МАЙЯ ЧАБАШВИЛИ

РЕШЕТОЧНЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ W-СТЕПЕННЫХ ГРУПП ХОЛЛА И АЛГЕБР ЛИ

Представлена на соискание степени академического доктора

Грузинский Технический Университет
Тбилиси, 0175, Грузия
ноябрь, 2008 год

maia WabaSvili

holis W-xarisxovani jgufebis da lis algebrebis meseruli izomorfizmebi

წარდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

თბილისი, 0175, საქართველო
ნოემბერი, 2008

Грузинский Технический Университет

Факультет Информатики и Систем управления

Мы, нижеподписавшиеся подтверждаем, что ознакомились с диссертационной работой Чабашвили Майи на тему: *"Решеточные изоморфизмы W-степенных групп Холла и алгебр Ли"* **и рекомендем ее рассмотрение в Диссертационном Совете факультета информатики и систем управления Грузинского Технического университета на соискание степени академического доктора.**

Руководители: ________________________

Рецензент: _____________________

Рецензент: _____________________

Грузинский Технический Университет

2008

saqarTvelos teqnikuri universiteti

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემორე ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით **მაია ჭაბაშვილის** მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: **"holis W-xarisxovani jgufebis da lis algebrebis meseruli izomorfizmebi"** და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

თარიღი ______________________

ხელმძღვანელი: ______________________

რეცენზენტი: ______________________

რეცენზენტი: ______________________

Автор **: Чабашвили Майя**

Название: ***"Решеточные изоморфизмы W-степенных групп Холла и алгебр Ли"***

Факультет: **Информатика и системы управления**

Академическая степень: **Доктор**

Заседание проведено:

saqarTvelos teqnikuri universiteti

2008

ავტორი: **მაია ჭაბაშვილი**

დასახელება: **"holis W-xarisxovani jgufebis da lis algebrebis meseruli izomorfizmebi"**

ფაკულტეტი: ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების

აკადემიური ხარისხი: დოქტორი

სხდომა ჩატარდა:

Р е з ю м е

С каждой универсальной алгеброй (алгебраической системой) А связываются некоторые производные от нее объекты (системы). Это, в первую очередь, полугруппа всех эндоморфизмов *End[A]*, группа автоморфизмов *Aut[A]* и решетка (структура) всех подалгебр *Sub[A]*.

Значительная часть алгебры - это исследование взаимодействий между универсальной алгеброй с их эндоморфизмами и автоморфизмами. Изучаются, также связи между поведением элементов (операций) в алгебраической системе и поведением подсистем. Исследования по этой тематике проводились в абстрактных и топологических группах и кольцах, в полугруппах, алгебрах Ли и т.д.

Сравнительно большой опыт изучения связей между алгебраической системой и решеткой ее подсистем накоплен в теории групп. По этому поводу см. монографии М.Судзуки [1] и Р.Шмидта [2] и цитированную там литературу (см. также обзоры [3,4]). Относительно алгебр Ли см. обзоры А.А.Лахши [5,6].

Для более полного представления картины см. [7-61], а также работы автора [62-68].

Идеология работ по решеточным вопросам универсальных алгебр подтверждает, что исследования связей между строением алгебры и строением решетки ее подалгебр является интересным и важным направлением в общей алгебре.

Настоящая работа относится к отмеченной выше, направлению, когда в качестве универсальной алгебры выступает *W*-степенная группа Холла и алгебра Ли.

Понятие дискретной *W*-степенной группы ввел Ф.Холл. Он же обобщил для них некоторые результаты из теории нильпотентных групп. Значение *W*-степенных нильпотентных групп в общей теории абстрактных групп определяется тем, что всякая конечно порожденная нильпотентная группа без кручения вкладывается в некоторую *W*-степенную группу.

В настоящее время имеется ряд работ, в которых изучаются свойства *W*-степенных групп.

Общая теория W-степенных групп была развита Х.Х.Магомаевым, А.Д.Тавадзе (1976), А.Л.Шмелькиным (1979), М.Г.Амаглобели, В.Н.Ремесленниковым (2000), М.Г.Амаглобели (2001), А.А.Лашхи и Т.З.Бокелавадзе (2005-2008).

Приведенные выше соображения указывают на своеобразие и актуальность исследования свойств *W*-групп, причем целесообразно рассмотреть как общий случай биномиального кольца (в зависимости от задачи), так и некоторые частные случаи - кольца главных идеалов, поля, факториальные кольца и т.д.

С другой стороны, изучение свойств (универсальных) алгебр, в частности, групп, алгебр Ли и т.д. можно проводить опираясь на те или иные исходные свойства. В ряде исследований решается следующая задача: изучить влияние свойств множества всех подалгебр (подгрупп) на свойства самой алгебры (группы). Тем самым выяснить, насколько полно теоретико-множественные операции, заданные на множестве всех подалгебр (подгрупп) определяют свойства алгебраических операций.

Все это, а также работы [5,6,28,33] подтверждает актуальность исследования *W*-степенных групп и алгебр Ли на фоне решетки ее подгрупп и подалгебр.

Целью работы является изучение *W*-степенных нильпотентных групп Холла и нильпотентных алгебр Ли с решеточной точки зрения и выявление связей между строением *W*-степенной группы G и алгебры Ли L и строением решетки всех ее подгрупп $\mathcal{L}(G)$ и подалгебр $\mathcal{L}(L)$.

В частности:

(1) Исследование решеточных изоморфизмов *W*-степенных групп и плгебр Ли над общими биномиальными кольцами;

(2) Доказательство основной теоремы проективной геометрии для 2-нильпотентных *W*-степенных групп и алгебр Ли над кольцами главных идеалов.

Объектами исследования являются *W*-степенная группа G, решетка ее подгрупп $\mathcal{L}(G)$ и решеточные изоморфизмы, а также аналогичные задачи для алгебр Ли.

Методы исследования. В диссертационной работе применяются методы общей теории групп, теории колец и решеток, теории алгебр Ли.

Все основные результаты диссертации являются новыми и получены автором единолично.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты и разралботанные в ней методы могут быть применены в дальнейших исследованиях по теории *W*-степенных групп, алгебр Ли и теории решеток, а также для проведения спецкурсов и спецсеминаров для студентов старших курсов, магистрантов и аспирантов.

Аппробация. Основные результаты диссертационной работы докладывались на научных семинарах Тбилисского, Кутаисского и Батумского Университетов, Грузинского

Технического университета; республиканских математических конференциях (Тбилиси, 1977, 2001, 2005); международной конференции "*Group Theory Methods in Physics and Mathematics"* (Батуми, 2003); международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию проф. А.П.Куроша (Москва, 2008, докладчик А.Лашхи).

По теме диссертации автором опубликовано 7 научных работ: список см. в конце диссертации.

Диссертационная работа состоит из введения, семи параграфов и списка литературы. Отметим, что для полного представления картины в библиографии приведен список работ относительно W-степенных групп и алгебр Ли и смежных вопросов.

Перейдем к более детальному изложению.

Если G-группа, то решетку *Sub* G будем обозначать через $\mathcal{L}(G)$. Всякое изоморфное отображение $\varphi:\mathcal{L}(G)\to\mathcal{L}(G')$ решетки $\mathcal{L}(G)$ на решетку подгрупп $\mathcal{L}$(G') некоторой другой группы G' называют решеточным изоморфизмом групп G и G' или проектированием G на группу G'.

В этом случае группы G и G' называют решеточными изоморфными, или еще говорят, что G' есть образ группы G при решеточном изоморфизме φ. В дальнейшем образ группы G при решеточном изоморфизме φ будем обозначать через G^{φ}. Далеко не всегда решеточные изоморфные группы оказываются изоморфными. Например, все циклические группы простых порядков решеточно изоморфны, но, конечно, не изоморфны. С другой стороны, существуют группы, которые изоморфны любому своему решеточному образу. Действительно, если G - бесконечная циклическая группа, то при любом решеточном изоморфизме φ группа G^{φ} будем также бесконечной циклической, т.е. G и G^{φ} изоморфны. В случае, если любой решеточный образ группы G изоморфен G, то говорят, что группа G определяется решеткой своих подгрупп (решеточно определяется).

Кроме того, не для всякой группы G и не для всякого ее решеточного изоморфизма φ, даже при условии, что G определяется решеткой своих подгрупп, существует изоморфизм групп G и G^{φ} индуцирующий решеточный изоморфизм φ. Как уже указывалось, бесконечная циклическая группа определяется решеткой своих подгрупп, однако легко установить, что существуют решеточные автоморфизмы бесконечной циклической группы, не индуцируемые ее автоморфизмами. Поэтому в том случае, когда каждый решеточный изоморфизм φ группы G индуцируется хотя бы одним изоморфизмом (такие группы существсуют: абелевы, но не локально циклические, группы без кручения, свободные группы и др.), то говорят, что группа G строго определяется решеткой своих подгрупп или для G справедлива основная теорема проективной геометрии.

В данной работе исследования по решеточным изоморфизмам W-групп и алгебр Ли ведутся по следующим основным направлениям.

A. Изучаются условия, при которых группа и алгебра Ли определяются решеткой своих подгрупп и подалгебр. Особый интерес здесь представляют случаи , когда группа строго определяется этой решеткой.

B. Исследуются абстрактные теоретико-групповые свойства, сохраняющиеся при решеточных изоморфизмах групп. Кроме того, выявляется, когда эти свойства могут быть выражены в терминах решетки подгрупп данной группы. В этом случае говорят, что данное свойство допускает решеточную характеристику. Нахождение решеточных характеристик свойств мы рассматриваем как основную проблему, а доказательство решеточной инвариантности - как промежуточный этап к указанной главной задаче.

C. Изучается поведение тех или иных характерных подгрупп данной группы при ее решеточных изоморфизмах. Выясняется, в каких случаях можно получить решеточную характеристику этих подгрупп, т.е. при каких условиях можно выделить эти подгруппы как "особые" элементы в решетке всех подгрупп данной группы.

Основное внимание концентрируется на W-степенных группах и алгебрах Ли близких к абелевым - нильпотентных класса 2.

Параграфы 1 и 2 носят вспомогательный характер и в них изложены некоторые известные факты о W-степенных группах и алгебрах Ли с решеточной точки зрения.

В параграфе 1 кроме того доказана теорема о решеточных изоморфизмах двумерных модулей над кольцами главных идеалов. Этот факт в дальнейшем сыграет важную роль при изучении справедливости основной теоремы проективной геометрии для трехмерных чистых W-групп и алгебр Ли.

В параграфе 3 доказана теорема о строгой решеточной определяемости чистых трехмерных алгебр Ли.

Изучен вопрос о решеточной определяемости (в нестрогом) смысле нильпотентных класса 2 степенных групп и алгебр Ли над общими кольцами: существование полулинейного изоморфизма при наличии решеточного изоморфизма (параграф 4).

Основная теорема проективной геометрии для чистых нильпотентных класса 2 *W*-степенных групп без ограничения на размерности доказана в параграфе 5.

Решеточным изоморфизмам смешанных нильпотентных класса 2 и $n \geq 3$ *W*-степенных групп и алгебр Ли посвящены параграфы 6-9. В них строятся соответствующие контрпримеры, отвечающие на естественно, возникающие вопросы.

რ ე ზ ი უ მ ე

ყოველ უნივერსალურ ალგებრას (ალგებრულ სისტემებს) უკავშირდება მისგან წარმოქმნილი ობიექტები. პირველ რიგში ასეთებია ყველა ენდომორფიზმთა *End[A]* ნახევარჯგუფი, ავტომორფიზმთა *Aut[A]* ჯგუფი და ქვეალგებრათა *Suh[A]* მესერი.

ალგებრის მნიშვნელოვანი ნაწილი ეთმობა უნივერსალურ ალგებრათა და მათ ენდომორფიზმებს შორის ურთიერთქმედების გამოკვლევას. მნიშვნელოვანია აგრეთვე ელემენტთა ქცევა ალგებრულ სისტემებსა და მათ ქვესისტემებში.

ამ თემატიკაზე ბევრი გამოკვლევაა ალგებრულ და ტოპოლოგიურ ჯგუფებსა და რგოლებში, ქვეჯგუფებსა და ლის ალგებრებში და ა.შ.

ჯგუფთა თეორიაში მრავალი გამოკვლევაა ჩატარებული ალგებრული სისტემებისა და მათი ქვესისტემების მესერებს შორის კავშირის დასადგენად (იხ. მ.სუძუკი [1], ს.შმიდტი [2] და მათში ციტირებული ლიტერატურა ლის ალგებრებთან დაკავშირებული საკითხები, იხ. ა.ლაშხი [5,6]).
სურათის უფრო სრულყოფილად წარმოსადგენად იხ. [7-61], აგრეთვე ავტორის ნაშრომები [62-68].

უნივერსალური ალგებრის მესერული საკითხების გამოკვლევებმა ცხადჰყო, რომ ალგებრებსა და მათ ქვეალგებრათა მესერებს შორის დამოკიდებულების დადგენა არის ძალზედ საინტერესო და მნიშვნელოვანი მიმართულება ზოგად ალგებრაში.

წარმოდგენილი დისერტაცია ეხება აღნიშნულ თემატიკას, სადაც უნივერსალური ალგებრის როლში განხილულია ჰოლის W ხარისხოვანი ჯგუფი და ლის ალგებრა.

დისკრეტული *W*-ხარისხოვანი ჯგუფის განმარტება შემოიტანა ლ. ჰოლმა. მანვე განაზოგადა ნილპოტენტურ ჯგუფთა თეორიის ზოგიერთი შედეგი ასეთი ტიპის ჯგუფისათვის.

W-ხარისხოვანი ჯგუფების ზოგადი თეორია განავრცეს ხ.მაგომაევმა (1968-1971), ა.თავაძემ (1976), ა.შმელკინმა (1979), მ.ამაღლობელმა, ვ.რემესლენიკოვმა (2000), ა.ლაშხმა (2005-2008), თ.ბოკელავაძემ (2005-2008).

ყოველივე ზემოთ თქმული ადასტურებს *W*-ჯგუფთა თვისებების კვლევის აქტუალობას, ამასთან მიზანშეწონილია განვიხილოთ ბინომიალური რგოლის როგორც კერძო, ისე ზოგადი შემთხვევებიც: მთავარ იდეალთა რგოლი, ველი,ფაქტორიალური რგოლები და ა.შ.

მეორეს მხრივ, უნივერსალურ ალგებრათა, კერძოდ, ჯგუფების, ლის ალგებრების და ა.შ. თვისებების შესწავლისას შესაძლებელია დავეყრდნოთ სხვადასხვა თვისებებს. რიგ გამოკვლევებში გადაწყვეტილია შემდეგი ამოცანა: შესწავლილ იქნას ყველა ქვეალგებრათა სიმრავლის თვისებების გავლენა თვითონ ალგებრის (ჯგუფის) თვისებებზე და ამით გაირკვეს ქვეალგებრებზე განსაზღვრული სიმრავლურ- თეორიული ოპერაციები რამდენად სრულად განსაზღვრავენ ალგებრულ ოპერაციათა თვისებებს.

ყოველივე ზემოთთქმული, ამტკიცებენ W-ხარისხოვან ჯგუფთა და ლის ალგებრების მესერული იზომორფიზმების გამოკვლევის აქტუალობას.

სადისერტაციო ნაშრომის მიზანია ჰოლის W-ხარისხოვანი ჯგუფებისა და ნილპოტენტური ლის ალგებრების შესწავლა მესერული თვალსაზრისით და კავშირების დადგენა ამ ჯგუფებისა და მათი მესერების აგებებს შორის, კერძოდ:

A. ბინომიალურ რგოლზე განსაზღვრული W-ხარისხოვანი ჯგუფებისა და ლის ალგებრების მესერული იზომორფიზმების გამოკვლევა.

B. ჰოლის W-ხარისხოვანი 2-ნილპოტენტური ჯგუფებისათვის და მთავარ იდეალთა რგოლზე განსაზღვრული ლის ალგებრებისათვის პროექციული გეომეტრიის ძიითადი თეორემის დამტკიცება.

კვლევის ობიექტებია: W-ხარისხოვანი ჯგუფები, მისი ქვეჯგუფთა $\mathscr{L}(G)$ მესერი და მესერული იზომოფიზმები, ასევე ანალოგიური ამოცანები ლის ალგებრებისათვის.

კვლევის მეთოდები: სადისერტაციო ნაშრომში გამოყენებულია ჯგუფთა, რგოლთა და მესერთა თეორიების, აგრეთვე ლის ალგებრების ზოგადი თეორიის მეთოდები.

დისერტაციის ყველა ძირითადი შედეგი ახალია და მიღებულია ავტორის მიერ.

ნაშრომი თეორიული ხასიათისაა. მისი შედეგები და დამუშავებული მეთოდები შეიძლება გამოყენებულ იქნას W-ხარისხოვანი ჯგუფების, ლის ალგებრებისა და მესერების შემდგომი კვლევებისას; აგრეთვე უფროსკურსელ სტუდენტებთან, მაგისტრანტებთან და ასპირანტებთან სპეცკურსებსა და სემინარებზე.

აპრობაცია: ძირითადი შედეგები მოხსენებულ იქნა თბილისის, ქუთაისის და ბათუმის უნივერსიტეტთა სამეცნიერო სემინარებზე, საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში, რესპუბლიკურ მათემატიკურ კონფერენციებზე (თბილისი, 1977, 2001, 2005), საერთაშორისო კონფერენციაზე: „Group Theory Methods in Physics and Mathematics" (ბათუმი, 2003), ა.კუროშის 100 წლისთავისადმი მიძღვნილ საერთაშორისო კონფერენციაზე (მოსკოვი, 2008, მომხსენებელი ა.ლაშხი).

დისერტაციის თემაზე ავტორს გამოქვეყნებული აქვს 7 სამეცნიერო შრომა (იხ. ლიტერატურა დისერტაციის ბოლოს).

სადისერტაციო ნაშრომი შედგება შესავალის, 9 პარაგრაფის და ლიტერატურისგან. ლიტერატურას დართული აქვს W-ხარისხოვან ჯგუფებზე გამოქვეყნებულ ნაშრომთა ბიბლიოგრაფია.

განვიხილოთ უფრო დაწვრილებით:

$\mathscr{L}$(G)-ით აღინიშნება G ჯგუფის მესერი იზომორფულ ასახვას:

$\varphi:\mathscr{L}(G)\rightarrow\mathscr{L}(G')$ ეწოდება G და G' ჯგუფების მესერული იზომორფიზმი, ან G -ს პოექცია G' .

შემდეგში, G–ს მესერულ ანასახს აღვნიშნავთ G^{φ}-ით. მესერულად იზომორფული ჯგუფები ყოველთვის არ არიან იზომორფულნი. მაგალითად, მარტივი რიგის ციკლური ჯგუფები მესერულად იზომორფულნი არიან, მაგრამ არ არიან იზომორფულები. მეორეს მხრივ, არსებობენ ჯგუფები, რომლებიც იზომორფულნი არიან თავის ნებისმიერ მესერულ ანასახთან. მართლაც, თუ G არის უსასრულო ციკლური ჯგუფი, მაშინ G^{φ} ასევე უსასრულო ციკლური ჯგუფია, ე.ი. G და G^{φ} იზომორფულებია. როდესაც G და G-ჯგუფის ნებისმიერი მესერული ანასახი G^{φ} იზომორფულებია., მაშინ ამბობენ, რომ G-ჯგუფი განისაზღვრება თავის ქვეჯგუფთა მესერით; გარდა ამისა, ზოგიერთი G ჯგუფისათვის და ზოგიერთი მესერული იზომორფიზმისათვის, იმ შემთხვევაშიც კი, როდესაც G განისაზღვრება თავის ქვეჯგუფთა მესერით შესაძლებელია არ არსებობდეს φ მესერული იზომორფიზმი, ინდუცირებული G და G^{φ} ჯგუფების იზომორფიზმით, მართლაც_როგორც უკვე ვთქვით, უსასრულო ციკლური ჯგუფი განისაზღვრება თავის ქვეჯგუფთა სტრუქტურით, მაგრამ არსებობს უსასრულო ციკლურ ჯგუფთა მესერული იზომორფიზმი, რომელიც არ ინდუცირდება მისი ავტომორფიზმებით; ამიტომ იმ შემთხვევაში, როდესაც მესერული იზომორფიზმი ინდუცირდება ერთი მაინც იზომორფიზმით (ასეთებია არალოკალურად

ციკლური აბელის ჯგუფები, გრეხვის გარეშე ჯგუფები, თავისუფალი ჯგუფები და ა.შ.). მაშინ ამბობენ, რომ G მკაცრად განისაზღვრება თავის ქვეჯგუფთა მესერით, ან, რაც იგივეა, რაც G ჯგუფისათვის სამართლიანია პროექციული გეომეტრიის ძირითადი თეორემა.

დისერტაციაში W-ჯგუფთა მესერული იზომორფიზმების კვლევა მიმდინარეობს შემდეგი ძირითადი მიმართულებებით:

1. შეისწავლება პირობები, რომელთათვისაც G ჯგუფი და ლის ალგებრა განისაზღვრება თავის ქვეჯგუფთა და ქვეალგებრათა მესერებით. განსაკუთრებულ ინტერესს იწვევს ის შემთხვევაც, როცა G ჯგუფი მკაცრად განისაზღვრება თავისი მესერით.

2. ხდება გამოკვლევა აბსტრაქტული თეორიულ-ჯგუფური თვისებებისა, რომლებიც უცვლელი რჩება ჯგუფთა მესერული იზომორფიზმების დროს. გარდა ამისა, შესწავლილია რა პირობებშია შესაძლებელი ეს თვისებები გადავიტანოთ „მესერულ ენაზე". ამ დროს ამბობენ, რომ თვისება ატარებს მესერულ ხასიათს. მესერული მახასიათებლების ძიება არის დისერტაციის ერთ-ერთი ძირითადი პრობლემა, ხოლო მესერული ინვარიანტების დამტკიცება – შუალედური ეტაპია ძირითად მიზნამდე.

3. მახასიათებელ ქვეჯგუფთა გამოკვლევა მესერული იზომორფიზმების დროს; შეისწავლება რა პირობებშია შესაძლებელი მესერული მახასიათებლის მიღება ასეთი ქვეჯგუფისათვის, ანუ როდის შეგვიძლია ეს ქვეჯგუფები გამოვყოთ როგორც „განსაკუთრებული ელემენტები" მესერში.

ძირითადი ყურადღება გამახვილებულია აბელურთან ახლო მყოფ W-ხარისხოვან ჯგუფებზე და თითქმის აბელურ ლის ალგებრებზე (ნილპოტენტური კლასისა 2).

პარაგრაფები 1-2 ატარებს დამხმარე ხასიათს და მასში გადმოცემულია W-ხარისხოვანი ჯგუფებისა და ლის ალგებრების ზოგიერთი ცნობილი ფაქტი (მესერული თვალსაზრისით).

გარდა ამისა, პარაგრაფ 1-ში შესწავლილია მთავარ იდეალთა რგოლზე განსაზღვრული ორ განზომილებიანი თავისუფალი მოდულების მესერული იზომორფიზმები.

ეს ფაქტი, მომავალში არსებით როლს შეასრულებს პროექციული გეომეტრიის ძირითადი თეორემის დამტკიცებისას (სამგანზომილებიანი სუფთა W- ჯგუფებისათვის და ლის ალგებრებისათვის).

დამტკიცებულია თეორემა ნილპოტენტური კლასისა ორი გრეხვის გარეშე ჯგუფებისა და ლის ალგებრების ქვეალგებრათა მესერებით განსაზღვრის შესახებ არამკაცრი თვალსაზრისით (პარაგრაფ 3).

პროექციული გეომეტრიის ძირითადი თეორემა სუფთა 2-ნილპოტენტური W-ხარისხოვანი ჯგუფებისათვის და ლის ალგებრებისათვის (განზომილების შეზღუდვის გარეშე) დამტკიცებულია პარაგრაფებში 3 და 5.

$n \geq 3$ კლასის ნილპოტენტური W-ხარისხოვანი ჯგუფების და ლის ალგებრათა მესერულ იზომორფიზმებს ეძღვნება პარაგრაფები 6-9. მათში აგებულია კონტრმაგალითები ბუნებრივად წამოჭრილი კითხვების შესაბამისად.

Summaru

With each universal algebra (algebraic system) A we connect some derived from it objects (systems). These are first of all: semigroup of all endomorphisms *End[A]*, group of automorphisms *Aut[A]* and lattice (structure) of all subalgebras *Sub[A]*.

Considerable part of algebra is the investigation of interactions between univarsal algebra and its endomorphisms and automorphisms. The conditions between behaviour of elements (operations) in algebraic system and subsystems behaviour are also studied. Investigations on this topic have been conducted in abstract and topological groups and rings, semigroups, Lie algebras etc.

Comparatively great experience of study the connections between the algebraic system and the lattice of its subsystems has been accumulated in the theory of groups. One can see the monographs M. Sudzuki [1] and R. Schmidt [2], and cited by them references (also reviews [3,4]). As the Lie algebras refer to reviews by A.A. Lashkhi [5,6]. For more detalies see [7-61] and the papers of autor [62-68].

Ideology of works on lattice problems of universal algebras proves that investigation of connection between structure of algebra and structure of the lattice of its subalgebras is an interesting and important trend in general algebra. The present work refers to the above-mentioned trend when W-power Hall group and Lie algebra are defined as universal algebra.

F. Hall introduced the notion of discrete W-power group. He generalized for it some results from the theory of nilpotent groups. The meaning of the W-power nilpotent group in general theory of abstract groups is defined by the fact that any finitely generated nilpotent torsion-free group is embedded into some W-power group.

General theory of W-power group was developed by Kh.magomaev (1968-1971), A.D.Tavadze (1976), A.L.Shmelkin (1979), V.H. Remeslennikov (2000), M.G.Amaglobeli (2001), A.Lashkhi (2005-2008), T.Bokelavadze (2005-2008).

The above considerations prove the originality and topicality of the investigation of the W-group properties, considering both general case of binomial ring (depending on the problem) and some particular cases principal ideal domains, fields, factorial rings etc.

On the other hand, the study of the properties of universal algebras, in particular, groups, Lie algebras and etc, can be conducted basing on some initial properties. In a number of investigations the following problem is solved: to study the influence of the properties of the set of all subalgebras (subgroups) on the properties of the algebra (groups) itself. Thus we can reveal if multiple operations, given on the set of all subalgebras (subgroups) define the properties of algebraic operations completely.

All this, prove the topicality of investigations of *W*-power groups and Lie Algebras against the background of lattice, its subgroups and subalgebras.

The aim of the work is to study *W*-power nilpotent Hall groups and nilpotent Lie algebras from the lattice point of view and to reveal the connections between the structures of *W*-power group G and Lie algebras L and structure of the lattice of all its subgroups $L(G)$ and subalgebras $L(L)$

In particular:

(1) Investigation of lattice isomorphisms of *W*-power groups and Lie algebras over general binormal rings;

(2) Proof the fundamental theorems of projective geometry for nilpotent of class 2 *W*-power groups and Lie algebras over the principal ideal domains.

The object of the investigation is *W*-power group G, the lattice of its subgroup $\mathscr{L}(G)$ and lattice isomorphisms, also Lie algebra L and the lattice $\mathscr{L}(L)$.

Methods of investigation. In dissertation work the methods of general group theory, rings theory, lattices theory, theory of Lie algebras are used.

All the basic results in dissertation are new and obtained by the author on his own.

The work is of theoretical character. Its results and the methods worked out in it can find their application in further investigations on the theory of *W*-power groups, Lie algebras and lattices theory. They also can be used in special courses and seminars for senior students, magistrates and post-graduates.

Approbation. The main results of dissertation work have been reported on scientific seminars of Tbilisi, Kutaisi, and Batumi Universities, Georgian technical University, on the Republican Mathematical Conferences (Tbilisi, 1977, 2001, 2005), International Algebraic Conference, dedicated to 100th birthday anniversary of Prof. Kurosh A.P. (Moscow, 2008, spiker A.Lashkhi).

The author published 7 scientific works referring to the theme of the dissertation: see the list at the end of dissertation. Dissertation work consists of introduction, seven paragraphs and the bibliography list. In order to make the picture complete we introduced in the bibliography the list of works in respect to W-power groups and issues concerned.

Let us to go to more detailed presentation. If G is a group, then lattice *SubG* will be denoted through $\mathscr{L}(G)$. Any isomorphic mapping φ: $\mathscr{L}(G)\to \mathscr{L}(G')$ of the lattice $\mathscr{L}$ on the lattice of subgroups $\mathscr{L}$ of some other group is called lattice isomorphism G in the group G'.

In this case groups *G* and are called lattice isomorphic, or it could be said, that is an image of the group *G* beside the lattice isomorphism. Further image of the group *G* beside lattice isomorphism will be denoted via G^{φ}. It is not always that isomorphic groups are isomorphic: simple orders are lattice isomorphic, but, of course they are not isomorphic. On the other hand, there exist groups, which are isomorphic to any self lattice image. In fact if G is infinite cyclic group, then at any lattice isomorphism group G^{φ} will be also infinite cyclic, i.e. *G* and G^{φ} are isomorphic. In case when any lattice image of *G* group is isomorphic to *G*, it is said, that group *G* is determined by the lattice of its subgroups (determined by lattice). Besides, not for any group G and not for any lattice isomorphism, even under condition, that *G* is determined by subgroup the lattice of its subgroup, there exists isomorphism of groups *G* and G^{φ} inducing lattice isomorphism. As mentioned above, infinite cyclic group is determined by the structure of its groups, however, it is easy to establish that there exist lattice auromorphisms of infinite cyclic group, being not indused by its auromorphisms. That is why in the case, when each lattice isomorphism of group G is induced at least by one isomorphism (such groups exist: torsion free abelian, but not locally cyclic, groups without torsion, free groups etc.) it is said that group *G* is strictly defined by the lattice of its subgroups or the fundamental theorem of projective geometry is valid for *G*.

In present work investigations on lattice isomorphisms of *W*-groups are conducted in the following basic trends.

1) The conditions under which the group and Lie algebra are defined by the lattice of their subgroups and subalgebras, are studied. Special interest here is presented by the cases, when the group is strictly defined by the lattice of its subgroups.

2) Abstract theoretic group properties, preserved under the lattice isomorphisms are investigated. Besides, it is defined, when these properties can be expressed in the terms of the lattice of the subgroups of the given group. In this case it can be said that the given property admits lattice xharacteristics.

We consider finding of the lattice characteristics as the main problem, and the proof of the lattice invariance – as intermediate stage to the main mentioned problem.

3) The behavior of that or these characteristic subgroups of the given group at its lattice isomorphisms is studied. It is defined, in which cases we can obtain lattice characteristic of these subgroups, i.e. under what conditions these subgroups are "special" elements in the lattice of all subgroups of the given group. Main attention is concentrated on *W*-power groups and Lie algebras close to the abelian nilpotent class 2.

Chepter 1 and 2 are of auxiliary character. They contain some known facts about *W*-power groups and Lie algebras from the lattice point of view.

In chepter 1 the theorem on lattice isomorphisms of two-dimensional modules of the of principal ideal domains. This fact further will be important when studying the validity of fundamental theorem of the projective geometry for three-dimensional prpper *W*-groups and Lie algebras.

In chepter 3, the theorem on strict lattice determination of proper three-dimensional Lie-algebras and *W*-power groups is proved.

The problem on lattice determination (not in a strict sense) of nilpotent class of class 2 W-power groups and Lie algebras over general rings: existence of semilinear isomorphism at presence of lattice isomorphisms (is studied chepter 4).

The fundamental theorem of projective geometry for proper nilpotent of class 2 *W*-power groups and Lie algebras without restriction on dimensionality is proved in chepter 5.

In chepters 6-9 are devoted to lattice isomorphisms of mixed nilpotent class 2 and $n \geq 3$ W-power groups and Lie algebras. Corresponding contrexamples answering to the naturally a risen questions are given.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

1. ИЗОМОРФИЗМЫ РЕШЕТОК ПОДМОДУЛЕЙ ДВУМЕРНЫХ МОДУЛЕЙ И ПОДАЛГЕБР ТРЕХМЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ

Предположим, что A и B модули без кручения ранга 2 над коммутативными кольцами главных идеалов K и K_1. Будет ли коллинеация $f{:}P(A)\to P(B)$ или решеточный изоморфизм $f{:}\mathcal{M}(A)\to\mathcal{M}(B)$ порождаться какими-то "хорошими" биекциями между A и B, близкими к полулинейным изоморфизмам. Ситуация полностью ясна в двух "крайних" случаях, а именно, когда $K=Z$, то теорема Р.Бэра (см.[2]) гласит, что f будет порождаться двумя изоморфизмами φ_1 и $\varphi_1= -\varphi_1$; в случае же, когда K и K_1 поля одинаковой мощности, любая биекция между одномерными подпространствами будет порождать изоморфизм решеток подпространств, котоырй, в общем, не будет порождаться никаким "хорошим" соответствием. Мы будем выяснять "промежуточный" случай: когда K – кольцо главных идеалов и $K\neq Z$ и K не есть поле. Предварительно докажем несколько предложений.

1.1. Проективные отображения двумерных модулей над кольцами главных идеалов

Предложение 1.1.1. *Если $\langle x\rangle$ – циклический модуль над кольцом главных идеалов $Ann(\langle x\rangle)=id(n)$, $n=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\dots P_n^{\alpha_n}$, то $\mathcal{M}(\langle x\rangle)$ допускает изоморфизм лишь на $\mathcal{M}(\langle y\rangle)$, $Ann(\langle y\rangle)=id(n_1)$, $n_1=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\dots q_n^{\alpha_n}$, где p_i, q_i $(i=1,\dots,n)$ простые элементы из K.*

Доказательство вытекает из соответствующего факта (см. [1]).

Предложение 1.1.2. *Если $Ann(\langle x_1\rangle)=0$ и на подмодуле $\langle\gamma x_1\rangle$ на подмодуле изоморфизм f порождается σ - полулинейным изоморфизмом μ, то f порождается σ – полулинейным изоморфизмом μ и на $\langle x_1\rangle$.*

Действительно, пусть $f{:}\mathcal{M}(\langle x_1\rangle)\to\mathcal{M}(\langle x_2\rangle)$ – изоморфизм и $f(<\gamma x_1>)=<\beta x_2>$; имеем также изоморфизм

$$\overline{f}:\ \mathcal{M}(\langle x_1\rangle/<\gamma x_1>)\to\mathcal{M}(\langle x_2\rangle/\langle\beta x_2\rangle),\ \gamma=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\dots P_n^{\alpha_n},\ \beta=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\dots q_n^{\alpha_n}.$$

По условию существует σ – *полулинейный изоморфизм* $\mu{:}\langle\gamma x_1\rangle\to\langle\beta x_2\rangle$. Пусть $q_1\neq\sigma(P_1)$, тогда имеем

$$f(\langle P_1\alpha x_1\rangle=\langle\sigma(P_1)\ \beta x_2\rangle\Rightarrow\mathcal{M}(<x_1>/<P\alpha x_1>)\cong$$

$$\mathcal{M}(\langle x_2\rangle / \langle \sigma(P_1)\ \beta x_2\rangle) \Rightarrow \sigma(P_i) = q_i,\ \sigma(\alpha)=\beta.$$

Пусть теперь P – произвольный элемент из K, тогда $f(\langle Px_1\rangle) = \langle \sigma(P)x_2\rangle$. Действительно, если $P=P_i$, то все ясно; пусть $P \neq P_i$, тогда

$$\mu(P_\alpha x_1) = \sigma(P)\sigma(\alpha)\mu(x_1) = \sigma(\alpha)\mu(Px_1) = \sigma(\alpha)q\mu(x_1) \Rightarrow \sigma(P) = \sigma(q).$$

Предложение 1.1.3. *Если $f\colon \mathcal{M}(Q) \to \mathcal{M}(Q_1)$ на чистом локально циклическом модуле Q порождается полулинейным изоморфизмом хотя бы на одном подмодуле, то f порождается таким же соответствием и на Q.*

Действительно, пусть f порождается полулинейным изоморфизмом на $\langle a\rangle$ и $\langle x\rangle$ – произвольный подмодуль; на $\langle x_1\rangle = \langle x\rangle \cap \langle a\rangle$ f порождается полулинейным изоморфизмом. Справедливость утверждения ясна, так как f порождается полулинейным изоморфизмом на каждом конечнопорожденном подмодуле.

