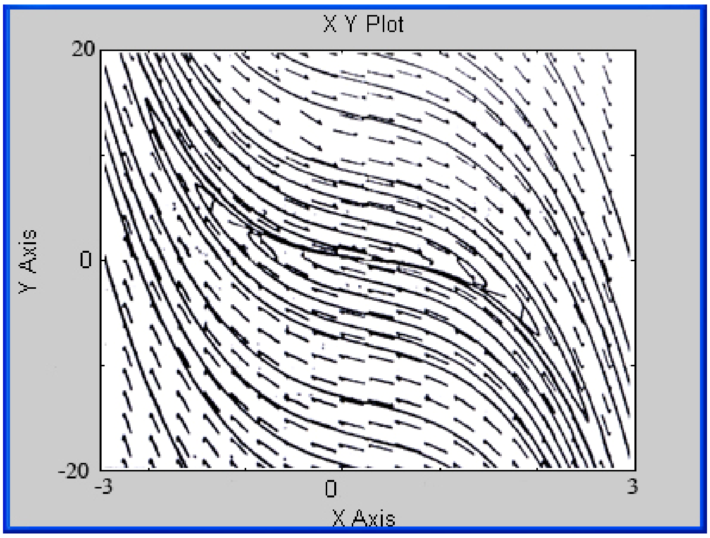
თუ (3.56) ფუნქციაში ჩავსვამთ $\psi_1 = 0$ და შესაბამისად, $\varphi(0) = 0$, ინტეგრირების შემდეგ ვპოულობთ პირველ ინტეგრალს $ax_1 + bx_1^3 = -x_2$, რომელიც ემთხვევა გამოსახულებას $\psi_1 = 0$ (3.52). ჩვენ დავრწმუნდით რომ მოცემელი ინტეგრალური მრავალსახეობა $\psi_1 = 0$ (3.52) ნამდვილად

წარმოადგენს არაწრფივი სისტემის სასურველ მიმზიდველ მრავალსა-ხეობის პრეტენდენტს.

როცა $\varphi = \psi_1 = x_2 + \beta x_1 + ax_1^3$, მართვის კანონი (3.53) ღებულობს სახეს:

$$u_1 = -\frac{\beta}{T_1}x_1 - \frac{1}{T_1}x_2 - \frac{a}{T_1}x_1^3 - (3ax_1^2 + \beta)(x_1^3 + x_2). \qquad (3.57)$$

ნახ.3.1-ზე ამ კანონისათვის და პარამეტრებისათვის $\beta = 1, a = 1, T_1 = 1$ გამოსახულია ჩაკეტილი სისტემის მოძრაობის ტრაექტორიები (დანართი სისტემა 1). როგორც ნახ. 3.1 ჩანს ფაზური ტრაექტორიები „ეხვევიან" $\psi_1 = 0$ (3.52) მრავალსახეობას, იკრიბებიან მისკენ კოორდინატთა სათავეში. ამასთან სისტემა წარმოადგენს ასიმპტოტურად მდგრადს გარდამავალი პროცესების მილევადობის აპერიოდული ხასიათით.



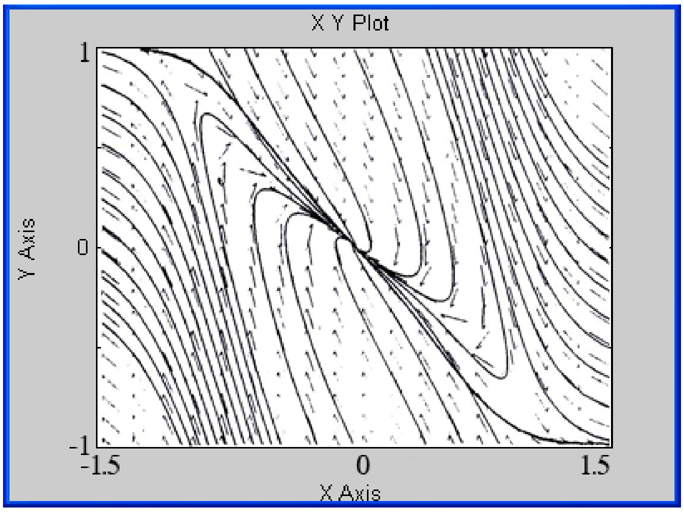
ნახ. 3.1 გარდამავალი პროცესი ჩაკეტილი სისტემის მოძრაობის ტრაექტორიები პარამეტრებესათვის $\beta = 1, a = 1, T_1 = 1$

ახლა ვივარაუდოთ, რომ x_2 კოორდინატაზე დადებულია შეზღუდვა $|x_2| \le A$, მაშინ თუ შემოვიტანოთ ფუნქციას

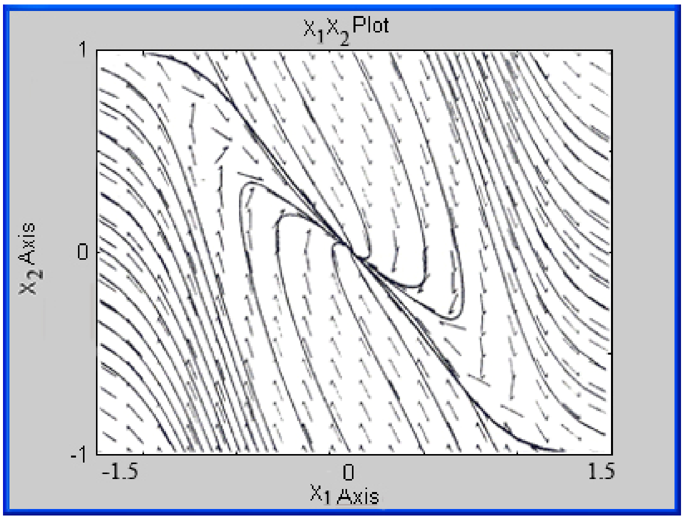
$$\psi_2 = x_2 + Ath\left(\beta x_1 + bx_1^3\right), \qquad (3.58)$$

მართვის კანონისათვის ვღებულობთ გამოსახულებას

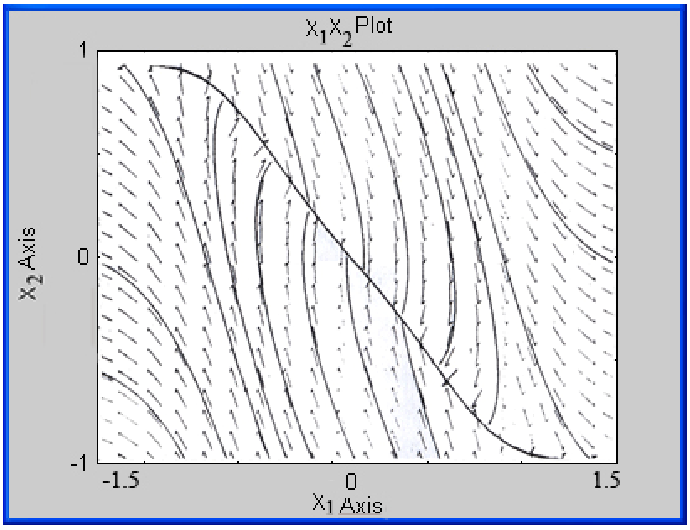
$$u_2 = -\frac{A(\beta + 3bx_1^2)(ax_1^3 + x_2)}{ch^2(\beta x_1 + bx_1^3)} - \frac{1}{T_1}\varphi(\psi_2), T_2 > 0 \qquad (3.59)$$



ა)



ბ)



გ)

ნახ. 3.2 გარდამავალი პროცესი ჩაკეტილი სისტემის მოძრაობის ტრაექტორიები ($b = 1, T = 1, A = 1$).

რომელსაც გადაჰყავს გამომსახველი წერტილი $\psi_2 = 0$ (3.58) მრავალსახეობების მიდამოში არჩეული $\varphi(\psi_2)$ – ფუნქციის და პარამეტრების β და a-ზე დამოკიდებულებით უზრუნველყოფს გარდამავალი პროცესების შესაბამის ხარისხს. $\psi_2 = 0$ მრავალსახეობის გასწვრივ მოძრაობის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\dot{\psi}_{1\psi 2}(t) = x_{1\psi 2}^3 - Ath\left(\beta x_{1\psi 2} + bx_{1\psi 2}^3\right). \tag{3.60}$$

მოძრაობის (3.60) განტოლებიდან გამომდინარეობს რომ პირობები $\beta > 0, b \geq 1$ უზრუნველყოფეს მის ასიმპტოტურ მდგრადობას მხოლოდ გარკვეულ არეში. ეს ნიშნავს რომ $|x_2| \leq A$ შეზღუდვის და შესაბამისად ψ_2 (3.58) ფუნქციის შემოტანით მცირდება ჩაკეტილი სისტემების (3.51), (3.59) ასიმპტოტურად მდგრადობის არე.

