

გიორგი შენგელია

საინჟინრო გეომეტრიის საფუძვლების მეთოდოლოგია და
მისი კომპიუტერული მხარდაჭერა

წარდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის
მოსაპოვებლად

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
თბილისი, 0175, საქართველო
დეკემბერი, 2008 წელი

© საავტორო უფლება გიორგი შენგელია. 2008.

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემოთ ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავცანით შენგელია გიორგის მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: გრაფიკული მეთოდების საწყისების უმაღლეს სკოლაში სწავლების მეთოდოლოგია და მისი დანერგვის გზები და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის "ფაკულტეტის დასახელება" სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

ხელმძღვანელი: პროფ. ანზორ შავგულიძე

რეცენზენტი: პროფ. ივანე გორგიძე

რეცენზენტი: პროფ. გიორგი წულეისკირი

რეცენზენტი:

ავტორი: შენგელია გიორგი

დასახელება: საინჟინრო გეომეტრიის საფუძვლების
მეთოდოლოგია და მისი კომპიუტერული
მხარდაჭერა

ფაკულტეტი : ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების
ფაკულტეტი

აკადემიური ხარისხი: დოქტორი

სხდომა ჩატარდა: სტუ-ს სააქტო დარბაზში

ინდივიდუალური პიროვნებების ან ინსტიტუტების მიერ
ზემომოყვანილი დასახელების დისერტაციის გაცნობის მიზნით მოთხოვნის
შემთხვევაში მისი არაკომერციული მიზნებით კოპირებისა და გავრცელების
უფლება მინიჭებული აქვს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტს.

ავტორის ხელმოწერა

ავტორი ინარჩუნებს დანარჩენ საგამომცემლო უფლებებს და არც
მთლიანი ნაშრომის და არც მისი ცალკეული კომპონენტების გადაბეჭდვა ან
სხვა რაიმე მეთოდით რეპროდუქცია დაუშვებელია ავტორის წერილობითი
ნებართვის გარეშე.

ავტორი ირწმუნება, რომ ნაშრომში გამოყენებული საავტორო
უფლებებით დაცული მასალებზე მიღებულია შესაბამისი ნებართვა (გარდა
იმ მცირე ზომის ციტატებისა, რომლებიც მოითხოვენ მხოლოდ სპეციფიურ
მიმართებას ლიტერატურის ციტირებაში, როგორც ეს მიღებულია
სამეცნიერო ნაშრომების შესრულებისას) და ყველა მათგანზე იღებს
პასუხისმგებლობას.

რეზიუმე

ნაშრომი შედგება სამი ნაწილისაგან. პირველ ნაწილში მოცემულია ჩვენს მიერ დამუშავებული და პრაქტიკაში აპრობირებული პროპედევტიკული კურსის – „საინჟინრო გეომეტრიის საფუძვლების“ პროგრამა და განხილულია ამ პროგრამით გათვალისწინებული თემების სწავლების მეთოდოლოგია.

საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში საქართველოს კანონის– „უმაღლესი სკოლის შესახებ“ შესაბამისად, მოქმედებს ცალკეული დისციპლინების სწავლების მეთოდოლოგიის სრულყოფის ფართო პროგრამები. მათ შორისაა გრაფიკული დისციპლინების სწავლების პრობლემები არქიტექტურის სპეციალობებზე. დასაბამიდან, ამ დარგში სპეციალისტების მომზადებაში განსაკუთრებული როლი აკისრია გრაფიკული მეთოდების, სახელდობრ – მხაზველობითი გეომეტრიისა და გამოყენებითი პერსპექტივის სწავლების საქმეს. მიუხედავად იმისა, რომ გეომეტრიისა და ხაზვის სასწავლო კურსები იძლევიან როგორც მხაზველობითი გეომეტრიის, ისე მისი განშტოების – გამოყენებითი პერსპექტივის შესწავლის საფუძველს, პრაქტიკამ გვიჩვენა, რომ ეს საკმარისი არ არის და სკოლაში შეძენილი ცოდნა ყოველთვის ითხოვს გარკვეულ შევსებას სხვა წინასწარ მოძიებული თემებით, რომელთა შესწავლის შედეგად საგრძნობლად იცვლება სტუდენტის სამუშაო მდგომარეობა და მკვეთრად უმჯობესდება სწავლების ხარისხიც. სწორედ ასეთი თემების მოძიებამ მიგვიყვანა იმ პროპედევტიკული კურსის შექმნის აუცილებლობამდე, რომელსაც შემდგომ „საინჟინრო გეომეტრიის საფუძვლები“ ვუწოდეთ.

ნაშრომი იწყება კონსტრუქციული გეომეტრიის ძირითადი ცნებების განხილვით. ნათქვამია, რომ გეომეტრიის ის განშტოება, რომლითაც შეისწავლება გეომეტრიული აგებანი, კონსტრუქციული გეომეტრიის სახელით არის ცნობილი. კონსტრუქციული გეომეტრიის ძირითადი ცნებაა ავაგოთ გეომეტრიული ფიგურა. ეს ცნება მიღებულია განსაზღვრის გარეშე და მისი კონკრეტული აზრი პრაქტიკიდან არის ცნობილი, მაგალითად: „დაეხაზოთ“ (წირი), „გაავალოთ“ (წრფე), „აღენიშნოთ“ (წერტილი) და ა.შ. მოყვანილია კონსტრუქციული გეომეტრიის ძირითადი პოსტულატები, აქსიომები და მათი შედეგები.

შემდეგ მოცემულია აგების ელემენტარული ამოცანები და მათი გადაწყვეტის მეთოდოლოგია. განმარტებულია, რომ აგების ამოცანის ამოხსნა ნიშნავს კონსტრუქციული გეომეტრიის აქსიომებზე დაფუძნებული, სასრული რაოდენობის მოქმედებათა ჩამონათვალის შედგენას, რომელთა თანმიმდევრული შესრულებით მივიღებთ საძიებელ ფიგურას და რომ ამოცანის ამოხსნისათვის საჭირო მოქმედებების ჩამონათვალი დამოკიდებულია იმ ხელსაწყოებზე, რომელთა გამოყენებითაც ვაპირებთ ამოცანის ამოხსნას. დასახულია აგების ამოცანების გადაწყვეტის საორიენტაციო სქემა და განხილულია რამოდენიმე მაგალითი. მინიშნებულია, რომ სასწავლო მიზნებიდან გამომდინარე, რეკომენდებულია აგების ამოცანების ამოხსნა წარიმართოს პრაქტიკაში გავრცელებული ეტაპებით: 1) ანალიზი; 2) აგება; 3) დამტკიცება; 4) გამოკვლევა. აქვე აღნიშნულია, რომ ყოველთვის და ყველა ამოცანისათვის არ არის და არც შეიძლება იყოს აუცილებელი ამ ეტაპების ერთმანეთისაგან გამიჯვნა.