Справедлива следующая (доказательство см. в [1]).

Лемма 1.1.1. *Пусть $A = \langle x\rangle + \langle y\rangle$, $B = \langle x_1\rangle + \langle y_1\rangle$ – свободные модули; $f\colon \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(B)$ изоморфизм, тогда в B можно так подобрать образующие $\mu(x)$, $\mu(y)$ подмодулей $\langle x_1\rangle$ и $\langle y_1\rangle$, что $f(\langle x+y\rangle) = <\mu(x) + \mu(y)\rangle$.*

Примем обозначение: $\mu(x+y) = \mu(x)+\mu(y)$. Зафиксируем циклический модуль $\langle z\ \rangle = Z$.

Таким образом, существуют биекции σ_Z между множествами простых элементов, порожденные циклическими модулями $\langle z\ \rangle$. Из леммы имеем:

$\mu(x+z) = \mu(x)+ \mu(z)$, $\mu(x+\varepsilon z) = \mu(x)+ \varepsilon(x,z)\ \mu(z)$, $z \in A$, $\langle z\rangle \cap \langle x\rangle = 0$ и ε – обратим. Ясно, что $\varepsilon \neq \gamma \Leftrightarrow \varepsilon_1(x,z) \neq \gamma_1(x,z)$, так как

$$\langle x+\varepsilon z\rangle \cap \langle x+\gamma z\rangle = 0 \Rightarrow 0 = f(\langle x+\varepsilon z\rangle) \cap f(\langle x+\gamma z\rangle) =$$
$$= \langle \mu(x)+\varepsilon_1(\gamma,z)\mu(z)\rangle = \langle \mu(x)+\gamma_1(x,z)\mu(z)\rangle \neq 0.$$

1.2. О биекциях между основными кольцами

Таким образом, между обратимыми элементами $E \subset K$ и $E_1 \subset K_1$ также существует биекция $\sigma_1(x,z)\colon E \to E_1$.

Нетрудно видеть, что биекция σ_z не зависит от z, действитлеьно, если $\sigma_x(P) = P_1$, $\sigma_y(P) = P_2$ и $\sigma_{x+y}(P) = \overline{P}$, то имеем

$$\mu(P(x+y)) = \alpha\sigma_{x+y}(P)(\mu(x+y)) = \alpha\overline{P}(\mu(x)+\mu(y))$$
$$\|$$

$$\mu(Px+Py)=\alpha_1\sigma_x(P)\mu(x)+\alpha_2\sigma_y(P)\mu(y)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\alpha=\alpha_1,\alpha_2,\ \ \overline{P}=\sigma_{x+y}(P)=\sigma_x(P)=\sigma_y(P)=\sigma(P).$$

Поэтому, без ограничения общности, можем считать, что $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = 1$ и $\mu(Px) = \sigma(P)\mu(x)$ для любого $x\in A$.

Применяя простую индукцию находим, что если

$$\mu(x+y)=\mu(x)+\mu(y)\Rightarrow\mu(x+Py)=\mu(x)+\varepsilon_1(x,y,P)\sigma(P)\mu(y)\Rightarrow$$

$$\ldots\Rightarrow\mu(x+P^n y)=\mu(x)+\varepsilon_1(x,y,P^n)\sigma(P)^n\mu(y)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\mu(x+P_1^{n_1}P_2^{n_2}\ldots P_e^{n_e}y)=\mu(x)+\varepsilon_1(y,x,\alpha)\sigma(P_1)^{n_1}\sigma(P_e)^{n_2}\ldots$$

$$\ldots\sigma(P_e)^{n_e}\mu(y),\ \ \alpha=P_1^{n_1}P_2^{n_2}\ldots P_e^{n_e}.$$

Имеем также

$$\begin{array}{l}
\mu(x+(P_1+P_2)y) = \mu(x)+\varepsilon_1(x,y,P_1+P_2)\sigma(P_1+P_2)\mu(y)\\
\quad\ \|\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\|\\
\mu((x+P_1y)+P_2y) =\gamma_1(\mu(x)+\varepsilon_1(x,y,P_1)\mu(y)\sigma(P_1))+\gamma_2\sigma(P_2)\mu(y)\\
\quad\ \|\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\|\\
\mu((x+P_2y)+P_1y) =\gamma_3(\mu(x)+\varepsilon_1(x,y,P_2)\sigma(P_2)\mu(y)-\gamma_4\sigma(P_1)\mu(y),
\end{array}$$

$$\varepsilon_1(x,y,P_1+P_2),\ \varepsilon_1(x,y,P_1),\ \varepsilon_n(x,y,P_2),\ \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4\in E\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\gamma_1=\gamma_3=1,\ \ \sigma(P_1+P_2)=\gamma_1(x,y,P_1)\sigma(P_1)+\gamma_1(x,y,P_2)\sigma(P_2).$$

Таким образом, относительно отображений

$$\sigma: P\to P_1,\ \ \sigma_1: E\to E_1$$

мы построили биекцию $\mu : A\to B$, удовлетворяющую следующим условиям: для любых $x,y\in A,\ \alpha,\alpha_1,\alpha_2\in K,\ \varepsilon\in E$. Справедливы равенства:

$$\sigma(\alpha)=\sigma(P_1)^{n_1}\sigma(P_2)^{n_2}\ldots\sigma(P_l)^{n_l},\ \ \alpha=P_1^{n_1},P_2^{n_2}\ldots P_e^{n_e};$$

$$\sigma(\alpha_1+\alpha_2) = \varepsilon_1(\alpha_1+\alpha_2)\sigma(\alpha_1)+\varepsilon_2(\alpha_1+\alpha_2)\sigma(\alpha_2),\ \ \varepsilon_1(\alpha_1+\alpha_2),$$

$$\varepsilon_2(\alpha_1+\alpha_2)\in E;$$

$$\mu(\alpha x) =\sigma(\alpha)\mu(x);$$

$$\mu(\alpha_1 x+\alpha_2 y) = \varepsilon_1(\alpha_1,x,y)\sigma(\alpha_1)\mu(x)+\varepsilon_2(\alpha_2,x,y)\sigma(\alpha_2)\mu(y),$$

$$\varepsilon_1(\alpha_1,x,y),\ \ \varepsilon_2(\alpha_2,x,y)\in E.$$

Ясно, что эта биекция согласована с леммой и тем самым индуцирует рассматриваемое отображение f.

1.3. Решеточные изоморфизмы чистых трехмерных алгебр Ли

В общем случае, построенная биекция не будет полулинейным изоморфизмом, однако, учитывая обобщение основной теоремы полулинейным изоморфизмом геометрии, если предполагать, что в A существует еще третий линейно независимый элемент, то тройка отображений (μ,σ,σ_1) будет определять проективность $\mu : A \to B$. Однако, оказывается, что в случае размерности 3 (и больше естественно), для получения желаемого полулинейного фзоморфизма σ, можно довольствоваться не всей решеткой подмодулей, а некоторой ее частью. А именно, если G трехмерная чистая нильпотентная алгебра Ли над кольцом главных идеалов K, то можно рассмотреть решетку подалгебр $\mathcal{L}(G)$, подмножество в решетке всех подмодулей G, и доказать

Предложение 1.3.1. *Пусть G и G_1 трехмерные чистые нильпотентные алгебры Ли над кольцами главных идеалов K и K_1, которые не являются полями, $f : \mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(G_1)$ – изоморфизм, тогда f индуцируется полулинейным фзоморфизмом μ как модулей G и G_1 относительно изоморфизма $\sigma : K \to K_1$.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a_1, a_2, [a_1,a_2] \rangle$ и $G_1 = \langle b_1, b_2, [b_1,b_2] \rangle$, $f(\langle a_1 \rangle) = \langle b_1 \rangle$, $f(\langle a_2 \rangle) = \langle b_2 \rangle$ имеем

$$f(\langle [a_1,a_2] \rangle) = \langle [\mu(a_1), \mu(a_2)] \rangle = \langle [b_1,b_2] \rangle.$$

Сделанные выше замечания позволяют на всех двумерных подалгебрах из G построить соответствия, удовлетворяющие перечисленным выше условиям и индуцирующие изоморфизм f. Ясно, что если μ одно из этих соответствий, то такими же будут и $\varepsilon\mu$ для всех $\varepsilon \in E$; из множества $\{\varepsilon\mu,\ \varepsilon \in E\}$ зафиксируем какой-либо один и обозначим через μ. Легко видеть, что для любых независимых $x_1, x_2 \in G$. Имеем

$$\mu(x_1+x_2) = \lambda_1\mu(x_1)+\lambda_2\mu(x_2)+\alpha_0[\mu(x_1), \mu(x_2)],\ \lambda_1, \lambda_2 \in E.$$

Действительно,

$$G_0 = \langle x_1, x_1+x_2 \rangle = \langle x_2, x_1+x_2 \rangle \Rightarrow f(G_0) = <\mu(x_1), \mu(x_1+x_2)> =$$

$$= <\mu(x_2), \mu(x_1+x_2)> \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in E_1.$$

Пусть теперь P – произвольный (но в дальнейшем фиксированный) простой элемент из K. В G построим цепь подалгебр

$$G \supset (P)G \supset (P^2)G \supset \ldots \supset (P^i)G \supset \ldots, \text{ где } (P_i)G = <P_i x, \ \forall x \in G>.$$

Обратимся к подалгебре $<P^i x_1, \ P^i x_2> \ \subseteq \ <P^i G> \ = \ (P^i)G$. К ней применимы все предыдущие рассуждения, поэтому

$$\mu(P^i(x_1+x_2)) = \sigma(P^i)\mu(x_1+x_2) = \sigma(P^i)(\lambda_1\mu(x_1)+\lambda_2\mu(x_2)+\alpha_0[\mu(x_1), \mu(x_2)],$$

$$||$$

$$\mu(P^i x_1+P^i x_2)= \varepsilon_1(x_1,x_2,P^i)\sigma(P^i)\mu(x_1)+\varepsilon_2(x_1,x_2,P^i)\sigma(P)^i\mu(x_2)+\alpha(i)[\mu(P^i x_1),\mu(P^i x_2)]=$$

$$= \varepsilon_1\sigma(P)^i\mu(x_1)+\varepsilon_2\sigma(P)^i\mu(x_2)+\alpha(i)\sigma(P)^{2i}[\mu(x_1),\mu(x_2)], \ \varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \lambda_1, \ \lambda_2 \in E_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma(P)^i\alpha_0[\mu(x_1),\mu(x_2)]=\alpha(i)\sigma(P)^{2i}[\mu(x_1),\mu(x_2)] \Rightarrow \alpha_0 = \alpha(i)\sigma(P)^i.$$

Последнее равенство справедливо при любом $i=1,2,\ldots$; Учитывая, что $\sigma(P)$ – простой элемент из кольца главных идеалов K_1, заключаем несовмести-мость равенства с условием максимальности в G_1, поэтому равенство верно лишь при $\alpha_0 = = \alpha(i) = 0$. Таким образом, для любых $x_1,x_2 \in G$

$$\lambda(x_1+x_2) = \lambda_1(x_1,x_2)\mu(x_1) + \lambda_2(x_1,x_2)\mu(x_2).$$

Покажем, что $\lambda_1(x_1,x_2) = \lambda_2(x_1,x_2) = 1$.

Пусть $Z(G) = < z >$. Без ограничения общности, можно предполагать, что x_1,x_2,z независимые элементы. Тогда

$$\mu[z + (x_1+x_2)] = \mu(z) + \mu(x_1+x_2) = \mu(z) + \lambda_1\mu(x_1) + \lambda_2\mu(x_2)$$

$$|| \qquad\qquad\qquad\qquad ||$$

$$\mu[(z + x_1) + x_2] = \lambda_3\mu(z +x_1) + \lambda_4\mu(x_2) = \lambda_3\mu(z) + \lambda_3\mu(x_1) + \lambda_4\mu(x_2)$$

$$|| \qquad\qquad\qquad\qquad ||$$

$$\mu[(z + x_2) + x_1] = \lambda_5\mu(z +x_2) + \lambda_6\mu(x_1) = \lambda_5\mu(z) + \lambda_5\mu(x_2) + \lambda_6\mu(x_1).$$

Следовательно, $\lambda_i = 1, \ i =1,2,\ldots,6$.

Учитывая, что $\mu(px) = \sigma(p)\mu(x)$, покажем

$$(1) \quad \sigma(p_1+p_2) = \sigma(p_1) + \sigma(p_2),$$

$$(2) \quad \sigma(p_1p_2) = \sigma(p_1)\sigma(p_2).$$

Действительно,

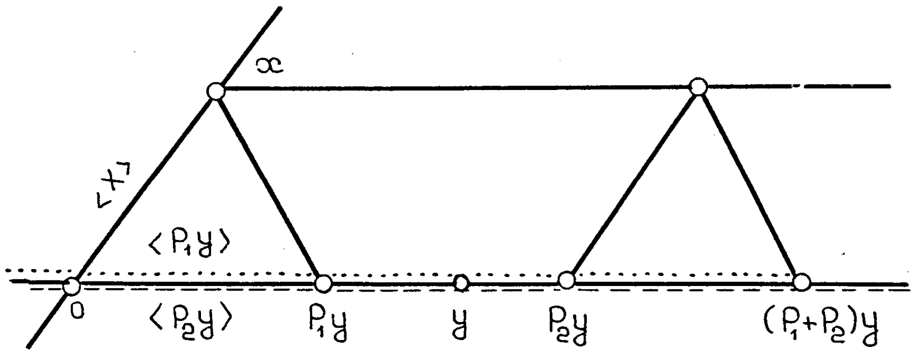
$$(1) \ \ \mu(z+(p_1+p_2)x) = \mu(z) + \sigma(p_1+p_2)\mu(x) = \mu[(z+p_1x) + p_2x] =$$

$$= \mu(z+p_1x) + \sigma(p_2)\mu(x) = \mu(z) + \mu(p_1x) + \sigma(p_2)\mu(x) =$$

$$= \ \mu(z) + (\sigma(p_1) + \sigma(p_2))\mu(x) \Rightarrow \sigma(p_1+p_2) = \sigma(p_1) + \sigma(p_2)$$

$$\Rightarrow \ \sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta), \ \alpha, \ \beta \in K \backslash E.$$

$$(2)\ \ \mu(z+p_1p_2x+p_2y) = \mu(z + (p_1p_2x+p_2y) = \mu(z) + \mu(p_2(p_1x + y)) =$$
$$= \mu(z) + \sigma(p_2)[\sigma(p_1)\mu(x) + \mu(y)]\ \mu[(z+p_2y) + p_1p_2x] =$$
$$= \mu(z+p_2y) + \mu(p_1p_2x) = \mu(z) + \sigma(p_2)\mu(y) + \sigma(p_1p_2)\mu(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sigma(p_1p_2) = \sigma(p_1)\ \sigma(p_2) \Rightarrow \sigma(\alpha\ \ \beta) = \sigma(\alpha)\ \sigma(\beta),\ \alpha, \beta \in K \backslash E.$$



Фиг. 1.

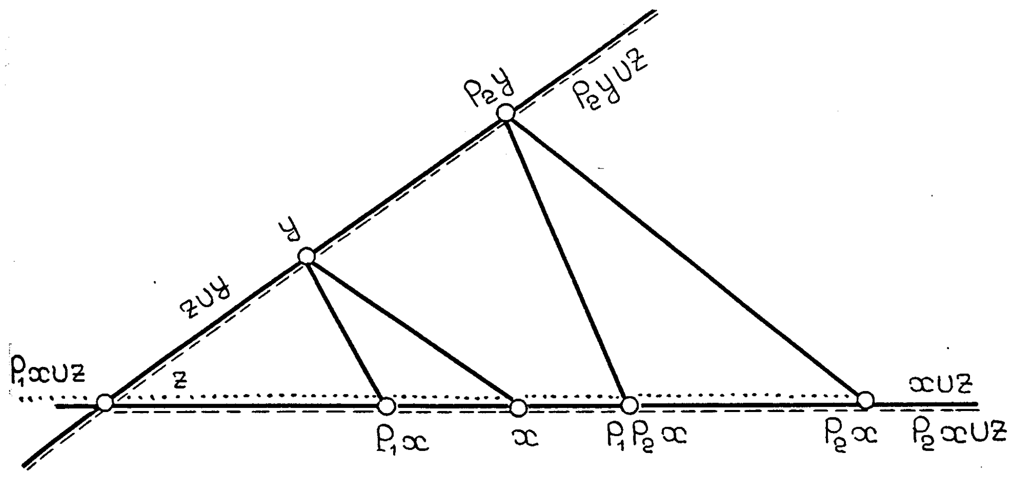
Покажем теперь, что для $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \in E$

$$(1)\quad \sigma_1(\varepsilon_1\varepsilon_2) = \sigma_1(\varepsilon_1)\sigma_1(\varepsilon_2),$$
$$(2)\quad \sigma_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \sigma_1(\varepsilon_1) + \sigma_1(\varepsilon_2).$$

Действительно,

$$\mu(z + \varepsilon_2x + \varepsilon_1\varepsilon_2y) = \mu(z+\varepsilon_2x) + \sigma_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\mu(y) =$$
$$= \mu(z) + \sigma_1(\varepsilon_2)\mu(x) + \sigma_1(\varepsilon_1\varepsilon_2)\mu(y) = \mu(z+\varepsilon_2y)) =$$
$$= \mu(z) + \sigma_1(\varepsilon_2)\mu(x) + \sigma_1(\varepsilon_1)\sigma_1(\varepsilon_2)\mu(y) \Rightarrow \sigma_1(\varepsilon_1\varepsilon_2) = \sigma_1(\varepsilon_1)\sigma_1(\varepsilon_2).$$

Аналогично предыдущего проверяется (2)



Фиг. 2.

Как показано на фигурах 1. и 2, при помощи проведения параллельных прямых, исходя из элементов $P_1, P_2 \in K$ можно получить элементы P_1+P_2 и P_1P_2 как абсциввы точек прямой Ky. (Заметим, что здесь термины: точки, прямая употребляются в проективном смысле).

Аналогично находятся и элементы $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\varepsilon_1\varepsilon_2$ на прямой Ky.

Таким образом, σ_1 – изоморфизм на группе обратимых элементов E; легко догадаться, что соответствие $\sigma = \overline{\sigma} = \sigma \cup \sigma_1$ определена на всем кольце K и будет изоиорфизмом между K и K_1, а пара соответствий (μ,σ) определяет полулинейный изоморфизм между K – модулем G и K_1 – модулем G_1; более того $\mu[(x_1,x_2)] = \varepsilon(x_1,x_2)[\mu(x_1), \mu(x_2)]$, $\varepsilon(x_1,x_2) \in E$, для всех $x_1,x_2 \in G$. Следовательно, с учетом предложения 1.2.1, заключаем, что (μ,σ) либо полулинейный изоморфизм, либо полулинейный антиизоморфизм. Если верно последнее, то пара $(\overline{\mu} = \varepsilon^{-1}, \mu, \sigma)$ будет проективностью. Тем самым нами доказано

Предложение 1.3.2. *Пусть f: $\mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(G_1)$ решеточный изоморфизм между трехмерными нильпотентными алгебрами Ли без кручения над кольцами главных идеалов K и K_1, которые не являются полями, тогда существует полулинейный изоморфизм $\mu: G \to G_1$ относительно σ такой, что для любой подалгебры $A \to G$, $f(A) = \mu(A)$.*

Аналогичными рассуждениями, что при доказательстве предложения 1.3.2, можно доказать, что имеет место

Предложение 1.3.3. *Пусть G и G_1 трехмерные разрешимые алгебры Ли без кручения над кольцами главных идеалов K и K_1, и K не является полем, f: $\mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(G_1)$ – изоморфизм, тогда существует изоморфизм σ: $K \to K_1$, отображение $\mu: G \to G_1$ такие, что для всех $a_1,a_2 \in K$, $x_1,x_2 \in G$ и любой подалгебры $X \subset G$ выполняются*

$$\mu(a_1x_1 + a_2x_2) = \sigma(a_1)\mu(x_1) + \sigma(a_2)\mu(x_2), \quad \mu(X) = f(X).$$

Определение 1.3.1. Пусть L и L_1 алгебра Ли над кольцами K и K_1 соответственно; $\sigma: K \to K_1$ изоморфизм. Отображение $\mu: L \to L_1$ назовем (почти) полулинейным квази-изоморфизмом, если

$$\mu(a_1x_1 + a_2x_2) = \varepsilon_1\sigma(a_1)\,\mu(x_1) + \varepsilon_2\sigma(a_2)\,\mu(x_2),$$

где ε_1, ε_2 некоторые обратимые элементы из K_1 и , если $a_1 \neq 0$, то $\varepsilon_1 \neq 0$

$$\mu(x_1 x_2) = \varepsilon\mu (x_1)\mu(x_2),\ \varepsilon\in E.$$

Если $\varepsilon =1$, то μ назовем почти полулинейным изоморфизмом.

Ясно, что если $dimL=dimL_1=2$ и $K=K_1$ - поле, то любое взаимно однозначное отображение между одномерными подпространнтсвами L и L_1 определяет почти полулинейный изоморфизм

2. НЕКОТОРЫЕ ФАКТЫ О W–СТЕПЕННЫХ ГРУППАХ С РЕШЕТОЧНОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

Ф. Холл ввел один класс групп, названных им *W*-степенными, или просто *W*-группами, являющийся обобщением понятия *W*-модуля на случай произвольной локально нильпотентной группы. Значение *W*-групп в общей теории абстрактных групп определяется тем, что любая конечно порожденная нильпотентная группа без кручения вкладывается в некоторую *W*-группу (Ф. Холл [1]).

2.1. Определения и некоторые основные свойства

Введем основные определения.

Пусть *W*-биномиальное кольцо, т.е. область цельности, держащая Z в качестве подкольца и вместе с каждым элементом λ все биномиальные коэффициенты:

$$\binom{\lambda}{n} = \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!}, \; n \in N .$$

Например, W может быть кольцом Z целых чисел, кольцом Z_p целых p-адических чисел, полем Q рациональных чисел, полем R действительных чисел, вообще, любым полем нулевой характеристики.

Определение 2.1.1. *Нерациональная группа G класса нильпотентности* m *называется* W*-степенной группой, если для любых* x *из* G *и* $\lambda \in W$ *однозначно определен элемент* $x^{\lambda} \in G$*, причем выполняется следующие аксиомы* $(x, y, x_1, \ldots x_n$ *- произвольные из* G*;* $\lambda,\ \mu$ *- произвольные элементы из* $W)$*:*

$$a)\quad x^1 = x, x^{\lambda} x^{\mu} = x^{\lambda+\mu},\ (x^{\lambda})^{\mu} = x^{\lambda} x^{\mu}$$

$$в)\quad y^{-1} x^{\lambda} y = (y^{-1} x y)^{\lambda};$$

$$c)\quad x_1^{\lambda} x_2^{\lambda} \ldots x_n^{\lambda} = (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\lambda} \tau_2^{\binom{\lambda}{2}}(x) \ldots \tau_m^{\binom{\lambda}{m}}(x),$$

где m*-класс нильпотентности группы* $< x_1, x_2, \ldots, x_n >$*;* $\tau_k(x)$ *-* k*-е слово Петреску от* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*. Напомним, что для каждого* $k \in N$ k*-е слово Петреску* $\tau_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tau_k(x)$ *определяется рекуррентно из соотношения*

$$x_1^k x_2^k \ldots x_n^k = \tau_1^k(x) \tau_2^{\binom{k}{2}}(x) \ldots \tau_{k-1}^{\binom{k}{k-1}}(x).$$

В свободной группе F с базисом $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Хорошо известно (см., например [1]), что $\tau_k(x)$ принадлежит подгруппе $F_k - k$-му члену нижнего центрального ряда группы F.

Естественность аксиом а) и в) очевидна. Аксиома с) является перенесением аналогичного свойства при целых λ для локально нильпотентных групп.

Из этих аксиом следует, что $1^\lambda = 1,\ \chi^0 = 1,\ \chi^{-1} = (\chi^\lambda)^{-1}$. Легко заметить, что если G абелева, эти аксиомы превращаются в обычное определение W модуля, в котором обычные аддитивные понятия заменены мультипликативными. Ясно также, что если $n -$целое рациональное число, рассматриваемое как элемент кольца W, то χ^n имеет обычное значение. При фиксированном $a \in G$ отображение $\lambda \to a^\lambda$ является гомоморфизмом аддитивной группы кольца W на подгруппы a^W группы G, и ядро этого отображения является идеалом в W, и называется порядковым идеалом элемента a, или просто порядком элемента a и обозначается через *exp(a)*. Если этот порядковый идеал равен 0 при всех $a \neq 1$, то G называется группой без кручения.

Нильпотентные группы являются Z степенными группами. Произвольный W-модуль является абелевой W-группой, полные нильпотентные группы с однозначным извлечением корня - Q степенными группами. Напомним, что полная группа с однозначным извлечением корня называется D -группой, так что Q-степенная группа – это нильпотентная D-группа.

Произвольной W-группой над кольцом W назовем такой проективный предел дискретных W-степенных нильпотентных групп G_i, класса $i,\ i = 1,2,\ldots,$ что гомомрфизм $\pi_i : G_{i+1} \to G_i$-это факторизация по последнему члену нижнего центрального ряда.

Большой запас примеров таких групп в случае, когда W-кольцо целых чисел, можно получить, если брать нильпотентно апроксимируемые группы и пополнять их относительно топологии, определяемой нижним центральным рядом.

Значение W-степенных групп в общей теории абстрактных групп определяется тем, что любая конечно порожденная нильпотентная группа G без кручения вкладывается в некоторую W-степенную группу G^W.

В случае, когда $W = Q$, то G^Q-нильпотентная D группа. Если W-поле действительных чисел, то в качестве G^R может быть получена односвязная нильпотентная группа Ли. В случае полей рациональных и действительных чисел теоремы вложения были получены А.И. Мальцевым с использованием теории групп и алгебр Ли.

Отметим еще два важных примера W -степенной группы.

Пусть *П* – некоторое множество простых чисел. Нильпотентная группа G называется *П*-локальной (или локальной в *П*), если для любого элемента $g \in G$ и любого простого числа $p \notin \Pi$ уравнение $x^p = g$ имеет в *П* единственное решение. При $G = \varnothing$ очевидно, что получается нильпотентная D -группа.

П-локальная нильпотентная группа является Z_Π подкольцо поля рациональных чисел Q, которое состоит из чисел вида m / n, причем не делится ни на одно простое число из *П*.

Если *W*-кольцо p -простое число, то G^W является *p*-адическим пополнением группы G, т.е. пополнением группы G, которое получается взятием в качестве окрестностей единицы множества всех нормальных подгрупп K группы G таких, что $| G : K |$ есть степень P, а затем рассматривать ее как дискретную группу.

Очевидно, что W -группа является мультиоперативной группой. Понятия W -подгруппы, W -факторгруппы и W -гомоморфизма определяется, как обычно. Скажем, что подгруппы H $W-$допустима в G, если она является W -подгруппой.

Лемма 2.1.1. *Ядра W -гомоморфизмов- это в точности нормальные $W-$ подгруппы [1].*

Примеры W -групп.

1. Если $W = Z,$ где $Z-$кольцо целых чисел, то произвольная локально нильпотентная группа является W -группой ($Z-$группой).

2. Произвольный $W-$ модуль G является абелевой $W-$ группой.

3. Пусть $W = R,$ где $R-$кольцо рациональных чисел. Тогда полная локально нильпотентная группа без кручения G является $R-$группой.

2.2. Коммутаторные тождества в нильпотентных класса 2 W-степенных группах

Лемма 2.2.1. *Пусть G есть W -группа.*

Тогда, если коммутатор [a, b] содержится в центре, то при любых $\lambda, \mu \in W$ имеем:a) $\left[a^\lambda, b\right] = \left[a, b\right]^\lambda$, *b)* $\left[a, b^\lambda\right] = \left[a, b\right]^\lambda$, *c)* $\left[a^\lambda, b^\mu\right] = \left[a, b\right]^{\lambda\mu}$.

Доказательство. Действительно,

$$\left[a^{\lambda}, b\right] = a^{-\lambda} b^{-1} a^{\lambda} b = a^{-\lambda} (b^{-1} ab)^{\lambda} = t^{\binom{\lambda}{1}}(a^{-1}, b^{-1}ab) \ldots t^{\binom{\lambda}{c}}(a^{-1}, b^{-1}ab),$$

где все $t_i (i \geq 2)$ содержится в коммутанте H' группы $H = < a^{-1}, b^{-1}ab > = < a^{-1}, [a,b] >$ и с-класс нильпотентности группы H. Так как $[a,b]$ содержится в центре, то H абелева и $H' = 1$. Отсюда следует, что все $t_i (i \geq 2)$ равны единицы, а так как $t_1 (a^{-1}, b^{-1}ab) = a^{-1}b^{-1}ab,$ справедливость равенства а) доказана.

Аналогично доказываются и другие равенства.

Лемма 2.2.2. *Централизатор любого множества M $W-$группы будет W-подгруппой.*

Действительно, пусть $C = C_G(M) -$ централизатор M в G. Если $z \in C$ и $\chi \in M$, то $z = x^{-1}zx$, $z^{\lambda} = x^{-1}z^{\lambda}x$ и, следовательно, $z^{\lambda} \in C$.

Следствие 2.2.1. Центр произвольной $W-$группы $W-$допустим.

Теорема 2.2.1. *Члены и факторы верхней центральной цели*

$$1 = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \ldots \subseteq Z_n \subseteq \ldots$$

$W-$группы G суть $W-$группы.

Доказательство. Действительно, для Z_1 теорема верна согласно следствию. Пусть теорема верна для всех индексов $\alpha < \beta$. Если число $\beta - 1$ существует, то группа $Z_{\beta-1}$, а потому и $G / Z_{\beta-1}$, суть $W-$группы. Но тогда группа $Z_{\beta} / Z_{\beta-1}$ сама $W-$допустима как центр $W-$группы $G / Z_{\beta-1}$. Отсюда следует, что $Z_{\beta}W$ -допустима. Если же β предельное, то Z_{β} есть объединение возрастающей последоваткльности $W-$подгрупп и поэтому опять $W-$допустима.

Теорема 2.2.2. *Члены и факторы нижнего центрального ряда нильпотентной $W-$группы G суть $W-$группы.*

Доказательство. Пусть $G = G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_k \supset 1 -$ нижний центральный ряд группы G. Тогда при $k = 1$ теорема очевидна. Докажем теорему индукцией по классу нильпотентности $W-$группы. Предварительно докажем, что группа G_k $W-$допустима. По определению $G_k = [G_{k-1}, G]$ и порождается коммутаторами вида $[x, y]$, где

$x \in G_{k-1}$ и $y \in G$. Достаточно поэтому показать, что если $[a,b] \in G_x$, то $[a,b]^{\lambda} \in G_k$, где $a \in G_{k-1}$, $b \in G$. Но это следует из леммы 2.2.1.

Действительно, так как $[a,b]$ содержится в центре то $[a,b]^{\lambda} = [a,b^{\lambda}]$, но этот коммутатор принадлежит G_k. Отсюда следует, что группа G/G_k есть $W-$группа, а так она имеет меньший класс нильпотентности, чем G, то по предположению члена и факторы ряда $G/G_k \supset G_1/G_k \supset \ldots \supset G_{k-1}/G_k \supset 1$ суть $W-$руппы. Это означает $W-$допустимость членов и факторов группы G. Теорема доказана.

Пусть $M-$произвольное подмножество $W-$группы G. Пересечение всех $W-$подгрупп группы G, содержающих множество M, будет наименьшей W-подгруппой, содержащей M и обозначаемой $< M >^W$.

Покажем, что произвольный элемент из $< M >^W$ записывается в виде произведения конечного числа степеней элементов множества M с показателями из W. Действительно, утверждение справедливо, если G белева (т.е. $W-$модуль). Предположим, что оно верно для $W-$группы G/G_k, имеющей класс нильпотентности, меньший, чем G. Тогда произвольный элемент g из G имеет вид $g = a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_m^{\lambda_m} g_k$, где $g_k \in G_k$. Значит, достаточно показать, что любой элемент из G_k есть слово от степеней элементов множества M с показателями из W. В самом деле, G_k порождается коммутаторами вида $[x,y]$, где $x \in G$, $y \in G_{k-1}$, а так как эти коммутаторы содержатся в центре, то достаточно показать, что произвольный коммутатор такого вида есть слово от степеней элементов M с показателями из W. Пусть

$$x = a_{i_1}^{\lambda_1} a_{i_2}^{\lambda_2} \ldots a_{i_m}^{\lambda_m} g_k \quad \text{и} \quad y = a_{j_1}^{\mu_1} a_{j_2}^{\mu_2} \ldots\ldots a_{j_n}^{\mu_n} g'_k, \quad g_k, g'_k \in G_k.$$

Тогда

$$[x,y] = \left[a_{i_1}^{\lambda_1} a_{i_2}^{\lambda_2} \ldots a_{i_m}^{\lambda_m} g_k,\ a_{j_1}^{\mu_1} a_{j_2}^{\mu_2} \ldots\ldots a_{j_n}^{\mu_n} g'_k\right] =$$
$$= \left[a_{i_1}^{\lambda_1} a_{i_2}^{\lambda_2} \ldots a_{i_m}^{\lambda_m},\ a_{j_1}^{\mu_1} a_{j_2}^{\mu_2} \ldots\ldots a_{j_n}^{\mu_n}\right]$$

так как g_k, g'_k содержатся в центре. Но этот коммутатор есть слово от степеней элементов множества M с показателями из W, что и требовалось показать.

Отсюда следует также, что $< M >^W$ состоит из всех элементов группы, равных произведениям конечного числа степеней элементов множества M с показателями из W.

Если $< M >^W = G,$ множество M назовем системой $W-$образующих группы G.

Теорема 2.2.3. *Если* $G =< x_1, x_2, ..., x_n >^W$ *−конечно порожденная* $W-$*группа, то простые коммутаторы* $[y_1, y_2, ... y_k] (mo\ G_{k+1})$*, где* y_1 *некоторые из элементов* $x_1, x_2, ..., x_n$*, причем не обязательно различные, служат системой* $W-$*образующих для* $W-$*группы* G_k / G_{k+1}.