ნახ. 3.2-ზე გამოსახულია მოძრაობის ტრაექტორიები a, ნ და შესაბამისად $\varphi = \psi_2, \varphi = th\psi_2$ და $\varphi = \mathrm{si}\,gn\psi_2$ ფუნქციებისათვის, პარამეტრებისათვის $b = 1, T = 1, A = 1$, რომლებიც ამტკიცებენ სინთეზირებულ სისტემებში აპერიოდული გარდამავალი პროცესების ასიმპტოტურად მდგრადი არეების არსებობას.

მცირე გადახრების რეჟიმში, როდესაც $\psi_{2\inf} = x_2 + A\beta x_1$, u_2 (3.59) და u_1 (3.53) მართვის კანონები $(A = 1)$ იქნებიან ოპტიმალურები კვადრატული კრიტერიუმები მიხედვით:

$$J_{\inf} = \int_0^x \left[\beta^2 A^2 x_1^2 + (1 + \beta^2 A^2 T^2) x_2^2 + T^2 u^2\right] dt. \tag{3.61}$$

(3.61) კრიტერიუმში წონითი კოეფიციენტების არჩევა დამოკიდებულია სასურველი გარდამავალი პროცესების ხარისხზე. ასე რომ, აგრეგირებული რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების მართვის კანონები u_1 (3.53) და u_2 (3.59) უზრუნველყოფენ ასიმტოტურ მდგრადობას მთელში ან $|x_2| \leq A$ არეში და უზრუნველყოფენ ჩაკეტილი სისტემის მოთხოვნილ თვისებებს.

მაგალითი 2. მოვახდინოთ ობიექტის მართვის კანონის სინთეზი

$$\dot{x}_1(t) = x_1^2 + x_2, \dot{x}_2(t) = u \tag{3.62}$$

რომელსაც გააჩნია ექსტრემალური ხასიათის არაწრფივობა. ფუნქციის

$$\psi = x_2 + \beta x_1 + a x_1 |x_1| \qquad (3.63)$$

შემოტანით და მისი ჩასმით ფუნქციონალურ განტოლებაში

$$T_1 \dot{\psi} + \psi = 0$$

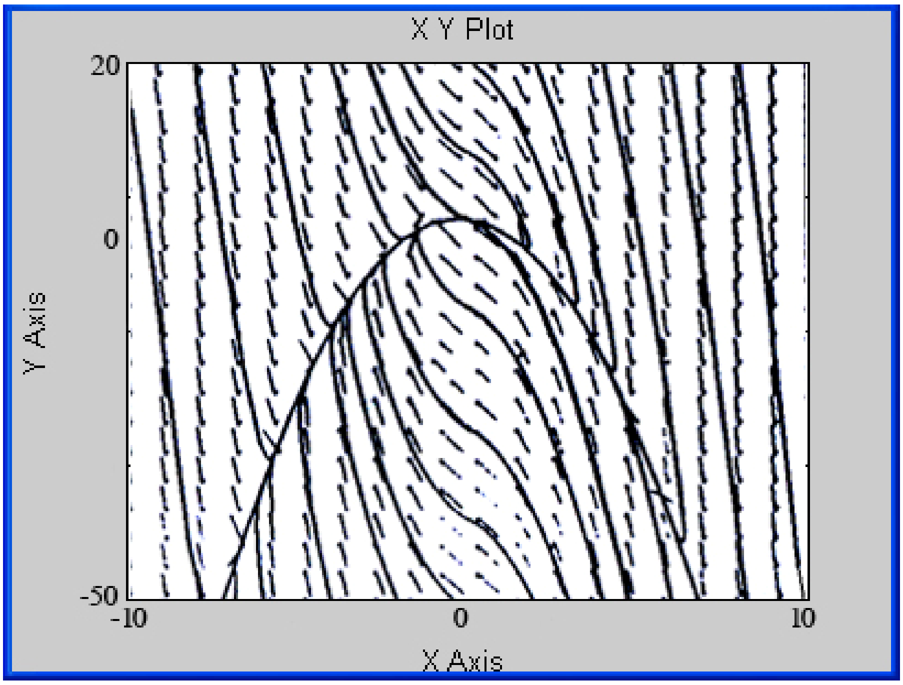
ობიექტის (3.62) განტოლებიდან ვიპოვით მართვის შემდეგ კანონს:

$$u_1 = -\frac{\beta}{T} x_1 - \frac{a}{T} x_1 |x_1| - \frac{1}{T} x_2 - (2a|x_1| + \beta)(x_2^2 + x_2). \qquad (3.64)$$

(3.64) კანონს გადაყავს გამომსახველი წერტილი $\psi = 0$ (3.63) მრავალსახეობის არეში, რომლის გასწვრივ მოძრაობა აღიწერება დიფერენციალური განტოლებით $\dot{x}_{1\psi}(t) = x_{1\psi}^2 - \beta x_{1\psi} - a|x_{1\psi}| x_{1\psi}$

გამოვიკვლიოთ ბოლო განტოლების მდგრადობა $\dot{x}_{1\psi} = 0$ -ის მიმართ. ამისათვის შემოვიტანოთ ლიაპუნოვის ფუნქცია $V = 0,5 x_{1\psi}^2$ და განვიხილოთ მისი წარმოებული: $\dot{V}(t) = x_{1\psi}^3 - \beta x_{1\psi}^2 - a|x_{1\psi}| x_{1\psi}^2$

ნათელია, რომ $\dot{x}_{1\psi} < 0$-თვის წარმოებული $\dot{V}(t) < 0$ როცა $\beta > 0; a > 0$, ხოლო $\dot{x}_{1\psi} > 0$ წარმოებული $\dot{V}(t) < 0$ როცა $\beta > 0; a \geq 1$. ეს ნიშნავს რომ როცა სრულდება პირობა $\beta > 0; a \geq 1$, ეს განტოლება და შესაბამისად სინთეზირებად სისტემა ასიმპტოტურად მდგრადია მთელში $x_1 = x_2 = 0$ მდგომარეობასთან მიმართებაში.



ნახ. 3.3-ზე გამოსახულია ჩაკეტილი

სისტემის მოძრაობის ტრაექტორია როცა $\beta = 1; T = 1, a = 2.$

ნახ. 3.3 მოცემულია მეორე რიგის სისტემების ანალოგიური ფაზური პორტრეტების შესამჩნევი განსხვავება მდგომარეობის ტრაექტორიის ყოფაქცევის მესამე მეოთხედში (დანართი სისტემა 2). ჩვეულებრივი მართვის კანონები წარმოადგენენ ერთგვარ მრავალსახეობებს რომ-ლებიც გაივლიან ფაზური სიბრტყის მეორე და მეოთხე მეოთხედებს.

მაგალითი 3. განვიხილოთ მოძრავი ობიექტის მასის ცენტრის მოძრაობის მართვის სისტემის ანალიზური კონსტრუირების ამოცანა, რომლის მოძრაობაც აღიწერება [46] დიფერეციალური განტოლებების სისტემით:

$$m\Delta\ddot{h}(t) = a_1\delta + b_1\delta^3; T\dot{\delta}(t) + \delta = c_1u \tag{3.65}$$

სადაც Δh-მასის ცენტრის კორდინატაა, δ- მმართველი ორგანოს გადახრაა, m, a_1, b_1, c_1, T –მუდმივი კოეფიციენტებია ჩავწეროთ 3.65-განტოლება შემდეგი ფორმით:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1(t) = x_2; \dot{x}_2(t) = ax_3 + bx_3^3; \\ &\dot{x}_3(t) = -\omega x_3 + cu, \end{aligned} \tag{3.66}$$

სადაც $x_1 = \Delta h, x_2 = \Delta\dot{h}(t), x_3 = \delta, a = \frac{a_1}{m}, b = \frac{b_1}{m}, \omega = \frac{1}{T}, c = \frac{c_1}{T}$

საჭიროა მოიძებნოს $u(x_1, x_2, x_3)$, –მართვის კანონი, რომელიც უზრუნ-ველყოფს (3.66) ობიექტის გადაადგილების სივრცის ნებისმიერი წერტი-ლიდან წონასწორობის $x_k(0,0,0)$ წერტილში. ამასთან, გათვალისწი-ნებული უნდა იქნეს მოთხოვნები სისტემის დინამიკური თვისებები-სადმი, გამოსახული, მაგალითად ზოგიერთი კვადრატული ხარისხის კრიტერიუმის მინიმიზაციის ფორმით.