აქ ჩვენ შევეცადეთ რამდენადმე ახალი ინტერპრეტაციით წარმოგვეჩინა წერტილთა გეომეტრიული ადგილის არსი და გვეჩვენებინა მისი, როგორც მეთოდის გამოყენების მაგალითები აგების ამოცანებში. მოყვანილია მცირე ექსკურსი გეომეტრიის საწყისებში. საუბარია იმაზე რომ, არისტოტელეს აზრით, თუ დისკრეტული სიდიდე განიხილება, როგორც წერტილთა სიმრავლე, მაშინ შეუძლებელია უწყვეტი სიდიდე განხილულ იქნას, როგორც განუყოფელი ელემენტების სიმრავლე. განხილულია აგების რამდენიმე ამოცანა, რომლებშიც დაცულია აგების ამოცანის ამოხსნის ოთხი ეტაპისაგან შემდგარი სქემა (ანალიზი, აგება, დამტკიცება, გამოკვლევა).

მოცემულია სკოლის კურსში გამოყენებული გეომეტრიის განმარტება: გეომეტრია ეს არის *მეცნიერება გეომეტრიული ფიგურების თვისებათა შესახებ*. შემდგომ ხდება იმის დაზუსტება თუ ფიგურათა რომელ თვისებებზეა საუბარი და რას შეიძლება ეწოდოს ფიგურის გეომეტრიული თვისება.

გარკვეული მსჯელობიდან გამომდინარე, პასუხი კითხვაზე, თუ რა არის გეომეტრია, ჩამოყალიბებულია ამგვარი რედაქციით: გეომეტრია ეს არის *მეცნიერება, რომელიც შეისწავლის გეომეტრიული ფიგურების იმ თვისებებს, რომლებიც უცვლელად რჩებიან ფიგურის მოძრაობის დროს* (პირველი განსაზღვრება).

მაგრამ შემდგომში მსჯელობამ აჩვენა: – გეომეტრიულ თეორემებში წერტილებს შორის მანძილი საერთოდ არ ფიგურირებს, რის გამოც გეომეტრიისათვის ამგვარი განსაზღვრება ჩამოყალიბდა: გეომეტრია ეს არის *მეცნიერება, რომელიც შეისწავლის გეომეტრიული ფიგურების იმ თვისებებს, რომლებიც არ იცვლებიან მსგავსების გარდაქმნაში (მეორე განსაზღვრება)*.

მოყვანილია მოთხოვნები, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდეს გარდაქმნათა ერთობლიობა იმისათვის, რომ იგი მიჩნეულ იქნას ახალი გეომეტრიის საფუძვლად და მათ საფუძველზე ჩამოყალიბებულია გეომეტრიის, როგორც მეცნიერების განსაზღვრების განზოგადებული ვარიანტი – გეომეტრია არის *გეომეტრიულ ფიგურათა იმ თვისებების შემსწავლელი მეცნიერება, რომლებიც არ იცვლებიან რაიმე გარდაქმნების ჯგუფის გარდაქმნებში* (მესამე განსაზღვრება). განხილულია გეომეტრიის, როგორც მეცნიერების სამი განშტოება და ჩამოყალიბებულია გარდაქმნათა ერთობლიობა.

შემდეგ განხილულია გეომეტრიული ასახვები, ევკლიდეს სივრცის შევსება არასაკუთრივი ელემენტებით, დეზარგის თეორემა და მისი შედეგები, პერსპექტიულ-აფინური შესაბამისობა და მისი თვისებები, ზოგადი აფინური შესაბამისობა, ელიფსი როგორც წრეწირის აფინურად შესაბამისი მრუდი, აფინურად შესაბამისი ველების მთავარი მიმართულებები, პოლკე-შვარცის თეორემა.

მეორე ნაწილი დათმობილი აქვს არქიტექტურულ ნახაზებში პერსპექტივისა და ჩრდილების აგების მეთოდებსა და ხერხებს, რომელნიც პირველ ნაწილში განხილულ თეორიულ ბაზაზე არიან დაფუძნებულნი.

გეომეტრიისა და კერძოდ პერსპექტივის მნიშვნელობა არქიტექტურისა და ხელოვნების განვითარების ყველა ეტაპზე კარგად იყო ცნობილი. როგორც გასპარ მონჟი აღნიშნავდა, მხაზველობითი გეომეტრია იძლევა ცნობილი ელემენტებიდან სივრცის უცნობი მოვლენების დადგენის საშუალებას. არქიტექტურულ შემოქმედებაშიაც ცენტრალური დაგეგმილება წარმოადგენს იმ საშუალებას, რომლითაც

ორთოგონალური გეგმილების, ანუ პროექტის მიხედვით გამოვსახავთ სინამდვილეში ჯერ კიდევ განუხორციელებელი შენობის პერსპექტიულ გამოსახულებას, ე.ი. ისეთ სივრცობრივ სურათს, როგორსაც ადამიანი დაინახავს მხოლოდ მაშინ, როცა ნაგებობა აიგება.

სამშენებლო და არქიტექტურული ფორმების ორთოგონალურ და აქსონომეტრიულ გეგმილებზე დატანილი ჩრდილები, საშუალებას გვაძლევენ, უფრო ზუსტად ვიმსჯელოთ მათ ურთიერთგანლაგებასა და ცალკეული ფრაგმენტების ფორმაზე. განხილულია არქიტექტურული ნახაზების აგების ამოცანები. ყურადღება დათმობილი აქვს ჩრდილების აგების მეთოდოლოგიას მონუის ეპიურზე და აქსონომეტრიაში..