Доказательство проведем индукцией по k. При $k = 1$ теорема очевидна. Пусть она верна для $k-1$. Подгруппа G_k порождается всеми коммутаторами $c = [a_1, a_2, .., a_{k-1}, a_k]$, где $a_i \in G$. Но $c = [[a_1, ..., a_{k-1}], a_k]$ и $[a_1, a_2, ..., a_{k-1}] \in G_{k-1}$, откуда, в силу предположения индукции, $[a_1, a_2, ...a_{k-1}] = u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} ... u_n^{\lambda_n} v$ где $\lambda_i \in W$, $u_1, u_2, ..., u_n$ −коммутаторы вида $[y_1, ..., y_{k-1}]$, причем y_i −это некоторые из элементов x_i и $\upsilon \in G_k$.

Поэтому

$$c = [u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} ... u_n^{\lambda_n} v, a_k] = [u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} ... u_n^{\lambda_n}, a_k][u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} ... u_n^{\lambda_n} a_k, \upsilon][\upsilon, a_k] =$$
$$= [u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} ... u_n^{\lambda_n}, a_k] (mod\, G_{k+1}),$$

так как

$$\left[u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} ... u_n^{\lambda_n}, a_k\right] \in G_{k+1} \quad \text{и} \quad [\upsilon, a_k] \in G_{k+1}.$$

Но $a_k = x_{i_1}^{\mu_1} x_{i_2}^{\mu_2} ... x_{i_m}^{\mu_m}, \eta_i \in W, u_i \in G_{k-1}$, откуда, повторяя предыдущие рассуждения, получаем $c = \prod [u_j^{\lambda_j}, x_{i_s}^{\mu_s}] (mod\, G_{r+1})$. Кроме того,

$$[u^{\lambda}, x^{\eta}] = [u, x]^{\lambda\eta} \ (mod\, G_{k+1}).$$

Следовательно, $W-$группа G_k / G_{k+1} порождается коммутаторами вида $[u, x] (\mathrm{mod}\, G_{k+1})$ или $[y_1, ..., y_{k-1}, x_{ir}] (\mathrm{mod}\ G_{K+1})$.

Теорема 2.2.4. *Конечно порожденная* W*-группа* $G =< a_1, a_2, ..., a_n >^W$ *нильпотентна и имеет тот же класс, что и абстрактная подгруппа* $H =< a_1, a_2, ..., a_n >$.

Действительно, пусть с-класс нильпотентности группы H. По теореме 1.2.3. факторгруппа G_k / G_{k+1} порождается простыми коммутаторами

$\left[y_1, y_2, ..., y_n\right] (mod\ G_{k+1}),$ где $y_i -$некоторые из элементов $a_1, a_2, ..., a_n$. Если $k = c+1,$ то коммутатор $\left[y_1, y_2, ..., y_c, y_{c+1}\right] = 1$ и, следовательно, $G_{c+1} = G_{c+2} = ... = 1.$ Отсюда следует, что с- класс нильпотентности группы G.

2.3. Решетки, связанные с W-степенными группами

Пусть теперь G произвольная нильпотентная W-степенная группа над произвольным биномиальным кольцом W. Обозначим через $L(G)$ решетку всех W-подгрупп G с естественными решеточными операциями.

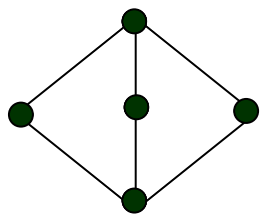
В работах [56-60] изучены W-степенные группы с рееточной точки зрения. Приведем некоторые факты из них. Предварительно напомним некоторые определения и факты из теории решеток.

Решетка L называется дистрибутивной, если для любых $x, y, z \in N$ справедливы равенства:

$$(i) \qquad x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z);$$

$$(ii) \qquad x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z);$$

Известно, что решетка тогда и только тогда дистрибутивна, когда она не содержит диамант (фиг.1).



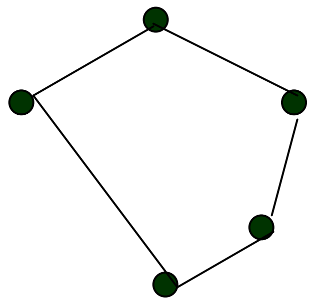
Фиг. 3.

Решетка L называется модулярной, если для любых $x, y, z \in N$ выполняется условие модулярности:

Еесли $x \leq z,$ то $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap z.$

Известно также, что решетка L тогда и только тогда модулярна, когда она не содержит пентагон (фиг.2.).

Можно показать, что если G неабелева W-степенная группа, то $L(G)$ не содержит пентагон. Следовательно справедлива.



Фиг. 4.

Теорема 2.3.1. *W-степенная группа G над биномиальным кольцом W тогда и только тогда имеет модулярную решетку подгрупп, когда она абелева.*

Естественно, W степенную группу G назвать циклической, если она порождается одним элементом, локально циклической, если любое конечное множество ее элементов порождает циклическую подгруппу.

Предложение 2.3.1. *Если G локально циклическая W-степеннная группа над бинамиальным кольцом W, то L(G) дистрибутивная решетка.*

Можно показать, что если W-кольцо главных идеалов и G не локально циклична, то $L(G)$ содержит пентагон. Следовательно справедлива

Теорема 2.3.2. *Пусть GW –степенная группа над кольцом главных идеалов W. Решетка L(G) тогда и только тогда дистрибутивна, когда G локально циклична.*

Рассмотрим теперь $CL(G)$ – множество, состоящее из всех смежных классов G по всем подгруппам и пустого мноежства $\varnothing$. На $CL(G)$ введем частичный порядок следующим образом:

$$X_1 \le X_2 \Leftrightarrow X_1 \le X_2,\ \ X_1, X_2 \in CL(G).$$

Тогда $CL(G)$ будет полной решеткой относительно решеточных операций:

(i) $\bigcap\limits_{\alpha \in J} U_\alpha$ теоретико-множественное пересечение $(U_\alpha = a_\alpha A_\alpha,\ \alpha \in J)$;

(ii) $\bigcup\limits_{\alpha \in J} U_\alpha = a_\beta (A_\alpha a_\beta a_\alpha^{-1}, \alpha \in J),$

где β некоторый фиксированный индекс из J.

Предложение 2.3.2. *Решетка CL(G) тогда и только тогда разлагается в прямое произведение решеток, когда* $W \cong Z_2$ *и G циклична.*

Теорема 2.3.3. *Пусть G суть W-степенная группа над биномиальным кольцом W. Тогда* *(i) CL(G) модулярна тогда и только тогда, когда W поле и G циклична;*

(ii) CL(G) дистрибутивна тогда и только тогда, когда она разлагается в прямое произведение;

(iii) CL(G) тогда и только тогда подмодулярна снизу, когда она модулярна.

Предложение 2.3.3. *Если W поле, то*

(i) CL(G) решетка с дополнениями;

(ii) CL(G) решетка с относительными дополнениями тогда и только тогда, когда такова L(G);

(iii) в CL(G) выполянется условие Жордана-Гельдера тогда и только тогда, когда оно выполняется в $\mathcal{L}(G)$.

Определение 2.3.2. *Пусть X и Y W-степенные группы над кольцами W_1 и W_2 соответственно.*

Будем говорить, что отображение $f{:}X\to Y$ полулинейный изоморфизм относительно изоморфизма $\sigma : W_1\to W_2$ (σ – полулинейный изоморфизм), если для любых x_1, $x_2 \in X$ и α_1, α_2 $\in W_1$ имеет место равенство

$$f(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}) = f(x_1)^{\sigma(\alpha_1)} f(x_2)^{\sigma(\alpha_2)}.$$

Если же выполяется равенство

$$f(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}) = f(x_2)^{\sigma(\alpha_2)} f(x_1)^{\sigma(\alpha_1)}$$

то f называется полулинейным антиизоморфизмом (σ - полулинейным антиизоморфизм).

Решетку $L(0,1 \in L)$ назовем решеткой без кручения, если ни один элемент L не покрывает 0. W-степенная группа G называеся группой без кручения, если условие $x^{\alpha}=1$, $a\in W$ влечет, что-либо α=1, либо $x=1$. Назовем W-степенную группу G чистой, если решетка $L(G)$ без кручения. Ясно, что не для всякой группы G без кручения решетка $L(G)$ без кручения, т.е. не каждая группа без кручения будет чистой. Действительно, если W поле, то любая W-группа G над W без кручения, тогда как она будет чистой: для любого $x\in G$ решетка $\mathcal{L}(<x>)$ имеет вид  – т.е. состоит из двух элементов. Элемент $x\in G$ назовем чистым, если решетка $L(x)$ без кручения; и элементом без кручения, если W-подгруппа $\langle x\rangle$ без кручения.

Предложение 2.3.4. *Если $f : L(X)\to L(Y)$ решеточный изоморфизм, то следующие условия эквивалентны:*

(i) $f(N(A)) = N(f(A))$ для всех $A \subseteq L(X)$;

(ii)) $f([A,A]) = [f(A), f(A)]$, для всех $A \subseteq L(X$;

(iii) $f([A,B]) = [f(A), f(B)]$, *для всех* $A, B \subseteq L(X)$.

Следствие 2.3.1. *Решеточный изоморфизм f переводит центральный ряд в центральный ряд и, следовательно, сохраняет класс нильпотентности на подгруппах.*

Подгруппа $A \subseteq G$ называется изолированной, если для любого $x \in G$ имеем $\langle x\rangle \cap A = 1$, либо $\langle x\rangle \cap A = \langle x\rangle$. Пересечение всех изолированных групп содержащих A обозначим через $I(A)$. Ясно, что $I(A)$ изолированная подгруппа; назовем ее изолятором A.

Предложение 2.3.5. *При решеточном изоморфизме* $f : L(X) \to L(Y)$ *изолированному нижнему центральному ряду*

$$X = X_1 \supset I(X_2) \supset \ldots \supset I(X_n) \supset 1$$

n-нильпотентной W-группы X без кручения соответствует изомлированный нижний центральный ряд

$$Y = Y_1 = f(x) \supset I(Y_2) = f(I(X_2)) \supset \ldots \supset f(I(X_n)) = I(Y_n) \supset 1.$$

Значение этого предложения обусловлено тем фактом, что известны примеры, показывающие, что в факторах X_m / X_{m+1} нижнего центрального ряда нильпотентной W-группы без кручения могут оказаться кручения.

3. О РЕШЕТКЕ W-ПОДГРУПП НЕПЕРИОДИЧЕСКОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ W-ГРУППЫ

В этом параграфе дается решеточная характеристика нормального делителя в локально нильпотентной W-группе без кручения. Кроме того доказывается одно свойство решеточных изоморфизмов локально нильпотентных групп, содержащих не менее двух независимых элементов бесконечного порядка.

3.1. Решеточная характеристика инвариантности *W* -подгруппы в нильпотентной W -группе без кручения

В этом разделе обобщаются два результата, связанные с изучением решетки подгрупп нильпотентной непериодической группы. Первый из них заключается в следующем: в работе П.Г.Контровича и Б.И.Плоткина (см. [2]) была получена характеристика изолированного нормального делителя, выражаемая в терминах решетки подгрупп W-группы (решеточная характеристика). Нами приводится решеточная характеристика любого нормального делителя нильпотентной W-группы без кручения. Таким образом, имеется возможность рассматривать здесь нормальные делители как специальные элементы соответствующей решетки W-подгрупп. Второй результат относится к изучению решеточных изоморфизмов нильпотентной непериодической группы: в отмеченной работе [2] было показано, что всякий решеточный изоморфизм нильпотентной группы, содержащей не менее двух независимых элементов бесконечного порядка, является нормальным. Эта теорема обобщается следующим образом: доказывается, что при решеточных изоморфизмах таких групп нормализатор любой подгруппы отображается в нормализатор образа данной подгруппы.

Приведем сначала решеточную характеристику изолированного нормального делителя локально нильпотентной группы без кручения из работы П.Г.Конторовича и Б.И.Плоткина. Для этого напомним некоторые определения.

Элемент a решетки $\mathscr{L}$ называется дедекиндовым (модулярным), если для любой пары ее элементов x и y, где $a \leq y$, выполняется равенство

$$(a \cup x) \cap y = a \cup (x \cap y).$$

Ясно, что всякий W-нормальный делитель W-группы G является модуляным элементом в решетке $\mathscr{L}(G)$. Обратное утверждение, конечно, неверно.

Элемент u решетки $\mathcal{L}$ называется циклическим, если интервал $[0,u]$ – дистрибутивная решетка с условием максимальности. Если $\mathcal{L}=\mathcal{L}(G)$, то элемент $u\in\mathcal{L}$ тогда и только тогда будет циклическим элементом, если u – циклическая подгруппа в группе G [2].

Элемент u решетки $\mathcal{L}$ называется изолированным в $\mathcal{L}$, если для каждого циклического элемента a из $\mathcal{L}$ выполняется одна из двух возможностей:

$$a\cap u=a \quad \text{или} \quad a\cap u=0.$$

Лемма 3.1.1. *Подгруппа H локально нильпотентной W-группы G без кручения тогда и только тогда является изолированным нормальным делителем в группе G, если H – изолированный модулярный элемент в структуре* $\mathcal{L}(G)$.

Для дальнейшего изложения понадобится также

Лемма 3.1.2. *Пусть F – собственная изолированная инвариантная подгруппа в группе G. Подгруппа H из F(H≠F) тогда и только тогда является нормальным делителем в G, если H – модулярный элемент в решетке* $\mathcal{L}(G)$.

Введем следующее определение.

Пусть u – элемент решетки $\mathcal{L}$ и $u\leq a$, где a – изолированный модулярный элемент этой решетки, отличный от I (I – максимальный элемент решетки $\mathcal{L}$). Тогда u будем называть отделимым элементом решетки $\mathcal{L}$. Ясно, что всякий изолированный модулярный элемент решетки $\mathcal{L}$, не равный I, является ее отделимым элементом.

Лемма 3.1.3. *Пусть G – локально нильпотентная группа без кручения, H – ее подгруппа, причем J(H)≠G. Подгруппа H тогда и только тогда будет нормальным делителем в G, если H – отделимый модулярный элемент в решетке* $\mathcal{L}(G)$.

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть H – отделимый модулярный элемент в $\mathcal{L}(G)$. Тогда H содержится в изолированном модулярном элементе F из $\mathcal{L}(G)$, отличном от G. По лемме 3.1.1 F - изолированный нормальный делитель в G. По лемме 3.3.2 и H будет нормальным делителем в G.

Циклический элемент u решетки $\mathcal{L}$ будем называть бесконечным циклическим элементом, если интервал $[0,u]$ – решетка без кручения. Через Θ будем обозначать свойство решетки $\mathcal{L}$ обладать по крайней мере двумя такими бесконечными циклическими элементами u_1 и u_2, что $u_1 \cap u_2 = 0$.

В следующей лемме будем считать, что H – подгруппа нильпотентной группы G без кручения и

$$E=Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_{k-1} \subset Z_k = H \qquad (1)$$

- ее верхний центральный ряд.

Лемма 3.1.4. *Если $G=<g,H>$ – нильпотентная группа без кручения (не локально циклическая) и $J(H)=G$, то подгруппа H тогда и только тогда будет нормальным делителем в группе G, когда Z_{k-1} – отделимый модулярный элемент в решетке $\mathcal{L}(G)$ и интервал $[G,Z_{k-1}]$ – модулярная решеитка, обладающая свойством Θ.*

Доказательство. Необходимость. Пусть H – нормальный делитель в группе $G=<g,H>$ и $J(H)=G$. Так как в нильпотентной группе без кручения любая подгруппа и ее изолятор имеют один и тот же класс нильпотентности, следует, что $J(Z_{k-1}) \neq G$. Подгруппа Z_{k-1} является нормальным делителем в G, поэтому и $J(Z_{k-1})$ – нормальный делитель в группе G. Следовательно, Z_{k-1} – дедекиндов элемент в $\mathcal{L}(G)$, а $J(Z_{k-1})$ – изолированный модулярный элемент в этой решетке.

Осталось проверить свойство Θ для интервала G/Z_{k-1}.

Для этого рассмотрим фактор-группу G/Z_{k-1}. Фактор-группа H/Z_{k-1} коммутативна, значит и $J(H)/J(Z_{k-1})$ также абелева, а в силу равенства $J(H)=G$ получаем коммутативность $G/J(Z_{k-1})$. Поэтому коммутант группы G содержится в $J(Z_{k-1})$. Но

$$J(Z_{k-1}) \cap H = J_H(Z_{k-1}) = Z_{k-1}$$

($J_H(Z_{k-1})$ – изолятор Z_{k-1} в подгруппе H), и так как H тоже содержит коммутант группы G, то G/Z_{k-1} – абелева.

Следовательно, $\mathcal{L}(G/Z_{k-1})$ – модулярная решетка. Фактор-группа $H/(Z_{k-1})$ не может быть локально циклической, так как в противном случае ряд (1) не был бы верхним центральным рядом подгруппы H. Отсюда следует, что в G/Z_{k-1} содержится по крайней мере два независимых элемента бесконечного порядка. А это означает, что $\mathcal{L}(G/Z_{k-1})$ удовлетворяет условию Θ. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть в нильпотентной группе $G=<g,H>$ без кручения, где $J(H)=G$, подгруппа Z_{k-1} обладает указанными в условии свойствами. Покажем, что H будет W-нормальным делителем в G.

Действительно, согласно лемме 3.1.3 Z_{k-1} будет нормальным делителем в группе G. А в силу свойства Θ фактор-группа G/Z_{k-1} абелева. Значит H/Z_{k-1} – нормальный делитель в G/Z_{k-1}, поэтому H – нормальный делитель в G. Лемма доказана.

3.2. Нормальные элементы в решетке W -подгрупп

Введем определение. Элемент u решетки $\mathcal{L}$ назовем нормальным в $\mathcal{L}$, если u либо отделимый модулярный элемент в $\mathcal{L}$, либо u удовлетворяет следующему условию: в $\mathcal{L}$ имеется элемент b такой, что $b<u$ $(b\neq u)$ и b – отделимый модулярный элемент в каждой недистрибутивной решетке $[0,u\cup a]$, где a – циклический элемент из $\mathcal{L}$, причем каждый интервал $[b,u\cup a]$ – модулярная решетка, обладающая свойством Θ.

Теорема 3.2.1. *Подгруппа H нильпотентной (т.е. локально циклической) группы G без кручения тогда и только тогда инвариантна в G, если H – нормальный элемент в* $\mathcal{L}(G)$.

Доказателдьство. Необходимость. Пусть H – нормальный делитель в G. Если $J(H)\neq G$, то Н по лемме 3.1.3 будет отделимым модулярным элементом в $\mathcal{L}(G)$.

Предположим, что $J(H)=G$. Рассмотрим не локально циклические подгруппы вида $G_g=\langle g,H\rangle$, где $g\in G$. Тогда по лемме 3.1.4 в H содержится подгруппа Z_{k-1} такая, что Z_{k-1} – отделимый модулярный элемент в $\mathcal{L}(G_g)$ и интервал $[Z_{k-1}, G_g]$ – нужная нам решетка.

Достаточность. Пусть H – подгруппа в G такая, что H – нормальный элемент в $\mathcal{L}(G)$. Покажем, что H – нормальный делитель в G.

Если H – отделимый модулярный элемент в $\mathcal{L}(G)$, то по лемме 3.1.3 H – нормальный делитель в G.

Пусть H не является отделимым модулярным элементом в $\mathcal{L}(G)$. В этом случае в H имеется подгруппа D, которая является отделимым модулярным элементом в каждой $\mathcal{L}(G_g)$, где G_g – произвольная не локально циклическая подгруппа вида $\langle g,H\rangle$. Значит, по лемме 3.1.3 D – нормальный делитель в G_g, причем по условию фактор-группа G_g/D будет абелевой. Следовательно, H – нормальный делитель в каждой не локально циклической подгруппе G_g. Если же $\langle g,H\rangle$ – локально циклическая, то сразу ясно, что H – нормальный делитель в ней. Поэтому H – инвариантная подгруппа в G. Теорема доказана.

Элемент u решетки $\mathcal{L}$ назовем локально нормальным в $\mathcal{L}$, если для всякого не циклического элемента a из $\mathcal{L}$ такого, что

$$a=a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_k,$$

где все a_i – циклические элементы в $\mathcal{L}$, $u \cap a$ – нормальный элемент в $[0,a]$.

Следствие 3.2.1. Подгруппа H локально нильпотентной группы G без кручения тогда и только будет инвариантной в G, если H – локально нормальный элемент в $\mathcal{L}(G)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть H – нормальный делитель в G. Возьмем в G любую не циклическую подгруппу A с конечным числом образующих. A – нильпотентная подгруппа, $H \cap A$ в ней нормальный делитель. По теореме 3.2.1. $H \cap A$ – нормальный элемент в $\mathcal{L}(A)$.

Достаточность. Пусть H – локально нормальный элемент в $\mathcal{L}(G)$. Проверим, что H – нормальный делитель в G. Возьмем элементы $h \in H$ и $g \in G \backslash H$. Они порождают подгруппу $A=\langle g,H \rangle$. По условию $H \cap A$ – нормальный элемент в $\mathcal{L}(A)$. Так как A – нильпотентная подгруппа, то по теореме 3.2.1. следует, что $H \cap A$ – нормальный делитель в A. Это означает, что H – нормальный делитель в каждой подгруппе $\langle g,H \rangle$, т.е. H инвариантна и в группе G.

Теорема 3.2.2. *Подгруппа H нипльпотентной (не локально циклической) группы G без кручения тогда и только тогда будет коммутантом группы G, если H удовлетворяет следующим условиям:*

1) *H – отделимый модулярный элемент в решетке $\mathcal{L}(G)$;*
2) *интервал $G \backslash H$ – модулярная решетка, обладающая свойством Θ;*
3) *любая подгруппа F из G, удовлетворяющая условиям 1) и 2), содержит H.*

Доказательство. Пусть H – коммутант группы G. Тогда $J(H) \neq G$ и фактор-группа G/H содержит не менее двух независимых чистых элементов. Следовательно, H как элемент решетки $\mathcal{L}(G)$ будет удовлетворять условиям 1) и 2). Покажем, что H – минимальный такой элемент. Если подгруппа F из G является отделимым дедекиндовым элментом в $\mathcal{L}(G)$ и интервал G/F – модулярная решетка, обладающая свойством Θ, то F по теореме 3.2.1. является нормальным делителем в G, фактор-группа по которому абелева. Поэтому H содержится в F. Теорема доказана.

3.3. Решеточные изоморфизмы смешанных нильпотентных W -групп

Лемма 3.3.3. *Если G – нильпотентная группа, содержащая не менее двух независимых элементов бесконечного порядка, то каждый ее решеточный изоморфизм φ является нормальным.*

Теперь сформулируем основную теорему этого параграфа.

Теорма 3.3.1. *Пусть G – локально нипльпотентная группа, содержащая не менее двух независимых чистых элементов и H – ее подгруппа. Если N(H) – нормализатор H в G, то $N(H)^{\varphi}$ – нормализатор H^{φ} в группе G^{φ}, т.е.*

$$N(H)^{\varphi} = N(H^{\varphi}) \qquad (*)$$

Доказательство. Сначала предположим, что G – нильпотентная группа с конечным числом образующих.

Разберем в первую очередь случай, когда H – периодическая подгруппа. В этом случае H – конечная подгруппа. Централизатор З(H) подгруппы H в G содержит два независимых чистых элемента: именно, некоторые степени таких же двух элементов из G . Поэтому и в $N(H)$ имеются два независимых чистых элемента. Тогда по лемме 3.1.1. H^{φ} нормальный делитель в $N(H)^{\varphi}$.

Будем теперь считать, что H – непериодическая подгруппа. Если в H содержатся два независимых чистых элемента, то опять-таки по лемме 3.1.1 H^{φ} – нормальный делитель в $N(H)^{\varphi}$. Пусть в H содержится только один независимый чистый элемент. В центре Z_G группы G имеется чистый элемент z. Возьмем какой-либо чистый элемент h из подгруппы H. Если $<z>\cap<h>=E$, то, так как $z\in N(H)$, по лемме 3.3.1 следует инвариантность H^{φ} в $N(H)^{\varphi}$. Пусть теперь $<z>\cap<h>\neq E$. Это означает, что $z^m=h^k$ (m и k – элементы из W, причем можно считать, что $k\neq 1$). Тогда в H имеется подгруппа H_1, равная $<h^k>$ и принадлежащая Z_G. Фактор-группа G/H_1 непериодическая, а H/H_1 – ее конечная подгруппа. Поэтому в G/H_1 есть элемент $\overline{g}_1 = g_1H_1$ бесконечного порядка, принадлежащий централизатору $З(H/H_1)$ подгруппы H/H_1. В этом случае $g_1\in З(h)$. Действительно $\overline{g}_1^{-1}\overline{h}\overline{g}_1 = \overline{h}$ $\quad (\overline{h} = hH_1)$, поэтому $\quad g_1^{-1}hg=hh_1$ $(h_1\in H_1)$. Следовательно, $g_1^{-1}hg_1=hh^{kl}$, и так как $h^k\in Z_G$, то $h^{k^2l} = e$. Это означает, что $l=0$, т.е. $g_1\in З(h)$. При этом следует иметь в виду, что $<g_1>\cap<h>=E$. Итак, и в этом случае в $N(H)$ имеются два независимых чистых элемента. Применяя лемму 3.3..1, получим инвариантность H^{φ} в $N(H)^{\varphi}$, т.е. $N(H)^{\varphi} \subset N(H^{\varphi})$.

С помощью обратного структурного изоморфизма φ^{-1} получим обратное включение. Следовательно, получаем равенство (*).

Пусть теперь G – локально нильпотентная группа, данная в условии. Докажем равенство (*). Для этого возьмем произвольные элементы $h' \in H^{\varphi}$ и $g' \in N(H)^{\varphi}$. Достаточно показать, что $g'^{-1}h'g' \in H^{\varphi}$. Рассмотрим в G^{φ} подгруппу, порожденную элементами g', h' и двумя независимыми чистыми элементами a' и b' . Обозначим ее прообраз в G при структурном изоморфизме φ через F. Тогда $F^{\varphi}<\{g', h', a', b'\}>$, а F тоже нильпотентная подгруппа с конечным числом образующих, содержащая по крайней мере два независимых чистых элемента. Возьмем подгруппу $F_1=F\cap H$. По доказанному уже образ $N_F(F_1)$ (нормализатор подгруппы F_1 в F) при решеточном изоморфизме φ совпадает с $N_{F^{\varphi}}(F_1^{\varphi})$. Но $<g>=<g'>^{\varphi-1}\subset N(H)$, значит $<g>\subset N_F(F_1)$, а поэтому $<g'>\subset N_{F^{\varphi}}(F_2^{\varphi})$. Отсюда следует, что $g'^{-1}h'g' \in F^{\varphi}\cap H^{\varphi}$. Теорема доказана.

4. РЕШЕТОЧНЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ НИЛЬПОТЕНТНЫХ КЛАССА 2 *W* -СТЕПЕННЫХ ГРУПП И АЛГЕБР ЛИ

В данном параграфе доказывается, что если G нильпотентная класса 2 W-степенная группа без кручения над биномиальным кольцом W и $\mathcal{L}(G)\cong \mathcal{L}(G_1)$, где G_1 W–степенная группа над кольцом W_1, то G и G_1 полулинейно изоморфны. Доказана также аналогичная теорема в классе алгебр Ли над кольцами.

4.1. О полулинейных изоморфизмах на W-фактор-группах

Предварительно докажем следующую лемму

Лемма 4.1.1. *Пусть G и G_1 нильпотентные класса 2 W-степенные группы над кольцами W и W_1 соответственно. Если H и H_1 изолированные W–идеалы в G и G_1, при этом*

$$[G,G_1]\le H \le Z(G),\ \ [G_1, G_1]\le H_1 \le Z(G_1),$$

$$G/H=\prod_{i=1}^{n} < a_iH >,\quad G_1/H_1=\prod_{i=1}^{n} < b_iH >,$$

прямые разложения групп G/H и G_1/H_1, и если существует полулинейный изоморфизм $\Psi : H\to H_1$ относительно изоморфизма $\alpha : W\to W_1$ такой, что

$$\Psi([a_i,a_j]) = [b_i, b_j],\quad i,j = 1,\dots, n,$$

то соответствие

$$f(a_1^{k_1}a_2^{k_2}\dots a_n^{k_n}h)=b_1^{\alpha(k_1)}b_2^{\alpha(k_2)}\dots b_n^{\alpha(k_n)}\psi(h)$$

$h\in H$ есть полулинейный изоморфизм между G и G_1 относительно α.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что произвольный элемент $g\in G$ можно записать в виде:

$$g=a_1^{k_1}a_2^{k_2}\dots a_n^{k_n}h,\quad h\in H \tag{1}$$

Более того эта запись однозначна. Действительно, если еще

$$g=a_1^{\beta_1}a_2^{\beta_2}\dots a_n^{\beta_n}h^0,$$

то тогда

$$a_1^{k_1}a_2^{k_2}\dots a_n^{k_n}h=a_1^{\beta_1}a_2^{\beta_2}\dots a_n^{\beta_n}h^0$$

Так как $\langle a_iH\rangle$ прямые множители и G/H группа без кручения, имеем, что $k_i=\beta_i$, $i=1,\dots,n$ и $h=h^0$. Учитывая это находим, что соответствие

$$f(a_1^{k_1}a_2^{k_2}\dots a_n^{k_n}h)=b_1^{\alpha(k_1)}b_2^{\alpha(k_2)}\dots b_n^{\alpha(k_n)}\psi(h)$$

есть взаимооднозначное соответствие между элементами G и G_1 .

Далее, так как G и G_1 нильпотентны класса 2 W-степенные группы, находим

$$\psi\left(\left[a_1^{k_1}a_2^{k_2}\dots a_n^{k_n}h,\ a_i^{\ell_i}\right]\right)=\psi\left([a_1,a_i]^{k_1 l_i}[a_2,a_i]^{k_2 l_i}\dots[a_n,a_i]^{k_n l_i}\right)=$$

$$=[b_1,b_i]^{\alpha(k_1)\alpha(l_i)}[b_2,b_i]^{\alpha(k_2)\alpha(l_i)}\dots[b_n,b_i]^{\alpha(k_n)\alpha(l_i)}=$$

$$=\left[b_1^{\alpha(k_1)}\cdot b_2^{\alpha(k_2)}\dots b_n^{\alpha(k_n)}\psi(h),\ b_i^{\alpha(l_i)}\right].$$

Если $g_1=a_1^{b_1}a_2^{b_2}\dots a_n^{b_n}h_1$, то тогда

$$f(g_1)=b_1^{\alpha(l_1)}b_2^{\alpha(l_2)}\dots b_n^{\alpha(l_n)}\psi(h_1)$$

Следовательно, получаем

$$f(gg_1)=f\left(a_1^{k_1}a_2^{k_2}\dots a_n^{k_n}h\cdot b_1^{l_1}b_2^{l_2}\dots b_n^{l_n}h_1\right)=$$

$$f(a_1^{k_1+l_1}a_2^{k_2+l_2}\dots a_n^{k_n+l_n})\left[a_2^{k_2}a_3^{k_3}\dots a_n^{k_n}h,\ a_1^{l_1}\right]\times$$

$$\times\left[a_3^{k_3}\dots a_n^{k_n}h,\ a_2^{l_2}\right]\dots\left[a_n^{k_n}h,\ a_{n-1}^{l_{n-1}}\right]\cdot hh_1=$$

$$=b_1^{\alpha(k_1+l_2)}b_2^{\alpha(k_2+l_2)}\dots b_n^{\alpha(k_n+l_n)}\times$$

$$\times\left[b_2^{\alpha(k_2)}b_3^{\alpha(k_3)}\dots b_n^{\alpha(k_n)}\psi(h),\ b_1^{\alpha(l_2)}\right]\times\dots\left[b_n^{\alpha(k_n)}\psi(h),\ b_{n-1}^{\alpha(l_{n-1})}\right]\psi(h)\psi(h_1)=$$

$$=b_1^{\alpha(k_1)}b_2^{\alpha(k_2)}\dots b_n^{\alpha(k_n)}\psi(h)b_1^{\alpha(l_1)}b_2^{\alpha(l_2)}\dots b_n^{\alpha(l_n)}\psi(h_1)=f(g)\cdot f(g_1)$$

Следовательно, f полулинейный изоморфизм между G и G_1 относительно $\alpha:W\to W_1$. Лемма доказана.

Заметим предварительно, что решеточный изоморфизм между W-степенными группами без кручения является нормальным, т.е. для любых W-подгрупп $A,B\subseteq G$ имеем

$$\varphi([A,B])=[\varphi(A),\ \varphi(B)];$$

$$\varphi[Z(A)]=Z[\varphi(A)],\ \varphi[N(A)]=N[\varphi(A)].$$

Обозначим через K коммутант G, т.е. $K=[G,G]$. Тогда фактор группы G/K и $\varphi(G)/\varphi(K)$ решеточно изоморфны; при этом существует такой изоморфизм $\theta:\mathcal{L}(G/K)\to\mathcal{L}(\varphi(G)/\varphi(K))$, что если

$$\theta[U/K]=U_1/\varphi(K),\ \text{то}\ \ \varphi(U)=U_1.$$

Предположим, что θ индуцируется некоторым полулинейным изоморфизмом μ относительно изоморфизма $\sigma: W \rightarrow W_1$. Допустим, что для $g \in G$, $\varphi(\langle g \rangle) = \langle g_1 \rangle$. Тогда имеем

$$\theta(\langle gK \rangle) = \theta[\langle g \rangle K / K] = \varphi(\langle g \rangle K / K) = \langle g_1 \rangle \varphi K / \varphi K = \langle g_1 \varphi(K) \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta(\langle gK \rangle) = \langle \mu(gK) \rangle \Rightarrow \mu(gK) = [g_1 \varphi(K)]^{\alpha} = g_1^{\alpha} \varphi(K), \ \alpha \in E_1 \subseteq W_1$$

4.2. Доказательство теоремы для W-групп

Предположим, что $g_1^{\alpha} = \mu(g)$. Тогда имеем

$$\varphi(\langle g \rangle) = \langle \mu(g) \rangle, \ \mu(gK) = \mu(g) \varphi(K). \qquad (*)$$

Таким образом, каждому элементу $g \in G$ можно сопоставить элемент $\mu(g) \in \varphi(G)$ такой, что выполняются равенства (*). При этом для любых $a,b,c \in G$ имеем

$$[\mu(a), \mu(bc)] = [\mu(a), \mu(b)] [\mu(a), \mu(c)] \qquad (**)$$

Действительно, имеем

$$\mu[bcK] = \mu(bc) \varphi(K) = \mu(b)K \cdot \mu(c)K = \mu(b) \mu(c)K$$

$$\Rightarrow \mu(bc) = \mu(b) \mu(c)k, \quad k \in \varphi(K).$$

Учитывая, что $\varphi(G)$ нильпотентна класса 2 получаем (**).