თავიდან ჯერ გამოვიყენოთ არაკ-ის მეთოდი (3.66) ობიექტი-სათვის, რომელიც წარმოდგენილია დიფერენციალური განტოლებით კანონიკურ ფორმაში

$$\dot{y}_1(t) = y_2, \dot{y}_2(t) = y_2, \dot{y}_3(t) = u_0 \tag{3.67}$$

სადაც $y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = \dot{x}_2(t) = ax_3 + bx_3^3, u_0 = \left(a + 3bx_3^3\right)\left(-\omega x_3 + cu_1\right)$

ამოვირჩიოთ შემდეგი წრფივი მაკროცვლადი

$$\psi_1 = p_1y_1 + p_2y_2 + y_3 \tag{3.68}$$

თუ უკანსკნელ გამოსახულებას ჩავსვამთ (3.68) ფუნქციონალურ განტოლებაში

$$T_1\dot{\psi}_1(t)+\psi_1=0 \tag{3.69}$$

მაშინ (3.67) ობიექტის განტოლებიდან ვღებულობთ მართვის კანონს

$$u_0=-\frac{p_1}{T_1}y_1-\left(p_1+\frac{p_2}{T_1}\right)y_2-\left(p_2+\frac{1}{T_1}\right)y_3. \tag{3.70}$$

საწყის კორდინატებზე გადასვლის შედეგად მივიღებთ:

$$cu_1=-\frac{1}{\left(a+3bx_3^2\right)}\left[\frac{p_1}{T_1}x_1+\left(p_1+\frac{p_2}{T_1}\right)x_2+\left(p_2+\frac{1}{T_1}\right)\left(a+bx_3^2\right)x_3\right]+\omega x_3 \tag{3.71}$$

განვიხილოთ სინთეზირებული სისტემის თვისება არპკ-ის მეთოდის პოზიციიდან. მართვის კანონს u_0 (3.70)-ს გადაყავს ობიექტის აღმწერი წერტილი ნებისმიერი საწყისი მდგომარეობიდან

$$\psi_1=p_1y_1+p_2y_2+y_3=0 \tag{3.72}$$

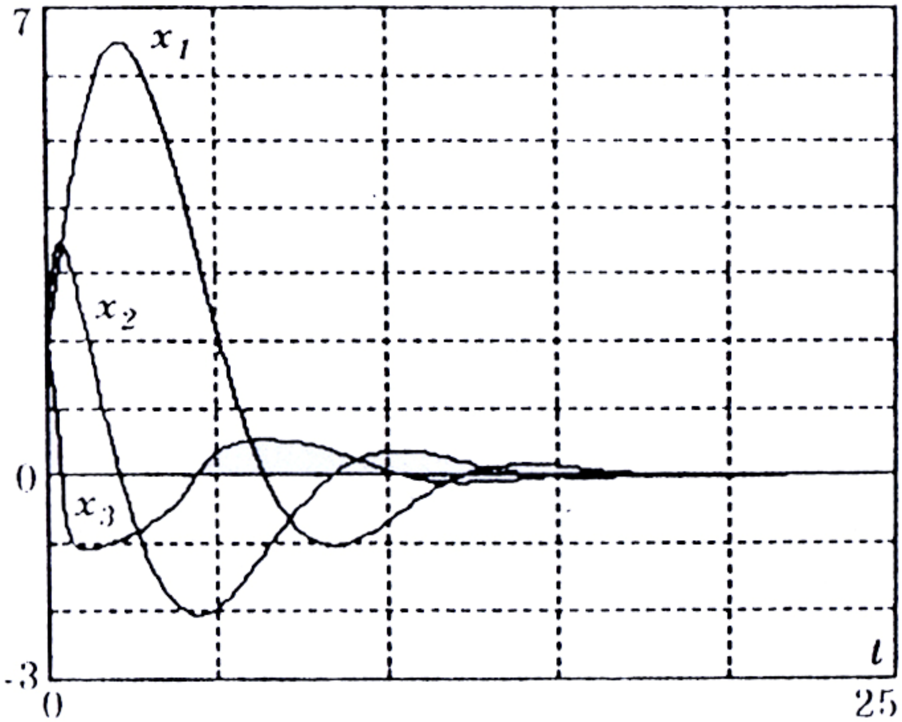
მრავალსახოვნების არეში, რომლის გასწვრივაც მოძრაობა აღიწერება შემდეგი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემით:

$$\dot{y}_{1\psi1}(t)=y_{2\psi1},y_{2\psi1}(t)=-p_1y_{1\psi1}-p_2y_{2\psi1}. \tag{3.73}$$

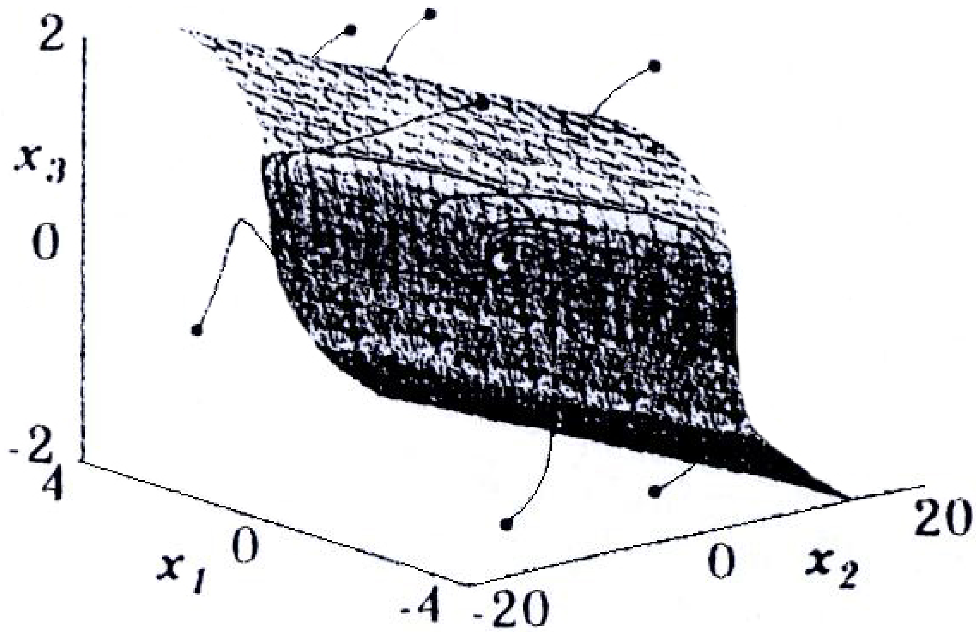
(3.73) განტოლებას და შესაბამისად, (3.66), (3.71) ჩაკეტილი სისტემები მთელში ასიმტოტური მდგრადობის პირობებს ექნება მარტივი უტოლობის სახე:

$$p_1>0;p_2>0;T_1>0$$

(3.66) - ობიექტის (3.71) რეგულატორით მართვის ჩაკეტილი სისტემის მოდელირების შედეგები (დანართი სისტემა 3) წარმოდგენილია ნახ. 3.4 და ნახ. 3.5-ზე



ნახ. 3.4 გარდამავალი პროცესის მრუდი



ნახ. 3.5 ფაზური პორტრეტი

გადავიდეთ (3.66) - ობიექტის მართვის სხვა კანონების სინთეზის შესაძლებლობების განხილვაზე. არაკ-ის მეთოდის გამოყენებით ამ კანონის სტრუქტურა დამოკიდებულია არჩეული ინვარიატიული

მრავალსახეობის ფორმისა და ფუნქციონალური განტოლების სახეზე ამასთან დაკავშირებით შემოვიყვანოთ განსახილველათ შემდეგი მაკროცვლადი

$$\psi_2 = x_3 + \varphi(x_1, x_2) \quad (3.74)$$

და ფუნქციონალური განტოლება

$$T_2\dot{\psi}_2(t) + F(\psi_2) = 0 \quad (3.75)$$

სადაც $F\left(\psi_2\right)\psi_2 > 0$.