მესამე ნაწილში განხილულია საინჟინრო გეომეტრიის გრაფიკული ამოცანები და მათი გადაწყვეტა კომპიუტერის მეშვეობით. გამოყენებულია საინჟინრო გეომეტრიის ისეთი ცნობილი ამოცანები როგორიცაა აფინურად შესაბამისი ველების მთავარი მიმართულებანი და მისი გამოყენება ამოცანებში:

1. მოცემულია წრეწირი, შესაბამისობის ღერძი და შესაბამისი წერტილთა წყვილი. ავაგოთ მოცემული წრეწირის აფინურად შესაბამისი ფიგურა – ელიფსი;

2. მოცემულია ელიფსი და წრფე. ავაგოთ ამ ელიფსისა და წრფის თანაკვეთის წერტილები ელიფსის აუგებლად.

განხილულია ზოგადად ჩრდილების აგების გეომეტრიული არსი და ნაჩვენებია ორი ამოცანა:

1. მრავალწახნაგას საკუთარი და დაცემული ჩრდილების აგება

2. წრიული ნიშის ჩრდილის აგება (მონუის ეპიური და აქსონომეტრია).

მოცემულია ამ ამოცანათა გადაწყვეტა კომპიუტერის მეშვეობით. შესრულებული ნახაზებისათვის შედგენილია, როგორც სიმბოლური, ასევე მანქანური ალგორითმი. ყოველი მოქმედების სიმბოლურ ჩანაწერს მისადაგებული აქვს „Auto CAD“-ის შესაბამისი ბრძანება.

აგების ამოცანებში კომპიუტერული ტექნიკის გამოყენების ჩვენეული ვერსიები შესაძლოა გავრცელდეს საინჟინრო გეომეტრიის ნებისმიერ აგების ამოცანაზე.

ასეთი მიდგომა ჩვენი აზრით ხელს უწყობს მექანიკური აზროვნების გადაყვანას შემოქმედებით აზროვნებაში.

Summary

This work consists of three parts. In the first part it is given the program of propedeutical course - "Foundation of engineering geometry", which is elaborated and approved by us in practice and methods of teaching of the themes foreseen by this program are considered there.

According to the Act of Georgia "About high school" wide programs of improvement of methods of individual disciplines teaching are operating in the Georgian Technical University. Problems of graphical disciplines teaching at the architectural specialties are among them. From the beginning the crucial role in the preparation of specialists of this field is given to the graphical methods, in particular to the teaching of descriptive geometry and applied perspectives. Despite the fact that teaching courses of geometry and drawing lay the foundation of teaching of descriptive geometry, as well as of its branch – applied perspectives, as the practice shows, it is not enough and the knowledge obtained in the school always requires certain supplement by other advanced selected themes, and as result of their teaching students' working conditions change significantly and quality of teaching improves sensibly. Search of exactly such themes generates a need of creation of propedeutical course, which was called lately "Basis of engineering geometry".

This work begins from the consideration of basic notions of constructive geometry. It is said that those branch of geometry which studies geometrical constructions is known as construction geometry. The main notion of construction geometry is the construction of geometrical figure. This notion is accepted without any determination and its specific meaning is known from the practice. For example: "to draw" (line), "to draw" (straight line), "to mark" (point) and so on. Main postulates, axioms of construction geometry and their results are showed there.

After that elementary problems of construction and the methods of their solving are given. It is explained, that the solving of construction problem means the composure of the list of finite quantity operations, which are based on the axioms of constructive geometry, by consecutive performing of which we will get the required figure and that the list of operations necessary for solving of the problem depends on those instruments, by use of which we intend to solve the problem. Approximate scheme of construction problems' solving is outlined and several examples are considered. It is noted that proceeding from teaching purposes it is recommended to divide the solving of construction problems by following stages, which are commonly used in practice: 1) analyze; 2) construction; 3) proof; 4) research. It is noted here that maybe it is not and cannot be necessary to separate these stages from each other.

Here we try to represent rather new interpretation of the essence of geometrical locus and to show the examples of its use as a method in the construction problems. A small excursus into the principles of geometry is given here. It is said that in Aristotel opinion if the discrete quantity is considered as the multiplicity of points, than it is impossible to consider continuous quantity as the multiplicity of inseparable elements. Several problems of construction are considered, where the scheme consisted from four stages (analyze, construction, proof, research) of solving of construction problem is kept.

It is given the definition of geometry used in the school course: *geometry is a science about the properties of geometric figures*. Afterwards it is specified about what kind of figures' properties we speak and what can we call the geometric property of figure.

Proceeding from certain discussion the answer on the question, what is geometry is formulated in the following redaction: *geometry is the science which studies those properties of geometric figures which remain unchanged during figure's movement* (first definition).

But further discussion shows: in the geometric theorems the distance between points does not figure generally, and as result following definition of geometry was formulated: *geometry is the science, which studies those properties of geometric figures, which don't vary during similarity transformation* (second definition).

The requirements are described, to which totality of transformations should satisfy that it must lay down as a basis of new geometry and on their basis new generalized version of definition of geometry as a science is formulated – *geometry is a science of study of those properties of geometric figures, which don't vary during the transformations by certain group of transformations* (third definition). It is considered three branches of geometry as a science and totality of transformations is formulated, too.

After that geometric mapping, supplement of Euclidean space by imaginary elements, theorem of Desargues and its results, perspective-affine accordance and its properties, general affine accordance, ellipse as an affinely corresponding curve for circumference, main directions of affinely corresponding fields, theorem of Polke-Schwarz are considered.

Second part is devoted to the methods and ways of perspectives and shadows construction in architectural drawings, which are based on the theoretical basis considered in the first part.

The significance of geometry and particularly of perspective was well known at the every stage of development of architecture and art. As Gaspar Monge noted, descriptive geometry gives us a possibility to determine unknown phenomenons of space by means of known elements. In architectural creative work central projection represents those mean, by use of which, according to the orthogonal projections, or in other words to the project we can reflect in reality the perspective image of still unfulfilled projects (buildings), or such space pattern, which human can see only when building is constructed.

Shadows drifted on the orthogonal and axonometric projections of construction and architectural forms give us a possibility to discuss more precisely their positional relationship and the form of separate fragments. Problems of construction of architectural drawings are considered here. Attention is paid to the methodology of shadows construction on the Monge epure and axonometry.