Предположим теперь, что решеточный изоморфизм $\varphi: \mathcal{L}(K) \rightarrow \mathcal{L}(\varphi(K))$ индуцируется полулинейным изоморфизмом Ψ относительно некоторого $\sigma: W \rightarrow W_1$. Тогда существует такой обратимый $\alpha \in E \subseteq W$, что для любых $x,y \in G$

$$[\mu(x), \mu(y)] = [\Psi([x,y,])]^{\alpha} \ . \qquad (***)$$

Докажем (***). Имеем

$$[\langle x \rangle \cup \langle y \rangle, \langle x \rangle \cup \langle y \rangle] = \langle [x,y] \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(\langle [x,y] \rangle) = [\varphi(\langle x \rangle) \cup \varphi(\langle y \rangle), \quad \varphi(\langle x \rangle) \cup \varphi(\langle y \rangle)] =$$

$$= [\langle \mu(x) \rangle \cup \langle \mu(y) \rangle, \ \langle \mu(x) \rangle \cup \langle \mu(x) \rangle \cup \langle \mu(y) \rangle].$$

Допустим, что для некоторых $a, b \in G$, $[a,b] = c \neq 1$. Тогда для некоторого $\beta_1 \in W_1$ имеем

$$[\mu(a), \mu(b)] = [\Psi(c)]^{\beta_1}.$$

Предположим, что $y \in G$, и $[a,y] = d$. Тогда

$$[\mu(a), \mu(y)] = [\Psi(d)]^{\beta_2}, \ \beta_2 \in W_1.$$

Если $\langle c \rangle \cap \langle d \rangle = 1$, то тогда

$$\left\lfloor \mu(a), \ \ \mu(by) \right\rfloor = [\psi([a,by])]^{\beta_2} = [\psi(c)]^{\beta_3} [\psi(d)]^{\beta_3},$$

$$\left[\mu(a),\ \ \mu(by)\right]=\left[\mu(a),\mu(b)\right]\left[\mu(a),\mu(y)\right]=\left[\psi(c)\right]^{\beta_1}\left[\psi(c)\right]^{\beta_2}.$$

Отсюда, так как $\Psi(c)\neq 1$ и $\langle\Psi(c)\rangle\cap\Psi(d)\rangle=1$, находим, что $\beta_1=\beta_2$ и, если $\Psi(d)\neq 1,$ то $\beta_1=\beta_3$ и следовательно, $\beta_3=\beta_2$. Поэтому

$$[\mu(a),\ \mu(y)]=[\Psi(d)]^{\beta}{}_1\ .$$

Если $\Psi(d)=1$, то равенство очевидно.

Предположим, что $\langle c\rangle\cap\langle d\rangle=1$ и $d=c^{\alpha},\alpha\in E\subseteq W.$ Тогда $[a,\ b^{-\alpha}\ y]=c^{-\alpha}\ d=1$ и поэтому

$$\begin{gathered}\left[\mu(a),\mu(b^{-\alpha}y)\right]=\left[\psi(c)\right]^{\sigma(-\alpha)\beta_1}\left[\psi(d)\right]^{\beta_2}=\\ \left[\psi(c^{\alpha})\right]^{-\beta_1}\left[\psi(d)\right]^{\beta_2}=\left[\psi(d)\right]^{-\beta_1}\left[\psi(d)\right]^{\beta_2}=1\Rightarrow\\ \Rightarrow\left[\psi(d)\right]^{\beta_2}=\left[\psi(d)\right]^{\beta_1}.\end{gathered}$$

Таким образом, мы доказали, что если $[a,b]\neq 1$, то из $[\mu(a),\ \mu(b)]=[\Psi[a,b])]^{\beta}{}_1,\ \beta\in W_1$ следует $[\mu(a),\ \mu(y)]=[\Psi[a,y])]^{\beta}{}_1$ для любого $y\in G.$

Пусть $x,\ y\in G$ произвольные элементы. Если $[x,y]=1$, то равенство (**) очевидно.

Рассмотрим следующие альтернативы:

A$_1$. $[x,y]\neq 1,\ [a,y]=[b,x]=1.$

В этом случае $[a,by]=[a,b]\neq 1$ и имеем:

$$\begin{gathered}[\mu(a),\ \mu(b)]=[\Psi([a,b])]^{\beta}{}_1\Rightarrow[\mu(a),\ \mu(by)]=[\Psi([a,by])]^{\beta}{}_1\Rightarrow\\ \Rightarrow[\mu(by),\ \mu(a)]=[\Psi([by,a])]^{\beta}{}_1\Rightarrow[\mu(by),\ \mu(x]=[\Psi([by,x])]^{\beta}{}_1\Rightarrow\\ \Rightarrow[\mu(x),\ \mu(by]=[\Psi([x,by])]^{\beta}{}_1\Rightarrow[\mu(x),\ \mu(y]=[\Psi([x,y])]^{\beta}{}_1\Rightarrow\end{gathered}$$

Ясно, что каждое равенство следует из предыдущего.

A$_2$. $[x,y]\neq 1,\ [a,y]\neq 1$

В этом случае имеем:

$$\begin{gathered}[\mu(a),\ \mu(b)]=[\Psi([a,b])]^{\beta}{}_1\Rightarrow[\mu(a),\ \mu(y)]=[\Psi([a,y])]^{\beta}{}_1\Rightarrow\\ \Rightarrow[\mu(y),\ \mu(a)]=[\Psi([y,a])]^{\beta}{}_1\Rightarrow[\mu(y),\ \mu(x]=[\Psi([y,x])]^{\beta}{}_1\Rightarrow\\ \Rightarrow[\mu(x),\ \mu(y]=[\Psi([x,y])]^{\beta}{}_1\,.\end{gathered}$$

A$_3$. $[x,y]\neq 1,\ [b,x]\neq 1$

В этом случае имеем:

$$\begin{gathered}[\mu(a),\ \mu(b)]=[\Psi([a,b])]^{\beta}{}_1\Rightarrow[\mu(b),\ \mu(a)]=[\Psi([b,a,])]^{\beta}{}_1\Rightarrow\\ \Rightarrow[\mu(b),\ \mu(x)]=[\Psi([b,x])]^{\beta}{}_1\Rightarrow[\mu(x),\ \mu(b]=[\Psi([x,b])]^{\beta}{}_1\Rightarrow\\ \Rightarrow[\mu(x),\ \mu(y]=[\Psi([x,y])]^{\beta}{}_1\,.\end{gathered}$$

Таким образом, равенство (**) доказано. Справедлива следующая

Теорема 4.2.1. *Пусть G и G_1 нильпотентные класса 2 W-степенные группы Холла над кольцами W и W_1 соответственно; если $G\ncong\Omega$, то существует изоморфизм $\sigma: W\to W_1$ такой, что G и G_1 полулинейно изоморфны относительно σ.*

Доказательство. Пусть размерность свободного модуля $G/I([G,G])>2$ и $dim(I([G,G])=1$. Тогда из справедливости основной теоремы проективной геометрии следует существование изморфизма $\sigma: W\to W_1$ такого, что изоморфизм

$$\mathcal{L}(G/I([G,G])\,) \cong \mathcal{L}(G_1/I([G_1,G_1])\,)$$

индуцируется σ-полулинейным изоморфизмом.

Если же $dim(I([G,G])\geq 2$, то присоеденив к $I([G,G])$ элемент $x\notin I([G,G])$, получим свободный трехмерный модуль $I([G,G])\cup\langle x\rangle$ решеточный изоморфизм, который по той же основной теореме проективной геометрии индуцируется полулинейным изоморфизмом относительно σ.

Модуль $G/I([G,G])$ будучи свободным модулем над W разложим в прямое произведение (сумму)

$$G/I([G,G]) = \mathop{\Pi\_}_{\alpha\in\alpha} < a_\alpha I([G,G]) >$$

Тогда

$$\varphi(G)/\varphi(I([G.G])) = \mathop{\Pi\_}_{\alpha\in\alpha} < \mu(a_\alpha)I([G_1,G_1]) >,$$

$$\mu(a_\alpha I([G,G]) = \mu(a_\alpha)\, I\,([G_1,G_1]) < \mu(a_\alpha)> = (<a_\alpha>),\ \alpha\in\bar{\alpha}.$$

Как показано (равенство **), существует $\beta\in E_1\subseteq W_1$, что для любых $x, y\in G$ имеем

$$[\mu(x), \mu(y)] = [\Psi([x,y])]^\beta .$$

Рассмотрим Ψ_1 определенный через $\Psi_1(c) = [\Psi(c)]^\beta$ для любого с $\in [G,G]$. Ясно, что Ψ_1 индуцирует φ на $[G,G]$ и, кроме того,

$$[\mu(x), \mu(y)] = [\Psi([x,y])]^\beta = \Psi_1([x,y]).$$

В частности

$$\Psi_1([a_\alpha, a_\beta]) = [\mu(a_\alpha), \mu(a_\beta)],\ \alpha, \beta\in\bar{\alpha}.$$

Тогда по лемме соответствие

$$f(a_{\alpha_1}^{k_1}a_{\alpha_2}^{k_1}...a_{\alpha_n}^{k_n}c) = [\mu(a_{\alpha_1})]^{\sigma(k_2)}...[\mu(a_{\alpha_n})]^{\sigma(k_n)}\psi_1(c)$$

будет полулинейным изоморфизмом между конечномерными модулями $H = < a_{\alpha_1},...a_{\alpha_n} >$ и $\varphi(H)$. Следовательно, соответствие $f: G\to G_1$, относящее каждому элементу $g = a_{\alpha_1}^{k_1} a_{\alpha_2}^{k_1} ... a_{\alpha_n}^{k_n} \ c \in G$ элемент

$$f(g) = \left[\mu\left(a_{\alpha_1}\right)\right]^{\sigma(k_1)} \left[\mu\left(a_{\alpha_2}\right)\right]^{\sigma(k_2)} ... \left[\mu\left(a_{\alpha_n}\right)\right]^{\sigma(k_n)} \psi_1(c),$$

будет полулинейным изоморфизмом относительно $\sigma: W \rightarrow W_1$.

Случай, когда $G \ncong \Omega$ исключается и в этом случае $G \cong G_1$ при условии, что $W \cong W_1$. Теорема доказана.

4.3. Решеточные изоморфизмы нильпготентных класса 2 алгебр Ли без кручения

В отличие от случая чистых алгебр Ли (глава 5) решеточные изоморфизмы проективных трехмерных нильпотентных алгебр Ли над полем может не порождаться проективностью.

Пример 4.3.1. Пусть $L=\langle a,b \rangle$ нильпотентная алгебра Ли и $dimL=3$, f – отображение $\mathcal{L}(L)$ на себя, которое оставляет на месте все двумерные подалгебры, а одномерные отображаем произвольно, но тождественно по модулю коммутанта, например, для любого $x \in L$, $f(\langle x \rangle)=\langle x+z \rangle$, $z=[a,b]$. Ясно, что f – изоморфизм, непорождающиеся никакой проективностью.

Предложение 4.3.1. *Пусть L_1 и L_2 конечнопорожденные 2-нильпотентные алгебры Ли без кручения над кольцами K_1 и K_2; если $[L_i,L_i] \leq A_i \leq Z(L_i)$, $L_i / A_i = \sum_{k=1}^{n} (a_{ki} + A_i)$, $i=1,2$, и если существует проективность μ: $A_1 \rightarrow A_2$ относительно σ: $K_1 \rightarrow K_2$, $\mu([a_{k1}, a_{e1}])=[a_{k2}, a_{e2}]$, то соответствие $f(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_{k1} + h) = \sum_{k=1}^{n} \sigma(\alpha_k) a_{k2} + \mu(h)$, $h \in A_2$ будет проективностью.*

Действительно,

$$f(\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \beta_k) a_{k1} + (h + h_1)) = \sum (\sigma(\alpha_k) + \sigma(\beta_k) a_{k2} + \mu(h) + \mu(h_1).$$

Теорема 4.3.1. *Если f: $\mathcal{L}(L) \rightarrow \mathcal{L}(L_1)$ изоморфизм и L и L_1 2-нильпотентные алгебры Ли без кручения над кольцами K и K_1, если $dimL>3$, то между L и L_1 существует полулинейный изоморфизм.*

Доказательство. f порождает изоморфизм

$$\theta\colon \mathcal{L}(L/[L,L]) \to \mathcal{L}(L_1/[L_1,L_1]),\ \theta(U/[L_1,L_1])=f(U)/[L_1,L_1].$$

Предположим, что θ порождается проективностью Δ относительно σ: $K\to K_1$. Обозначим $f(<e>)=<e_1>$. Тогда

$$\theta(<e+[L,L]>=\theta((<e>\cup[L,L])/[L,L])\cong f((<e>\cup[L,L]/[L_1,L_1]=$$
$$=<e_1>\cup[L_1,L_1]/[L_1,L_1]=<e_1+[L_1,L_1]>.$$

Так как Δ индуцирует θ, то

$$\theta(<e+[L,L]>=<\Delta(e+ [L,L])>\Rightarrow\Delta(e+ [L,L])=\alpha(e_1 + [L_1,L_1])=\alpha e_1+[L_1,L_1].$$

где $\alpha\in K$ обратимый элемент. Положим $\Delta_1(e)=\alpha(e_1)$.

Тогда

$$f(<e>)=<\Delta_1(e)>,\ \Delta(e+[L,L])=\Delta_1(e)+[L_1,L_1] \qquad (*)$$

Таким образом, каждому элементу $e\in L$ можем поставить в соответствии элемент, $\Delta_1(e)\in L_1$, такой, что выполняются тождества (*).

Для произвольного $u\in K$, имеем

$$\Delta(u(e+[L,L]=\sigma(u)\Delta(e+[L,L]=\sigma(u)(\Delta_1(e)+[L_1,L_1])=$$
$$=\Delta(ue+[L,L])=\Delta_1(ue)+[L_1,L_1]\Rightarrow\Delta_1(ue)\equiv\sigma(u)\Delta_1(e)(mod[L_1,L_1]).$$

Покажем. что для любых $x_1,x_2,x_3\in L$

$$[\Delta_1(x_1),\ \Delta_1(x_2+x_3)]=[\Delta_1(x_1),\ \Delta_1(x_2)]+[\Delta_1(x_1),\Delta_1(x_3)]. \qquad (**)$$

Имеем

$$\Delta(x_2+x_3+[L,L])=\Delta_1(x_2+x_3)+[L_1,L_1]=\Delta(x_2+[L,L])+\Delta(x_3+[L,L])=\Delta_1(x_2)+\Delta_1(x_3)+$$
$$+ [L_1,L_1]\Rightarrow \Delta_1(x_2+x_3)\equiv(\Delta_1(x_2)+\Delta_1(x_3))mod[L_1,L_1].$$

Отсюда, так как L_1 нильпотентная алгебра класса 2, получаем равенства (**).

Предположим теперь, что изоморфизм f: $\mathcal{L}([L,L])\to\mathcal{L}([L_1,L_1])$ индуцируется проективностью $\mu: L\to L_1$ относительно σ_1: $K\to K_1$. Тогда существует единственный обратимый элемент $\alpha\in K$ такой, что для любых $x,y\in L$

$$[\Delta_1(x),\ \Delta_1(y)]=\alpha\mu([x,y]) \qquad (***)$$

4.4. Некоторые тождества, связанные с полулинейными изоморфизмами

Из нормальности изоморфизма f и из того, что L нильпотентна класса 2 имеем

$$f(<[x,y]>)=<\theta([x,y])>=[f(<x>)\cup f(<y>), f(<x>)\cup f(<y>)]=$$
$$=<[\Delta_1(x),\Delta_1(y)]>=[<\Delta(x)>\cup<\Delta(y)>,\ <\Delta(x)>\cup<\Delta(y)> \Rightarrow$$
$$\Rightarrow[\Delta_1(x),\Delta_1(y)]=\alpha(x,y)\mu([x,y]),\quad \alpha(x,y)\in E_1,$$

где E_1 множесто обратимых элементов K_1.

Зафиксируем теперь элементы $a,b\in L,\ [a,b]\neq 0$.

Пусть $[\Delta_1(a), \Delta_1(b)]=\alpha\mu([a,b])$.

Допустим $y\in L$. Тогда

$$[\Delta_1(a), \Delta_1(y)]=\alpha_1\mu([a,y]),\quad \alpha_1\in K_1.$$

Если

$$<[a,b]>\cap<[a,y]>\Rightarrow<\mu([a,b])>\cap<\mu([a,y])>=0.$$
$$[\Delta_1(a),\Delta_1(b+y)]=\beta\mu([a,b+y])=[\Delta_1(a),\Delta_1(b)]+$$
$$+[\Delta_1(a),\Delta_1(y)]=\alpha\cdot\mu([a,b])+\alpha_1\mu([a,y)]\Rightarrow\alpha=\alpha_1=\beta.$$

Предположим, что $<[a,b]>\cap<[a,y]>\neq 0$, т.е. $\beta\,[a,b]=\gamma[a,y]$.

Имеем

$$[a, -\beta b+\gamma y]=0\Rightarrow[\Delta_1(a),\Delta_1(\gamma y-\beta b)]= [\Delta_1(a),\Delta_1(\gamma y)]-[\Delta_1(a),\Delta_1(\beta y)]=$$
$$=\sigma_1(\gamma)[\Delta_1(a),\Delta_1(y)-\sigma_1(\beta)[\Delta_1(a),\Delta_1(b)]=\sigma_1(\gamma)\alpha_1\mu[a,y])-\sigma_1(\beta)\alpha\mu([a,b])=$$
$$=\alpha_1\mu([a,\gamma y])-\alpha\mu([a,\beta y])=\alpha_1\mu([a,\gamma y]+\alpha\mu[a,-\beta b])=(\alpha_1-\alpha)\mu[a,\gamma y])\Rightarrow\alpha=\alpha_1.$$

Таким образом, если $[a,b]\neq 0$ и y – произвольный элемент, то имеем

$$[\Delta_1(a),\Delta_1(b)]=\alpha\mu([a,b])\Rightarrow[\Delta_1(a),\Delta_1(y)]=\alpha\mu([a,y]).$$

Пусть теперь $x,y\ \in L$ произвольные элементы. Если $[x,y]=0$, то (***) очевидно. Будем считать поэтому, что $[x,y]\neq 0$, если при этом $[b,x]=0$, то из предыдущего имеем

$$[\Delta_1(a),\Delta_1(b)]=\alpha\mu([a,b])\Rightarrow[\Delta_1(a),\Delta_1(b+y)]=\alpha\mu([a,b+y])\Rightarrow[\Delta_1(b+y),\Delta_1(a)]=$$
$$=\alpha\mu([a,b+y])\Rightarrow[\Delta_1(b+y),\Delta_1(a)]=\alpha\mu([b+y,a]\Rightarrow[\Delta_1(x),\Delta_1(b+y)]=\alpha\mu[x,b+y])\Rightarrow$$
$$\Rightarrow[\Delta_1(x),\Delta_1(b+y)]=\alpha\mu([x,b+y])=\alpha(\mu[x,b]+\mu[x,y])=\alpha\mu([x,y])\Rightarrow$$
$$\Rightarrow[\Delta_1(x),\Delta_1(y)]=\alpha\mu([x,y]).$$

Предположим теперь, что $[a,y]\neq 0$. Тогда

$$[\Delta_1(a),\Delta_1(b)]=\alpha\mu([a,b])\Rightarrow[\Delta_1(a),\Delta_1(y)]=$$
$$=\alpha\mu([a,y])\Rightarrow[\Delta_1(y),\Delta_1(a)]=$$
$$=\alpha\mu([y,a])\Rightarrow[\Delta_1(x),\Delta_1(y)]=\alpha\mu([x,y]$$

Аналогично проверяется случай, когда $[b,x]\neq 0$ и $[a,y]=0$.

Остается проверить, что $\sigma=\sigma_1$. Действительно,

$$[\Delta_1(\beta x),\Delta_1(y)]=\alpha\mu([Bx,y])=\alpha\sigma_1(\beta)\mu([x,y])=[\sigma(\beta)\Delta_1(x),\Delta_1(y)]=$$
$$=\sigma(\beta)\,[\Delta_1(x),\Delta_1(y)]=\alpha\,\sigma(\beta)\mu([x,y]\Rightarrow\sigma=\sigma_1.$$

Таким образом (***) доказано.

4.5. Доказательство теоремы для алгебр Ли и некоторые следствия

Доказательство теоремы. Если $dim(L/[L,L])=2\Rightarrow dimL=3$ и этот случай в условиях теоремы исключается.

Предположим, что $dim(L/[L,L])\geq 3$ и $\theta:\mathcal{L}(L/(L,L)\to\mathcal{L}(L_1/[L_1,L_1])$ изомор-физм порожденный изоморфизмом f. Основную теорему проективной геометрии мы пока не можем применить, так как не задано отображение между проективными пространствами $P(L/[L,L])$ и $P(L_1/[L_1,L_1])$. Однако, заключаем, что ограничение θ на $P(L/[L,L])$ будет коллинеацией между проективными пространствами; остается применить теорему М.Ожангрин и Р.Сридхаран (1969), чтобы заключить: существует проективность $\Delta:L/[L,L]\to L_1/[L_1,L_1]$ относительно изоморфизма σ: $K\to K_1$, такая, что

$\theta(A/[L,L])=\Delta(A/[L,L])$ для любой подалгебры $A/[L,L]\subset L/[L,L]$.

Предположим сперва, что $dim[L,L]=1$.

Тогда соответствие

$$\Delta_1:L\to L_1,\quad \Delta_1(x)=\Delta(x),\quad x\in L\backslash[L,L]$$

обладает следующими свойствами

(i) $\Delta_1([x,y])=0\Leftrightarrow[x,y]=0$, так как изоморфизм f двумерные подалгебры переносит в двумерные, а трехмерные неабелевы в трехмерные неабелевы;

(ii) $\Delta_1(x+y)=\Delta_1(x)+\Delta_1(y)$;

(iii) $\Delta_1(\beta x)=\sigma(\beta)\Delta_1(x),\ \beta\in K$;

(iiii) $\Delta_1([x,y])=\alpha(x,y)[\Delta_1(x),\Delta_1(y)],\quad \alpha\in E_1$.

Учитывая теорему о полупроективностях (1.4) заключаем, что $\alpha(x,y)=const,$ если $\alpha\neq 1,$ то соот ветствие $\overline{\Delta}=\alpha^{-1}\Delta_1 : L\rightarrow L_1$

будет проективностью относительно того же σ.

Если теперь $dim[L,L]\geq 2$, то изоморфизм f на каждой абелевой подалгебре и следовательно на $[L,L]$, индуцируется проективностью $\mu{:}L\rightarrow L_1$ относительно $\sigma{:}K\rightarrow K_1$.

Пусть L конечнопорождена и пусть $L/[L,L]=\sum\limits_{i=1}^{n} < x_i+[L,L] >$ прямое разложение. Тогда $L_1/[L_1,L_1]$ тоже разлагается в прямое произведение, т.е.

$$L_1/[L_1,L_1]=\sum_{i=1}^{n} < \Delta_1(x_i)+[L_1,L_1] >$$

при этом $\Delta(x_i+[L,L]=\Delta_1(x_i)+[L_1,L_1],\quad f(<x_i>)=<\Delta_1(x_i)>).$

Если в равенстве (***) $\alpha\neq 1$, то для $\mu_1=\alpha^{-1}\mu$ имеем $[\Delta_1(x), \Delta_1(y)]=\mu_1([x,y])$.

Ясно, что μ_1 индуцирует изоморфизм $f{:}\ \mathcal{L}([L,L])\rightarrow\mathcal{L}([L_1,L_1])$. В частности, для любых $i,j=1,...,n$, имеем $[\Delta_1(x_i),\Delta_1(x_j)]=\mu_1([x_i,x_j])$.

С учетом предложения 4.3.1. Δ_1 будет проективностью относительно σ. От конечнопорожденного случая теперь легко перейти к общему. Теорема доказана.

Следствие 4.4.1. *Если $K\cong Z_p$, то в условиях теоремы $L\cong L_1$, без предположения $dimL>3$.*

Действительно, если $dimL>3$, все ясно. При $dimL=3,2$ имеем $|\mathcal{L}(L)|=p^3$ и $p^2\Leftrightarrow dimL=3,2\Rightarrow K\cong K_1\cong Z_p$.

Замечание 4.4.1. Если алгебры L и L_1 определены над одним и тем же кольцом K, то ограничение $dimL>3$ можно отбросить, так как, если $dimL=3$, то L и L_1 свободные нильпотентные алгебры Ли и $L\cong L_1$, случай $dimL=2$ тривиален.

5. ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ЧИСТЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ КЛАССА 2 *W*-СТЕПЕННЫХ ГРУПП

5.1. Два порожденные нильпотентные *W* -степенные группы

Предположение 5.5.1. *Коммутант* G_2 *метабелевой группы* G*, порожденной двумя независимыми элементами* u*,* v *без кручения, изолирован в ней.*

Доказательство. Коммутант G_2 группы $G = < u, v >$ порожден коммутатором $[u, v]$ и потому является циклической группой. Изучим две возможности:

(a) Порядок коммутатора $[u, v]$ без кручения. Убедимся в изолированности коммутанта. Предположим обратное; тогда в G должно выполниться некоторое соотношение вида:

$$u^{\alpha} v^{\beta} = [u,v]^{\gamma} \quad (\gamma \neq 0). \tag{5.1.1.}$$

Рассмотрим фактор-группу G / G_2 и в ней образы $\bar{u}, \bar{v}$ образующих u, v группы G. Эта фактор-группа абелева и в ней реализуется соотношение

$$\bar{u}^{\alpha} \bar{v}^{\beta} = e \tag{5.1.2.}$$

(i) Покажем, что оба показателя α и β в (5.1.2) должны быть отличными от нуля. Действительно если, например $\alpha \neq 0,\ \beta = 0$, то из соотношения

$$u^{\alpha} = [u,v]^{\gamma}$$

вытекает, что

$$[u,\ v]^{\alpha} = [u_{\alpha},\ v] = [[u,\ v]^{\gamma}, v] = e,$$

т. е. периодичность G_2.

(ii) Предположим, что элементы $\bar{u}, \bar{v}$ без кручения.

Соотношение (5.1.2.) свидетельствует о том, что ранг фактор-группы $\overline{G} = G / G_2$ с двумя образующим $\bar{u}, \bar{v}$ равен единице. Убедимся, что рассматриваемом случае $\overline{G}$ не имеет кручения. Допустим обратное; тогда группа $\overline{G}$ должна распадаться в прямое произведение

$$\overline{G} = < \bar{x} > \times < \bar{y} >$$

в котором $<\bar{y}>$ - группа без кручения и при $k\in W$ имеем $\bar{x}^k = e$. При переходе к самой группе заключаем, что в ней содержится такой элемент x, k-я степень которого лежит в G_2 и, следовательно, в центре $Z(G)$.

Пусть теперь w - любой элемент из G. Тогда

$$[x^k, w] = [x, w]^k = e. \tag{5.1.3}$$

Мы, однако, рассматриваем тот случай, когда G_2 - группа без кручения. Поэтому из (5.1.3.) следует, что

$$[x, w] = e,$$

т.е. x лежит в центре. Отсюда немедленно вытекает, что группа G оказывается расширением центра $Z(G)$ с помощью группы без кручения $<y>$, а потому, вопреки условию теоремы, является абелевой группой. Тем самым возможность кручения в фактор-группе $\overline{G}$ исключается. Итак, $\overline{G}$ оказывается абелевой группой без кручения ранга один, порожденной лишь двумя элементами $\bar{u}$ и $\bar{v}$. Поэтому $\overline{G}$ обязана быть циклической группой без кручения. Но тогда, в силу известной теоремы Бернсайда, и сама группа G обязана быть циклической группой без кручения. Это заключение, однако, противоречит условию теоремы и исключает реализацию в G соотношения (5.1.2) в предположении, что элементы $\bar{u}$, $\bar{v}$ без кручения.

(iii) Предположим теперь, что $exp(\bar{u}) = \alpha', exp(\bar{v}) = \beta'$, т.е.:

$$\bar{u}^{\alpha'} = \bar{v}^{\beta'} = e,.$$

Это означает, при переходе к самой группе G, что при некоторых σ имеем

$$u^{\alpha'} = [u, v]^{\sigma}, \quad v^{\beta'} = [u, v]^{\tau}$$

т.е. это означает зависимость элементов u и v.

(b) Порядок коммутатора $exp([u,v]) = k \in W$. В этом случае из всякого соотношения

$$u^{\alpha} = [u, v]^{\gamma} v^{\beta}$$

вида (5.1.1) вытекает либо зависимость элементов u и v, либо периодичность порядка одного из них, что исключено условиями теоремы. Заметим, что в рассматриваемой ситуации периодическая часть всей группы G исчерпывается коммутантом G_2.

5.2. Свободные нильпотентные класса 2 *W*-группы Холла

Теорема 5.2.1. *Метабелева группа G, порожденная двумя независимыми элементами u, v без кручения, тогда и только тогда оказывается свободной метабелевой, когда никакие степени u, v не коммутируют между собой.*

Необходимость. Предположим, что

$$[u^{\gamma}, v^{\delta}] = e$$

Тогда, в силу следствия 1.3.2,

$$[u, v]^{\gamma\delta} = e,$$

т.е. G_2 вопреки предположению, периодичен.

Достаточность. Если никакие степени элементов u, v не коммутируют, то коммутатор $[u, v]$ без кручения. В этом случае в группе G вообще нет кручения. Действительно, наличие в G периодических элементов эквивалентно выполнению некоторого соотношения вида (5.1.1.). Однако в рассматриваемой ситуации подробные соотношения в G не реализуются (см. предложения 5.5.1). Остается вспомнить, что всякая метабелева группа без кручения с двумя образующими является свободной нильпотентной класса 2.

Замечание 5.2.1. Из предшествующего очевидно, что теореме можно придать следующую формулировку:

Метабелева, группа, порожденная двумя независимыми элементами бесконечного порядка, тогда и только тогда является свободной метабелевой когда ее коммутант без кручения.

Лемма 5.2.1. *Если в n-нильпотентной группе G содержится не менее двух независимых элементов без кручения, то и в фактор-группе G / G_n найдется не менее двух подобных элементов.*

(a) Предположим, что в G_n имеется хотя бы один элемент без кручения. Тогда ясно, что среди элементов без кручения имеется по крайней мере один правонормированный коммутатор $k = [x, y]$ веса n, где вес $w(x) = n - 1$. Действительно, в ином случае и вся подгруппа G_n оказалась бы периодической. Но если коммутатор k без кручения, то и элементы x и y также без кручения. Более того, они независимы (заметим, что подгруппа $< x, y >$, в силу теоремы 5.1.1 - свободная метабелева). Смежные классы

$\bar{x} = xG_n, \bar{y} = yG_n$ не могут оказаться зависимыми и в фактор-группе G/G_n. В самом деле, предложим обратное, и пусть $\bar{x}^{\alpha} = \bar{y}^{\beta}$. Это означает, что $x^{\alpha} = y^{\beta}k_1$ лежит в k_1. В таком случае

$$[x^{\alpha}, y] = [y^{\beta}k_1, y] = e,$$

так как элемент k_1 центральный. Следовательно, вопреки предложению, и коммутатор k окажется периодическим.

(b) Допустим теперь, что G_n - периодическая группа. Выберем в G два независимых элемента u и v без кручения. Построим фактор-группу G/G_n и рассмотрим в ней смежные классы $\bar{u} = uG_n$, $\bar{v} = vG_n$. Ясно, что $\bar{u}$ и $\bar{v}$ независимы: в ином случае мы придем к некоторому соотношению

$$u^{\alpha} = v^{\beta}k, \ k \in G_n,$$

откуда, с учетом периодичности порядка k_1, вытекает зависимость u от v. Остается заметить, что $\bar{u}$ и $\bar{v}$ элементы без кручения.

Замечание 5.2.1. Пусть G - неабелева нильпотентная группа без кручения. Тогда в ней заведомо содержится не менее двух независимых элементов. Действительно, из зависимости каждой пары элементов из G вытекает коммутируемость некоторых их степеней, что влечет за собой (в нильпотентной группе без кручения) перестановочность самих элементов.

Далее известно, что фактор-группа G/Z не может быть локально циклической. Справедливость леммы 5.2.1 в рассматриваемом случае следует из 5.1.1.

Замечание 5.2.3. Очевидно, что лемма 5.2.1 справедлива и для фактор-группы G/I чистой нильпотентной группы по I/G_n. Переход к соответствующим фактор-группам позволяет из леммы 5.2.1 получить

Следствие 5.2.1. *В каждой фактор-группе* $G/I(G_m)$ $(m = 2,...,n)$ *неабелевой нильпотентной группы* G *без кручения содержится не менее двух независимых элементов.*

Теорема 5.2.2. *Пусть в конечно порожденной* n*-нильпотентной группе* G *содержится не менее двух независимых элементов без кручения. Тогда всякая ее максимальная* m*-нильпотентная подгруппа* $(m \le n)$ *содержит также по крайней мере два независимых элемента без кручения.*

Доказательство. Выберем в G произвольную максимальную m-нильпотентную $(m \leq n)$ подгруппу M. Ясно, что центр $Z(G)$ лежит в M. Рассмотрим в G нормальный делитель без кручения N; такой существует. Пересечение N с M содержит по крайней мере один центральный элемент z без кручения. Предположим, что все элементы без кручения из M зависят от z. Тогда , в силу условия теоремы, элемент h без кручения, не зависящий от z, должен найтись в группе G вне ее подгруппы M. Так как максимальная периодическая подгруппа $P(M)$ группы M (по условию, G имеет конечное число образующих), то можно выбрать показатель l таким, чтобы h^1 попадал в централизатор. Построим теперь в G подгруппу $< h^1, M >$. Из предыдущего следует; что класс этой подгруппы остается равным классу m подгруппы M. Действительно, каждый элемент бесконечного порядка из M (он зависит от z) можно представить в виде $u = az$, где α из $P(M)$. Значит, h^1*, коммутируется с любым периодическим элементом, коммутирует также с каждым элементом u. Этим доказано, что выбранная нами подгруппа M не могла быть в группе G максимальной m-нильпотентной подгруппой.

5.3. Ядро гомоморфизма Aut [(G)] → Aut [L(G)]

Ясно, что групповой изоморфизм индуцирует естественное проектирование. Общие условия, при которых заданный структурный изоморфизм индуцируется групповым, остаются пока невыясненными. Существуют проектирования (например, бесконечной циклической группы, группы порядка p^a, p - простое), не индуцируемые групповыми изоморфизмами. В то же время установлено (см., например [2]), что проектирования многих групп всегда возникают при некоторых групповых изоморфизмах. В связи с этими фактами полезно рассмотреть группу *Aut[L(G)]* всех автоморфизмов решетки *S(G)* заданной группы *G*.