არაპ-ის მეთოდების შესაბამისად $u_2(x_1, x_2, x_3)$ სინთეზირებადი მართვის კანონები უზრუნველყოფენ ობიექტის აღმწერი წერტილის გადაყვანას (3.74) $\psi_2 = 0$ მრავალსახეობების მიდამოში, რომლის გასწვრივაც მოძრაობა აღიწერება (3.66) შემდეგი დიფერენციალური განტოლების თანახმად

$$\dot{x}_{1\psi 2}(t) = x_{2\psi 2}; \dot{x}_{2\psi 2}(t) = -a\varphi\left(x_{1\psi 2}, x_{2\psi 2}\right) - b\varphi^3\left(x_{1\psi 2}, x_{2\psi 2}\right) \quad (3.76)$$

შინაგანი მართვის $\varphi(x_1, x_2)$ შესაბამისი სინთეზით შესაძლებელია უზრუნველვყოთ მრავალსახეობების $\psi_2 = 0$ გასწვრივ მოძრაობის საჭირო დინამიკური თვისებები. $\psi_2 = 0$ ჩასმით (3.75)-ში ობიექტის მართვის განტოლებისა (3.66)-ის ძალით ვიპოვით გამოსახულებას:

$$cu_2 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}x_2 - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\left(a + bx_3^2\right)x_3 - \frac{1}{T_2}F(\psi_2) + \omega x_3, \quad (3.77)$$

რომელიც მოიცავს მართვის დასაშვებული კანონების განსაზღვრულ ერთობლიობას. ავირჩიოთ თავიდან უბრალო წრფივი ფუნქცია

$$\varphi\left(x_1, x_2\right) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \quad (3.78)$$

მაშინ (3.78) გამოსახულების ჩასმით (3.77)-ში, ψ_2-გათვალისწინებით (3.71)-ში, მივიღებთ მართვის შემდეგ კანონს როცა $F(\psi_2) = \psi_2$;

$$cu_2 = -\frac{\beta_1}{T_2}x_1 - \left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{T_2}\right)x_2 - \left(\beta_2 a + \beta_2 bx_3^2 + \frac{1}{T_2} - \omega\right)x_3, \quad (3.79)$$

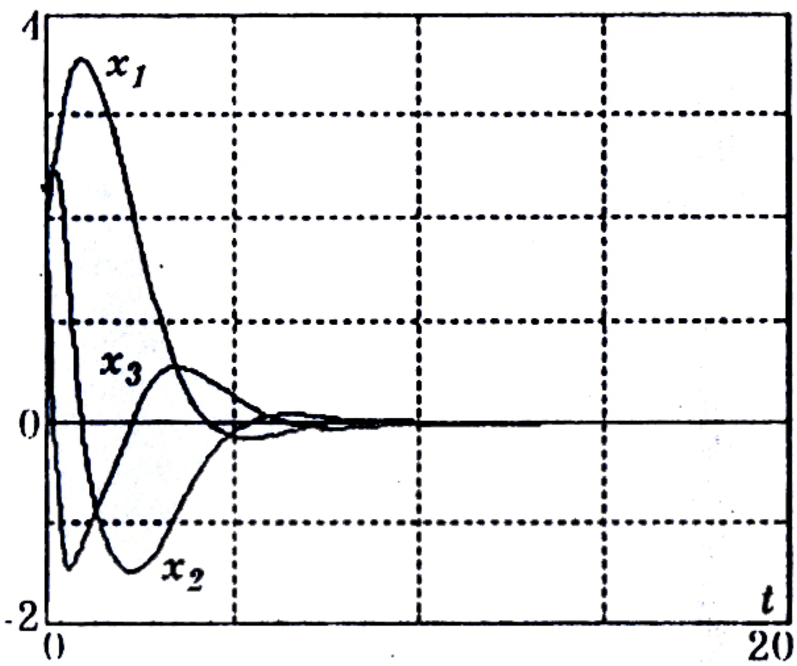
ამასთან (3.76) განტოლებას ექნება სახე

$$\dot{x}_{1\psi 2}(t) = x_{2\psi 2}; \dot{x}_{2\psi 2}(t) = -\beta_1 ax_{1\psi 2} - \beta_2 ax_{2\psi 2} - b\left(\beta_1 x_{1\psi 2} + \beta_2 x_{2\psi 2}\right)^3 \quad (3.80)$$

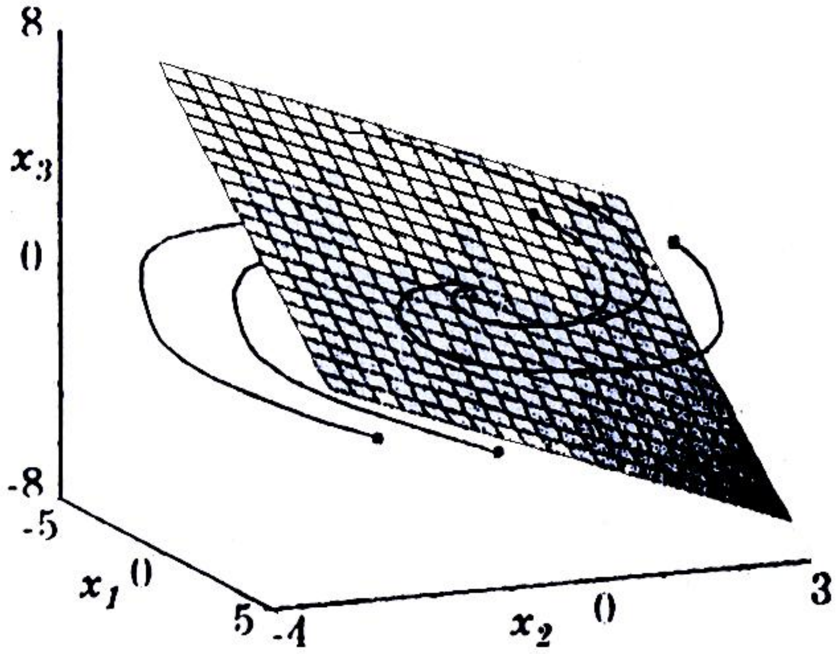
(3.80)-განტოლების ასიმტოტური მდგრადობის პირობები მთელში და შესაბამისად ჩაკეტილი სისტემებისათვის (3.66), (3.79) ღებულობს მარტივი უტოლობის სახეს

$$\beta_1 > 0; \beta_2 > 0; T_2 > 0; \qquad (3.81)$$

მართვის კანონი u_2 (3.79), (3.81) უტოლობების შესრულებისას უზრუნველყოფს აღმწერი წერტილის მოძრაობის ასიმტოტურ მოძრაობას $\psi_2 = 0$ (3.74) მრავალსახეობა გასწვრივ მოძრაობისას, ის უფრო მარტივია u_1 (3.71) კანონზე. ეს აიხსნება იმით, რომ აქ გამოყენებული იყო (3.66) - ობიექტის საწყისი განტოლება, ხოლო u_2 (3.79)-ის კანონის სინთეზი დაფუძნებულია შესაბამისი შინაგანი მართვის კანონის $\varphi(x_1, x_2)$ არჩევაზე, სასურველი მოძრაობის უზრუნველყოფისათვის მრავალსახეობა $\psi_2 = 0$ (3.74)-ის გასწვრივ მოძრაობისას, განსაზღვრულია (3.80) დიფერენციალური განტოლებით. პარამეტრები β_1, β_2 და T_2 (3.79) კანონი უნდა აკმაყოფილებეს (3.81)-ის პირობებს და შეიძლება, განსაზღვრული იქნეს მცირე გადახრების რეჟიმში ჩაკეტილი დინამიკური სისტემის სასურველი დინამიკური თვისებებიდან გამომდინარე. ჩაკეტილი სისტემის მოდელირების შედეგები (3.79) u_2 მართვის კანონით გამოსახულია 3.6 და 3.7 ნახაზებზე.