In the third part it is considered graphical problems of engineering geometry and their solving by means of computer. Such well-known problems of engineering geometry are used as the main directions of affinely corresponding fields and their use in the various problems:

1. Circumference, axe of accordance and corresponding pair of points are given. We must construct figure – ellipse, which is affinely corresponding to the given circumference.

2. Ellipse and straight line are given. We must construct the points of intersection of this ellipse and straight line without construction of ellipse.

Geometrical essence of general construction of shadows is considered and two problems are shown:

1. Construction of own and falling shade of the polyhedron.
2. Construction of shade of circular niche (Monge epure and axonometry).

Solving of these problems by means of computer is given here. Symbolic as well as machine algorithm is composed for performed drawings. Respective command of “AutoCAD” corresponds to the symbolic record of every operation.

Our own versions of computer technique use in the problems of construction can be extended to the problem of any kind of construction in engineering geometry.

In our opinion such approach will assist to transfer mechanical thinking into creative one.

შინაარსი

	შესავალი-----	13
1.	ლიტერატურული მიმოხილვა-----	15
2.	შედგენები და მათი განსჯა-----	22
2.1.	კონსტრუქციული გეომეტრიის ძირითადი ცნებები-----	22
2.2.	აგების ელემენტარული ამოცანები და მათი გადაწყვეტის მეთოდები-----	30
2.3.	წერტილთა გეომეტრიული ადგილი და მისი, როგორც მეთოდის გამოყენება აგების ამოცანებში-----	36
2.4.	გეომეტრიული გარდაქმნები-----	41
2.5.	გეომეტრიული ასახვები-----	48
2.6.	ეკლიდეს სივრცე და მისი შევსება არასაკუთრივი ელემენტებით-----	57
2.7.	დეზარგის თეორემა და მისი შედეგები-----	64
2.8.	ბრტყელი ველების პერსპექტიულ – აფინური შესაბამისობა და მისი თვისებები-----	70
2.8.	ზოგადი აფინური შესაბამისობა-----	80
2.10.	ელიფსი როგორც წრეწირის აფინურად შესაბამისი მრუდი-----	85
2.11.	აფინურად შესაბამისი ველების მთავარი მიმართულებანი-----	90
2.12.	პოლკე-შვარცის თეორემა-----	97
2.13.	“საინჟინრო გეომეტრიის საფუძვლების”, როგორც პროპედევტიკული კურსის დანიშნულება, გამოყენებითი პერსპექტივის სწავლების მეთოდებაში-----	103
2.13.1	წერტილის პერსპექტივა-----	106
2.13.2	წრფის პერსპექტივა-----	109
2.13.3	პარალელურ წრფეთა კონის პერსპექტივა-----	111
2.13.4	სიბრტყის პერსპექტივა-----	114
2.13.5	წრეწირის პერსპექტივა-----	116
2.13.6	პერსპექტივის აგების მეთოდები-----	121
2.13.7	მეტრული ამოცანები-----	124
2.14.	ჩრდილები ორთოგონალურ გეგმილებსა და აქსონომეტრიაში-----	128
2.14.1	წერტილის ჩრდილი-----	129
2.14.2	წრფის ჩრდილი-----	132
2.14.3	წრფის ჩრდილი-----	137
2.14.4	მრავალწახნაგას ჩრდილი-----	139
2.14.5	მრუდე ზედაპირების ჩრდილი-----	141
2.14.6	ჩრდილების აგების ხერხები-----	143
2.14.7	ნიშაში დაცემული ჩრდილი-----	145
2.14.4	ჩრდილების აგება კიბეზე-----	147
2.15.	საინჟინრო გეომეტრიის კომპიუტერული მხარდაჭერა-----	149
3.	დასკვნა -----	166
	გამოყენებული ლიტერატურა -----	167

ნახაზების ნუსხა

ნახაზი 1	ორი ფიგურის შეერთება. -----	24
ნახაზი 2	ორი ფიგურის სხვაობა. -----	25
ნახაზი 3	ორი ფიგურის სხვაობა. -----	25
ნახაზი 4	ორი ფიგურის სხვაობა. -----	25
ნახაზი 5	მონაკვეთის შუა წერტილის პოვნა. -----	30
ნახაზი 6	ფუძის და მედიანების მიედვით სამკუთხედის აგება. -----	33
ნახაზი 7	წინა ამოცანის დამტკიცება. -----	34
ნახაზი 8	მოცემული კუთხის გვერდების მხები წრეწირის აგება. -----	38
ნახაზი 9	A წერტილიდან a მანძილით, ხოლო B და C წერტილებიდან ტოლი მანძილებით დაშორებული წერტილის აგება. -----	39
ნახაზი 10	ორი პარალელური წრფის მხები და მოცემულ წერტილზე გამავალი წრეწირის აგება. -----	39
ნახაზი 11	ცენტრალური დაგეგმილების აპარატი. -----	50
ნახაზი 12	ადამიანის თვალის ფუნქციონირების სქემა. -----	53
ნახაზი 13	პარალელური დაგეგმილების აპარატი. -----	54
ნახაზი 14	ორთოგონალური დაგეგმილების აპარატი. -----	56
ნახაზი 15	ცენტრალური დაგეგმილების აპარატი. -----	57
ნახაზი 16	ეკვლიდეს სივრცის შევსება არასაკუთრივი ელემენტებით. -----	58
ნახაზი 17	ორი სიბრტყის არასაკუთრივი წრფე. -----	61
ნახაზი 18	დეზარგის კონფიგურაცია. -----	64
ნახაზი 19	დეზარგის კონფიგურაცია. -----	67
ნახაზი 20	ჰომოლოგია. -----	68
ნახაზი 21	პარალელური დაგეგმილების გეომეტრიული სქემა. -----	70
ნახაზი 22	პარალელური წრფეები. -----	71
ნახაზი 23	სამი წერტილის მარტივი ფარდობა. -----	72
ნახაზი 24	შესაბამისი წერტილების ნათესაობის ღერძიდან დაშორებათა ფარდობა. -----	73
ნახაზი 25	სამკუთხედების ფართობების ფარდობა. -----	73
ნახაზი 26	სამკუთხედების ფართობების ფარდობა. -----	74
ნახაზი 27	სამკუთხედების ფართობების ფარდობა. -----	74
ნახაზი 28	აფინური შესაბამისობა. -----	75
ნახაზი 29	აფინური შესაბამისობა. -----	77
ნახაზი 30	პერსპექტიულ –აფინური შესაბამისობა. -----	78
ნახაზი 31	მრავალჯერადი პარალელური დაგეგმილება. -----	80
ნახაზი 32	პერსპექტიულ – აფინური გარდაქმნა. -----	81
ნახაზი 33	პერსპექტიულ –აფინური შესაბამისობა. -----	82
ნახაზი 34	აფინური შესაბამისობა. -----	83
ნახაზი 35	წრეწირის აფინურად შესაბამისი მრუდი -----	85
ნახაზი 36	ელიფსზე შემოხაზული პარალელოგრამი. -----	88
ნახაზი 37	ელიფსი. -----	89
ნახაზი 38	აფინურად შესაბამისი ველების მთავარი მიმართულებებ. -----	90
ნახაზი 39	აფინურად შესაბამისი ველების მთავარი მიმართულებებ. -----	93
ნახაზი 40	აფინურად შესაბამისი ველების მთავარი მიმართულებებ. -----	94
ნახაზი 41	აფინურად შესაბამისი ველების მთავარი მიმართულებებ. -----	95
ნახაზი 42	ორთოგონალურ –პერსპექტიული ველები. -----	97