Рассмотрим группу *Aut(G)* всех автоморфизмов группы *G*. Обозначим через гомоморфизм *f* (при естественном соответствии между автоморфизмами группы *G* и ими индуцируемыми автопроектированиями). Пусть *K* - ядро гомоморфизма *f*. Имеет место следующая

Теорема 5.3.1. *Пусть G - неабелева группа без кручения. Тогда ядро К естественного гомоморфизма $f{:}Aut[G]\to Aut[L(G)]$ исчерпывается единицыей группы Aut[G], т.е. f оказывается мономорфизмом Aut[(G] в Aut[L(G)].*

Доказательство. Обозначим через *J* подгруппу из *Aut[G]*, состоящую из всех внутренних автоморфизмов группы *G*. Убедимся, что перечисление $K\cap I$ тривиально. Допустим обратное и выберем в $K\cap I$ произвольный элемент ω. Пусть g_ω есть тот элемент группы *G*, который реализует автоморфизм ω. Так как ω вызывает тождественное автопроектирование группы *G*, то для любой подгруппы *H* из *G* имеем:

$$g_\omega H g_\omega^{-1} = H \,.$$

Рассмотрим совокупность всех подобных элементов g_ω; ее принято называть нормой *T(G)* группы *G* [3]. Ясно, что центр группы принадлежит норме. Бэр доказал, что норма *T(G)* группы *G* без кручения совпадает с *Z(G)*. Но из того, что элемент g_ω центральный, немедленно следует, что автоморфизм ω тождественный и пересечение $K\cap I$ тривиально.

Пусть теперь σ - любой элемент ядра *К*. Так как *J* и *К* - нормальные делитель в *Aut[G]*, то из предыдущего вытекает, что σ коммутирует с каждым внутренним автоморфизмом, т.е. σ - нормальный автоморфизм группы *G*.

Изучим две возможности:

(i) Группа *G* обладает нетривиальным центром. Выберем в группе *G* элемент *a*, не лежащий в ее центре (такой элемент должен найтись по условию теоремы). Тогда, в силу того, что *G* группа без кручения для любого σ из *К* либо $\sigma(a)=a$, либо $\sigma(a)=a^{-1}$.

Допустим, что $\sigma(a)=a$. Покажем, что в таком случае для каждого центрального элемента *z* из *G* справедливо равенство $\sigma(z)=z$. Действительно, предположим, что реализуется другая возможность: $\sigma(z)=z^{-1}$. Тогда, с одной стороны,

$$\sigma(az) = \sigma(a)\sigma(z) = az^{-1},$$

а с другой,

$$\sigma(az) = (az)^{\varepsilon}\,,\ |\varepsilon| = 1.$$

Если $\varepsilon=1$, то из последних двух соотношений следует, что $z^2=e$, чего не может быть в чистой группе.

Если $\varepsilon= -1$, то тем путем приходим вновь к противоречию: $a^2 =e$.

Убедимся теперь, что каждого элемента *b* из $G\backslash Z$ выполняется соотношение $\sigma(b)=b$. Предположим, что это не так. Тогда единственная возможность - это $\sigma(b)=b^{-1}$. Возьмем любой центральный элемент *z*. При сделанных предположениях имеем:

$$\sigma(bz)= \sigma(b)\sigma(z)=b^{-1}(z)$$

В то же время

$$\sigma(bz)= (bz)^{\mu}\ ,\ \ |\mu| = 1.$$

Теперь легко убедиться, что при любом $|\mu| = 1$ последние два соотношения не совместимы с чистой группы G.

Допустим, что $\sigma(a)= a^{-1}$. В этом случае, так же как в предыдущем случае можно установить, что для любого z из $Z(G)$ и каждого b из $G\backslash Z$ имеют место соотношения:

$$\sigma(z)=z^{-1},\ \ \sigma(b)=b^{-1}.$$

Убедимся, что эти условия в неабелевой группе не реализуются. В самом деле, выберем в G пару некоммутатирующим элементов a и b. Тогда как отмечено выше,

$$\sigma(ab)= (ab)^{-1}.$$

с другой стороны

$$\sigma(ab)= \sigma(a)\sigma(b)= a^{-1}b^{-1}.$$

Отсюда следует, вопреки выбору элементов a, b, что

$$[a,b] = e.$$

Этим доказано, что автоморфизм σ тождественный.

(ii) Центр группы G тривиален. В этом случае проходят рассуждения, приведенные в G для конечной группы. А именно: выберем в группе G пару произвольных элементов a и b. Обозначим через i внутренний автоморфизм, реализуемый элементом b. Тогда

$$i(a) = bab^{-1},\ \ i(\sigma(a)) = b\sigma(a)b^{-1}\ .$$

В то же время

$$\sigma(i(a) = \sigma(b)\sigma(a)\sigma(b)^{-1}\ b\ .$$

Отсюда, в силу нормальности σ, получаем:

$$\sigma(a) = b^{-1}\sigma(b)\sigma(a)\sigma(b)^{-1}\ b\ .$$

Последнее означает, что элемент b^{-1} принадлежит центру $Z(G)$. Остается учесть, что в рассматриваемом случае центр тривиален. Из этого немедленно следует, что $\sigma(b)= b$, т.е. σ - тождественный автоморфизм.

5.4. Решеточные изоморфизмы чистых трехмерных W-степенных групп Холла

Пусть $G\cong \Omega=<x,y>$ свободная трехмерная W-степенная гуппа Холла над кольцом гавных иидеалов W, а $G_1=<x_1, y_1>$ W-степенная группа над кольцом главных идеалов W_1; $\varphi: \mathcal{L}(G)\to\mathcal{L}(G_1)$ решеточный изоморфизм. Ясно, что G_1 также свободная трехмерная нильпотентная клааса 2 W-степпенная группа. Таким образом, можем писать

$G\cong \Omega=<x,y>, [x,y] =z, Z(G) = <[x,y]>,$

$G_1\cong \Omega_1=<x_1,y_1>,[x_1,y_1]=z_1, \ Z(G_1) =[Z(G)]^{\varphi} = <[x_1,y_1]>.$

Аналогично с 1.2, можем построить биекции σ_z между множествами простых элементов W и W_1, а также G_1 между множествами обратимых элементов $E\subseteq W$ и $E_1\subseteq W$.

Если теперь в согласии с леммой 1.1.1

$$\mu(x,z) = \mu(x)\mu(z),$$

то имеем

$$\mu[(xz)^p] = [\mu(xz)]^{\alpha\sigma_{xz}} = [\mu(x)\mu(z)]^{\alpha\overline{p}}$$
$$||$$
$$\mu[x^p z^p] = \mu(x)^{\alpha_1\sigma_x(p)}\mu(z)^{\alpha_2\sigma_z(p)}$$

И аналогично с 1.2 можем построить отображения

$$\sigma: P\to P_1, \ \ \sigma_1: E\to E_1$$

и биекцию $\mu: G\to G_1$ относительно этих отображений со следующими условиями:

$$\sigma(\alpha) = \sigma(p_1)^{n_1}\sigma(p_2)^{n_2}...\sigma(p_e)^{n_e},$$

$$\alpha = p_1^{n_1}p_2^{n_2}...p_e^{n_e};$$

$$\sigma(\alpha_1+\alpha_2) = \varepsilon_1(\alpha_1+\alpha_2)\sigma(\alpha_1) + \varepsilon_2(\alpha_1+\alpha_2)\sigma(\alpha_2),$$

$$\varepsilon_1(\alpha_1+\alpha_2), \varepsilon_2(\alpha_1+\alpha_2)\in E_1;$$

$$\mu(x^{\alpha}) = \mu(x)^{\sigma(\alpha)};$$

$$\mu(x^{\alpha_1}z^{\alpha_2}) = \mu(x)^{\varepsilon_1(\alpha_1,x,z)\sigma(\alpha_1)}\mu(z)^{\varepsilon_2(\alpha_2,x,z)\sigma(\alpha_2)};$$

$$\varepsilon_1(\alpha_1, x,z), \varepsilon_2(\alpha_2, x,z) \in E_2.$$

Все это приводит к определению почти полулинейново изоморффизма (антиизоморфизма) W-степенных групп.

Определение 5.4.1. Пусть G и G_1 произвольные W-степенные группы Холла над кольцами W и W_1 соответственно. $\sigma: W\to W_1$ изоморфизм отображение $\mu: G\to G_1$ назовем почти полулинейным изоморфизмом относительно σ, если

$$\mu(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}) = \mu(x_1)^{\varepsilon_1\sigma(\alpha_1)}\mu(x_2)^{\varepsilon_2\sigma(\alpha_2)},$$

где $x_1, x_2\in G$, $a_1, a_2 \in W$ и $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ некоторые обратимые элементы из W_1.

Если же

$$\mu(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}) = \mu(x_2)^{\varepsilon_2\sigma(\alpha_2)}\mu(x_1)^{\varepsilon_1\sigma(\alpha_1)},$$

то μ назовем почти полулинейным антиизоморфизмом относительно $\sigma: W\to W_1$.

Предложение 5.4.1. *Пусть G и G_1 некоторые W-степенные группы Холла без кручения над кольцами главных идеалов W и W_1 соответственно; $\varphi: \mathcal{L}(G)\to\mathcal{L}(G_1)$ решеточный изоморфизм, если $Z(G)\neq 1$, то существует биекция $\mu: G\to G_1$, которая является почти полулинейным изоморфизмом относиттельно $\sigma: W\to W_1$ на кажддой паре абелевых подалгебр A и $\varphi(A)= =A_1\subseteq G_1$ и решеточный изоморфизм индуцируется биекцией μ на абелевых подгруппах.*

Доказательство. Так как G группа без кручения, то любой элемент $x\in G$ содержится в абелевой подгруппе ранга ≥ 2, и по предыдущим рассуждениям φ на подгруппе $<x,z>=F$ индуцируется почти полулинейным изоморфизмом μ относительно некоторого σ. Зафиксируем один из таких почти полулинейных изоморфизмов. Тем самым зафиксируется некоторый почтти полулинейный изоморфизм на $<z>\subseteq Z(G)$.

Возьмем любую максимальную абелеву W-подгруппу H из G. Ясно, что H обязательно содержит $Z(G)$ и следовательно, $z\in Z(G)$ ранг этой подгруппы $H\geq 2$. Решеточный изоморфизм $\varphi: \mathcal{L}(H)\to\mathcal{L}(H_1)$, $H_1=\varphi(H)$ порождается почти полулинейными изоморфизмами μ_α. При этом зафиксированному почти полулинейному изоморфизму μ относительно $\sigma: W\to W_1$ один такой почти полулинейный изоморфизм μ_{α_0}; примем обозначение $\mu_{\alpha_0} = \mu$. В частности, то же самое можно сказать о подгруппах

$$<g> \cup Z \quad \text{и} \quad \varphi[<g> \cup Z] = \varphi(<g>) \cup \varphi(Z),$$

где $g\in G$ проoизвольный элемент $<g>\cap <z> \neq 1$.

В результате между элементами G и G^φ устанавливается взаимно однозначное соответствие, обозначим его также через μ, при этом будем считать, что

$$\mu(g) = g_1,\ <g_1> = \varphi(<g>).$$

Следовательно, решеточный изоморфизм φ индуцируется взаимно однозначными соответствиями

$$\mu_\alpha,\ \alpha \in E,\ \ \mu_1 = \mu,\ \ \mu_\alpha = (\mu_1)^\alpha .$$

Более того, они не совпадают ни на одном элементе $g \in G$, так как, если $\mu(g) = g_1$, то $\mu_\alpha(g) = [\mu(g)]^\alpha = g_1^\alpha$, $\alpha \in E$.

Предложение доказано.

Замечание 5.4.1. В дальнейшем условимся считать, что между элементами G и G_1 уже установлено в согласии с предложеением 5.4.1 одно из таких соответствий. Это соответствие будем обозначать, как уже условились, через $\boldsymbol{\mu}$; $\boldsymbol{\mu(x)=x_1, \forall x \in G}$.

Лемма 5.4.1. *Пусть G и G_1 чистые трехмерные свобощдные нильпотентные класса 2 W-степенные группы, определенные над кольцами главных идеалов W и W_1 соответственно, φ: $\mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(G_1)$ решеточный изоморфизм. Тогда для любых образующих $a, b, \in G$ и их коммутатора $k=b^{-1}a^{-1}ba = [b,a]$ при некотором $\lambda \in W_1$ и обратимых ε, $\eta \in E \subset W$ справедливы равенства*

(i) $\mu(ab) = \mu(a)^\varepsilon\, \mu(b)^\eta\, \mu(k)^\lambda$,

(ii) $\mu(k) = (\mu(b)^{-1}\, \mu(a)^{-1}\, \mu(b)\, \mu(a))^\beta$, $\beta = \pm 1$.

Доказательство немедленно следует из соответствующего факта (см. [2]), так как W-подгруппа $\langle a\rangle \cup \langle b\rangle = G$ свободная нильпотентная класса 2.

Замечание 5.4.2. Ясно, что в лемме 5.4.1 без ограничения общности можем считать, что справедливы равенства

$$\mu(ab) = \mu(a)\, \mu(b)^\eta\, \mu(k)^\lambda, \qquad (*)$$

$$\mu(k) = (\mu(b)^{-\eta}\, \mu(a)^{-\varepsilon}\, \mu(b)^\eta\, \mu(a)^\varepsilon)^\beta = [\mu(b), \mu(a)]^{\beta \cdot \eta\varepsilon} . \qquad (**)$$

Покажем, что на самом деле

$\mu(ab) = \mu(a)\, \mu(b)$, либо $\mu(ab) = \mu(b)\, \mu(a)$.

При этом согласно (**) $\mu(k)=k_1$, либо $\mu(k) = k_1^{-1}$, $k_1 = \mu(b)^{-1}\, \mu(a)^{-1}\, \mu(b)\, \mu(a)$.

Разберем сперва случай, когда $\mu(k)=k_1$, т.е. $\beta=1$. Покажем, что в этом случае для любого $s \in W$, $s=2^l$ справедливо равенство

$$\mu(a^{2^l} b^{2^l}) = [\mu(a)]^{2^l}\, [\mu(b)]^{2^l}\, [k_1]^{\lambda_{2^l}} . \qquad (***)$$

Действительно, имеем

$$ba = abk, \quad k[b, a].$$

Далее

$$\mu(ba) = \mu(abk) = \mu(ab)\mu(k) =$$
$$= \mu(a)\ \mu(b)\ [\mu(k)]\lambda\ \mu(k) =$$
$$= \mu(a)\ \mu(b)\ [\mu(k)]^{\lambda+1} = \mu(b)\mu(a)\ [\mu(k)]^{\lambda}\ .$$

Имеем также

$$(ab)(ba) = a^2b^2k^2\ .$$

Поэтому

$$\mu\ (a^2b^2k^2\ ) = \mu(ab)\ \mu(ba) =$$
$$= \mu(a)\ \mu(b)[\ \mu(k)]^{\lambda}\ \mu(b)\ \mu(a)\ [\ \mu(k)]^{\lambda} =$$
$$= \mu(a)[\ \mu(b)]^{\lambda}\ \mu(a)\ [\ \mu(k)]^{2\lambda} =$$
$$= [\mu(a)]^2[\mu(b)]^2\ [\mu(\kappa)]^2\ [\ \mu(k)]^{2\lambda}\ .$$

Отсюда получаем:

$$\mu\ (a^2b^2) = \mu\ (a^2b^2\ k^2\ k^{-2}) =$$
$$= \mu\ (a^2b^2\ k^2\ )\ \mu\ (k^{-2}) = [\mu\ (a)]^{\ 2}\ [\mu\ (b)]^2\ [\mu\ (k)]^{2\lambda}\ .$$

Предположим, что уже доказано равенство

$$\mu(a^{2^{l-1}} b^{2^{l-1}}) = [\mu(a)]^{2^{l-1}} [\mu(b)]^{2^{l-1}} [\mu(k)]^{2^{l-1}\cdot\lambda}\ .$$

Имеем

$$(a^{2^{l-1}} b^{2^{l-1}})(ba) = a^{2^{l-1}} b^{2^{l-1}} a = a^{2^l} b^{2^l} k^{2^l} =$$
$$= ba^{2^l} b^{2^{l-1}} = (ba)(a^{2^{l-1}} b^{2^{l-1}})\ .$$

Поэтому

$$\mu(a^{2^l} b^{2^l} k^{2^l}) = \mu((a^{2^{l-1}} b^{2^{l-1}}))\mu(ba) =$$
$$= [\mu(a)]^{2^{l-1}} [\mu(b)]^{2^{l-1}} [\mu(k)]^{2^{l-1}\cdot\lambda} \times$$
$$\times \mu(b)\mu(a)\mu(k)^{\lambda} = \mu(a)^{2^l} \mu(b)^{2^l} \mu(k)^{2^l} \mu(k)^{\lambda\cdot 2^l}\ .$$

Следовательно, имеем

$$\mu(a^{2^l} b^{2^l}) = \mu(a^{2^l} b^{2^l} k^{2^l} k^{-2^l}) =$$
$$= [\mu(a)]^{2^l} [\mu(b)]^{2^l} [\mu(k)]^{2^l} [\mu(k)]^{\lambda 2^l} [\mu(k)]^{-2^l} =$$
$$= [\mu(a)]^{2^l} [\mu(b)]^{2^l} [\mu(k)]^{\lambda 2^l}\ .$$

С другой стороны из леммы 5.4.1 при менимой к элементам a^{2^l} и b^{2^l} с учетом (***), получаем равенство

$$\mu(a^{2^l}b^{2^l}) = \mu(a)^{2^l}\mu(b)^{2^l}[\mu(a)^{2^l}, \mu(b)^{2^l}]^{\theta} =$$

$$= [\mu(a)]^{2^l}[\mu(b)]^{2^l}[\mu(k)]^{\theta\cdot 2^l\cdot 2^l},$$

где $\Theta\in W_1$ некоторый элемент, который зависит, вообще говоря, от 2^l.

Сравнивая полученные равенства для люлбого натурального $l\in|\mathcal{N}$, находим, что

$$\chi = 2^l\cdot 2^l\cdot\Theta = 2^{2l}\cdot\Theta$$

т.е. $\chi = 2^l\Theta$. Но тогда, если хотя бы одно Θ равно 0, то χ=0. Если все Θ отличны от нуля, то из того, что для любого целого l, 2^l делит λ, следует, что λ =0. Таким образом, в предположении,что β=1, имеем

$$\mu(ab) = \mu(a)\,\mu(b).$$

Пусть теперь $\beta = -1$, т.е. $k_1^{-1} = \mu(k)$.

Покажем, что в этом случае

$$\mu(ab) = \mu(b)\,\mu(a).$$

Подобно предыдущего, имеем:

$$\mu(ba) = \mu(abk) = \mu(ab)\mu(k) =$$

$$= \mu(a)\,\mu(b)[\,\mu(k)]^{\lambda}\,[\mu(\kappa)]^{-1}\,\mu(b)\,\mu(a)[\mu(k)]^{\lambda-2};$$

$$\mu(a^2b^2k^2) = \mu(ab)\,\mu(ba) =$$

$$= \mu(a)\,\mu(b)[\mu(k)]^{\lambda}\,\mu(b)\,\mu(a)\,[\mu(k)]^{\lambda-2} =$$

$$= \mu(a)[\,\mu(b)]^2\,\mu(a)[\mu(k)]^{2\lambda-2} =$$

$$= [\mu(a)]^2[\mu(b)]^2\,[\,\mu(k)]^{2\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(a^2b^2) = \mu(a^2b^2k^2\,k^{-2}) =$$

$$= \mu(a^2b^2k^2)\,\mu(k)^{-2} = [\mu(a)]^2[\mu(b)]^2\,[\mu(k)]^{2\lambda}[\mu(k)]^2 =$$

$$= [\mu(a)]^2[\mu(b)]^2\,[\mu(k)]^{2(\lambda+1)}.$$

Предположим, что уже доказано равенство

$$\mu(a^{2^{l-1}}b^{2^{l-1}}) = [\mu(a)]^{2^{l-1}}[\mu(b)]^{2^{l-1}}[\mu(k)]^{2^{l-1}\cdot(\lambda+2^{l-1}-2)}.$$

Имеем

$$\mu(a^{2^l}b^{2^l}k^{2^l}) = \mu(a^{2^{l-1}}b^{2^{l-1}}b^2a^2) =$$

$$= \mu(a^{2^{l-1}}b^{2^{l-1}})[\,\mu(b^2a^2) =$$

$$= [\mu(a)]^{2^{l-1}} [\mu(b)]^{2^{l-1}} [k_1]^{2^{l-1}\cdot(\chi+2^l-2)} \times$$

$$\times \mu(b)\mu(a)[k_1]^{\lambda-2} =$$

$$= [\mu(a)]^{2^{l-1}} [\mu(b)]^{2^l} \mu(a)[k_1]^{2^{l-1}\cdot(\lambda+2^l-2)}[k_1]^{\lambda-2} =$$

$$= [\mu(a)]^{2^l} [\mu(b)]^{2^l} [k_1]^{2^l\cdot(\chi+2^l-2)};$$

$$\mu(a^{2^l} b^{2^l}) = \mu(a^{2^l} b^{2^l} k^{2^l} k^{-2^l}) =$$

$$= \mu(a^{2^l} b^{2^l} k^{2^l})\mu(k^{-2^l}) =$$

$$= [\mu(a)]^{2^l} [\mu(b)]^{2^l} [k_1]^{2^l\cdot(\lambda+2^l-1)}.$$

С другой стороны, имеем

$$\mu(a^{2^l} b^{2^l}) = [\mu(a)]^{2^l} [\mu(b)]^{2^l} [k_1]^{2^l\cdot 2^l \theta}.$$

Следовательно, имеем

$$2^l(l+2^l - 1) = (2^l)^2\Theta.$$

Откуда имеем

$$l - 1 = 2^l(\Theta - 1).$$

для любого натурального $l \in \mathcal{N}$.

Если хотя бы для одного $l \in \mathcal{N}$ элемент $\Theta \in W_1$ равно 1, то $l=1$. Если все Θ отличны от 1, то любое 2^l при всех $l=1,2\ldots$ делит $l-1$, что в кольце главных идеалов приводит к равенству $l-1=0$ и значит $l=1$. Но тогда

$$\mu(ab) = \mu(b) = \mu(a).$$

Таким образом для фиксированных образующих $a,b \in G \cong \Omega = \langle a,b \rangle$ имеем

$$\mu(ab) = \begin{cases} \mu(ab) = \mu(a)\,\mu(b), \\ \text{либо} \\ \mu(ab) = \mu(b)\,\mu(a). \end{cases}$$

Следовательно, для произвольных образующих $x,y \in G$, $\langle x,y \rangle = G$ чистой свободной нильпотентной W-группы G имеем

$$\mu(x,y) = \begin{cases} [\mu(x)]^{\varepsilon_1} [\mu(y)]^{\varepsilon_2}, \quad \varepsilon_1,\varepsilon_2 \in E, \\ \text{либо} \\ [\mu(y)]^{\varepsilon_3} [\mu(x)]^{\varepsilon_4}, \quad \varepsilon_3,\varepsilon_4 \in E. \end{cases}$$

Более того, эти равенства справедливы для любых двух некоммутирующих элементов $x,y \in G$, так как они порождают свободную нильпотентную класса 2 W-подгруппу.

Таким образом, μ над $G \cong \Omega$ является либо почти полулинейным изоморфизмом, либо почти полулинейным антиизоморфизмом.

5.5. Основная теорема проективной геометрии для чистых нильпотентных класса 2 W-степенных групп Холла

Таким образом, если G и G_1 - чистые нильпотентные класса 2 W- степенные группы Холла над кольцами главных идеалов W и W_1 соответственно и $\varphi: \mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(G_1)$ решеточный изоморфизм, нами построено соответствие $\mu : G \to G_1$, которое для любых двух элементов $a,b \in G$ удовлетворяет условиям

$$\mu(ab) = [\mu(a)]^{\beta_1} [\mu(b)]^{\beta_2}, \tag{*}$$

либо

$$\mu(ab) = [\mu(b)]^{\beta_2} [\mu(a)]^{\beta_1}, \tag{**}$$

где $\beta_1, \beta_2 \in E_1 \subset W_1$ обратимые элементы.

Покажем, что на самом деле $\beta_1, \beta_2 = 1$.

Предположим, что $\beta_1 \neq 1$ $(\beta_2 \neq 1)$.

Если элементы a,b коммутируют, то все ясно. Предположим, что

$$1 \neq [a,b] \in Z(G).$$

Рассмотрим следующие альтернативы для фиксированного центрального элемента $z \in Z(G)$.

(A_1) Выполняется равенство (*)

$$\mu(z(ab)) = \mu(z)\mu(ab) = \mu(z)[\mu(a)]^{\beta_1} [\mu(b)]^{\beta_2}$$
$$||$$
$$\mu((za)b) = [\mu(za)]^{\gamma_1} [\mu(b)]^{\gamma_2} = [\mu(z)]^{\gamma_1} [\mu(a)]^{\gamma_1} [\mu(b)]^{\gamma_2}$$
$$||$$
$$\mu(a(zb)) = [\mu(a)]^{\varepsilon_1} [\mu(zb)]^{\varepsilon_2} = [\mu(a)]^{\varepsilon_1} [\mu(z)]^{\varepsilon_2} [\mu(b)]^{\varepsilon_2}$$

Здесь мы предполагаем, что

$$\mu((za)b) = [\mu(za)]^{\gamma_1} [\mu(b)]^{\gamma_2}; \tag{5.51}$$

$$\mu(a(zb)) = [\mu(a)]^{\varepsilon_1} [\mu(zb)]^{\varepsilon_2}. \tag{5.5.2}$$

Имеем

$$[\mu(z)]^{1-\gamma_1} = [\mu(a)]^{\gamma_1-\beta_1}[\mu(b)]^{\gamma_2-\beta_2}.$$

Если $1-\gamma_1 \neq 0$, т.е. $\gamma_1 \neq 1$, получаем, что элемент

$$[\mu(a)]^{\gamma_1-\beta_1}[\mu(b)]^{\gamma_2-\beta_2} \in Z(G_1),$$

что противоречиво. Таким образом $\gamma_1 = 1$ и, следовательно,

$$[\mu(a)]^{\gamma_1-\beta_1} = [\mu(b)]^{\beta_2-\gamma_2},$$

что противоречит независимости элементов a и b ($\langle a\rangle\cap\langle b\rangle=1$) и соответственно независимости $\mu(a)$ и $\mu(b)$ ($\mu(\langle a\rangle\cap\mu(\langle b\rangle)=1$). Поэтому можем заключить, что

$$1=\gamma_1=\beta_1=\beta_2=\gamma_2$$

и аналогично $1=\gamma_1=\varepsilon_1=\varepsilon_2=\gamma_2$.

Предположим теперь, что при условии (*)

$$\mu((za)b)=[\mu(b)]^{\gamma_2}[\mu(za)]^{\gamma_1}; \quad (5.5.3)$$

$$\mu(a(zb))=[\mu(a)]^{\varepsilon_1}[\mu(zb)]^{\varepsilon_2}. \quad (5.54)$$

Имеем

$$\begin{array}{ccc} \mu(z(ab)) = \mu(z)\mu(ab) & = & \mu(z)[\mu(a)]^{\beta_1}[\mu(b)]^{\beta_2} \\ \| & & \| \\ \mu((za)b)=[\mu(b)]^{\gamma_2}[\mu(za)]^{\gamma_1} & = & [\mu(b)]^{\gamma_2}[\mu(z)]^{\gamma_1}[\mu(a)]^{\gamma_1} \\ \| & & \| \\ \mu(a(zb))=[\mu(a)]^{\varepsilon_1}[\mu(zb)]^{\varepsilon_2} & = & [\mu(a)]^{\varepsilon_1}[\mu(z)]^{\varepsilon_2}[\mu(b)]^{\varepsilon_2} \end{array}$$

Отсюда имеем

$$\mu(z)[\mu(a)]^{\beta_1}[\mu(b)]^{\beta_2} = [\mu(b)]^{\gamma_2}[\mu(z)]^{\gamma_1}[\mu(a)]^{\gamma_1} =$$

$$=[\mu(z)]^{\gamma_1}[\mu(b)]^{\gamma_2}[\mu(a)]^{\gamma_1} =$$

$$=[\mu(z)]^{\gamma_1}[\mu(a)]^{\gamma_1}[\mu(b)]^{\gamma_2}\mu(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\mu(z)]^{\gamma_1} = [\mu(a)]^{\beta_1-\gamma_1}[\mu(b)]^{\beta_2-\gamma_2}$$

Если $\gamma_1 \neq 0$, то получаем противоречие: - элемент

$$[\mu(a)]^{\beta_1-\gamma_1}[\mu(b)]^{\beta_2-\gamma_2} \in Z(G_1).$$

Поэтому $\gamma_1 = 1$. Тогда

$$[\mu(z)]^{\gamma_1} = 1 = [\mu(a)]^{\beta_1}[\mu(b)]^{\beta_2-\gamma_2},$$

что опять приводит к противоречию, так как $\mu(<a>\cap\mu(<b>)\neq 1$. Следовательно, этот вариант отпадает.

Таким образом, в альтернативе (A_1) возможен лишь случай (5.51) и (5.52), и тогда $\beta_1=\beta_2=\varepsilon_1=\varepsilon_2=\gamma_1=\gamma_2=1$.

(A_2)

$$\mu(ab)=[\mu(b)]^{\beta_2}[\mu(a)]^{\beta_1}.$$

И в этом случае будем предполагать:

$$\mu\big((za)b\big)\cong\begin{cases}[\mu(za)]^{\gamma_1}[\mu(b)]^{\gamma_2},\\ \text{либо}\\ [\mu(b)]^{\gamma_2}[\mu(za)]^{\gamma_1}\end{cases}$$

Имеем

$$\begin{gathered}\mu\big(z(ab)\big)=\mu(z)\mu(ab)=\mu(z)[\mu(b)]^{\beta_2}[\mu(a)]^{\beta_1}\\ \|\qquad\qquad\qquad\qquad\|\\ \mu\big((za)b\big)=[\mu(za)]^{\gamma_1}[\mu(b)]^{\gamma_2}=[\mu(z)]^{\gamma_1}[\mu(a)]^{\gamma_1}[\mu(b)]^{\gamma_2}\end{gathered}$$

либо

$$\begin{gathered}\mu\big(z(ab)\big)=\mu(z)\mu(ab)=\mu(z)[\mu(b)]^{\beta_2}[\mu(a)]^{\beta_1}\\ \|\qquad\qquad\qquad\qquad\|\\ \mu\big((za)b\big)=[\mu(b)]^{\gamma_2}[\mu(za)]^{\gamma_1}=[\mu(b)]^{\gamma_2}[\mu(z)]^{\gamma_1}[\mu(a)]^{\gamma_1}\end{gathered}$$

Аналогично можно выписать остальные возможности. Теми же рассуждениями, как и при альтернативе (A_1) приходим к заключению, что для любых двух элементов $a,b\in G$ справедливы равенства

$$\mu(ab)=\begin{cases}\mu(a)\mu(b),\\ \text{либо}\\ \mu(b)\mu(a)\end{cases}.$$

Докажем теперь изоморфизм основных колец и, что этот изоморфизм определяет полулинейный изоморфизм $\mu:G\to G_1$.

Действительно, для простого элемента p из кольца главных идеалов W, имеем $\mu(x^p) =[\mu(x)]^{\sigma(p)}$. Покажем, что

$$\sigma(p_1+p_2) = \sigma(p_1) + \sigma(p_2), \qquad \text{(i)}$$

$$\sigma(p_1p_2) = \sigma(p_1)\,\sigma(p_2)\,. \qquad \text{(ii)}$$

Действительно,

(i)
$$\mu(zx^{p_1+p_2}) = \mu(z)[\mu(x)]^{\sigma(p_1+p_2)} =$$
$$= \mu\big((zx^{p_1})x^{p_2}\big) = \mu(zx^{p_1})\mu(x^{p_2}) =$$
$$= \mu(z)\mu(x^{p_1})\mu(x^{p_2}) = \mu(z)[\mu(x)]^{\sigma(p_1)}[\mu(x)]^{\sigma p_2}\,.$$

Следовательно, из чистоты групп G и G_1 имеем

$$\sigma(p_1+p_2) = \sigma(p_1) + \sigma(p_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sigma(\alpha+\beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta),\ \ \alpha,\beta \in W.$$

Имеем

$$\mu(z^{p_1}x^{p_1p_2}) = \mu(z^{p_1})\mu(x^{p_1p_2}) =$$
$$= [\mu(z)]^{\sigma(p_1)}[\mu(x)]^{\sigma(p_1p_2)} =$$
$$= \mu\big((z^{p_1}x^{p_1})x^{p_2}\big) = \mu(z^{p_1}x^{p_1})\mu(x^{p_2}) =$$
$$= \mu(z^{p_1})\mu(x^{p_1})[\mu(x)]^{\sigma(p_2)} =$$
$$= [\mu(z)^{\sigma(p_1)}[\mu(x)]^{\sigma(p_1)}[\mu(x)]^{\sigma(p_2)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [\mu(x)^{\sigma(p_1p_2)} = [\mu(x)]^{\sigma(p_1)}[\mu(x)]^{\sigma(p_2)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sigma(p_1p_2) = \sigma(p_1)\sigma(p_2) \Rightarrow \sigma(\alpha\beta) = \sigma(\alpha)\sigma(\beta),\ \ \alpha,\beta \in W$$

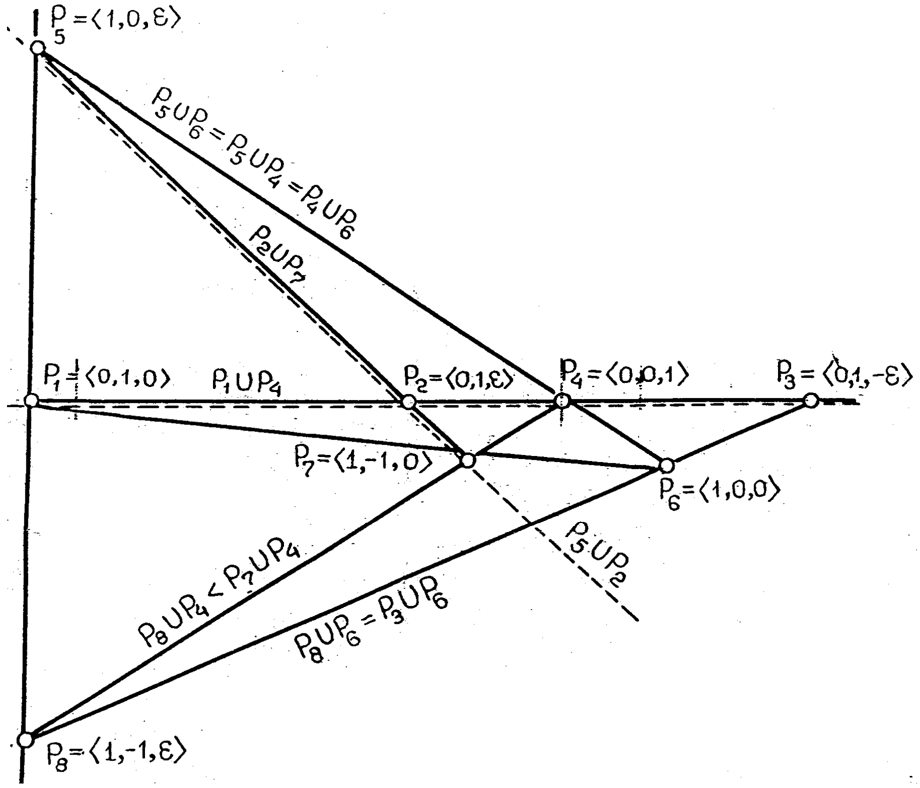
Таким образом нами доказана

Теорема 5.5.1. *(Основная теорема проективной геометрии для нильпотентных класса 2 W-степенных групп). Пусть G и G_1 W-степенные группы Холла над кольцами W и W_1 соответственно. Если G - чистая нильпотентная класса 2 группа, W кольцо главных идеалов и* $\varphi:\ \mathcal{L}(G)\to\mathcal{L}(G_1)$ *- решеточный изоморфизм, то существует изоморфизм* $\sigma:\ W\to W_1$ *и σ-полулинейный изоморфизм такой, что для любой подгруппы* $\mu:\ G\to G_1$ *имеем*

$$\varphi(A) = \mu(A).$$

Если $E\subset W$ группа обратимых элементов, то для любого $\varepsilon\subset E$ отображение $\mu_\varepsilon=[\mu]^\varepsilon$ будет либо полулинейным изоморфизмом, либо полулинейным антиизоморфизмом относительно σ; если при этом μ_ε полулинейный изоморфизм, то отображение $[\mu_{\varepsilon^{-1}}] = [\mu]^{\varepsilon^{-1}}$ будет полулинейным антиизоморфизмом относительно σ и наоборот.