ნახ. 3.6 გარდამავალი პროცესის მრუდი



ნახ.3.7 ფაზური პორტრეტი

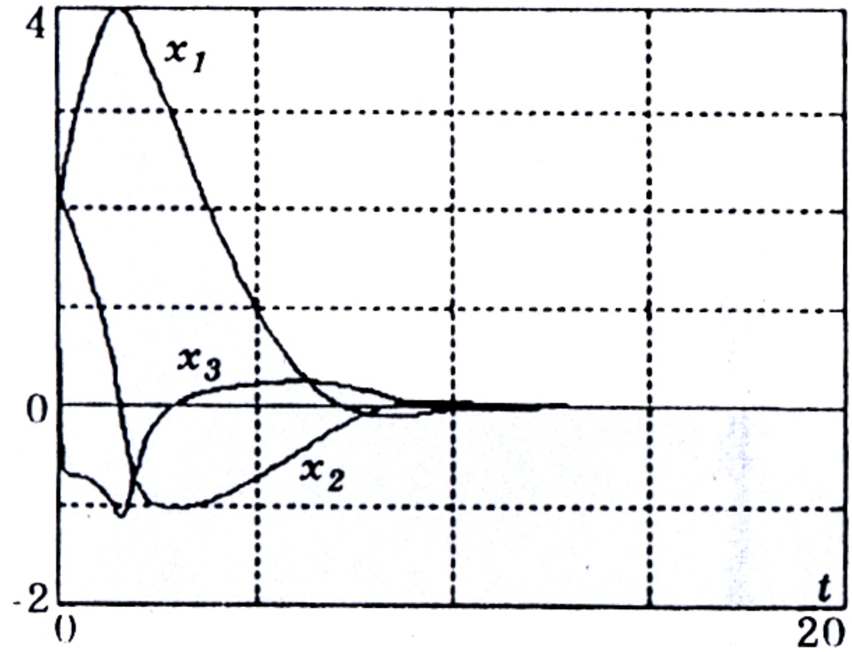
სისტემის ტრაექტორიის აღმწერი წერტილის მოძრაობისას მრავალსახეობის $\psi_2 = 0$ (3.74) სწრაფმოქმედების გასაზრდელად შეიძლება შემოყვანილი იქნეს არაწრფივი ფუნქცია

$$\varphi\left(x_1, x_2\right) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_2 x_2^3$$

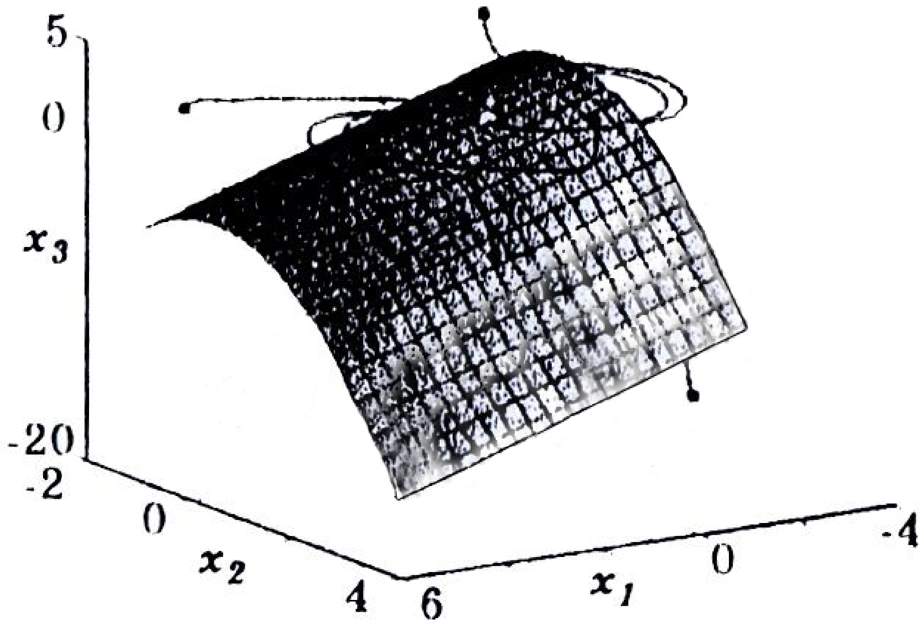
მაშინ კანონი (3.77) როცა $F(\psi_2) = \psi_2$ ღებულობს სახეს

$$cu_2 = -\beta_1 x_2 - \left(\beta_2 + 3\beta_3 x_3^2\right)\left(a + bx_3^2\right)x_3 - \frac{1}{T_2}\psi_2 + \omega x_3. \qquad (3.82)$$

თუ ავირჩევთ ფუნქციებს $\varphi\left(x_1, x_2\right)$ და $F\left(\psi_2\right)$, მაშინ (3.79), (3.82) ანალოგიურად მივიღებთ მართვის შესაბამის კანონებს. ჩაკეტილ სისტემის $u_2 = 0$ (3.82) მართვის კანონით მოდელირების შედეგები მოცემულია ნახ. 3.8 და 3.9-ზე



ნახ. 3.8 გარდამავალი პროცესის მრუდი



ნახ.3.9 ფაზური პორტრეტი

ვივარაოდოთ, რომ მასის ცვლილების სიჩქარეზე დადებულია შეზღუდვა $|x_2| \le A/\beta_2$. მაშინ, მისი აღრიცხვისათვის შეიძლება გამოყენებულ იქნეს შემდეგი მაკროცვლადი;

$$\psi_2 = \beta_2 x_2 + Ath(x_3 + \beta_1 x_1)$$

თუ ψ_3 ჩავსვამთ ფუნქციონალურ განტოლებაში

$$T_3\dot{\psi}_3(t)+\psi_3=0$$

(3.66) ობიექტის განტოლების ძალით ვღებულობთ მართვის კანონს

$$cu_3=\omega x_3-\beta_1 x_2\frac{1}{A}ch^2\left(x_3+\beta_1 x_1\right)\left(\beta_2 a x_3+\beta_2 b x_3^3+\frac{1}{T_3}\psi_3\right). \qquad (3.83)$$

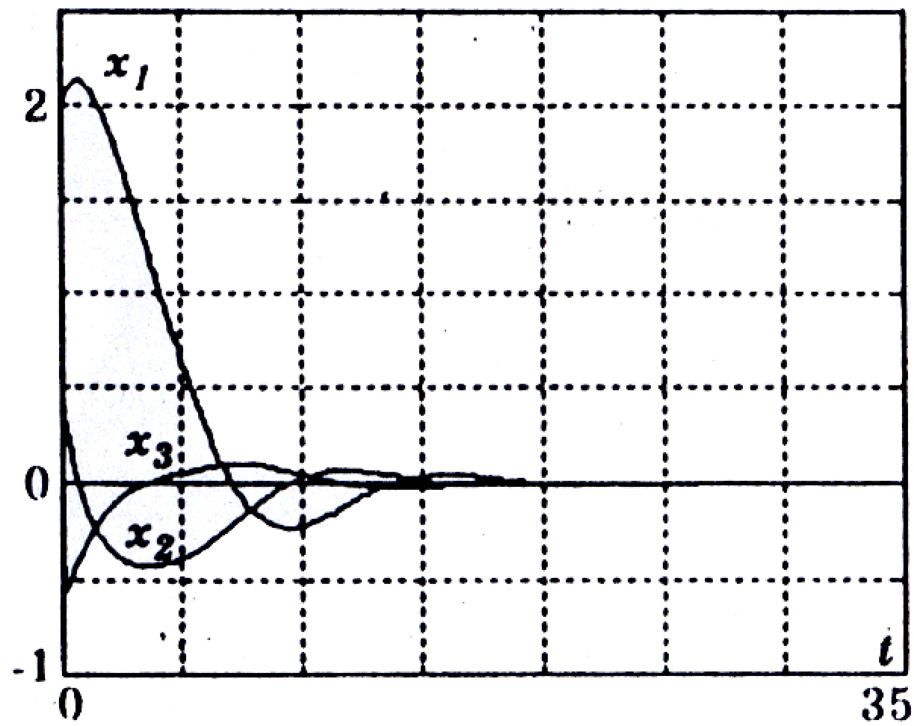
ეს კანონი უზრუნველყოფს $|x_2|\le A$ შეზღუდვას და გადაყავს აღმწერი წერტილი ობიექტის ნებისმიერი საწყისი მდგომარეობიდან x_1 და x_3 კოორდინატების მიხედვით მრავალსახეობა $\psi_3=0$ მიდამოში, რომლის გასწვრივაც მოძრაობა, აღიწერება დიფერენციალური განტოლების სის-ტემით:

$$\dot{x}_{1\psi 3}(t)=x_{2\psi 3},$$

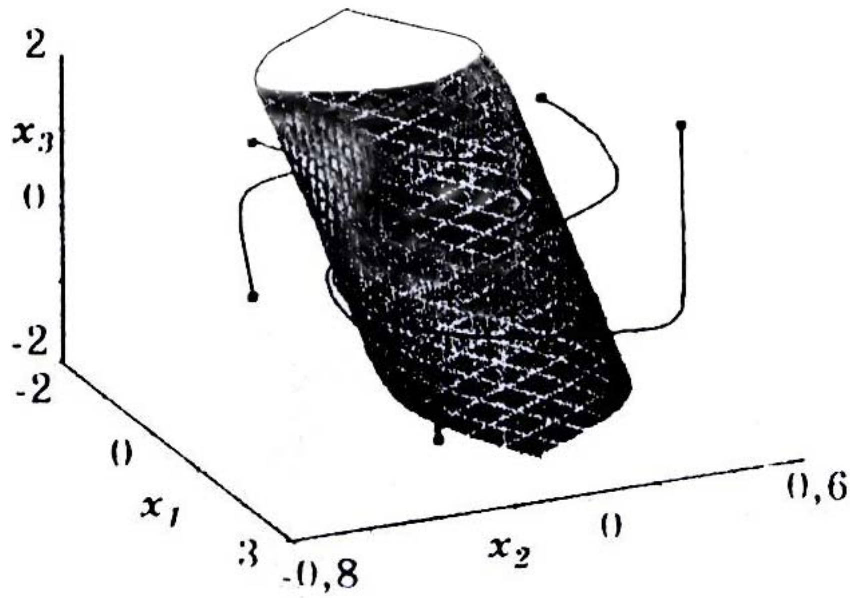
$$\dot{x}_{2\psi 3}(t)=-\beta_1 x_{1\psi 2}-aArth\frac{\beta_2}{A}x_{2\psi 3}-b\left(\beta_1 x_{1\psi 3}+Arth\frac{\beta_2}{A}x_{2\psi 3}\right)^3.$$