ნახაზი 43	პრიზმის კვეთა სიბრტყით -----	98
ნახაზი 44	პრიზმის კვეთა სიბრტყით. -----	99
ნახაზი 45	პოლკე-შვარცის თეორემა. -----	99
ნახაზი 46	პოლკე-შვარცის თეორემა. -----	100
ნახაზი 47	პოლკე-შვარცის თეორემა. -----	101
ნახაზი 48	ცენტრალური დაგეგმილების აპარატი. -----	105
ნახაზი 49	სამკუთხედის ცენტრალური გეგმილი. -----	106
ნახაზი 50	პერსპექტივის აპარატი. -----	107
ნახაზი 51	პერსპექტივის აპარატი. -----	108
ნახაზი 52	წრფის პერსპექტივა. -----	109
ნახაზი 53	წრფის პერსპექტივა. -----	110
ნახაზი 54	პარალელურ წრფეთა კონის პერსპექტივა -----	111
ნახაზი 55	ფუძეთა სიბრტყის პარალელური წრფის პერსპექტივა. ---	112
ნახაზი 56	ფუძეთა სიბრტყის მართობული წრფის პერსპექტივა. ----	112
ნახაზი 57	სასურათე სიბრტყის მართობული წრფის პერსპექტივა. --	113
ნახაზი 58	სასურათე სიბრტყის პარალელური წრფის პერსპექტივა. 113	
ნახაზი 59	სურათის ფუძის პარალელური წრფის პერსპექტივა. ----	114
ნახაზი 60	სიბრტყის პერსპექტივა. -----	114
ნახაზი 61	სიბრტყის პერსპექტივა. -----	115
ნახაზი 62	სიბრტყის პერსპექტივა. -----	116
ნახაზი 63	კონუსური კვეთები. -----	117
ნახაზი 64	შემოხაზული კვადრატის მეთოდი. -----	118
ნახაზი 65	შემოხაზული კვადრატის მეთოდი. -----	119
ნახაზი 66	სამკუთხედის სიმაღლეების მეთოდი. -----	120
ნახაზი 67	სამკუთხედის სიმაღლეების მეთოდი. -----	120
ნახაზი 68	სამკუთხედის სიმაღლეების მეთოდი. -----	121
ნახაზი 69	რადიალური მეთოდი. -----	122
ნახაზი 70	არქიტექტორების მეთოდი. -----	123
ნახაზი 71	მეტრული ამოცანები. -----	125
ნახაზი 72	მეტრული ამოცანები. -----	125
ნახაზი 73	მეტრული ამოცანები. -----	126
ნახაზი 74	მეტრული ამოცანები. -----	126
ნახაზი 75	მეტრული ამოცანები. -----	127
ნახაზი 76	მეტრული ამოცანები. -----	127
ნახაზი 77	განათების მიმართულება. -----	129
ნახაზი 78	წერტილის ჩრდილი. -----	129
ნახაზი 79	წერტილის ჩრდილი ბრტყელ ფიგურაზე. -----	130
ნახაზი 80	წერტილის ჩრდილი მრავალწახნაგაზე. -----	131
ნახაზი 81	წერტილის ჩრდილი მრუდ ზედაპირზე. -----	132
ნახაზი 82	ღონის წრფის ჩრდილი. -----	133
ნახაზი 83	მაგეგმილებელი წრფის ჩრდილი. -----	134
ნახაზი 84	ზოგადი მდებარეობის წრფის ჩრდილი. -----	134
ნახაზი 85	ზოგადი მდებარეობის წრფის ჩრდილი. -----	135
ნახაზი 86	წრფის ჩრდილი ბრტყელ ფიგურაზე. -----	135
ნახაზი 87	წრფის ჩრდილი მრუდ ზედაპირზე. -----	136
ნახაზი 88	ბრტყელი ფიგურის ჩრდილი. -----	137
ნახაზი 89	ბრტყელი ფიგურის ჩრდილი. -----	138
ნახაზი 90	წრეწირის ჩრდილი. -----	138
ნახაზი 91	წრეწირის ჩრდილი. -----	139
ნახაზი 92	მრავალწახნაგას ჩრდილი. -----	140
ნახაზი 93	მრავალწახნაგას ჩრდილი. -----	140

ნახაზი 94	ცილინდრის ჩრდილი. -----	141
ნახაზი 95	კონუსის ჩრდილი. -----	142
ნახაზი 96	კონუსის ჩრდილი. -----	143
ნახაზი 97	ჩრდილების აგების ხერხები. -----	144
ნახაზი 98	ბრტყელ ნიშაში დაცემული ჩრდილი. -----	145
ნახაზი 99	ცილინდრულ ნიშაში დაცემული ჩრდილი. -----	146
ნახაზი 100	წრიულ ნიშაში დაცემული ჩრდილი. -----	147
ნახაზი 101	კიბეზე დაცემული ჩრდილი.. -----	147
ნახაზი 102	ზოგადაფინური შესაბამისობა. -----	150
ნახაზი 103	აფინურად შესაბამისი ველების მთავარი მიმართულებებ. -----	154
ნახაზი 104	აფინურად შესაბამისი ველების მთავარი მიმართულებებ. -----	156
ნახაზი 105	მრავალწახნაგას ჩრდილი. -----	160
ნახაზი 106	წრიულ ნიშაში დაცემული ჩრდილი. -----	162