Доказательство основной теоремы немедленно следует из предыдущих рассуждений. Заметим лишь, что соответствующий изоморфизм основных колец графически иллюстрируется через фиг. 5.



Фиг. 5.

6. РЕШЕТОЧНЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ КЛАССА 2 КОЛЕЦ И АЛГЕБР ЛИ

В данном разделе будем изучать решеточные изоморфизмы периодических нильпотентных класса 2 колец и алгебр Ли с чистой нильпотентной подалгеброй и докажем основную теорему проективной геометрии для таких алгебр. Будут построены соответствующие контрпримеры, показывающие, что аналогичное утверждение для n-нильпотентных алгебры Ли не имеет места при $n\geq 3$.

6.1. Строгая решеточная определяемость непериодической нильпотентной класса 2 алгебры Ли

Изучая решеточные изоморфизмы непериодических нильпотентных алгебр Ли над кольцами главных идеалов, обнаруживаем, что справедлива

Теорема 6.1.1. *Пусть* $f\colon \mathcal{L}(L)\to\mathcal{L}([L_1)$ *решеточный изоморфизм, где* L *и* L_1 *нильпотентные алгебры Ли над кольцами* K *и* K_1 *соответственно, если в* L *имеется чистая неабелева подалгебра, то существует изоморфизм* $\sigma{:}K\to K_1$ *и полулинейный изоморфизм* $\mu{:}L\to L_1$ *относительно* σ, *что* $f(A)=\mu(A)$ *для любой подалгебры* $A\in\mathcal{L}(L)$.

Докательство. По теореме 5.5.1. решеточный изоморфизм f индуцируется биекциями μ_ε, $\varepsilon\in\Lambda$, где Λ группа обратимых элементов из K, которые являются полулинейными изоморфизмами относительно изоморфизма $\sigma{:}K\to K_1$ на чистых трехмерных подалгебрах L. Действительно, если трехмерная подалгебра абелева, то это следует из основной теоремы проективной геометрии, в неабелевом случае это следствие теоремы 5.2.1.

Зафиксируем элементы $x_1,x_2\in L$, для которых $<x_1,x_2>\cong\Omega$ – чистая неабелева подалгебра, т.е.

$$Ann(x_1)=Ann(x_2)=Ann([x_1,x_2])=0.$$

Таким образом, в L имеем чистая подалгебра $<x_1,x_2>$, которая является свободной нильпотентной класса 2.

Покажем, что для произвольного x справедливо

$$\mu(x_1+x)=\mu(x_1)+\mu(x). \qquad \text{(A)}$$

Рассмотрим следующие возможности

(1) $Ann(x)=0,\quad <x_1>\cap<x>=0,\quad Ann([x_1,x])=0;$

(2) $Ann(x)=0,\quad <x_1>\cap<x>=0,\quad Ann([x_1,x])=id(k);\ Ann([x_2,x])=0;$

(3) $Ann(x)=0,\quad <x_1>\cap<x>=0,\quad Ann([x_1,x])=id(k);\ Ann([x_2,x])=id(k_0);$

(4) $Ann(x)=0,\quad <x_1>\cap<x>\neq 0$;

(5) $Ann(x)=id(k),\ k\neq 0$.

Докажем равенство (A) для каждого случая в отдельности.

(1) В этом случае $<x_1,x>$ – чистая нильпотентная подалгебра и равенство (A) очевидно.

(2) Если $Ann([x_2+x,x_1])=id(n),\ n\neq 0$, то тогда

$$0=kn[x_2+x,x_1]=kn[x_2,x_1]\neq 0.$$

Значит $Ann([x_2+x,x_1])=0$. С другой стороны $<x_2>\cap<x_1+x>=0$, так как, если

$$k_1(x_1+x)=k_2x_2\Rightarrow 0=k_1k[x_1+x,x_1]=k_2k[x_2x_1]\neq 0.$$

Следовательно, если $Ann([x_1+x,x_2])$, имеем

$$\mu(x_1+(x_2+x))=\mu(x_2+(x_1+x))=\mu(x_2)+\mu(x_1+x)=$$
$$=\mu(x_2)+\mu(x_1)+\mu(x)\Rightarrow (A)$$

Если же $Ann([x_1+x,x_2])=id(k_0),\ (k_0\neq 0)$, то тогда

$Ann([x+k_0x_2,x_1])=0.$

Действительно

$$0=k\cdot n([x+k_0x_2,x_1])=knk_0[x_2,x_1]\neq 0.$$

Следовательно, имеем

$$\mu((x+x_1)+k_0x_2)=\mu((x+k_0x_2)+x_1)=\mu(x)+k_0\mu(x_2)+\mu(x_1)=$$
$$=\mu(x_1+x)+k_0\mu(x_2)\Rightarrow (\mathrm{A})$$

(3) В этом случае $Ann([x_1+x,k_0x_2])=0$, так как в противном случае

$$0=n[x_1+x,k_0x_2])=nk_0[x_1,x_2]\neq 0.$$

С другой стороны $Ann([x+k_0x_2,x_1])=0$, так как иначе $\mathrm{k_n[x_1,x]+k_n[x_2,x_1]=0}$.

Также как в предыдущем случае приходим к справедливости (A).

(4) Элемент $z=[x_1,x_2]$ суть чистый элемент и $z\in Z(L)$.

Поэтому

$$\mu(z+(x_1+x))=\mu(z)+\mu(x_1+x),$$
$$\mu(z)\in Z(L_1)=\mu(Z(L)).$$

С другой стороны $(z+x_1)$ – чистый элемент и

$$<z+x_1>\cap<x_2>=0,\quad Ann([z+x_1,x_2])=0.$$

Из предыдущего (случай (3)) имеем

$$\mu((z+x_1)+x)=\mu(z)+\mu(x_1)+\mu(x)\Rightarrow (A).$$

(5) Ясно, что существует $k_0 \neq 0$, для которого $k_0 x_2 \in C_L(<x>)$. С другой стороны, $<x_1+x> \cap < k_0 x_0>=0$ и $Ann([x_1+x, k_0 x_2])=0$, так как иначе $0=k_0 n[x_1,x_2])+nk_0[x,x_0] \neq 0$. Аналогично заключаем $Ann([x_1,x+k_0 x_2])=0$. Отсюда также как в случае (4) заключаем справедливость (А).

Доказательство теоремы. Пусть x_4,x_5 – произвольные элементы L. И покажем, что $\mu(x_4+x_5)=\mu(x_4)+\mu(x_5)$. Из предыдущего заключаем, что достаточно рассмотреть тот случай, когда не существует $x \in L$ такой, что $Ann([x_4,x])=Ann([x_5,x])=0$. Предположим поэтому, что для некоторых $k,k_1,k_2,k_3 \in K$.

$$Ann([x_4,x_5])=id(k), \quad Ann([x_1,x_5])=id(k_1),$$
$$Ann([x_1,x_4])=id(k_2), \quad Ann([x_4,x_2])=id(k_3).$$

Следовательно, для $\bar{k}=k_1 k_2$, $\bar{k}x_1 \in C_L(x_4,x_5)$. Так как $Ann([\bar{k}x_1+x_4,x_2])=0$, находим

$$\mu(\bar{k}x_1+x_4+x_5)=\mu((\bar{k}x_1+x_4)+x_5)=$$
$$=\bar{k}\mu(x_1)+\mu(x_4)+\mu(x_5)=\bar{k}\mu(x_1)+\mu(x_4+\mu x_5) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mu(x_4+x_5)+\mu(x_4)+\mu(x_5).$$

Для завершения доказательства теоремы надо показать

$$\mu([x_4,x_5])=\varepsilon[\mu(x_4),\mu(x_5)], \quad \varepsilon \in \Lambda,$$

так как, если $\varepsilon \in \Lambda$, то соответствие ε^{-1} будет искомым полулинейным изоморфизмом.

Имеем $\mu([x_1,x_2])=[\mu(x_1),\mu(x_2)]$, кроме того, так как L нильпотентна класса 2 и f–нормальный изоморфизм

$$\mu([x_4,x_5])=\alpha[\mu(x_4),\mu(x_5)], \ |\alpha|>1.$$

Подалгебра $<x_1,x_4+x_2>$ – чистая. Следовательно, из предыдущих рассуждений находим

$$\mu([x_1,x_4+x_2])= \mu([x_1,x_4]+[x_1,x_2]) =$$
$$= [\mu(x_1),\mu(x_4+x_2)] = [\mu(x_1),\mu(x_4)] + [\mu(x_1),\mu(x_2)] =$$
$$= \mu[x_1,x_4] + [\mu(x_1),\mu(x_2)] \Rightarrow \mu([x_1,x_4]) = [\mu(x_1),\mu(x_4)] \Rightarrow \mu([x_4,x_1+x_5]) =$$
$$= \mu([x_4,x_1]+[x_4,x_5]) = [\mu(x_4),\mu(x_1)] + [\mu(x_4),\mu(x_5)] = [\mu(x_4),\mu(x_2+x_3)] =$$
$$= [\mu(x_4),\mu(x_1)]+ [\mu(x_4),\mu(x_5)] \Rightarrow \mu([x_4, x_5]) = [\mu(x_4),\mu(x_5)].$$

Тем самым теорема доказана.

6.2. О решеточных изоморфизмах непериодических алгебр Ли в общем случае (конструкция контрпримера)

В связи с теоремой 6.1.1. возникают естественные вопросы:

1. Индуцируется ли любой решеточный изоморфизм между нильпотентными класса 2 алгебрами Ли L и L_1 полулинейным изоморфизмом, если $dimL\geq 2$.

2. Индуцируется ли любой решеточный изоморфизм между нильпотентными класса n $(n\geq 3)$ алгебрами Ли полулинейным изоморфизмом, если L содержит чистую n – нильпотентную подалгебру.

С другой стороны, возникает естественная задача о рассмотрении более насыщенной решетки нежели $\mathcal{L}$(L).

Определение 6.2.1. Подмножество L_0 кольца L назовем подполукольцом, если

$$x_1,\ x_2\in L_0 \Rightarrow x_1+x_2,\ \ [x_1,x_2]\in L_0.$$

Множество всех подполуколец кольца L образует решетку. Обозначим ее через $S\mathcal{L}(L)$. Ясно, что $\mathcal{L}(L)\subseteq S\mathcal{L}(L)$ и что $S\mathcal{L}(L)$ должна нести большую информацию о строении L чем $\mathcal{L}(L)$. Изоморфизм

$$f\colon S\mathcal{L}(L)\rightarrow S\,\mathcal{L}(L_1)$$

назовем $S\mathcal{L}$–изоморфизмом. Решетка всех подполуколец кольца является кольцевым аналогом решетки подполугрупп группы, а изучение $S\mathcal{L}$–изоморфизмов аналогом ΠS–изоморфизмов групп.

В теории групп имеется следующая теорема: каждый ΠS–изоморфизм непериодической нильпотентной группы индуцируется либо одним изоморфизмом, либо одним антиизоморфизмом (см. М.Н.Аршинов (1969)).

Было бы естественным предполагать, что справедливо аналогичное утверждение и для лиевых колец, а именно:

3. Каждый $S\mathcal{L}$–изоморфизм непериодического нильпотентного кольца Ли L индуцируется либо изоморфизмом, либо антиизоморфизмом.

Ниже мы построим примеры дающие отрицательные ответы на вопросы 1 и 2, а также на гипотезу 3.

Для некоторого упрощения рассжудений, ограничимся случаем, когда $K=Z$, т.е. L кольцо Ли. Для общих основных колец рассуждения можно провести аналогично с некоторыми соответствующими модификациями.

Пример 6.2.1. Пусть кольцо Ли $L=<x_1,x_2,y>$ имеет определяющие соотношения

$$[x_1,x_2]=y,\ \ [y,x_1]=[y,x_2]=0,$$

$Ann(y)=id(p)$ (p – простой элемент из K). Тогда $Ann(x_1)=Ann(x_2)=0$. Ясно, что $L=<x_1>\cup<x_2>,\ [L,L]=<y>$ и что произвольный элемент $l\in L$ имеет единственную запись вида

$$l = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2+\beta y, \qquad \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{Z},\ \ 0 \le \beta < p.$$

Определим взаимооднозначное соответствие $f\colon L\to L$ следующим образом

$$\boldsymbol{l}' = f(\boldsymbol{l}) = \begin{cases} \boldsymbol{l}, & \text{если} \qquad \alpha_1\alpha_2 \equiv 0 (mod\ p), \\ \boldsymbol{l} + sy, & \text{если} \qquad \alpha_1\alpha_2 \neq 0 (mod\ p), \\ \text{где} \quad 0 \le s < p & \text{и} \qquad\qquad s+\alpha_1+\alpha_2 \equiv 0 (mod\ p). \end{cases}$$

Замечание 6.2.1. В случае алгебр Ли условие:

$$0\le s<p,\ s+\alpha_1+\alpha_2\equiv 0\ (mod\ p)$$

надо заменить на следующее: если $s_1+\alpha_1+\alpha_2\equiv 0\ (mod\ p)$,то $id(s)\supseteq id(s^1)$, так как условие $0\le s<p$, естественно, теряет смысл.

Покажем, что f индуцирует $S\mathscr{L}$–изоморфизм L и не является ни автоморфизмом, ни антиавтоморфизмом. Тем самым мы укажем на нильпотентное кольцо Ли класса 2 размерности 2. $S\mathscr{L}$ –изоморфизм которого не индуцируется ни автоморфизмом, ни антиавтоморфизмом L.

Предварительно заметим, что $S\mathscr{L}$–изоморфизм кольца влечет решеточный изоморфизм (проверяется это точно также как и в случае групп). Поэтому этот примеи дает ответы на вопрос 1 и предположение 3.

Таким образом, надо показать, что f суть $S\mathscr{L}$–изоморфизм, т.е. для любых $l_1,l_2\in L$.

$$f(l_1+ l_2) = \omega(f(l_1); f(l_2)),$$

где ω – полином с неотрицательными коэффициентами относительно $f(l_1)$ и $f(l_2)$. Это будет означать, что f подполукольцо переводит в подполукольце.

Подполукольцо порожденное множеством $A\le L$ будем обозначать через $<A>_+$.

Нет необходимости проверить аналогичное равенство для произведения, так как

$$[l_1, l_2] \in [L,L]=<y>, \quad \Rightarrow f([l_1, l_2]) = [l_1, l_2].$$

Предположим, что

$$l_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2+\beta_1 y,$$

$$l_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2+\beta_2 y.$$

Рассмотрим две возможности

A. Предположим, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0(mod\ p).$$

В этом случае

$$[l_1,l_2] =[\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2+\beta_1 y,\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2+\beta_2 y]=$$

$$= \alpha_{11}\alpha_{22}[x_1,x_2] + \alpha_{12}\,\alpha_{21}\,[x_2,x_1]=\Delta y.$$

Так как $\Delta \not\equiv 0(modp)$, то ясно, что $y \in <l_1,l_2>_+$.

С другой стороны

$$f(l_1+l_2)=l_1+l_2+sy=(l_1+s_1y)+(l_2+s_2y)+sk -$$

$$- (s_1+s_2)y=f(l_1)+f(l_2)+\bar{s}_y \in <f(l_1),f(l_2)>_+,$$

$$\bar{s} = s - s_1 - s_2.$$

B. Предположим, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22} \end{vmatrix} \equiv 0(mod\ p)$$

и покажем, что

$$f(l_1+l_2)=f(l_1)+f(l_2).$$

Доказательство этого тождества разобъем на несколько пунктов

(i) $\alpha_{11}\alpha_{12} \equiv 0(mod\ p)$

Тогда либо $\alpha_{11} \equiv 0(mod\ p)$, либо $\alpha_{12} \equiv 0(mod\ p)$. Если только один из либо $\alpha_{1i} \equiv 0(mod\ p)$ $(i=1,2)$, то тогда один из либо α_{2i} $(i=1,2)$ также делится на p. С учетом (1) видно, что (3) верно.

Если же имеем $\alpha_{11} \equiv 0(mod\ p)$, $\alpha_{12} \equiv 0(mod\ p)$, $\alpha_{21}\ \alpha_{12} \not\equiv 0(mod\ p)$, то получим

$$f(l_1)=l, \quad f(l_2)=l_2+s_2y, \quad \alpha_{21}+\alpha_{22}+s_2 \equiv 0\ (mod\ p).$$

Поэтому

$$(\alpha_{11}+\alpha_{21}) + (\alpha_{12}+\alpha_{22})+s_2 \equiv 0(mod\ p).$$

Следовательно (3) выполняется.

$$\text{(ii)} \quad \alpha_{11}\alpha_{12} \not\equiv 0 \ (mod\ P)$$

Если же при этом $\alpha_{21}\alpha_{22} \not\equiv 0 \ (mod\ p),$ то проходят рассуждения, аналогичные предыдущим, в которых l_1 и l_2 меняются ролями.

$$\text{(iii)} \quad \alpha_{11}\alpha_{12} \not\equiv 0 \ (mod\ p), \quad \alpha_{21}\alpha_{22} \not\equiv 0 \ (mod\ p).$$

В этом случае имеем

$$f(l_1)=l_1+s_1y, \quad \alpha_{11}+\alpha_{12}+s_1 \equiv 0 \ (mod\ p).$$

$$f(l_2)=l_2+s_2y, \quad \alpha_{21}+\alpha_{22}+s_2 \equiv 0 \ (mod\ p).$$

Тогда из этих равенств находим, что $s_2 = s_1q(mod\ p).$

Поэтому

$$(\alpha_{11}+\alpha_{21}) + (\alpha_{12}+\alpha_{22})+(s_1+s_2) \equiv 0(mod\ p).$$

С другой стороны

$$(\alpha_{11}+\alpha_{21}) \ (\alpha_{12}+\alpha_{22})+(s_1+s_2) \equiv 0(mod\ p) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+q)^2 \alpha_{11}\alpha_{12} \equiv 0(mod\ p) \Leftrightarrow 1+q \equiv 0(mod\ p).$$

Поэтому $s_1+s_2 \equiv 0(mod\ p).$ Следовательно (3) выполняется.

Таким образом, f индуцирует $S\mathcal{L}$–изоморфизм. Из (1) видно, что f не является ни изоморфизмом, ни антиизоморфизмом.

6.3. Построение решеточного изоморфизма не индуцирующего изоморфизма колец Ли

Пользуясь этой конструкцией, построим один пример 2-нильпотентной группы, которая содержит два независимых элемента бесконечного порядка, имеет конечный коммутант и решеточный изоморфизм которой не индуцируется изоморфизмом.

Этот пример улучшает один пример А.С.Пекелис (1965), в котором предполагается, что коммутант имел порядок 2.

Пример 6.3.1. Пусть $G=\langle a\rangle \cup \langle b\rangle$ – нильпотентная группа и имеет определяющие соотношения

$$[a,b]=y, \quad y^p=1, \quad p\text{- простое число}$$

$$b^{-1}yb=y, \quad a^{-1}ya=y.$$

Тогда $|\mathcal{L}(\langle a\rangle| = \infty, \quad |\mathcal{L}(\langle b\rangle)| = \infty.$

Всякий элемент имеет единственную запись вида

$g = a^{n_1}a^{n_2}y^m$, где $n_1,n_2 \in \mathbb{Z}, \quad 0 \le m < p.$

Аналогично предыдущего, определим взаимно однозначное соответствие $f:G\to G$ по формуле

$$\overline{g} = f(g) = \begin{cases} g, & \text{если} \quad n_1 n_2 \equiv 0 (mod\, P), \\ g y^s, & \text{если} \quad n_1 n_2 \neq 0 (mod\, P), \\ 0 \leq s < p, & \qquad S + n_1 + n_2 \equiv 0 (mod\, P). \end{cases}$$

Рассмотрим произвольные элементы из G

$g_1 = a^{n_{11}} b^{n_{12}} y^{m_1}$, $\quad g_2 = a^{n_{21}} b^{n_{22}} y^{m_2}$.

Для проверки того, что f индуцирует проектирование представляется два случая

$$(1) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{vmatrix} \neq 0 (mod\, p)$$

Тогда

$$c = [g_1, g_2] = [a^{n+1} b^{n+2} y^{m_1}, a^{n_{21}} b^{n_{22}} y^{m_2}] =$$
$$[a^{n_{11}}, b^{n_{22}}][a^{n_{12}} b^{n_{21}}] = [a, b]^{n_{11} n_{22}} [b, a]^{n_{12} n_{21}} = \overline{\Delta} y.$$

Так как $\overline{\Delta} \neq 0 (mod\, P)$, то $y \in \langle g_1 \rangle \cup \langle g_2 \rangle$ и это означает, что f оставляет $\langle g_1 \rangle \cup \langle g_2 \rangle$ на месте

$$(2) \qquad \overline{\Delta} \equiv 0 (mod\, P).$$

Рассмотрение этого случая в точности совпадает с аналогичным пунктом из предыдущего примера. Остается наконец заметить, что f не является изоморфизмом.

Приведем теперь пример дающий отрицательный ответ на вопрос 2.

Пример 6.3.2. Пусть кольцо Ли

$$L = \langle x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, y_1, y_2, \dots, y_{n-2} \rangle.$$

имеет следующие определяющие соотношения:

$[x_2, x_1] = x_3$,

$[x_i, x_1] = x_{i+1}$, $\quad p y_i = 0$, $\quad p > 2$ - простое число

$[x_3, x_2] = y_1$, $\quad [y_i, x_2] = y_{i+1} \qquad i = 1, 2, \dots, n-3$.

Тогда $A_{nn}(x_1) = A_{nn}(x_2) = A_{nn}(x_i) = 0$, $\quad i = 1, 2, \dots, n-3$.

Кроме того, все невыписанные соотношения тривиальны.

Нетрудно заметить, что кольцо L действительно существует и оно нильпотентно класса $n \geq 3$.

Фактически L имеет две образующих x_1,x_2, т.е. $L=<x_1>\cup<x_2>$. Ясно, что подкольцо $L_0=<x_1>\cup<px_2>$ – чистое и нильпотентно класса n. Всякий элемент l из L имеет единственную запись вида

$$l=\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + y, \quad \text{где} \quad y\in[L,L].$$

Определим взаимно-однозначное соответствие $f:L\rightarrow L$ формулой (1). Покажем, что f индуцирует $S\mathcal{L}$–изоморфизм, т.е. проверим, что для любых $l_1,l_2\in L$ имеет место

$$f(l_1 + l_2) = \omega(f(l_1),f(l_2)),$$

где ω – полином от $f(l_1)$ *и* $f(l_2)$ с неотрицательными коэффициентами. Как и в предыдущем примере нет необходимости проверить то же самое для произведения, так как

$$f([l_1 , l_2]) = [\ (f(l_1),f(l_2)].$$

Предположим, что

$$l_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + y_1,$$

$$l_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + y_2.$$

Рассмотрим две возможности

$$\text{(A)} \quad \Delta=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}\equiv 0(mod\ p\ )$$

В этом случае, равенство $f(l_1 + l_2) = f(l_1) + f(l_2)$ проверяется точно так же как в случае (B) из примера 1.5.

(B) $\Delta \not\equiv 0(mod\, p)$.

Рассмотрим коммутаторы веса n

$c = [\ \ldots\ [[\ l_1,\ l_2]\ l_1]\ \ldots\ l_1] =$

$= [\ \ldots\ [[\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + y_1, \alpha_{21}x_{22}x_1 + y_2]^{-}, \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + y_1], \ldots, \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + y_1] =$

$= [\ \ldots\ [[\alpha_{11}\alpha_{22}[x_1,x_2]+ \alpha_{12}\alpha_{21}[x_2,x_1], \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2], \ldots, \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2] =$

$= [\ \ldots\ [[[\ -\alpha_{11}^2\alpha_{22}[x_3,x_1] - \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{12}[x_3,x_2]], \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2], \ldots, \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2] =$

$[\ \ldots\ [[\ -\alpha_{11}^2\alpha_{22}x_4 - \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{12}y_1, \alpha_{11}x_2 + \alpha_{12}x_2], \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2], \ldots\ , \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2] =$

$$= -\alpha_{11}^{n-1}\alpha_{22}x_{n+1} - \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{12}^{n-2}y_{n-2} + \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{11}^{n-2}x_{n+1} + \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{12}^{n-2}y_{n-2} =$$

$$= -\alpha_{11}^{n-2}\Delta x_{n+1} + \alpha_{12}^{n-2}\Delta y_{n-2}\,;$$

$c_2 = [\ \ldots\ [[\ l_1,\ l_2]\ l_2]\ \ldots\ l_2] =$

$= [\,\dots\,[[\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + y,\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2 + y_2]^{-},\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + y_2],\ \dots,\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + y_2]\ ,$

$,\ \dots,\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + y_2] =$

$$= -\alpha_{11}^{n-2}\alpha_{22}x_{n+1} - \alpha_{22}^{n-2}\alpha_{11}y_{n-2} + \alpha_{21}^{n-2}\alpha_{12}x_{n+1} + \alpha_{22}^{n-2}\alpha_{21}\alpha_{12}y_{n-2} =$$

$$= -\alpha_{21}^{n-2}\Delta x_{n+1} - \alpha_{22}^{n-2}\Delta y_{n-2};$$

Рассмотрим определитель

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{11}^{n-2} & \alpha_{12}^{n-2} \\ \alpha_{21}^{n-2} & \alpha_{22}^{n-2} \end{vmatrix}$$

Предположим сперва, что $\Delta_1 \not\equiv 0 (mod\ p)$. Имеем

$$-c_1\alpha_{21}^{n-2} = \Delta(\alpha_{11}^{n-2}\alpha_{21}^{n-2}x_{n+1} + \alpha_{12}^{n-2}\alpha_{21}^{n-2}y_{n-2}),$$

$$-c_2\alpha_{11}^{n-2} = \Delta(\alpha_{21}^{n-2}x_{n-1} + \alpha_{22}^{n-2}\alpha_{11}^{n-2}y_{n-2}).$$

$$c_1\alpha_{21}^{n-2} - c_2\alpha_{21}^{n-2} = \Delta(\alpha_{11}^{n-2}\alpha_{22}^{n-2} - \alpha_{12}^{n-2}\alpha_{21}^{n-2})y_{n-2} = \Delta\Delta_1 y_{n-2}.$$

Из свойства антикоммутативности кольца Ли имеем, что

$$-c_2,\ c_1 \in \langle f(l_1), f(l_2)\rangle_+.$$

Следовательно

$$\Delta\Delta_1 y_{n-2} \in \langle f(l_1), f(l_2)\rangle_+.$$

Так как аннулятор y_{n-2} - простое число p, то $y_{n-2} \in \langle f(l_1), f(l_2)\rangle_+$.

С другой стороны

$$f(l_1+l_2) = l_1 + l_2 + sy_{n-2} = (l_1 + s_1y_{n-2}) + (l_2 + s_2y_{n-2}) +$$

$$+ [s - (s_1 + s_2)]y_{n-2} = f(l_1) + f(l_2) + \bar{s}y_{n-2},$$

где $\bar{s}$, $s_1, s, s_2 \in \{0,1,\dots,p-1\}$, $\bar{s} \equiv [s - (s_1 + s_2)] (mod\ p)$.

Предположим теперь, что $\Delta_1 \equiv 0 (mod\ p)$. Тогда

$$\alpha_{ij} \not\equiv 0 (mod\ p) \quad (i=1,2;\ j=1,2)$$

Действительно, пусть $\alpha_{11} \equiv 0 (mod\ p)$. Так как $\Delta \equiv 0 (mod\ p)$, имеем

$$\alpha_{22}\alpha_{11} - \alpha_{21}\alpha_{12} \not\equiv 0 (mod\ p) \Rightarrow \alpha_{12}\alpha_{21} \not\equiv 0 (mod\ p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{21} \not\equiv 0 (mod\ p),\ \alpha_{12} \not\equiv 0 (mod\ p).$$

С другой стороны,

$$\alpha_{11}^{n-2}\alpha_{22}^{n-2}-\alpha_{21}^{n-2}\alpha_{12}^{n-2}\equiv 0(mod\ p)\Rightarrow \alpha_{21}^{n-2}\alpha_{12}^{n-2}\equiv 0(mod\ p).$$

Получили противоречие.

Рассмотрим коммутатор веса n

$c_3 = [[\dots [[l_1, l_2], l_2] \dots l_2], l_1] =$

$= [[\dots [[\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + y_{,}\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2 + y_2]^{\cdot}, \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + y_2], \dots, \alpha_{21}x_1 + +\alpha_{22}x_2 + y_2]$,

$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + y_1] =[[\dots [\alpha_{11}\ \alpha_{12}[x_1,x_2] + \alpha_{12}\alpha_{21}[x_2x_1]^{\cdot}, \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + y_2],$

$\dots, \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + y_2]$, $\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + y_2] =$

$$=-\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{21}^{n-3}\alpha_{11}x_{n+1}-\alpha_{11}\alpha_{22}^{n-2}\alpha_{12}y_{n-2}+\alpha_{12}\alpha_{21}^{n-2}\alpha_{11}x_{n-1}+$$
$$+\alpha_{11}\alpha_{21}^{n-1}\Delta x_{n+1}+\alpha_{22}^{n-3}\alpha_{11}\Delta y_{n-2}.$$

Рассмотрим разность

$$\alpha_{21}^{n-3}c_3-\alpha_{21}^{n-3}\alpha_{11}c_2=$$

$$=\alpha_{21}^{n-2}(\alpha_{11}\alpha_{22}^{n-3}\Delta x_{n+1}+\alpha_{22}^{n-2}\alpha_{12}\Delta y_{n-2})-\alpha_{21}^{n-3}\alpha_{11}(\alpha_{21}^{n-2}\Delta x_{n+1}+\alpha_{22}^{n-2}\Delta y_{n-2})=$$

$$=\alpha_{21}^{n-2}\alpha_{22}^{n-2}\alpha_{12}\Delta y_{n-2}-\alpha_{21}^{n-3}\alpha_{11}\alpha_{22}^{n-2}\Delta y_{n-2}=\alpha_{21}^{n-3}\alpha_{22}^{n-3}\Delta^2 y_{n-2}.$$

Следовательно,

$$y_{n-2}\in \langle c_2,c_3\rangle_+ \Rightarrow y_{n-2}\in \langle f(l_1),f(l_2)\rangle_+$$

Аналогично предыдущего заключаем

$$f(l_1 + l_2) = f(l_1) + f(l_2) + \overline{\mathbf{S}}\,y_{n-2},\quad 0\le \overline{\mathbf{S}} < p.$$

Итак, соответствие f всякое подполукольцо переводит в подполукольце, т.е. f индуцирует $S\mathscr{L}$–изоморфизм лиева кольца L и не является ни изоморфизмом, ни антиизоморфизмом.

7. РЕШЕТОЧНЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ КЛАССА 2 W-СТЕПЕННЫХ ГРУПП

Известно (теорема Р.Бэра [2]), что всякая абелева группа, содержащая два независимых элемента бесконечного порядка, определяется решеткой своих подгрупп, при этом каждый решеточный изоморфизм является следствием двух групповых. В работе Л.Е.Садовского (1965) доказана решеточная определяемость локально нильпотентных (неабелевых) групп без кручения, причем каждый решеточный изоморфизм индуцируется одним групповым изоморфизмом и одним групповым антиизоморфизмом. Естественно предположить, исходя из приведенных результатов, что теорему Л.Е.Садовского можно распространить и на смешанный локально нильпотентный случай. Однако оказалось, что существуют решеточные изоморфизмы нильпотентных класса 2 групп, содержащих два независимых элемента бесконечного порядка и не являющихся следствием группового изоморфизма и группового антиизоморфизма.

7.1. Строгая решеточная определяемость нильпотентной класса 2 непериодической W-степенной группы

С другой стороны, А.С.Пекелис (1967) доказал, что существуют смешанные метабелевы группы, определяющиеся решеткой своих подгрупп, причем каждый решеточный изоморфизм является следствием одного группового изоморфизма и одного группового антиизоморфизма: именно, метабелева группа должна обладать двумя чистыми элементами и из неперестановочности пары независимых чистых элементов должна следовать неперестановочность любых степеней этих элементов.

В настоящем разделе доказывается, что для того, чтобы смешанная нильпотентная класса 2 $\boldsymbol{W}$ -группа G определялась решеткой своих подгрупп, достаточно потребовать существования в G двух независимых чистых элементов, никакие степени которых неперестановочны; при этом каждый решеточный изоморфизм $\boldsymbol{W}$ группы индуцируется некоторым полулинейным изоморфизмом. Тем самым обобщается теорема А.С.Пекелиса на случай $\boldsymbol{W}$-степенных групп. Сформулируем эту теорему.

Теорема 7.3.1. *Пусть G и G_1 решеточно изоморфные нильпотентные класса 2 W-степенные группы над кольцами главных идеалов W и W_1, соответственно. Если в G имеется чистая неабелева W-подгруппа, то решеточный изоморфизм $f:\mathcal{L}(G)\to\mathcal{L}(G_1)$, индуцируется полулинейным изоморфизмом $\varphi:G\to G_1$ относительно изоморфизма*

$\sigma: W \to W_1$. Более того, если Λ группа обратимых элементов кольца W, то для $\varepsilon \in \Lambda$ отображение $\varphi_\varepsilon = [\varphi]^\varepsilon$ будет либо полулинейным изоморфизмом, либо полулинейным антиизоморфизмом относительно того же σ.

Доказателььлство. По теореме 5.5.1 решеточный изоморфизм $f: \mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(G_1)$, индуцируется биекциями μ_ε, $\varepsilon \in \Lambda$, где Λ группа обратимых элементов W, которые являются полулинейными изоморфизмами на всех чистых трехмерных W-подгруппах G. Действительно, если трехмерная подгруппа абелева, то это следует из основной теоремы проекти вной геометрии, если же она неабелева, то это следствие теоремы 5.5.1.

Зафиксируем элементы $x_1, x_2 \in G$, для которых W-подгруппа $\langle x_1, x_2 \rangle \cong \Omega$ чистая неабелева и, следовательно, свободная нильпотентная класса 2 W-подгруппа. Таким образом, имеем:

$$exp(x_1) = exp(x_2) = exp([x_1, x_2]) = 1.$$

Покажем, что для произвольного $x \in G$ справедливо равенство

$$\mu(x_1 x) = \mu(x_1)\, \mu(x) \ . \ (*)$$

Заметим, что для простоты изложения зафиксируем один из μ_ε, $\varepsilon \in \Lambda$ и будем обозначать его через μ.