ამ განტოლებების მდგრადობის პირობები დაიყვანება უტოლო-ბებზე $\beta_1>0,\beta_2>0$, რომლებიც განსაზღვრავენ ჩაკეტილი (3.66), (3.83) სისტემისათვის x_2 კორდინატებზე მოძრაობის ასიმტოტურ მდგრადობას $|x_2|\le A/\beta_2$ შუალედში, ხოლო x_1 და x_3 კორდინატზე – მთელში (3.66) მართვის ჩაკეტილი სისტემის (3.83) მართვით მოდელირების შედეგები მოცემულია ნახ. 3.10 და 3.11-ზე.

ზემოთ ჩამოყალიბებული მოძრავი ობიექტის (3.66) მასის ცენტრის მოძრაობის მართვის ამოცანები გვიჩვენებენ არაკ-ის მეთოდის ღირსე-ბებს, რომლებიც გვაძლევენ საშუალებას მარტივი ანალიტიკური პრო-ცედურებს მეშვეობით მივიღოთ მართვის კანონების ერთობლიობა [35], რომლებიც უზრუნველყოფს ჩაკეტილი სისტემების დინამიკურ თვისე-ბებს მოცემულია ხარისხის შესაბამისი კრიტერიუმები, რომელთა მეშვე-ობითაც ხორციელდება მართვის კანონის ოპტიმიზაცია.



ნახ. 3.10 გარდამავალი პროცესის მრუდი



ნახ. 3.11 ფაზური პორტრეტი

ზემოთ განხილულ მაგალითში არ მოქმედებენ გარეგანი შეშფოთებები. ეხლა განვიხილოთ დინამიკური რეგულატორის სინთეზის მაგა-

ლითი, რომელიც განსაზღვრავს და შთანთქავს ობიექტზე სტრუქტურულად განსაზღვრულ ზემოქმედებებს.

მაგალითი 4 მოვახდინოთ არაწრფივი ობიექტის სელექციურ-ინვარიატიული სისტემის სინთეზი.

$$\dot{x}_1(t) = x_2, \dot{x}_2(t) = \sin x_1 + x_3, \dot{x}_3(t) = u + f \qquad (3.85)$$

მასზე ჰარმონიული შეშფოთების $f = B\sin(2t)$ ზემოქმედებით, რომელსაც გააჩნია უცნობი მაგრამ შეზღუდული ამპლიტუდა, (3.84) განტოლებებით აღიწერება მათემატიკური ქანქარის მოძრაობა ზედა არამდგრად მდგომარეობაში. ამასთან x_1 – ქანქარის ვერტიკალიდან გადახრის კუთხეა, x_2– გადახრის სისწრაფეა, x_3– ქანქარაზე მოდებული მომენტია. [34]-ზე. ავღნიშნოთ, რომ მათემატიკური ქანქარის განტოლებით აღიწერება ერთგვარი მრავალი ელექტრომექანიკური ობიექტი, კერძოდ სხვადასხვა სახის ფაზური სისტემები, სინქრონული გენერატორები და ასინქრონული გაშვების ძრავები და ა.შ. ასეთ ობიექტებს გააჩნიათ ცილინდრული ფაზური სივრცე. ისმება ამოცანა ქანქარის სტაბილიზაციისა მისი საკიდელის ღერძზე მოდებული მომენტის მიხედვით ასეთი მომენტი წარმოიქმნება შემსრულებელი მექანიზმის მეშვეობით, რომელიც წარმოდგენილია მაინტეგრირებელი რგოლის სახით. საჭიროა მოინახოს მართვა შემსრულებელი მექანიზმის შესასვლელზე, რომელიც ასტაბილურებს ქანქარის წონასწორობას ზედა მდგომარეობაში ე.ი. უზრუნველყოფს სისტემის ასიმტოტურ მდგომარეობას.

სისტემაზე მოქმედი ჰარმონიული აღმშფოთი ზემოქმედებით აღწერისათვის ამოვირჩიოთ ტალღური გამოსახულება შემდეგი სახით

$$\begin{aligned} &\dot{\omega}_1(t) = \omega_2; \\ &\dot{\omega}_2(t) = -4\omega_1; \\ &f = B\omega_1; \end{aligned} \qquad (3.85)$$

(3.84)-სისტემა (3.85)-ის გამოყენებით წარმოვადგინოთ გაფართოვებული სახით

$$\begin{aligned} &\dot{\omega}_1(t) = \omega_2 + v_1(x_1, x_2, x_3); \\ &\dot{\omega}_2(t) = -4\omega_1 + v_2(x_1, x_2, x_3); \\ &\dot{x}_1(t) = x_2; \\ &\dot{x}_2(t) = \sin x_1 + x_3; \\ &x_3(t) = u + \omega_1, \end{aligned} \qquad (3.86)$$

სადაც ω_1, ω_2 – w_1, w_2 მდგომარეობის ცვლადების შეფასებებია, $v_1(x_1,x_2,x_3)$, $v_2(x_1,x_2,x_3)$ -კავშირის ფუნქციებია, როცა $v_1(x_1,x_2,x_3) = v_2(x_1,x_2,x_3) = 0$, სისტემის პირველი ორი განტოლება წარმოადგენს (3.85) შეშფოთების მოდელს (დანართი სისტემა 4). დინამიკური რეგულატორის, რომელიც შეშფოთების საწინააღმდეგოდ მოქმედებენ, შემოვიტანოთ ინვარიაციული მრავალსახეობა

$$\psi = x_3 + \sin x_1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = 0. \tag{3.87}$$

მაშინ ფუნქციონალური განტოლების საფუძველზე

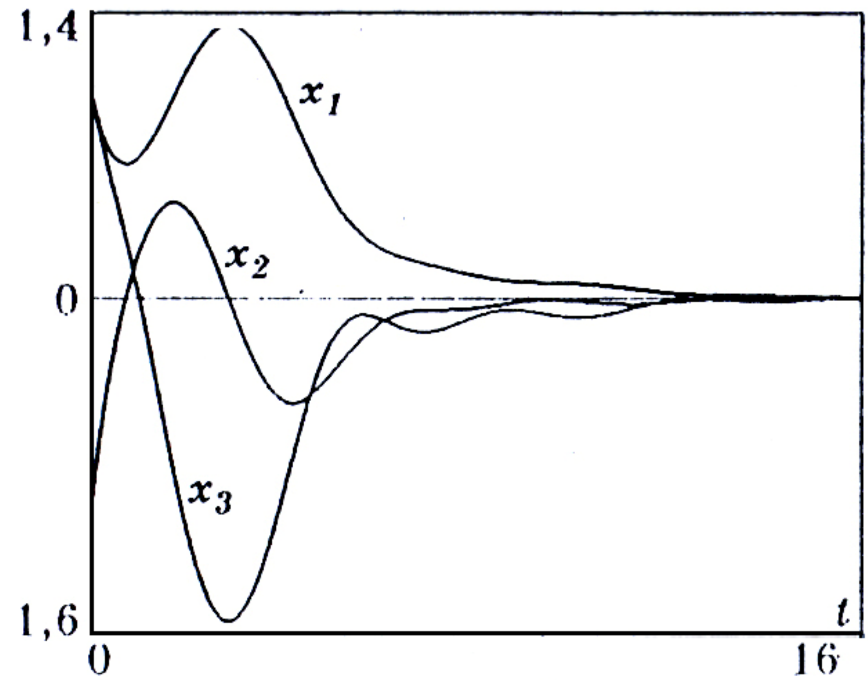
$$T\dot{\psi}(t) + \psi = 0$$

კერძოდ $v_1(x_1,x_2,x_3) = a_1\psi$; $v_2(x_1,x_2,x_3) = a_2\psi$ კავშირის ფუნქციისათვის მივიღებთ მართვის შემდეგ კანონს