შესავალი

დასაბამიდან, არქიტექტურის დარგში სპეციალისტების მომზადებაში, განსაკუთრებული როლი აკისრია გრაფიკული მეთოდების, სახელდობრ – მხაზველობითი გეომეტრიისა და გამოყენებითი პერსპექტივის სწავლების საქმეს. პრაქტიკამ გვიჩვენა, რომ მიუხედავად იმისა, რომ გეომეტრიისა და ხაზვის სასკოლო კურსები იძლევიან როგორც მხაზველობითი გეომეტრიის, ისე მისი განშტოების – გამოყენებითი პერსპექტივის შესწავლის გარკვეულ საფუძველს, ეს საკმარისი არ არის და სკოლაში შეძენილი ცოდნა ყოველთვის ითხოვს გარკვეულ შევსებას.

მრავალწლიანმა გამოცდილებამ მიგვიყვანა ე.წ. პროპედევტიკული კურსების შემოღების საჭიროებამდე. ერთ-ერთი ასეთი კურსია ჩვენს მიერ დამუშავებული და პრაქტიკაში აპრობირებული “საინჟინრო გრაფიკის სპეცკურსი”. ჩვენ შევეცადეთ შეგვექმნა აღნიშნული კურსის პროგრამა და შეგვესწავლა ამ პროგრამით გათვალისწინებული თემების სწავლების მეთოდოლოგია.

წინამდებარე ნაშრომი მიზნად ისახავს მკითხველს გავაცნოთ “საინჟინრო გეომეტრიის საფუძვლების”, როგორც სასწავლო დისციპლინის შემოღების საჭიროება არქიტექტურის სპეციალობის სტუდენტებისათვის და ის პროგრამა, რომლის მიხედვითაც უნდა ისწავლებოდეს აღნიშნული კურსი.

ქვემოთ მოყვანილია “საინჟინრო გეომეტრიის საფუძვლების”, როგორც სასწავლო დისციპლინის შინაარსი ანუ იმ თემების ჩამონათვალი, რომელთა სწავლებაც არის ნავარაუდები ჩვენს მიერ შედგენილი პროგრამით.

საინჟინრო გრაფიკის საწყისები

(თეორია)

1. კონსტრუქციული გეომეტრიის ძირითადი ცნებები;
2. აგების ელემენტარული ამოცანები და მათი გადაწყვეტის მეთოდოლოგია;

3. წერტილთა გეომეტრიული ადგილი და მისი, როგორც მეთოდის გამოყენება აგების ამოცანებში;
4. გეომეტრიული გარდაქმნები (ძირითადი ცნებები და განსაზღვრებები);
5. გეომეტრიული ასახვები;
6. ევკლიდეს სივრცე და მისი შევსება არასაკუთრივი ელემენტებით;
7. დეზარგის თეორემა და მისი შედეგები;
8. ბრტყელი ველების პერსპექტიულ-აფინური შესაბამისობა და მისი შედეგები;
9. ზოგადი აფინური შესაბამისობა;
10. ელიფსი როგორც წრეწირის აფინურად შესაბამისი მრუდი;
11. აფინურად შესაბამისი ველების მთავარი მიმართულებანი;
12. აფინურად შესაბამისი ორი ველის ორთოგონალურ-პერსპექტიული განლაგება;
13. პოლკე – შვარცის თეორემა;
14. სივრცის აფინური გარდაქმნა;
15. ძირითადი დასკვნები.

პროგრამა განკუთვნილია 15 კვირიანი ერთი სემესტრისათვის, კვირაში 2 საათიანი მეცადინეობით.

ცოდნის შემოწმება-შეფასება ხორციელდება ორი შუალედური და ერთი დასკვნითი გასაუბრების მოწვობით. შუალედური შემოწმების დროს სტუდენტს შეუძლია მოაგროვოს 50 ქულა (თითოეულ შემოწმებაზე 25 ქულა), ხოლო დასკვნითზე 50 ქულა. ცოდნის უმაღლესი შეფასებისთვის საჭიროა 100 ქულა, ხოლო მინიმალური შეფასებისთვის – 60 ისე, რომ პირველ და მეორე შეფასებისას თითოეულში მოიპოვოს 15-15 ქულა, ხოლო დანარჩენი 30 – დასკვნითი შეფასების დროს. შევნიშნოთ, რომ შუალედურ შეფასებაში 15 ქულა მინიმალურია და მისი შევსება პირველი ან მეორე შეფასებიდან ნასესხები ქულებით დაუშვებელია.

1. ლიტერატურის მიმოხილვა

წინამდებარე საკვალიფიკაციო ნაშრომის – “საინჟინრო გეომეტრიის საფუძვლების მეთოდოლოგია და მისი კომპიუტერული მხარდაჭერა” – შექმნის აუცილებლობამდე ჩვენ მიგვიყვანა გრაფიკული მეთოდების უდიდესმა როლმა უმაღლესი განათლების არქიტექტორების მომზადების საქმეში და ზოგიერთმა ხარვეზმა გრაფიკული მეთოდების სწავლების მეთოდიკაში, რომლებიც ჩვენ დავინახეთ არსებულ ლიტერატურაში და საკუთარ მრავალწლიან პედაგოგიურ პრაქტიკაში.

უმაღლეს სკოლაში მუშაობის ხანგრძლივმა გამოცდილებამ თვალნათლივ გვიჩვენა, რომ ის საფუძველი, რასაც საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში გრაფიკული მეთოდების (მონჟის სისტემა და ეპიური, პარალელური აქსონომეტრია და გამოყენებითი პერსპექტივა) სწავლება ეყრდნობოდა და რაც მხოლოდ სასკოლო ხაზისა და გეომეტრიის კურსებით იყო შემოფარგლული, აშკარად ვერ პასუხობდა მოთხოვნებს და რაიმე პროპედევტიკული კურსით შევსებას მოითხოვდა. ეს კურსი, წინასწარი მონახაზით უნდა ყოფილიყო წინმსწრები პროგრამა, რომელიც სასკოლო ხაზვასა და გეომეტრიას შეავსებდა იმ თვალსაზრისით, რომ მისი შესწავლა დაეფუძნებოდა რა სკოლაში მიღებულ ცოდნას, რადიკალურად შეცვლიდა სტუდენტის სამუშაო მდგომარეობას და შემდგომში უზრუნველყოფდა გრაფიკული წიგნიერების რეალურ გაუმჯობესებას.