Рассмотрим следующие альтернативы:

(1) $exp(x) = 1$, $\langle x_1 \rangle \cap \langle x \rangle = 1$, $exp([x_1, x]) = 1$;

(2) $exp(x) = 1$, $\langle x_1 \rangle \cap \langle x \rangle = 1$,

$exp([x_1, x]) = id(k)$; $exp([x_1, x]) = 1$;

(3) $exp(x) = 1$, $\langle x_1 \rangle \cap \langle x \rangle = 1$,

$exp([x_1, x]) = id(k)$; $exp([x_1, x]) = id(k_0)$;

(4) $exp(x) = 1$, $\langle x_1 \rangle \cap \langle x \rangle \neq 1$;

(5) $exp(x) = id(k)$; $k \neq 1$.

Докажем равенство (*) для каждого случая в отдельности.

(1) В этом случае W-подгруппа $\langle x_1, x \rangle$ чистая нильпотентная класса 2 и равенство (*) следствие теоремы 5.5.1.

Заметим сразу, что из условий теоремы сразу следует, что между основными кольцами W и W_1 существует изоморфизм $\sigma: W \to W_1$ (Теорема 5.5.1).

(2) Если $exp([x_2, x_1]) = id(n)$; $n \neq 1$, то тогда

$$1 = ([x_2 x, x_1])^{kn} = [x_2, x_1]^{kn} \neq 1.$$

Значит $exp([x_2 x, x_1]) = 1$. С другой стороны, $\langle x_2 \rangle \cap \langle x_1 x \rangle = 1$, так как, если

$$(x_1x)^{k_1} = x_2^{k_2} \Rightarrow ([x_1x, x_1])^{k_1k} = ([x_2, x_1])^{k_2k} \neq 1$$

Следовательно, если $exp([x_1 x, x_2])=1$, то имеем

$$\mu[x_1(x_2x)] = \mu(x_2(x_1x) = \mu(x_2)\mu(x_1x) = \mu(x_2)\ \mu\ (x_1) \Rightarrow \ (*)$$

Если же $exp([x_1x, x_2]) = id(k_0); \quad k_2 \neq 1$, то тогда

$$exp([xx_2^{k_0}, x_1]) = 1.$$

Действительно,

$$1 = [xx_2^{k_0}, x_1]^{k \cdot n} = [x_2, x_1]^{k_n k_0} \neq 1.$$

Следовательно, имеем

$$\mu[(xx_1)x_2^{k_0}] = \mu[(xx_2^{k_0})_{x_1}] =$$

$$= \mu(x)\mu(x_2)^{k_0}\ \mu(x_1) = \mu(x_1x)\mu(x_2)^{k_0} \Rightarrow (*)$$

(3) В этом случае, $exp([x_1x, x_2^{k_0}]) = 1$. Так как иначе

$$1 = [x_1x, x_2^{k_0}]^n = [x_1, x_2]^{nk_0} \neq 1.$$

С другой стороны, $exp([xx_2^{k_0}, x_1]) = 1$.

Так как в противном случае,

$$[x_1x]^{k_n}[x_2, x_1]^{k_n} = 1.$$

Также как в предыдущем случае, приходим к справедливости (*).

(4) Элемент $z=[x_1, x_2]$ чистый элемент и $z \in Z(G)$. Поэтому

$$\mu(z(x_1,x)) = \mu(z)\mu(x_1,x), \quad \mu(z) \in Z(G_1) = \mu(Z(G).$$

С другой стороны, zx_1 - чистый элемент и

$$<zx_1> \cap <x_2> = 1, \quad exp([zx_1, x_2]) = 1.$$

Из предыдущего (случай (3)) имеем

$$\mu((zx_1) = \mu(z)\mu(x_1)\mu(x) \Rightarrow \ (*)$$

(5) Ясно, что существует $k_0 \neq 0$, для которого $x_2^{k_0} \in C_G(<x>)$. С другой стороны, $<x_1x> \cap <x_2^{k_0}> = 1$ и $exp([x_1x, x_2^{k_0}]) = 1$, так как иначе,

$$1 = [x_1, x_2]^{k_0n}[x, x_0]^{k_0n} \neq 1.$$

Аналогично заключаем $exp([x_1x, x_2^{k_0}]) = 1$. Отсюда также как и в случае (4) заключаем справедливость (*).

Доказательство теоремы. Пусть x_4, x_2 произвольные элементы из G. Покажем, что

$$\mu(x_4x_5)=\mu(x_4)\ \mu(x_5).$$

Из предыдущего заключаем, что достаточно рассмотреть тот случай, когда не существует $x\in G$ такой, что

$$exp([x_4,x]) = exp([x_5,x]) = 1.$$

Предположим поэтому, что для некоторых $k,k_1,k_2,k_3\in W$ имеем

$$exp([x_4,x_5]) =id(k),$$
$$exp([x_1,x_5]) =id(k_1),$$
$$exp([x_1,x_4]) =id(k_2),$$
$$exp([x_4,x_2]) =id(k_3),$$

Следовательно, для $\bar{k}=k_1k_2$, $x^{\bar{k}}\in C_G(x_4,x_5)$. Так как

$exp([x_1^{\bar{k}}x_4,x_5])=1$, находим

$$\mu(x_1^{\bar{k}}x_4x_5)=\mu\left((x_1^{\bar{k}}x_4)x_5\right)=$$
$$\mu(x_1)^{\bar{k}}\mu(x_4)\mu(x_5)=\mu(x_1)^{\bar{k}}\mu(x_4x_5)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\mu(x_4x_5)=\mu(x_4)\mu(x_5)$$

Для завершения доказательства надо показать:

$$\mu([x_4,x_5]) = [\mu(x_4),\ \mu(x_5)]^{\varepsilon},\ \ |\varepsilon| =1.$$

Так как, если $\varepsilon=-1$, то соответствие μ будет полулинейным антиизоморфизмом.

Имеем $\mu([x_1,x_2])= [\mu((x_1),\ \mu\ (x_2)]$, кроме того, так как G нильпотентна класса 2 и f нормальный решеточный изоморфизм

$$\mu([x_4,x_5]) = [\mu(x_4),\ \mu(x_5)]^{\alpha}.$$

Подалгебра $<x_1, x_4x_2>$ чистая.

Следовательно, из предыдущих рассуждений находим

$\mu([x_1,x_4x_2])= \mu([x_1,x_4])\ \mu([x_1,x_2])= [\mu[x_1),\ \mu(x_4,x_2)]=$

$[\mu[x_1),\ \mu(x_4,x_2)]= [\mu[x_1),\ \mu(x_4)]\ [\mu[x_1),\ \mu(x_2)]=$

$= \mu([x_1,x_4])\cdot[\mu[x_1),\ \mu(x_2)]\Rightarrow\mu([x_4,\ x_1,\ x_5])=$

$= \mu([x_4,x_1][\ x_4,x_5])= [\mu(x_4\ ),\ \mu\ (x_1)][\mu(x_4\ ),\ \mu\ (x_5)]=$

$[\mu(x_4\ ),\ \mu\ (x_2,x_3)]= [\mu(x_4\ ),\ \mu\ (x_1)]\ [\mu(x_4\ ),\ \mu\ (x_5)]\Rightarrow$

$\Rightarrow\ \mu([\ x_4,x_5])= [\mu(x_4\ ),\ \mu\ (x_5)].$

Тем самым теорема доказана.

7.2. Изоморфизм по модулю коммутанта

Здесь мы приведем пример смешанной нильпотентной группы произвольного класса $n \geq 3$ нильпотентности, которая содержит подгруппу без кручения того же класса и которая не определяетс я строго структурой своих подгрупп.

Пусть группа $G=<a_1, a_2,...,a_{n-1}, k_1,...,k_{n-2}>$ имеет следующие определяющие соотношения:

$$\begin{cases} a_1 a_2 a_1^{-1} = a_2 a_1, \ a_1 a_i a_1^{-1} = a_i a_{i+1}, \ (i = 2,3,...,n) \\ a_2 a_3 a_2^{-1} = a_3 k_1, \ a_2 k_i a_2^{-1} = k_i k_{i+1}, \ (i = 1,2,...,n-3) \\ (a_{n+2} = a_{n+1} = ... = 1, \ k_{n-1} = k_n = ... = 1) \\ k_i^R = 1 \ (R - нечеткое \ \ простое \ \ число) \end{cases}$$

Все элементы a_i бесконечного порядка. Невыписанные соотношения тривиальны[1]. Фактически группа G имеет два образующих, именно $G=<a_1,a>$. Ясно, что подгруппа $<a_1,a_2^p>$ нильпотентная группа класса n без кручения. Определим взаимооднозначное соответствие $\varphi{:}G \rightarrow G$ следующим образом. Всякий элемент $g \in G$ имеет единственную запись вида $g = a_1^{\alpha_1}, a_2^{\alpha_2} b$, где b принадлежит коммутанту G'.

Положим:

$$g' = \varphi(g) = \begin{cases} g, \ если \ \alpha_1 \alpha_2 \equiv 0 \ (mod \ p) \\ g k_{n-2}^s, \ если \ \alpha_1 \alpha_2 \neq 0 \ (mod \ p) \\ s < p, \ где \ s + \alpha_1 + \alpha_2 \equiv 0 \ (mod \ p) \end{cases} \qquad (1)$$

Докажем, что соответствие φ одгруппу переводит в подгруппу, нужно лишь проверить, что $\varphi(g_1 g_2) = \omega(g_1' g_2')$.

Пусть

$$g_1 = a_1^{\alpha_{11}} a_2^{\alpha_{12}} b_1, \ \ g_2 = a_1^{\alpha_{21}} a_2^{\alpha_{22}} b_2$$

Рассмотрим две возможности:

(1)
$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \equiv 0 \ (moap) \qquad (2)$$

[1] Нетрудно проверить, что группа G с такими определяющими соотношениями действительнро существует и имеет класс нильпотентности, равный n.

Покажем, что в этом случае

$$\varphi(g_1g_2)=g_1'g_2' \tag{3}$$

а) Пусть сначала $\alpha_{11}\alpha_{12}\equiv 0$. Тогда, либо $\alpha_{11}\equiv 0$, либо $\alpha_{12}\equiv 0$. Если только один из α_{1i}(i=1,2) делится Δp, то делится и один из α_{2i}(i=1,2) и с учетом (1) ясно, что (3) справедливо.

Если же $\alpha_{11}\equiv 0\equiv a_{12}$, но $\alpha_{21}\alpha_{22}\neq 0$, то имеем $\Delta g_1=g_1$, $\varphi(g_2)=g_2k_{n-2}^{S_2}$, причем $\alpha_{21}+\alpha_{22}+S_2=0$, $(\alpha_{11}+\alpha_{21})+(\alpha_{12}+\alpha_{22})+S_2=0$. Из последнего сравнения имеем $\varphi(g_1g_2)=g_1g_2k_{n-2}^{S_2}$ и, следовательно, снова выполняется (3).

б) Пусть $\alpha_{11}\alpha_{12}\neq 0$. Если при этом $\alpha_{21}\alpha_{22}\equiv 0$, проходят рассуждения, аналогичные предыдущим, в которых g_1,g_2 меняются ролями.

Тогда

$$g_1'=g_1k_{n-2}^{s_1},\ \ \alpha_{11}+\alpha_{12}+s_1\equiv 0, \tag{4}$$

$$g_2'=g_2k_{n-2}^{s_2},\ \ \alpha_{21}+\alpha_{22}+s_2\equiv 0. \tag{5}$$

Из (2) следует, что существует $q<p$ такое, что $\alpha_{21}\equiv\alpha_{11}q$, $\alpha_{22}\equiv\alpha_{12}q$. Но из (4) и (5) получаем:

$s_\alpha=s_1q$. Поэтому $(\alpha_{11}+\alpha_{21})+(\alpha_{12}+\alpha_{22})+(s_1+s_2)\equiv 0$

причем, $(\alpha_{11}+\alpha_{21})(\alpha_{12}+\alpha_{22})\equiv 0\Leftrightarrow\alpha_{11}\alpha_{12}\equiv 0\Leftrightarrow 1+q\equiv 0\Rightarrow s_1+s_2\equiv 0.$

Из сказанного вытекает справедливость равенства (3).

2) $$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}\neq 0\ \ (mod\ p) \tag{6}$$

Тогда рассмотрим n-ые коммутаторы:

$$C_1=[g_1,g_2,g_1,...,g_1]=\left[a_1^{\alpha_{11}},a_2^{\alpha_{12}},a_2^{\alpha_{22}},a_1^{\alpha_{11}},a_2^{\alpha_{12}},...\right]=$$

$$=\left[a_1^{11},a_2^{22},a_1^{11},...,a_1^{11}\right]\cdot\left[a_1^{11},a_2^{22},a_2^{12},...,a_2^{12}\right]\times$$

$$\times\left[a_2^{12},a_3^{21},a_1^{11},...,a_1^{11}\right]\cdot\left[a_2^{12},a_1^{21},a_2^{12},...,a_2^{12}\right]=$$

$$=a_{n+1}^{\alpha_{11}^{n-1}\alpha_{12}}\cdot k_{n-2}^{\alpha_{11}\alpha_{21}\alpha_{22}^{n-2}\alpha_{11}}\cdot a_{n+1}^{-\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{11}^{n-2}}\cdot k_{n-2}^{-\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{12}^{n-2}}=a_{n+1}^{\alpha_{11}^{n-3}\cdot\Delta}\cdot k_{n-2}^{\alpha_{12}^{n-3}\cdot\Delta}$$

$$C_2 = [g_1, g_2, g_2, ..., g_2] = \left[a_1^{\alpha_{11}}, a_2^{\alpha_{12}}, a_1^{\alpha_{21}}, a_2^{\alpha_{22}}, a_1^{\alpha_{11}}, a_2^{22} ...\right] =$$

$$= \left[a_1^{11}, a_2^{22}, a_1^{21}, ..., a_1^{21}\right] \cdot \left[a_1^{11}, a_2^{22}, a_2^{22}, ..., a_2^{22}\right] \times$$

$$\times \left[a_2^{12}, a_1^{21}, a_1^{21}, ..., a_1^{21}\right] \cdot \left[a_2^{12}, a_1^{21}, a_2^{22}, ..., a_2^{22}\right] =$$

$$= a_{n+1}^{\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{21}^{n-2}} \cdot k_{n-2}^{\alpha_{11}\alpha_{22}^{n-1}} \cdot a_{n+1}^{-\alpha_{12}\alpha_{11}^{n-1}} \cdot k_{n-2}^{-\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{22}^{n-1}} = a_{n+1}^{\alpha_{21}^{n-2}\cdot\Delta} \cdot k_{n-2}^{\alpha_{12}^{n-3}\cdot\Delta}$$

Рассмотрим определитель

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{11}^{n-1} & \alpha_{12}^{n-2} \\ \alpha_{21}^{n-2} & \alpha_{22}^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta_1 \neq 0\ (mod p)$, то подгруппа $<g_1, g_2> \ni K_{n-2}$ и ясно, что определенное равенствами (1) соответствие оставляет эту подгруппу на месте.

Пусть темперь $\Delta_1 \equiv 0$. Тогда, учитывая (6), имеем

$$(\alpha_{11}\alpha_{12})^{n-2} - (\alpha_{12}\alpha_{21})^{n-2} \equiv 0 \ (mod\ p),$$

и кроме того

$$\alpha_{11}\alpha_{22} \neq 0, \qquad \alpha_{12}\alpha_{21} \neq 0.$$

Рассмотрим коммутатор

$$C_1 = [g_1, g_2, g_1, ..., g_1] = \left[a_1^{\alpha_{11}}, a_2^{\alpha_{21}}, a_1^{\alpha_{21}}, a_2^{\alpha_{22}}, ... a_1^{\alpha_{21}}, a_1^{\alpha_{22}}, a_1^{\alpha_{11}}, a_2^{\alpha_{21}}\right] =$$

$$= a_{n+1}^{\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_2^{n-3}\alpha_{11}} \cdot k_{n-2}^{\alpha_{11}\alpha_{22}^{n-2}\alpha_{11}} \cdot a_{n+1}^{\alpha_{12}\alpha_{21}^{n-2}\alpha_{11}} \cdot k_{n-1}^{\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{12}^{n-3}\alpha_{12}} =$$

$$= a_{n+1}^{\alpha_{21}^{n-3}\cdot\alpha_{11}\cdot\Delta} \cdot k_{n-1}^{\alpha_{12}^{n-3}\cdot\alpha_{12}^{n-2}\cdot\Delta}$$

Тогда определитель

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{21}^{n-3}, & \alpha_{22}^{n-3}\alpha_{12} \\ \alpha_{21}^{n-2}, & \alpha_{22}^{n-2} \end{vmatrix} = \alpha_{21}^{n-3}\alpha_{22}^{n-3}\Delta \neq 0$$

Но это означает, что $<c_2,c_3>эK_{n-2}$ и, следовательно $<g_1,g_2>эK_{n-2}$ и последняя подгруппа при соответствии отображается на себя.

Итак, соответствие φ всякую подгруппу переводит в подгруппу, то есть индуцирует автопроектирование, и очевидно, не является ни изоморфизмом, ни антиизоморфизмом.

7.3. Нильпотентные класса 2 W-степенные группы с чистой неабелевой W-подгруппой

Приведенный пример подчеркивает трудность отыскания достаточно общих признаков строгой струвктурной определяемости смешанной нильпотентной группы. Один специальный признак был отмечен Л.Е.Садовским, именно:

Смешанная нильпотентная группа класса n, расщепляемая в прямое произведение группы без кручения того же класса и абелевой переодической части, строго структурно определяется.

Требование абелевости периодической части является существенным в этом утверждении, о чем свидетельствует приводимый ниже пример.

Пусть $G=<a,b>\times <c,d>$, где $<a,b>$ - свободная абелева группа, а $<c,d>$ - периодическая метабелева группа, причем

$$[c,d]=c, \qquad d^p=c^p=e^p=1 \ (p - \text{простое})$$

Всякий элемент $g\in G$ имеет единственную запись вида

$$g=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\xi}e^{\varepsilon} \ (\alpha,\xi,\varepsilon=0,1,...p-1).$$

Определим взаимооднозначное соответствие $\varphi:G\rightarrow G^{\varphi}$ следующим образом:

$$\varphi(g)'=g'=g\,, \quad \text{если} \quad \gamma\xi\equiv 0 \ (mod p),$$

$$\varphi(g)=g'=ge^{s}, \quad \text{если} \quad \gamma\xi\neq 0 \ (mod p),$$

$$s<p,\ s+\gamma+\xi\equiv 0 \ (mod p).$$

Докажем, что φ индуцирует проектирование, то есть подгруппу переводит в подгруппу. Пусть

$$g_1 = a^{\alpha_1}b^{\beta_1}c^{\gamma_1}d^{\xi_1}e^{\varepsilon_1}, \qquad g_2 = a^{\alpha_2}b^{\beta_2}c^{\gamma_2}d^{\xi_2}e^{\varepsilon_2}.$$

Тогда $[g_1,g_2]=[c^{\gamma_1}\cdot d^{\xi_1},c^{\gamma_2}\cdot d^{\xi_2}]=[c^{\gamma_1},d^{\xi_1}][c^{\gamma_2},d^{\xi_2}]=e^{\gamma_1\xi_1-\gamma_1\xi_1}$.

Поэтому, если

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 & \xi_1 \\ \gamma_2 & \xi_2 \end{vmatrix} \neq 0 \ (mod\, p)\,,$$

то подгруппа $<g_1,g_2> \in e$ и потому при соответствии φ остается на месте.

В противном случае:

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 & \xi_1 \\ \gamma_2 & \xi_2 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod p,$$

как и в приведенном раньше примере, можно показать, что $\varphi(g_1,g_2)=g_1'g_2'$. Соответствие φ является изоморфизмом на всякой абелевой подгруппе, но не является ни изоморфизмом, ни антиизоморфизмом на всей группе. Отсюда следует, что группа G не определяется строго структурой своих подгрупп.

Мы укажем другие достаточные признаки строгой структурной определяемости смешанных нильпотентных групп.

Теорема 7.3.1. *Пусть $\mathfrak{m}$ - любое нильпотентное многообразие, свободная группа которого не имеет кручения. Пусть далее нильпотентная группа G расщепляется в прямое произведение $G=A\times P$ периодической части $P\leq\mathfrak{m}$ и группы без кручения A, которая содержит свободную группу многообразия $\mathfrak{m}$. Тогда группа G строго определяется структурой своих подгрупп.*

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы, и $\varphi(G)=G^{\varphi}$ - ее проектирование. Тогда проектирование φ индцуцируется единственной парой взаимнооднозначных соответствий φ_1,φ_2, являющихся изоморфизмами на всякой нильпотентной подгруппе. Согласно теореме Л.Е.Садовского одно из них, например, φ_1 является изоморфизмом на прямом сомножителе A, другое φ_2 - антиизоморфизмом на A. Зафиксируем одно из этих соответствий φ_1, полагая в дальнейшем $g'=\varphi_1(g)$. Соответствие φ_1 индуцирует на факторе G/G' изоморфизм $\overline{\varphi}_1$, поэтому для произвольной пары элеметов $g_1,g_2\in G$ имеем

$$\varphi_1(g_1g_2)=g_1'g_2'k', \quad \text{где} \quad k'\in(G')^{\varphi}=(G^{\varphi})'. \qquad (7)$$

Пусть $g_1=a_1p_1$, $g_2=a_2p_2$ представления элементов g_1,g_2 в прямом разложении группы G. Тогда $g_1'=a_1'p_1', g_2'=a_2'p_2'$. С другой стороны,

$$g_1g_2=(a_1p_1)(a_2p_2)=(a_1a_2)(p_1p_2)\xrightarrow{\varphi_1}a_1'a_2'\varphi_1(p_1p_2).$$

Сравнивая последнее соответствие с равенством (7), получаем

$$\varphi_1(p_1p_2)=p_1'p_2'k'.$$

Пусть теперь $F \subseteq A$ - приведенная свободная группа многообразия $\mathfrak{M}$ и f_1, f_2 - элементы из системы свободных образующих группы F. Рассмотрим пару элементов

$$b_1 = f_1 p_1, \; b_2 = f_2 p_2.$$

Тогда

$$b_1 b_2 = (f_1 p_1)(f_2 p_2) = (f_1 f_2)(p_1 p_2) \xrightarrow{\varphi_1} (f_1' f_2')(p_1' p_2 k') = \\ = (f_1' p_1')(f_2' p_2')k'$$

Так как с другой стороны

$$\varphi_1(f_1 p_1) = f_1' p_1'; \quad \varphi_1(f_2 p_2) = f_2' p_2',$$

то справедливо включение $k' \in \{b_1', b_2'\}$, и следовательно, $k = \varphi_1^{-1}(k') \in \{b_1, b_2\}$.
Таким образом

$$k = \omega(b_1,b_2) = \omega(f_1,f_2)\; \omega(p_1,p_2).$$

Если $\omega(f_1,f_2) \neq 1$, то из предыдущего равенства следует,что элемент k, вопреки сказанному выше,имеет бесконечный порядок.

Равенство $\omega(f_1,f_2)$ влечет тождество многообразия $\mathfrak{M}$: $\omega(x,y)=1$ и означает равенство $\omega(p_1,p_2)=k=1$. Но это означает, что $\varphi(g_1 g_1) = g_1' g_1'$ для любой пары элементов $g_1, g_2 \in G$ и соответствие φ_1 является изоморфизмом. Соответствие φ_2 тогда - антиизоморфизм.

Теорема доказана.

Понятно, что упомянутый результат Л.Е.Садовского следует из доказанного.

Сформулируем здесь еще один достаточный признак, тоже весьма специальный.

Теорема 7.3.2. *Пусть G - смешанная нильпотентная группа, и пусть* $\mathfrak{M}$ *-любое нильпотентное многообразие,свободная группа которого не имеет кручения,, содержащее группу G. Если группа G разлагается в прямое произведение* $G=A\times B$, *так что каждый сомножитель содержит свободную группу многообразия* $\mathfrak{M}$, *то всякое проектирование* $\varphi: G \to G^{\varphi}$ *индуцируется одним изоморфизмом и одним антиизоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $G=A\times B$ - нильпотентная группа, удовлетворяющая условиям теоремы, F_A и F_B - соответствующие свободные группы нильпотентного многообразия $\mathfrak{M}$. Как и выше, проектирование $\varphi: G \to G^{\varphi}$ индуцируется парой взаимнооднозначных соответствий, являющихся изоморфизмами на всякой абелевой подгруппе. Понятно, что на подгруппах F_B и F_A указанные соответствия являются изоморфизмами или антиизоморфизмами. Обозначим через φ то из соответствий, которое является изоморфизмом на подгруппе F_A. Тогда, если a_1,a_2 - пара элементов из системы свободных образующих $a_1' = \varphi(a_1);\quad a_2' = \varphi(a_2)$,

имеем $$a_1' = \varphi^{-1}(a_1'a_2') = a_1a_2.$$

Пусть $b_1',b_2' \in B^{\varphi}$ и $c_1' = a_1',b_1';\quad c_2' = a_2',b_2'$. Имеем соответствие

$$\varphi^{-1}(c_1'c_2') = \omega(c_1,c_2) = \omega(a_1,b_1,a_2,b_2) = \omega(a_1,a_2)\omega(b_1,b_2).$$

С другой стороны,

$$c_1'c_2' = (a_1',a_2')(b_1',b_2') \xrightarrow{\varphi^{-1}} (a_1,a_2)\varphi^{-1}(b_1',b_2').$$

Сравнение соответствий приводит к равенствам

$$\omega(a_1,a_2) = a_1a_2;\quad \omega(b_1,b_2) = \varphi^{-1}(b_1'b_2')$$

Первое из них является соотношением между свободными образующими и, следовательно, тождеством многообразия $\mathfrak{m}$. Поэтому,

$$\varphi^{-1}(b_1,b_2) = b_1,b_2 \text{ и } \varphi(b_1,b_2) = b_1'b_2'$$

Аналогично можно показать, что $\varphi(a_1,a_2) = a_1'a_2'$ для любых элементов $a_1,a_2 \in A$, но тогда $\varphi(g_1g_2) = g_1'g_2'$, что и требуется.

В связи с теоремами 1 и 2 можно высказать следующее предположение, кажущееся разумным.

Пусть $\mathfrak{m}$ - произвольное нильпотентное многообразие, свободная группа которого не имеет кручения. Пусть далее смешанная нильпотентная группа G принадлежит многообразию $\mathfrak{m}$ и содержит свободную группу $F(\mathfrak{m})$. Тогда группа G строго определяется структурой своих подгрупп.

Условие $G \supseteq F(\mathfrak{m})$ обеспечивает, по-видимому, необходимую для строгой определяемости доминирующую роль подгруппы без кручения в группе G .

8. РЕШЕТОЧНЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ СМЕШАННЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

В этом разделе доказывается, что любой решеточный изоморфизм φ между двумя локально нильпотентными W-группами, содержащими не менее двух чистых элемента, является нормальным. Затем строится пример, показывающий, что существуют решеточные изоморфизмы между такими группами, не индуцирующиеся ни полулинейным изоморфизмом, ни полулинейным антиизоморфизмом.

8.1. Нормальные делители при решеточных изоморфизмах непериодических W -групп

Приведем сначала одно вспомогательное утверждение: *если H – нормальный делитель без кручения в нильпотентной группе G и G/H – периодическая циклическая, то центр H содержится в центре группы G.*

Доказательство. По условию группа G порождается H и некоторым элементом a, причем $a^n \in H$. Для доказательства достаточно показать перестановочность элементов из Z с элементом a. Рассмотрим автоморфизм σ в Z, порожденный элементом a. σ – нильавтоморфизм и некоторая степень σ равна тождественному автоморфизму, так как $a^n \in H$. В [1] доказывается, что нильавтоморфизм группы без кручения является чистым автоморфизмом. Следовательно, $\sigma = e$, т.е. элементы из Z перестановочны с элементом a.

Теорема 8.1.1. *Пусть H – нормальный делитель в нильпотентной группе G, содержащей не менее двух чистых элемента. Тогда H^{φ} – нормальный делитель в группе G^{φ}.*

Доказательство. Если H – периодический нормальный делитель, то $H \subset P(G)$ и, так как в G имеются элементы бесконечного порядка, H^{φ} будет нормальным делителем в G^{φ}. Покажем, что далее можно считать H группой без кручения. Действительно, если H – смешанная подгруппа, то возьмем $P(H)$. Тогда $P(H)$ – периодический нормальный делитель в группе G, поэтому по предыдущему $P(H)^{\varphi}=P(H^{\varphi})$ – нормальный делитель в G^{φ}. Фактор-группы $G/P(H)$ и $G^{\varphi}/P(H^{\varphi})$ решеточно изоморфны, $G/P(H)$ – нильпотентная группа, содержащая не менее двух чистых элементов и в ней нормальный делитель без кручения. Остается показать, что образ при полученном решеточном изоморфизме между $G/P(H)$ и $G^{\varphi}/P(H^{\varphi})$ будет нормальным делителем в $G^{\varphi}/P(H^{\varphi})$. Отсюда следует, что теперь можем сразу считать H нормальным делителем без кручения в G.

В дальнейшем достаточно рассмотреть подгруппу $F=<a,H>$, где a – любой элемент из G, и показать, что H^{φ} – нормальный делитель в $F^{\varphi}=<a^{\varphi},H^{\varphi}>$, где a^{φ} – один из образующих элементов подгруппы $<a>^{\varphi}$. Если F/H без кручения, то F – нильпотентная группа без кручения и, следовательно, H^{φ} – нормальный делитель в F^{φ}.

Пусть F/H – конечная циклическая. Предположим сначала, что H – абелев нормальный делитель. Покажем тогда, что H^{φ} – абелев нормальный делитель в F^{φ}. По доказанному утверждению F абелева. Если H содержит два независимых элемента, то F^{φ} также абелева [2] и, следовательно, H^{φ} – нормальный делитель в F^{φ}. Пусть теперь H содержит лишь один независимый элемент, т.е. H либо циклическая, либо локально циклическая. Тогда H – центральная подгруппа в G, так как $H \cap Z(G) \neq e$, где $Z(G)$ – центр группы G. Но если H – центральная подгруппа в G, то H^{φ} – центральная подгруппа в G^{φ}, так как G содержит не менее двух чистых элемента.

Предположим, что теорема верна для тех нормальных делителей H, у которых длина верхнего центрального ряда меньше $n>4$. Можем считать, что H содержит не менее двух чистых элементов. По доказанному утверждению центр Z_1 подгруппы H содержится в центре F. Тогда Z_1^{φ} содержится в центре F^{φ} [2]. Возьмем фактор-группы F/Z_1 и $F^{\varphi}/Z_1^{\varphi}$, они решеточно изоморфны. H/Z_1 – нормальный делитель без кручения в F/Z_1, причем класс нильпотентности H/Z_1 меньше n. По предположению индукции $H^{\varphi}/Z_1^{\varphi}$ – нормальный делитель в $F^{\varphi}/Z_1^{\varphi}$, т.е. H^{φ} – нормальный делитель в F^{φ}. Теорема доказана.

Доказанную теорему легко обобщить: *если H – нормальный делитель в локально нильпотентной группе G, содержащей не менее двух независимых элементов бесконечного порядка, то H^{φ} – нормальный делитель в группе G^{φ}.*

Следствие 8.1.1. *Если $K(G)$ – коммутант локально нильпотентной группы G, содержащей не менее двух независимых чистых элементов, то $K(G)^{\varphi}$ – коммутант группы G^{φ}.*

Доказательство такое же, как и доказательство аналогичного утверждения для локально нильпотентных групп кручения из работы [2].

Следствие 8.1.2. *Коммутант K(G) локально нильпотентной группы G, содержащей не менее двух независимых чистых элементов, является S-характеристической подгруппой в G.*

Следствие 8.1.3. Если H – подгруппа группы G такая, что ее нормализатор $N(H)$ в G содержит не менее двух независимых чистых элементов и является локально нильпотентной группой, то $N(H)^{\varphi}$ – нормализатор H^{φ} в группе G^{φ}, т.е. $N(H)^{\varphi} = N(H^{\varphi})$.

Следствие 8.1.4. Если

$$G \supset Z_1 \supset Z_2 \supset \ldots \supset Z_{n-1} \supset Z_n = E$$

нижний центральный ряд нильпотентной группы G, содержащей не менее двух независимых чистых элементов, то

$$G^{\varphi} \supset Z_1^{\varphi} \supset Z_2^{\varphi} \supset \ldots \supset Z^{\varphi}_{n-1} \supset Z_n^{\varphi} = E$$

нижний центральный ряд группы G^{φ}.

Доказательство. При n=1 утверждение справедливо [2]. Будем считать, что утверждение верно для всех групп, у которых класс нильпотентности меньше n. По теореме 5.1.1 подгруппа Z^{φ}_{n-1}– нормальный делитель в G^{φ}, а фактор-группа $G^{\varphi}/Z^{\varphi}_{n-1}$ имеет по предположению индукции класс нильпотентности, равный $n-1$, так как G/Z_{n-1} содержит два независимых чистых элемента. Если Z^{φ}_{n-1} не последний член нижнего центрального ряда группы G^{φ}, то Z^{φ}_{n-1} содержит его. Тогда, применяя обратный решеточный изоморфизм φ^{-1}, мы получили бы, что Z_{n-1} не последний член нижнего центрального ряда группы G, что не так. Следовательно, ряд

$$G^{\varphi} \supset Z_1^{\varphi} \supset \ldots \supset Z^{\varphi}_{n-1} \supset Z_n^{\varphi} = E$$

является нижним центральным рядом группы G^{φ}.

Данное утверждение можно также получить, пользуясь тем, что образ центра Z нильпотентной группы G, содержащей не менее двух независимых чистых элементов при решеточном изоморфизме φ есть центр группы G^{φ} [2], и использованным при доказательстве утверждением, не опираясь при этом на доказанную теорему.

Следствие 8.1.5. *Все члены нижнего центрального ряда нильпотентной группы G, содержащей не менее двух независимых чистых элементов, являются S-характеристическими подгруппами группы G.*

8.2. О решеточном автоморфизме n-нипльпотентной непериодической W-группы

В связи с тем, что каждый решеточный изоморфизм φ локально нильпотентной группы *G*, содержащей не менее двух независимых чистых элементов, является нормальным, хотелось бы думать, что φ индуцируется всегда полулинейным изоморфизмом и антиизоморфизмом подобно тому, как это имеет место в чистых локально нильпотентных группах (теорема 5.5.1). Однако следующий пример показывает, что в смешанном случае существуют решеточные изоморфизмы, которые не индуцируются ни групповыми изоморфизмами, ни групповыми анти-изоморфизмами.