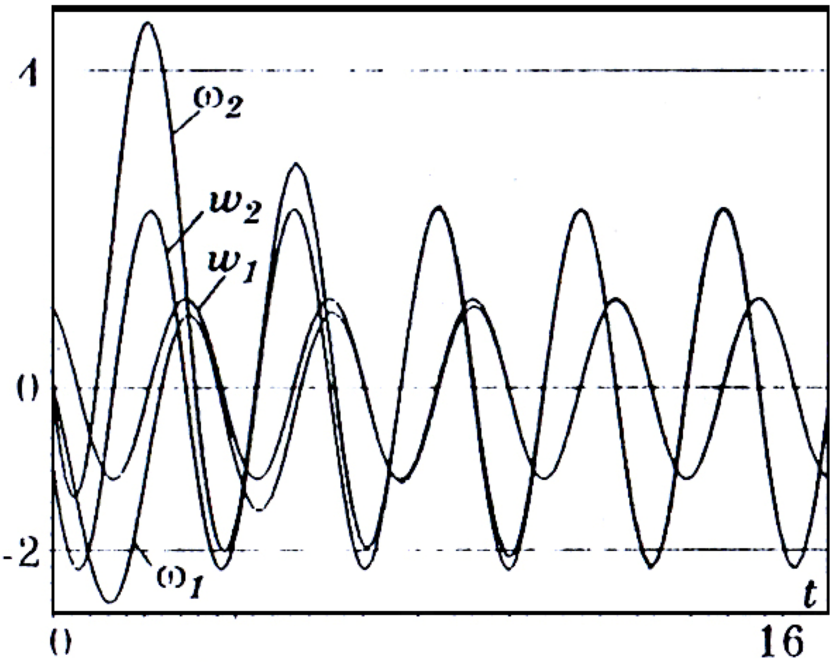
$$u = -x_2\cos x_1 - \left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{T}\right)x_2 - \frac{\beta_1}{T}x_1 - \left(\frac{1}{T} + \beta_2\right)\left(x_3 + \sin x_1\right) - \omega_1. \tag{3.88}$$

გარეგანი გაუზომელი შეშფოთებული ზემოქმედების შეფასებისათვის საჭირო განტოლებას აქვს სახე

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1(t) &= \omega_2 + a_1\left(x_3 + \sin x_1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2\right); \\ \dot{\omega}_2(t) &= -4\omega_1 + a_2\left(x_3 + \sin x_1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2\right). \end{aligned} \tag{3.89}$$



ნახ 3.12 ჩაკეტილი მართვის სისტემის გარდამავალი პროცესის მრუდი



ნახ 3.13 ჩაკეტილი მართვის სისტემის გარდამავალი პროცესის მრუდი

(3.88) მართვის კანონს თანმიმდევრულად გადაყავს აღმწერი წერტილი მრავალსახეობა (3.87)-ის მიდამოში. ეს კანონი შეშფოთების ზემოქმედების შეფასების (3.89) განტოლებასთან ერთად წარმოქმნის დინამიკურ რეგულატორს რომელიც შთანთქავს ჰარმონოლ ზემოქმედებას (3.85)-ს. 3.12 და 3.13 ნახაზზე წარმოდგენილია ჩაკეტილი მართვის სისტემების (3.84), (3.88), (3.89) მოდელირების შედეგები. მოდელირება ჩატარდა რეგულატორის შემდეგი პარამეტრებისათვის

$$T = \beta_1 = \beta_2 = 1; \qquad a_2 = -1; \qquad a_1 = -3.$$

სინთეზირებული დინამიური რეგულატორი თავისი სტრუქტურით განისაზღვრება მიღებული კავშირის განტოლებებით ე. ი. მოცემულ შემთხვევაში დამოკიდებულია კავშირის ფუნქციის $v_1(x_1, x_2)$ არჩევისაგან, რომელიც შეიძლება ინტერპრეტირებული იქნა როგორც ერთგვარი „შინაგანი" მართვები, რომლებიც მოქმედებენ შეშფოთების მოდელზე, რასაკვირველია ამ მართვების სინთეზი შესაძლებელია განხორციელდეს ოპტიმალური მართვის თეორიის მეთოდების საფუძველზე. კავშირის განტოლებების არჩევისაგან დამოკიდებულებით, არაპ-ის განზოგადოებულ მეთოდში შეიძლება ავაგოთ სხვადასხვა დინამიური რეგულატორები რომლებიც უკუქმედებენ შეშფოთებებზე.

დ ა ს კ ვ ნ ა

ჩატარებული გამოკვლევების საფუძველზე შეიძლება გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნა:

1. სადისერტაციო ნაშრომში შესწავლილია ახალი ინტეგრირებული მეცნიერების - სინერგეტიკის საფუძვლები, რომელიც შეისწავლის კოლექტიური თვითორგანიზაციის პროცესებს და პრაქტიკულად მოიცავს თანამედროვე მეცნიერების ყველა დარგს. განმარტებულია სინერგეტიკის ძირითადი ცნებები;
2. შესწავლილია ჩაკეტილი ოპტიმალური დისიპატიური მართვის სისტემების სინთეზის პრობლემა;
3. ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების ამოცანა გადაწყვეტილია სინერგეტიკული მეთოდების გამოყენებით.
4. განხილულია ოპტიმალური დისიპატიური მართვის სისტემების კლასიფიკაცია - სკალარული და ვექტორული მართვის შემთხვევები ცალ-ცალკე. საილუატრაციოდ მოტანილია რიგი მაგალითებისა, რომლებშიც ნაჩვენებია მართვის ოპტიმალური დისიპატიური სისტემების სინთეზის მეთოდის ეფექტურობა ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების კლასიკურ მეთოდთან შედარებით.
5. შესწავლილია არაწრფივი აგრეგირებული რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების განზოგადოებული მეთოდი, რომელიც დაფუძნებულია ფაზურ სივრცეში მიმზიდავი მრავალსახეობათა სიმრავლის შემოტანაზე და წარმოადგენს სინთეზირებული სისტემების შეშფოთებული მოძრაობის ასიმპტოტური მდგრადობის გარანტიას.
6. გადაწყვეტილია სხვადასხვა სახის არაწრფივი დინამიკური ობიექტებისათვის სკალარული რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების პრობლემა სინერგეტიკული მეთოდების გამოყენებით.

დანართი

სისტემა 1

```
> with(DEtools):
> u(x1(t),x2(t))=-(3*x1(t)^2+1)*(x1(t)^3+x2(t))-x2(t)-
x1(t)-x1(t)^3;
>
```

$$u(x1(t), x2(t)) = -(3\, x1(t)^2 + 1)\,(x1(t)^3 + x2(t)) - x2(t) - x1(t) - x1(t)^3$$

```
>phaseportrait([D(x1)(t)=x1(t)^3+x2(t),D(x2)(t)=u(x1(t),x
2(t))],
[x1(t),x2(t)],t=130..150,linecolor=black,method=classical
[foreuler],stepsize=.2);
```

სისტემა 2

```
> with(DEtools):
> u(x1(t),x2(t))=-x1(t)-x1(t)*abs(x1(t))-x2(t)-
(2*abs(x1(t))+1)*(x2(t)^2+x2(t));
```

$$u(x1(t), x2(t)) = -x1(t) - x1(t)\,|x1(t)| - x2(t) - (2\,|x1(t)| + 1)\,(x2(t)^2 + x2(t))$$

```
>
phaseportrait([D(x1)(t)=x1(t)^2+x2(t),D(x2)(t)=u(x1(t),x2
(t))],
[x1(t),x2(t)],t=130..150,linecolor=black,method=classical
[foreuler],stepsize=.2);
```

სისტემა 3

```
> with(DEtools):
> u(x1(t),x2(t),x3(t))=-
1/(1+3*x3(t)^3)*[x1(t)+2*x2(t)+2*(3+x3(t)^2)*x3(t)]+x3(t)
;
```

$$u(x1(t), x2(t), x3(t)) = -\frac{[x1(t) + 2\,x2(t) + 2\,(3 + x3(t)^2)\,x3(t)]}{1 + 3\,x3(t)^3} + x3(t)$$

```
> phaseportrait([D(x1)(t)=x2(t),D(x2)(t)=x3(t)+x3(t)^2,
D(x3)(t)=-
x3(t)+u(x1(t),x2(t),x3(t))],[x1(t),x2(t),x3(t)],
t=-130..150,linecolor=black,method=classical[foreuler],
stepsize=.2);
```