ვიდრე ასეთი კურსის პროგრამისა და სახელმძღვანელოს შედგენას შევუდგებოდით ჩვენ შევეცადეთ ისტორიულ ასპექტში გადაგვეწყვიტა ჩვენი კურსის ზოგადმეთოდოლოგიური და ზოგადპედაგოგიური მიმართულება და მისი შინაარსისათვის განგვესაზღვრა შესაბამისი ხასიათი და მიმართულება. ყოველივე ამას კი, პედაგოგიურ ენაზე სწავლების პრინციპები ანუ დიდაქტიკური პრინციპები ეწოდება. აქვე ჩვენ არსებულ წყაროებზე დაყრდნობით უნდა ვთქვათ ზოგიერთ ტერმინოლოგიურ უზუსტობაზე, რაც პრაქტიკაში ფართოდაა გავრცელებული. სახელდობრ, ერთმანეთისაგან გავიმჯნეთ დიდაქტიკისა და დიდაქტიკური პრინციპები. დიდაქტიკის პრინციპად ჩვენ ვაღიარეთ მისი მეთოდოლოგიური ანუ გნოსეოლოგიური საფუძველი, ხოლო დიდაქტიკურ პრინციპებად კი

მივიჩნიეთ გნოსეოლოგიაზე დამყარებული ზოგადმეთოდოლოგიური გზების, საშუალებების, ხერხების და წესების ერთობლიობა.

სპეციალურად პედაგოგიური ხასიათის ნაშრომის დიდაქტიკურ პრინციპებზე ჯერჯერობით ძალიან ცოტა რამაა დაწერილი, მიუხედავად იმისა, რომ საკითხს ჯერ კიდევ ძველ საბერძნეთში (სოკრატე, პლატონი, არისტოტელე) და რომში (მარკ ფაბიუს კვინტილიანე) აქცევდნენ ყურადღებას, მრავალი სადი აზრი აქვთ გამოთქმული სწავლების საკითხებში ძელ ჰუმანისტებს – თომას მანს, ფრანსუა რაბლეს, მიშელ მონტერს, ერაზიმ როტერდამელს, ქართველთაგან იოანე პეტრიწს და სხვებს.

სწავლების დიდაქტიკური პრინციპების სისტემის სახით ჩამოყალიბების ავტორად აღიარებულია დიდი ჩეხი პედაგოგი და დიდაქტიკოსი იან ამოს კომენსკი, რომელმაც თავისი “დიდი დიდაქტიკა” უპირველეს ყოვლისა სწავლების პრინციპების, მისი ფორმებისა და გზების საკითხებს მიუძღვნა. გამოჩენილ დიდაქტიკოსთა რიცხვს მიეკუთვნებიან: პესტალოცი, ლისტენვერგი, უშინსკი, ი. გოგებაშვილი, რომლებმაც შემდგომში განავითარეს და სრულყვეს მოძღვრება სწავლების პრინციპების შესახებ.

ზოგიერთი მიდგომის დაზუსტების მიზნით დავუბრუნდეთ ზემოთნახსენებ გნოსეოლოგიას. საქმე ისაა, რომ გნოსეოლოგია ბერძნულია და ქართულად ცოდნასა და მოძღვრებას ნიშნავს. ფილოსოფიის ისტორიაში იგი განიხილება, როგორც ცალკეული დარგი – შემეცნების თეორია ანუ მეცნიერება ადამიანის ცოდნის შესახებ, მის მიერ სამყაროს შემეცნების წყაროების შესაძლებლობების საზღვრების შესახებ. შევნიშნოთ, რომ მარქსისტულ ფილოსოფიაში და შესაბამისად საბჭოთა პერიოდში დაწერილ ყველა შრომაში არ არსებობს გნოსეოლოგია როგორც მეცნიერების ცალკე დარგი და მიჩნეულია, რომ მატერიალისტური დიალექტიკა ერთადერთი სწორი თეორიაა შემეცნებისა, რომელიც იკვლევს ბუნების, საზოგადოებისა და აზროვნების საერთო კანონებს. ჩვენს ნაშრომში ეს მოსაზრება ბუნებრივია გაზიარებული არ არის და გნოსეოლოგია განიხილება, როგორც ფილოსოფიის ცალკე დარგი, ანუ მეცნიერება ადამიანის ცოდნის შესახებ.

ზემოთ ჩვენ ჩამოვყალიბეთ წინამდებარე ნაშრომის ზოგადმეთოდოლოგიური და ზოგადპედაგოგიური საფუძვლები და შევეხეთ ნაშრომში დასმული პრობლემების ისტორიულ ფესვებს. ახლა კი შევეცადოთ პრობლემის უფრო კონკრეტულ ჩარჩოებში მოქცევას და განვიხილოთ მხაზველობითი გეომეტრიისა და საინჟინრო გრაფიკის ქართულ სკოლაში ამ პრობლემის კვლევის მოკლე ისტორიული ასპექტი და ამის შემდეგ გადავიდეთ კვლევის მოცემული ობიექტის კონკრეტულ შინაარსზე.

მხაზველობითი გეომეტრიისა და საინჟინრო გრაფიკის ქართულ სკოლაში სამეცნიერო კვლევების ისეთი ცნობილი მიმართულებების პარალელურად, როგორიცაა მაგალითად სივრცის გეომეტრიული მოდელირება (პროფ. ი. ჯაფარიძე), მრავალგანზომილებიანი გეომეტრია (პროფ. გ. ვაჩნაძე), გეომეტრიული გარდაქმნები (პროფ. ი. ხატისკაცი), პროფ. ა. შავგულიძის ხელმძღვანელობით, როგორც აღნიშნული სკოლის ერთ-ერთი პრიორიტეტული მიმართულება, მუშავდება გრაფიკული მეთოდების დარგობრივი გამოყენების პრობლემა და მისი გადაწყვეტის გზები.