Пусть $<k>$ – циклическая группа третьего порядка, $<a>$ и $<b>$ – бесконечные циклические группы. Возьмем группу $H=<b>\times<k>$, а затем составим полупрямое произведение $G=H\lambda<a>$, где $a^{-4}ba=bk,\ a^{-1}ka=k$. Покажем, что G есть 2 нильпотентная группа. Ясно, что $k=[b,a]$ принадлежит центру G. Легко видеть, что G/<k> абелева, а следовательно, <k> совпадает с коммунатном группы G и поэтому G нильпотентная группа класса 2. Группа G порождается двумя элементами a и b, так как $k=[b,a]$, причем $<a>\cap<b>=e$. Элементы a^3 и b^3 принадлежат центру группы G. Любой элемент группы G записывается в виде $a^\alpha b^\beta k^s$ (α и $\beta\in W$, $s\notin id/3$ – целые числа, $s=0,1,2$) и такая запись однозначна. Отсюда следует, что вне коммутанта нет периодических элементов. Фактор-группа G/K (K – коммутант) есть свободная абелева группа с двумя образующими. Отметим, что если подгруппа из G содержит два неперестановочных элемента, то она содержит коммутант K.

Установим отображение φ элементов группы G на элементы этой же группы следующим образом:

$$\varphi(a^n) = a^n,\ \ \varphi(b^n) = b^n\ \ (n\ \in W)$$

$$\varphi(k) = k^2,\ \varphi(k^2) = k,$$

$$\varphi(ab) = ab,\ \ \varphi(ab^2) = ab^2k^2,\ \ \ \varphi(a^2b) = a^2bk^2,$$

$$\varphi\ (a^2b^2) = a^2b^2k^2\ , \qquad (*)$$

$$\varphi(a^\alpha b^\beta k^s)\ = \varphi(\,a^{3\alpha_1+n_1}b^{3\beta_1+l_1}k^s\,) = a^{3\alpha_1}b^{3\beta_1}\varphi(\,a^{n_1}b^{l_1}\,)k^{2s}$$

$(\alpha, \beta \in W\ ;\ n_1;\ l_1;\ s\notin id/3).$

Из этих соотношений видно, что каждый элемент группы G при отображении φ либо остается на месте, либо переводится в такой же элемент, умноженный на элемент из K.

Покажем, что φ устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами группы G.

При заданных α и β имеются три различных элемента вида $a^\alpha b^\beta k^s$, так как $s=0,1,2$. φ делает подстановку на этих трех элементах. Проверим это.

а) $n_1=0,\ l_1=0;\ \varphi(a^\alpha b^\beta)= a^\alpha b^\beta,\ \varphi(a^\alpha b^\beta k)=a^\alpha b^\beta k^2,\ \varphi(a^\alpha b^\beta k^2)=a^\alpha b^\beta k,$

б) $n_1=1,\ l_1=0;\ \varphi(a^\alpha b^\beta) = a^{3\alpha_1} b^{3\beta_1} \varphi(a) = a^{3\alpha_1} b^{3\beta_1} a = a^\alpha b^\beta,$

$\varphi(a^\alpha b^\beta k)=a^\alpha b^\beta k^2,\ \varphi(a^\alpha b^\beta k^2)=a^\alpha b^\beta k;$

в) $n_1=2,\ l_1=0;\ \varphi(a^\alpha b^\beta) = a^{3\alpha_1} b^{3\beta_1} \varphi(a^2) = a^{3\alpha_1} b^{3\beta_1} a^2 = a^\alpha b^\beta,$

$\varphi(a^\alpha b^\beta k)=a^\alpha b^\beta k^2,\ \varphi(a^\alpha b^\beta k^2)=a^\alpha b^\beta k;$

г) $n_1=1,\ l_1=1;\ \varphi(a^\alpha b^\beta) = a^{3\alpha_1} b^{3\beta_1} \varphi(ab) = a^{3\alpha_1} b^{3\beta_1} ab = a^\alpha b^\beta,$

$\varphi(a^\alpha b^\beta k)=a^\alpha b^\beta k^2,\ \varphi(a^\alpha b^\beta k^2)=a^\alpha b^\beta k;$

д) $n_1=2,\ l_1=1;\ \varphi(a^\alpha b^\beta) = a^{3\alpha_1} b^{3\beta_1} \varphi(a^2 b) = a^{3\alpha_1} b^{3\beta_1} a^2 bk = a^\alpha b^\beta k^2,$

$\varphi(a^\alpha b^\beta k)=a^\alpha b^\beta k^2,\ \varphi(a^\alpha b^\beta k^2)=a^\alpha b^\beta;$

е) $n_1=2,\ l_1=2;\ \varphi(a^\alpha b^\beta) = a^{3\alpha_1} b^{3\beta_1} \varphi(a^2 b^2) = a^{3\alpha_1} b^{3\beta_1} a^2 b^2 k^2 = a^\alpha b^\beta k^2,$

$\varphi(a^\alpha b^\beta k)=a^\alpha b^\beta k,\ \varphi(a^\alpha b^\beta k^2)=a^\alpha b^\beta.$

Случаи, аналогичные б), в) и д), когда l_1 и n_1 меняются местами, проверяются точно так же.

Следовательно, при фиксированных α и β отображение φ один элемент вида $a^\alpha b^\beta k^s$ оставляет на месте, а два других меняют местами. Поэтому φ устанавливает взаимно однозначное соответствие на множестве элементов группы G.

8.3. Решеточный автоморфизм не индуцируемый групповым автоморфизмом

Покажем теперь, что φ на каждой максимальной абелевой подгруппе группы G является автоморфизмом. Для этого надо показать, что для любых двух перестановочных элементов c и d из G справедливо равенство

$$\varphi(cd) = \varphi(c)\varphi(d). \qquad (**)$$

Сначала докажем это равенство для всех перестановочных элементов вида $a^n b^l$ (n, l=0,1,2). Разберем все возможные случаи.

а) Если один из элементов c или d равен степени a или степени b, то и другой, перестановочный с ним элемент, есть степень соответственно. a или b и равенство (**) очевидно.

б) $c=ab$, $d=ab$; *тогда* $cd=ab\cdot ab = a^2b^2k$,

$$\varphi(cd) = \varphi(a^2b^2k) = a^2b^2k = ab\cdot ab = \varphi(c)\ \varphi(d);$$

в) $c=ab$, $d=a^2b^2$; $cd=ab\cdot a^2b^2 = a^3b^3k^2$,

$$\varphi(cd) = \varphi(a^3b^3k^2) = a^3b^3k = ab\cdot a^2b^2k^2 = \varphi(c)\ \varphi(d);$$

г) $c=a^2b$, $d=a^2b$; $cd=a^2b\cdot a^2b = a^4b^2k^2$,

$$\varphi(cd) = \varphi(a^4b^2k^2) = a^3\varphi(ab^2)k = a^3ab^2k^2k = a^4b^2 =$$

$$= a^2bk^2\cdot a^2bk^2 = \varphi(c)\ \varphi(d);$$

д) $c=a^2b$, $d=ab^2$; $cd=a^2b\cdot ab^2 = a^3b^3k$,

$$\varphi(cd) = \varphi(a^3b^3k) = a^3b^3k^2 = a^2bk^2\cdot ab^2k^2 = \varphi(c)\ \varphi(d);$$

е) $c=a^2b^2$, $d=ab$; *этот случай следует из в);*

ж) $c=a^2b^2$, $d=a^2b^2$; $cd=a^2b^2\cdot a^2b^2 = a^4b^4k$,

$$\varphi(cd) = \varphi(a^4b^4k) = a^3b^3\varphi(ab)k^2 = a^4b^4k^2 = a^2b^2k^2\cdot a^2b^2k^2 = \varphi(c)\ \varphi(d);$$

з) $c=ab^2$, $d=ab^2$; $cd=ab^2\cdot ab^2 = a^2b^4k$,

$$\varphi(cd) = \varphi(a^2b^4k^2) = b^3\varphi(a^2b)k = b^3a^2bk^2k = a^2b^4 =$$

$$ab^2k^2\cdot ab^2k^2 = \varphi(c)\ \varphi(d);$$

и) $c=ab^2$, $d=a^2b$; *этот случай следует из д).*

Докажем теперь равенство (**) в том случае, когда c или d есть $a^{3\alpha_1}b^{3\beta_1}$ или степень k.

а) $c=k^s$, $d = a^{\alpha}b^{\beta}k^{\bar{s}}$, $\varphi(cd) = \varphi(a^{3\alpha_1+n_1}b^{3\beta_1+l_1}\bar{k}^{s+s}) =$

$$a^{3\alpha_1}b^{3\beta_1}\varphi(a^{n_1}b^{l_1})k^{2(\bar{s}+s)} = k^{2s}a^{3\alpha_1}b^{3\beta_1}\varphi(a^{n_1}b^{l_1})k^{2s} = \varphi(c)\varphi(d).$$

$$б)\ c = a^{3\alpha_1} b^{3\beta_1},\ d = a^{\overline{\alpha}} b^{\overline{\beta}} k^{\overline{s}} = a^{3\overline{\alpha}_1 + \overline{n}_1} b^{3\overline{\beta}_1 + \overline{l}_1} k^{\overline{s}}\ (\overline{n}_1, \overline{l}_1, \overline{s} = 0,1,2),$$

$$cd = a^{3(\alpha_1 + \overline{\alpha}_1) + \overline{n}_1} b^{3(\beta_1 + \overline{\beta}_1) + \overline{l}_1} k^{\overline{s}},\ \varphi(cd) = a^{3(\alpha_1 + \overline{\alpha}_1)} b^{3(\beta_1 + \overline{\beta}_1)} \varphi(a^{\overline{n}_1} b^{\overline{l}_1}) k^{\overline{2s}} =$$

$$= a^{3\alpha_1} b^{3\beta_1} a^{3\overline{\alpha}_1} b^{3\overline{\beta}_1} \varphi(a^{\overline{n}_1} b^{\overline{l}_1}) k^{\overline{2s}} = \varphi(c)\varphi(d).$$

в) Аналогично ведется доказательство, если $d = a^{3\alpha_1} b^{3\beta_1}$ или $d = k^s$.

Теперь докажем равенство (**) в общем случае:

$$c = a^{\alpha} b^{\beta} k^{s} = a^{3\alpha_1 + n_1} b^{3\beta_1 + l_1} k^{s},$$

$$d = a^{\overline{\alpha}} b^{\overline{\beta}} k^{\overline{s}} = a^{\overline{3\alpha_1} + \overline{n}_1} b^{\overline{3\beta_1} + \overline{l}_1} k^{\overline{s}}\ (n_1, \overline{n}_1, l_1, \overline{l}_1, s, \overline{s} = 0,1,2)$$

$$\varphi(cd) = \varphi(a^{3(\alpha_1 + \overline{\alpha}_1)} b^{3(\beta_1 + \overline{\beta}_1)} a^{\overline{n}_1} b^{\overline{l}_1} k^{s + \overline{s}}) = a^{3(\alpha_1 + \overline{\alpha}_1)} b^{3(\beta_1 + \overline{\beta}_1)} \times$$

$$\times (a^{n_1} b^{l_1} a^{\overline{n}_1} b^{\overline{l}_1}) k^{2(s + \overline{s})} = a^{3\alpha_1 + 3\overline{\alpha}_1} b^{3\beta_1 + 3\overline{\beta}_1} \varphi(a^{n_1} b^{l_1}) \varphi(a^{\overline{n}_1} b^{\overline{l}_1}) \times$$

$$\times k^{2s} \cdot k^{2\overline{s}} = a^{3\alpha_1} b^{3\beta_1} \varphi(a^{n_1} b^{l_1}) k^{2s} \cdot a^{3\overline{\alpha}_1} b^{3\overline{\beta}_1} \varphi(a^{\overline{n}_1} b^{\overline{l}_1}) k^{2\overline{s}} = \varphi(c)\varphi(d)$$

Так как соответствие φ каждый элемент либо оставляет на месте, либо переводит в такой же элемент, умноженный на элемент из *K*, то всякая подгруппа, содержащая *K*, при соответствии φ остается без изменения. Также отображается на себя любая максимальная абелева подгруппа из *G,* так как она содержит *K*. Соответствие φ на каждой максимальной абелевой подгруппе является автоморфизмом.

Покажем теперь, что соответствие φ индуцирует решеточный автоморфизм, который обозначим также через φ.

Если *H* – подгруппа, то H^{φ} – тоже подгруппа. Действительно, если *H* неабелева, то *H* остается на месте. Следовательно, H^{φ} – подгруппа. Если же *H* абелева, то она содержится в максимальной абелевой, на которой φ является автоморфизмом. Значит, и в этом случае H^{φ} – подгруппа. Легко проверить, что для любых двух подгрупп H_1 и H_2 таких, что $H_1 \subset H_2$, будет $H_1^{\varphi} \subset H_2^{\varphi}$.

При этом могут представиться следующие возможности.

1) H_2 неабелева. Тогда $H_2^{\varphi} = H_2$ и, следовательно $H_1^{\varphi} \subset H_2^{\varphi}$.

2) H_2 абелева. Тогда H_2, а значит и H_1 содержатся в максимальной абелевой подгруппе *H*, на которой соответствие φ является автоморфизмом. Поэтому $H_1^{\varphi} \subset H_2^{\varphi}$.

Покажем, наконец, что решеточный автоморфизм φ не индуцируется ни групповым автоморфизмом, ни групповым антиавтоморфизмом.

Если бы решеточный автоморфизм φ индуцировался групповым автоморфизмом (антиавтоморфизмом) φ, то φ порождал бы решеточный автоморфизм на каждой максимальной абелевой подгруппе, который являлся бы следствием $\overline{\varphi}$. Итак, на каждой максимальной абелевой подгруппе решееточный автоморфизм φ индуцируется двумя соответствтиями $\overline{\varphi}$ и φ, причем на каждой такой подгруппе они будут автоморфизмами. Но известно [2], что если φ(g)=g', то $\overline{\varphi}$(g)=g' или $\overline{\varphi}$(g)=$[g']^{-1}$ (g,g'∈G). Так как центр группы *G* отличен от е, т.е. пересечение всех максимальных абелевых подгрупп отлично от е, то либо φ(g) =$\overline{\varphi}$(g) для всех g из *G* или $[\varphi(g)]^{-1}$=$\overline{\varphi}$(g) для всех *g* из *G*. Тогда φ являлось бы автоморфизмом или антиавтоморфизмом группы *G*. Из соотношений (*) видно, что это не так. Следовательно, мы построили решеточный автоморфизм, который не является следствием ни группового автоморфизма, ни группового антиавтоморфизма.

9. РЕШЕТОЧНЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ n -НИЛЬПОТЕНТНЫХ СТЕПЕННЫХ ГРУПП

Мы построим смешанные нильпотентные группы с двумя независимыми элементами бесконечного порядка, но определяющиеся структурой своих подгрупп даже в нестрогом смысле.

9.1. О группе Вимана (Wiman) и Блекберна (Blackburn)

Для построения используем один пример, содержащийся в работе Barnes и Wall. В этой работе строится сохраняющее нормальность проектирование между неизоморфными конечными p-группами. Последние - это p-группы максимального класса, которые содержат абелеву подгруппу индекса p (эти группы впервые определили Wiman и Blackburn). Кратко остановимся на той части упомянутой работы, которая будет нами использована.

Пусть $B_n(\gamma)$ группа порядка p^n $(n \geq 3)$ с образующими $S, S_1, S_i, \ldots S_{n-1}$ и определяющими соотношениями:

$[S_i, S] = S_{i+1}, \ (I \geq 1, \ S_n = S_{n+1} = \ldots = 1);$

$\{S_i, S_j] = 1, \ [i, j > 1);$

$Sp = 1;$

$S_1^p, S_2^{(p_1)} \ldots S_p = S_{n-1}^{\gamma}$;

$S_1^p, S_{i+1}^{(p_2)} \ldots S_{i+p-1} = 1,$ (i $\geq$2).

Blackburn доказал, что $B_n(\gamma) \cong B_n(\gamma^1)$ тогда и только тогда, когда сравнение $\gamma_{x^{n-1}} \cong \gamma'(mod\ p)$ имеет решение $x \neq 0$.

С другой стороны, для существования проектирования B_n на $B_n(\gamma^1)$ достаточно выполнения следующих двух условий:

а) $\gamma\gamma' \neq 0\ (mod\ p)$

б) если $p=n-1$, то $(\gamma-1)(\gamma'-1) \cong 0\ (mod\ p)$

Мы приведем здесь в явном виде проектирование $B_n(\gamma)$ на $B_n(\gamma^1)$ для случая, когда $p>n-1$. Определяющие соотношения $B_n(\gamma)$ тогда несколько упростятся:

$$\begin{cases} [S_i, S] = S_{i+1}, \quad (i \geq 1, \quad S_n = S_{n+1} = ... = 1); \\ [S_i, S_j] = 1; \\ S^P = 1; \\ S_1^p = S_{n-1}^{\gamma}; \\ S_1^p = 1; \qquad\qquad (i \geq 2). \end{cases}$$

Обозначим для удобства $Q= B_n(\gamma)$, $R= B_n(\gamma^1)$ и пусть $S', S_1', ... S_{n-1}'$ - образующее второй группы. Выберем число k такое, что $\gamma=k\gamma' \ (mod\ p)$. Возможность такого выбора следует из условия **а)**.

9.2. Решеточно изоморфные, но не изоморфные нильпотентные степенные группы

Рассмотрим далее максимальные подгруппы групп Q и R:

$$Q_\lambda = \{ SS_1^\lambda, \ S_2, ..., S_{n-1} \}, \quad (0 \leq \lambda < p);$$

$$Q_p = \{ S_1, \ S_2, ..., S_{n-1} \}, \quad ;$$

$$R_\lambda = \{ S_1^{k\lambda}, S', S_1', ..., S'_{n-1} \}, \quad (0 \leq \lambda < p);$$

$$R_p = \{ S_1', S'_2, ..., S'_{n-1} \}.$$

Проверяется, что группы Q и R_l $(0 \leq \lambda \leq p)$ изоморфны, причем изоморфизмы

$\varphi_\lambda : Q_\lambda \to R_\lambda$, $(0 \leq \lambda \leq p)$

таковы,что

$$\varphi_\lambda(SS_1^\lambda) = S' S_1^{'k\lambda}; \quad \varphi_\lambda \cdot (S_i) = S_i; \ (i \geq 2); \ (0 \leq \lambda < p);$$

$$\varphi_p = (S_1) = S_1^{'k}, \quad \varphi_p = (S_i) = S_i', \quad (i \geq 2)$$

Теперь можно определить проектирование φ следующим образом:

$$\varphi = (Q) = R,$$

$$\varphi(K) = \varphi(K), \quad \text{если} \quad K \in Q_l, \quad (0 \leq \lambda \leq p).$$

Мы не будем пояснять, почему проектирование φ сохраняет нормальность.

Укажем здесь лишь простейший пример, подподающий под приведенное построение.

Пусть $p>3$, K - неквадратичный вычет (mod p), т.е. неразрешимо сравнение $x^2 = K(mod\, p)$.

Тогда группы $B_n(1)$ и $B_n(K)$ порядка p^n - неизоморфны, не допускают сохраняющее нормальность проектирование:

$$\varphi : B_n(1) \to B_n(K).$$

Вернемся теперь к нашей задаче. Отметим сначала, что всякие две максимальные под подгруппы группы Q пересекаются на подгруппы $\{S_2, S_1, \ldots, S_{n-1}\}$ и на этой подгруппе все изоморфизмы φ_λ совпадают. Пусть теперь $q \in Q$ произвольный элемент. Понятно, что он имеет единственную запись в виде

$$q = S^{\alpha}, S^{\alpha_1}, S^{\alpha_2} \ldots, S_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, \quad (0 \le \alpha_i < p).$$

Определим взаимнооднозначное соответствие $\varphi^* : Q \to R$, которое индуцирует проектирование φ.

Если

$$q \in \{ S_2, S_3, \ldots, S_{n-1} \}, \; q = S_2^{\alpha_2}, \ldots S_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$$

то, положим,

$$q' = \varphi^*(q) = \varphi_\lambda(q) = S_2'^{\alpha_2}, \ldots S'^{\alpha_{n-1}}_{n-1},$$

(λ может быть взято любым). В противном случае, в силу единственности записи элемента q, существует только одно λ_0 такое, что $q \in Q_{\lambda_0}$. Положим, тогда $q' = \varphi^*(q) = \varphi_{\lambda_0}(q)$.

То, что φ^* - взаимнооднозначно, и индуцирует проектирование φ - очевидно.

Сохранение нормальности проектирования φ эквивалентно здесь сохранению нижнего центрального ряда [8]. Кроме того, на факторе G/G' по коммутанту соответствие φ^* индуцирует изоморфизм. Поэтому для любой пары элементов $q_1, q_2 \in Q$ справедливо равенство

$$\varphi^*(q_1 q_2) = \varphi^*(q_1)\varphi^*(q_2) r = q_1' q_2' r,$$

где элемент r принадлежит коммутанту подгруппы

$$\{ q_1', q_2' \}, \quad \text{то есть} \quad r = \omega(q_1', q_2')$$

и в слове ω - сумме степеней по каждому переменному, равна нулю)*.

---

* Если это не так, что q_1, q_2 принадлежит одной максимальной подгруппе и $\varphi^*(q_1 q_2) = q_1' q_2'$.

Пусть, наконец $G=A\times Q$, $H=A'\times R$, где группы A, A' - свободные абелевы группы одинакового ранга $m\geq 2$; QR - рассмотренные выше группы.

Зафиксируем любой изоморфизм $\alpha : A\to A'$, $\alpha(a) = a'$ и положим для любого элемента g=ag

$$g' = \varphi*(g)= \varphi*(ag) = a'g'.$$

Тем самым определено взаимнооднозначное соответствие $\varphi* : G\to H$. Проверим, что оно индуцирует проектирование, то есть подгруппу переводит в подгруппу.

Пусть $g_1 = a_1q_1$; $g_2 = a_2q_2$. Тогда

$$\varphi*(g_1g_2) = \varphi*(a_1a_2 \cdot q_1q_2) = (a_1'a_2')(q_1'q_2'r) = g_1'g_2'r .$$

Теперь остается заметить, что

$$\omega(g_1'g_2') = \omega(a_1'a_2')\omega(q_1'q_2') = \omega(q_1'q_2') = r ,$$

а, следовательно, $\varphi*(g_1g_2) \in \{g_1', g_2'\}$.

Таким образом, мы построили две неизоморфные нильпотентные группы G и H, обладающие двумя независимыми элементами бесконечного порядка и имеющие изоморфные подгрупповые структуры.

Отсюда следует отрицательный ответ на проблему, сформулированную в недавенем обзоре Л.Е.Садовского [6].

Мы видели, что смешанная нильпотентная группа не определяется, вообще говоря, структурой своих подгрупп. Интересно поэтому спросить, определяется ли такая группа структурой своих подполугрупп? Положительный ответ на этот вопрос дает

Теорема 3. *Всякая непериодическая конечно порожденная нильпотентная группа G определяется структурой своих подполугрупп и всякий ее ПС-изоморфизм φ индуцируется одним изоморфизмом или антиизоморфизмом.*

Доказательство. Если группа G- абелева, то доказываемое утверждение - хорошо известная теорема Р.В.Петропавловской: всякая непериодическая абелева группа строго определяется структурой своих подполугрупп [10]. Пользуясь этой теоремой,

ВЫВОДЫ

В данной диссертационной работе исследования по решеточным изоморфизмам *W*-групп и алгебр Ли ведутся по следующим основным направлениям.

A. Изучаются условия, при которых группа и алгебра Ли определяются решеткой своих подгрупп и подалгебр. Особый интерес здесь представляют случаи , когда группа строго определяется этой решеткой.

B. Исследуются абстрактные теоретико-групповые свойства, сохраняющиеся при решеточных изоморфизмах групп. Кроме того, выявляется, когда эти свойства могут быть выражены в терминах решетки подгрупп данной группы. В этом случае говорят, что данное свойство допускает решеточную характеристику. Нахождение решеточных характеристик свойств мы рассматриваем как основную проблему, а доказательство решеточной инвариантности - как промежуточный этап к указанной главной задаче.

C. Изучается поведение тех или иных характерных подгрупп данной группы при ее решеточных изоморфизмах. Выясняется, в каких случаях можно получить решеточную характеристику этих подгрупп, т.е. при каких условиях можно выделить эти подгруппы как "особые" элементы в решетке всех подгрупп данной группы.

Основное внимание концентрируется на *W*-степенных группах и алгебрах Ли близких к абелевым - нильпотентных класса 2.

Доказана теорема о строгой решеточной определяемости чистых трехмерных алгебр Ли и степенных групп.

Изучен вопрос о решеточной определяемости (в нестрогом) смысле нильпотентных класса 2 степенных групп и алгебр Ли над общими кольцами: существование полулинейного изоморфизма при наличии решеточного изоморфизма.

Доказана основная теорема проективной геометрии для чистых нильпотентных класса 2 *W*-степенных групп без ограничения на размерности.

Изучены решеточные изоморфизмы смешанных нильпотентных класса 2 и $n\geq 3$ *W*-степенных групп и алгебр Ли. Строятся соответствующие контрпримеры, отвечающие на естественно, возникающие вопросы.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Suzuku M. *Strurture of a group and the strurture of its lattice of subgroups*. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-NewYork. 1956.

2. Schmidt R. *Subgroup lattice of groups*. Walter de Gruyter. Berlin-New-York. 1994.

3. Садовский Л.Е. *Некоторые теоретико-структурные вопросы теории групп*. Успехи матем. наук. 23. №3 (1968), 123-157.

4. Аршинов М.Н., Л.Е.Садовский. *Некоторые теоретико-структурные свойства групп и полугрупп.* Успехи матем. наук. 27. №6 (1972), 139-180.

5. Лашхи А.А. *Решетки с модулярным тождеством и алгебры Ли. Итоги науки и техники*. ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. 26 (1985), 213-257.

6. Лашхи А.А. *Основная теорема проективной геометрии в модулях и алгебрах Ли.* Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Проблемы геометрии. 18 (1986), 167-187.

7. Каргаполов М.И., Ремесленников В.П., Романовский Н.С., Романьков В.Л., Чуркин В.А. *Алгоритмические вопросы для v-степенных групп*. Алгебра и логика 8(1969), №6, 643-659.

8. Магомаев Х.Х. *К теории W-групп. I.* Изв. высш. учебн. заведений. Математика. 1971. №1, 45-62.

9. Магомаев Х.Х. *К теории W-групп. II.* Изв. высш. учебн. заведений. Математика. 1971. №4, 50-58.

10. Мальцев А.И. *Об одном классе однородных пространств.* Изв. Акад. наук СССР. Сер. Матем. 13 (1949), №1, 9-32.

11. Мальцев А.И. *Нильпотентные группы без кручения.* Изв. Акад. наук СССР. сер. Матем. 13(1949), №3, 201212.

12. Мальцев А.И. *О нормированных Алгебрах Ли над полем рациональных чисел.* Докл. Акад. наук СССР 62(1948), №6, 745-748.

13. Мальцев А.И. *Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы.* Матем. сб. 15 (1949), №3, 347-366.

14. Мальцев А.И. *Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями*. Матем. сб. 26(1950), №1, 19-33.

15. Мерзляков Ю.И. *О матричном представлении автоморфизмов, расширений и разрешимых групп.* Алгебра и логика. 7(1968), №3, 63-104.

16. Мясников А.Г., Ремесленников В.Н. *Изоморфизмы и элементарные свойства нильпотентных степенных групп*. Докл. Акад. наук СССР, 258(1981), №5, 1056-1059.

17. Тавадзе А.Д. *О проинильпотентных группах*. Сообщ. Акад. наук ГССР, 79(1975), №2, 301-304.

18. Тавадзе А.Д. *Периодические пронильпотентные группы.* Сообщ. Акад. наук ГССР, 88(1977), №2, 289-291.

19. Тавадзе А.Д., Шмелькин А.Д. *Подгруппы свободных пронильпотентных групп.* Сообщ. Акад. наук ГССР, 93(1979), №2, 277-279.

20. Тавадзе А.Д. *Проективные пронильпотентные W-группы*. Сообщ. Акад. наук ГССР. *4(1976), №2, 273-276.

21. Холл Ф. *Нильпотентные группы.* Математика. Период сб. перев. ин. статей 12:1(1968), 3-36.

22. Baumslag G., Stammbach U. *On the inverse limit of nilpotent groups*. Comment. Math. Helv. 52(1977), No2, 219-233.

23. Bousfield A.K., Kan D.M. *Homotopy limits, complections and localizations.* Lecture Notes in Mathematics< vol. 304< springer-Verlag, Berlin-New-York, 1972.

24. Hall P. *The splitting properties of relatively free groups.* Proc. London Math. Soc. (3) 4(1954), 343-256.

25. Hilton P., Mislin G., Roitberg J. *Topological Localization and nilpotent groups.* Bull. Amer. Math. Soc. 78(1972), 1060-1063.

26. Lazard M. Sur les groupes nilpotents et les anneux de Lie. Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup. (3) 71(1937), 101-190.

27. Megnus W. *Uber Bezienhingeri awischen hoheren Kommutatoren.* J. Heine Angew. Mat. 177(1937), 105-155.

28. Quillen D. *Rational homotopy theory*. Ann. of Math. (2) 90(1969), 205-295.

29. Warfield R.B., Jr *Nilpotent groups.* Lecture Notes Mathematics, Vol. 513, springer-Verbag, Berlin-New York, 1976.

30. Wille E. *Treue Darstellung Liescher Ringe.* J. Reine Angew. Math. 177 (1937), 152-160.

31. Амаглобели М.Г., Ремесленников В.Н. *G-тождества и G-многообразия.* Алгебра и логика. 39(2000). №3, 249-272.

32. Амаглобели М,Г. *G-тождества нильпотентных групп. I.* Алгебра и логика. 40(2001), №1.

33. АмаглобелиМ.Г. *G-тождества нильпотентных групп. II* Алгебра и логика. 40(2001), №4.

34. Амаглобели М.Г. *Тензорные кольца и решетка G-свободных нильпотентных групп ступени* ≤ 3. Докл. РАН 377, 6(2001), 727-729.

35. Amaglobeli M.G. *Varietes of nilpotent exponental groups*. Bull. Georgian Acad. Sci. 162(2000), N2, 226-228.

36. Amaglobeli M.G. *Algoritmic problems relating to varietes of exponential nilpotent groups.* Bull. Georgian Acad. Sci. 161(2000), N3, 401-402.

37. Schmidt R. *Subgroup lattices of groups.* Walter de Gruyter. Berlin-New York. 1994.

38. Лашхи А.А. *Структурные изоморфизмы нильпотентных колец Ли.* Сообщ. АН ГССР. 1972. Т.65, №1, 21-24.

39. Лашхи А.А. *Проектирование магнусовых колец и алгебр Ли.* Труды ГПИ им. В.И.Ленина. 1971, Т.8, 7-11.

40. Lashkhi A.A. *Projections of mixed Lie Rings*. Univ. Algebra and its Appl. Pap. S.Banach Inst. Math. Cent. Warszawa. 1982, 57-66.

41. Лашхи А.А. *Основная теорема проективной геометрии в модулях и алгебрах Ли.* Итоги науки техники. ВИНИТИ. Проблемы геометрии. 1986, Т.18, 165-187.

42. Лашхи А.А. *Проектирование чистых сверхразрешенных алгебр Ли.* Мат. заметки. Т.26, №6, 1979, 931-937.

43. Лашхи А.А. *Основная Теорема проективной геометрии в алгебрах Ли.* Сообщ. АН Грузии. 149, №2, 1994, 185-188.

44. Судзуки М. *Строение группы и строение структуры ее подгрупп.* Иностранная Литература. Москва. 1960.

45. Гретцер Г. *Общая теория решеток*. М.:Мир. 1982.

46. Биркгоф Г. *Теория решеток*. М.:Мир. 1978.

47. Садовский А.Е. *Проектирования изоморфизмы нильпотентых групп*. Известия АН СССР. Т.29, 1965, 171-208.

48. Садовский А.Е. *Структура подгрупп нильпотентных групп без кручения.* Успехи Мат. наук, Т.12, №3, (1957), 201-204.

49. Пекелис А.С. *О группах с изоморфными структурами под полу групп.* Изв. высш. учебн. заведений. Матем. №1, (1957), 189-194.

50. Конторович П.Г., Плоткин Б.И. *Структуры с аддитивным базисом.* Матем. сб. 35(1954). 187-192.

51. Пекелис А.С. *Структурные изоморфизмы смешанных нильпотентных групп.* Сиб. матем. ж. 6(1965), 1315-1321.

52. Пекелис А.С. *О структурных изоморфизмах разрешимых групп.* Докл. АН СССР. 133. №2 (1960). 281-283.

53. Пекелис А.С. *Структурные изоморфизмы смешанных нильпотентных групп.* Сибир. мат. журнал. 6(1965). 1315-1321.

54. Пекелис А.С. *Структурные изоморфизмы смешанных метабелевых групп.* Сибир. мат. журнал. 4(1967). 827-834.

55. Плоткин Б.И. *К теории некоммутативных групп без кручения.* Матем. сб. 30 (1952). 197-215.

56. Bokelavadze T.Z.*On some Properties of W-power Groups*. Bull. Georgian Acad. Sci. 172 (2005), No. 2, 202-204.

57. Bokelavadze T.Z.*Lattice Isomorphisms of Free and Free Polynilpotent W-Power Groups*.Bull. Georgian Acad. Sci. 172 (2005), No. 3, 401-403.

58. Bokelavadze T.Z.*On the Fundamental Theorem of the Projective Geometry for* W-Power Groups. Bull. Georgian Acad. Sci. 173(2006), No. 1, 17-18 (with A. Lashkhi).

59. Bokelavadze T.Z.T*he Lattices In Connection with* W-Power Groups. Bull. Georgian Acad. Sci. 173(2006) No. 3.

60. Lashkhi A.A., Bokelavadze T.Z. *Lattice Isomorphisms of nilpotent W-Power Groups.* Bull. Georgian Acad. Sci. 173 (2006), No. 4.

61. Bokelavadze T.Z. *On complex commutators of* W-Power Groups. Geometric and group theory methods in phisics and mathematics. International school and workshop.Batumi State University, Sep. 15-27, 2003, 50-51.

62.Chabashvili M. *Isomorphism of Nilpotent of Class 2. Hall's W-Power Groups.* Bull. Georgian Acad. SCi (2008). V.2, N4.

63. Chabashvili M., Bokelavadze T. *Isomorphism of Nilpotent of Class 2. Hall's W-Power Groups.* Bull. Georgian Acad. SCi (2009), V.1. N1.

64. Чабашвили М. *О решеточных изоморфизмих нильпотентных класса 2 W-степенных групп Холли и Алгеб. Ли.* Gen, (2008), N3.

65. Чабашвили М., Бокеливадзе Т. *Решетка подгрупп и геометрия W-степенных групп Холла.* Georgian Engineering News. (2008), т.4ю

66. Чабашвили М. *Решеточные изоморфизмы нильротентных класса 2 W-степенных групп и Алгебр. Ли.* Периодический научный журнал "Интеллект". (2008) №3 (32).

67. Чабашвили М. *Решетка подгрупп и геометрия W-степенных групп Холла.* ДАН Росийской Акад. Наук 2009 (впечати).

68. Chabashvili M., Bokelavadze T. *Latteces of subalgeras of Hall's W-power groups.* Antalya International Algebraic Conference. Antalya. 2009.