სისტემა 4

```
> with(DEtools):
> u(x1(t),x2(t),x2(t))=-x2(t)*(cos(x1(t))+2)-x1(t)-
2*x3(t)-2*sin(x1(t));
```

$$u(x1(t), x2(t), x2(t)) = -x2(t)\,(\cos(x1(t)) + 2) - x1(t) - 2\,x3(t) - 2\sin(x1(t))$$

```
> dif1:=diff(x1(t),t)=x2(t);
>
```

$$dif1 := \frac{d}{dt}x1(t) = x2(t)$$

```
> dif2:=diff(x2(t),t)=sin(x(t))+x3(t);
```

$$dif2 := \frac{d}{dt}x2(t) = \sin(x(t)) + x3(t)$$

```
> dif3:=diff(x3(t),t)=u(x1(t),x2(t),x3(t))+sin(2*t);
```

$$dif3 := \frac{d}{dt}x3(t) = u(x1(t), x2(t), x3(t)) + \sin(2\,t)$$

```
> autonomous({dif1,dif2,dif3},[x1(t),x2(t),x3(t)],t);
```

true

```
> DEplot({dif1,dif2,d},[x(t),y(t)],t=-
4..4,[[x(1)=1,x2(1)=1,x3(1)=1],[x(1)=2,x2(1)=2,x3(1)=2],[
x1(1)=3,
x2(1)=3,x3(1)=3],x1(t)=-20..20,x2(t)=-20..20,x3(t)=-
20..20,linecolor=black,scene=[x(t),y(t)],color=black,
stepsize=0.1);
```

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Винер Н. Кибернетика, или управление и связь, в животном и машине. М.: Сов. радио, 1968.
2. Моисеев Н.Н. Путь к очевидности. М.: Аграф, 1998.
3. Гомеостатика живых, технических, социальных и экономических систем. Новосибирск: Наука, 1990.
4. Крутько П.Д. Симметрия и обратные задачи динамики управляемых систем // Известия РАН Теория и системы управления, 1996.№ 6.
5. ДевисП. Суперсила. М.: Мир,1989.
6. Пригожий й., Стенгерс И. Порядок из хаоса. М.: Прогресс, 1986.
7. Пригожий И. От существующего к возникающему. М.: Наука, 1985.
8. Шиколис Г., Пригожий И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.
9. Климонтович М.Ю. Без формул о синергетике. Минск: Вышэйшая школа, 1985.
10. Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985.
11. Хакен Г. Информация и самоорганизация. М.: Мир, 1991.
12. Николис Дж. Динамика иерархических систем. Эволюционное представление. М.: Мир, 1989.
13. Берже П. Помо И. Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
14. Компьютерь и нелинейные явления. М.: Наука, 1987.
15. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
16.Красовский А.А. Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. М.: Наука, 1974.
17. Смолянинов В.В. От инвариантов геометрий к инвариантам управления //Интеллектуальные процессы и их моделирование. М.: Наука, 1987.
18. Анохин П.К. Очерки о физиологии функциональных систем. М.: Медицина, 1975.
19. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980.
20. Странные аттракторы. М.: Мир, 1981.
21. Кадомцев Б.Б. Динамика и информация. М.: УФН, 1997.
22. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990.
23. Месарович М., Мако Д., Такахаре И. Теория иерархических многоуровневых систем. М.: Мир, 1973.
24. Капра Ф. Дао физики. СПб: Орис, 1994.
25. Летов А.М. Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969.
26. Красовский А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973.
27. Колесников А.А. Синергетическая теория управления. М.: Энергоатомиздат, 1994.
28.Жуков В.П. К методу источников для исследования устойчивости нелинейных систем //Автоматика и телемеханика. 1979. №3.
29. Красовский А.А. Проблемы физической теории управления // Автоматика и телемеханика. 1990. №11.
30. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980.

31. Додд Р. и др. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.:Мир, 1988.
32. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990.
33. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
34. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений. Дополнение к книге Малкина И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
35. Колесников А.А. Синергетическая теория управления. М.: Энергоатомиздат, 1994.
36. Колесников А.А. Синергетический подход в нелинейной теории управления // Сборник избранных работ по грантам в области информатики, радиоэлектроники и систем управления. СПб., 1994.
37. Джонсон С. Теория регуляторов, приспосабливающихся к возмущениям / Под ред. К.Т.Леондеса. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах. М.: Мир, 1980.
38. Новое в синергетике и загадки мира неравновесных структур; М.: Наука, 1996.
39. Компьютеры и нелинейные явления. М.: Наука, 1988.
40. Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985.
41. Хакен Г. Информация и самоорганизация. М.: Мир, 1991.
42. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
43. Колесников А.А. Аналитическое конструирование нелинейных агрегированных регуляторов по заданной совокупности инвариантных многообразий. I. Скалярное управление // Известия вузов. Электромеханика. 1987. №3. С.100-109.
44. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости /Под ред. А.А. Воронова и В.М. Матросова. М.: Наука, 1987.
45. Колесников А.А. Аналитическое конструирование нелинейных агрегированных регуляторов по заданной совокупности инвариантных многообразий. П. Векторное управление //Известия вузов. Электромеханика. 1987. №5, С.58-66.
46. Красовский А. А., Буков В. Н., ШендрикВ.С. Универсальные алгоритмы оптимального управления технологическими процессами. М.: Наука, 1977.
47. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
48. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 11. М.: ВИНИТИ, 1978.
49. Колесников А.А. Последовательная оптимизация нелинейных агрегированных систем управления. М.: Энергоатомиздат, 1987.
50. Иванов Б.Р., Циделко В.Д. Принципы построения высокоточных аналоговых дифференциаторов // Измерения, контроль, автоматизация. 1984. №2. С. 38 49.
51. Булычев Ю.Г., Бурлай И.В. Многократное дифференцирование финитных функции с использованием теоремы отсчетов в задачах оценивания, управления и идентификации // Автоматика и телемеханика. 1990. №4.
52. Булычев Ю.Г., Бурлай И.В. Синтез алгоритмов оптимального управления в классе функций с финитным спектром и неравномерной сетке интерполяции //Автоматика и телемеханика. 1997. №2. С. 3-17.
53. Загарий Г.II., Шубладзе А.М. Методы адаптивного управления для промышленного применения. Ч. 2. Дифференцирование и фильтрация сигналов //Автоматика. 1981. №3. С.50-60.

54. Загарий Г.И., Шубладзе А.М. Синтез систем управления на Основе критерия максимальной степени устойчивости. М.: Энергоатомиздат, 1988.
55. Красовский А.А. Циклическое оценивание при первичной 'обработке сигналов датчиков// Автоматика и телемеханика. 1988. №4. С. 52-60.
56. Красовский А.А. Алгоритмические основы оптимальных адаптивных регуляторов нового класса // Автоматика и телемеханика. 1995. №9.
57. Красовский А.А. Адаптивный оптимальный регулятор с переменным порядком наблюдателя и временем экстраполяции. // Автоматика и телемеханика. 1994. №11.
58. Гайдук А.Р., Медведев М.Ю. Модальное управление объектами с неизвестной моделью // Сб. «Синтез алгоритмов сложных систем». Вып.9. Москва-Таганрог, 1997. С.271-276.
59. ვ. სესაძე, ვ. კეკენაძე, ნ. მაღლაკელიძე არაწრფივ სისტემებში ბიფურკაციული მოვლენების მართვა უკუკავშირის გამოყენებით. სტუ-ს გამომცემლობა საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციის „ინფორმაციული ტექნოლოგიები მართვაში“ მოხსენებათა კრებული თბილისი 2007წ 318-321 გვ.
60. Mosashvili Ia, Sesadze Valida, Maglakelidze Nana. multimedia technologies for the studies of optimal control systems, georgian technical university, transactions automated control systems №1(2) tbilisi 2007 193-196p
61. Сесадзе В., Кекенадзе В., Маглакелидзе Н. проблема синхронизации и законы сохранения, грузинский технический университет, труды, автоматизированные системы управления № 2(5) тбилиси 2008, с 51-55
62. ა. გუგუშვილი, რ. ხუროძე, თ. იმედაძე, დ. გარგი,. ა. გუგუშვილის და ხუროძის რედაქციით მართვის თეორია არაწრფივი სისტემები მეორე ნაწილი თბილისი გამომცემლობა „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, 1999წ, 300გვ
63. ა. გუგუშვილი, რ. ხუროძე, თ. იმედაძე, დ. გარგი,. ა. გუგუშვილის და ხუროძის რედაქციით მართვის თეორია სინერგეტიკა წიგნი მესამე თბილისი გამომცემლობა „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, 2000წ, 869გვ