თავდაპირველად ამ პრობლემის კვლევის შინაარსი, როგორც მეცნიერული სიახლე, დასრულებული სახით 1969 წელს გამოქვეყნდა (იხ. ა. შავგულიძე, ტექნიკური ხაზვის სპეციალური კურსი. გამომცემლობა “განათლება” 1969).

პრობლემის კვლევის ისტორია 1964 წლიდან იწყება და ამ მიმართულებით წარმოებული კვლევები დღემდე აქტუალურია და განვითარების პროცესში იმყოფება (აღსანიშნავია პროფ. ნ. ნოზაძის, ნ. პროფ. მუმლაძის, დოქტორანტ გ. ჩიტაიშვილის და სხვათა ნაშრომები).

თავდაპირველად ამ პრობლემის კვლევის შინაარსი, როგორც მეცნიერული სიახლე, დასრულებული სახით 1969 წელს გამოქვეყნდა (იხ. ა. შავგულიძე, ტექნიკური ხაზვის სპეციალური კურსი. გამომცემლობა “განათლება”. თბილისი, 1969). მაშინ ნაშრომი შეეხო გრაფიკული მეთოდების სამთო საქმეში გამოყენების საკითხს და მისი აქტუალობა დაასაბუთა ასე:

უმაღლესი სკოლებისათვის დამტკიცებული მხაზველობითი გეომეტრიისა და საინჟინრო გრაფიკის მოქმედი პროგრამა და ამ პროგრამით შედგენილი სახელმძღვანელოები შეიცავენ სივრცითი საგნების ბრტყელ გამოსახულებათა მიღების მხოლოდ აუცილებელ და ზოგად საფუძვლებს. ტექნიკურ სპეციალობათა სიმრავლის გამო ამ პროგრამაში არ არის და არც შეიძლება იყოს გათვალისწინებული ცალკეული დარგების სპეციფიკა. ეს გარემოება თავის მხრივ, საინჟინრო გრაფიკის დარგობრივი გამოყენების პრობლემას აყენებს. თუ გადავხედავთ ამ პრობლემის გადაწყვეტის ცდებს საინჟინრო გრაფიკის ლიტერატურაში, იოლად შევამჩნევთ, რომ ტექნიკური ხაზვის მოქმედი პროგრამის პარალელურად წარმოქმნილია ორი დამატებითი მიმართულება. ერთის მხრივ შექმნილია ტექნიკური ხაზვის სპეციალიზირებული წიგნები, ხოლო მეორეს მხრივ, სპეციალური დისციპლინების ისეთი სახელმძღვანელოები, რომელთა შესავალი ნაწილი გრაფიკული გამოსახულებების აგების მეთოდების აღწერას აქვს დათმობილი.

პირველ შემთხვევაში ხაზვის მოსამზადებელი ნაწილია უგულებელყოფილი. ამის გამო ლოგიკურად ისმება კითხვა: ამ სპეციალობის პირმა სწავლის რომელ ეტაპზე უნდა შეისწავლოს ნახაზების შედგენის ესოდენ საჭირო ელემენტარული წესები? რასაკვირველია სკოლის პროგრამა ამას ვერ უზრუნველყოფს. ჩვენი შეხედულებით ხაზვის ასეთი კურსი, როგორ მაღალ დონეზეც არ უნდა იყოს იგი დაწერილი, მაინც ვერ განაპირობებს საგნის ღრმად და შემოქმედებითად შესწავლას.

მეორე შემთხვევა ახალია და რამდენადმე იძულებით ფორმას წარმოადგენს. იგი არ შეიმჩნევა ადრე გამოცემულ ამავე დარგის ლიტერატურაში. შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ მაშინ იგულისხმებოდა საინჟინრო გრაფიკის ზოგადი კურსით უზრუნველყოფა, მაგრამ როდესაც პრაქტიკამ უარყოფითი შედეგი აჩვენა, სახელმძღვანელოების ავტორებმა გამოსავალი ამ გზით იპოვეს. უნდა ვაღიაროთ, რომ ეს გზაც პრინციპული ნაკლოვანებებით ხასიათდება. სახელდობრ ამ შემთხვევაში გრაფიკულ გამოსახულებათა აგების სპეციალური მეთოდების აღწერა შემოკლებული ფორმის დანამატს წარმოადგენს და

ნაწილობრივ თუ უზრუნველყოფს თავის მიზანს. გარდა ამისა, იგი გარკვეულად ზღუდავს აღებული დისციპლინის საკუთარი საკითხების ფართო მასშტაბით გადმოცემას (სხვანაირად წიგნის მასშტაბი ყოველგვარ ნორმებს გადააჭარბებს).

შევეხოთ ერთ კონკრეტულ შემთხვევას, კერძოდ, სამთო საქმეში ტექნიკური ხაზის გამოყენების საკითხს. სამთო სამარკშიდერო პრაქტიკა მოითხოვს გრაფიკული გამოსახულებების აგების ისეთი საკითხების ცოდნას, რომლებსაც არ შეიცავს ტექნიკური ხაზის ზოგადი კურსი. ასეთებია მაგალითად, ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდი, თვალსაჩინო გამოსახულების აგების სპეციალური ხერხები, ფეოდოროვის გეგმილები, აფინური გარდაქმნები, გრაფიკული სამუშაოების მექანიზაციისა და ავტომატიზაციის საკითხები და სხვა. მთელი ეს მასალა სხვადასხვა ფორმითა და მოცულობით გაბნეულია მხაზველობითი გეომეტრიისა და საინჟინრო გრაფიკის მრავალრიცხოვან სახელმძღვანელოებსა და სამეცნიერო შრომებში. მათი მოძებნა და პრაქტიკული გამოყენება მთელ რიგ სიძნელეებთანაა დაკავშირებული როგორც სტუდენტების, ასევე ინჟინერ-ტექნიკური პერსონალისათვის.

სამთო გეომეტრიის ადრე გამოცემულ სახელმძღვანელოებში (მაგ. Рыжов П. А. – Геометрия недр, 1952; Гутт А. Е. – Курс горной геометрии, 1933) შეტანილი იყო ამ საგნის მხოლოდ სპეციალური საკითხები. რაც შეეხება გრაფიკული გამოსახულებების აგების მეთოდებს, იგულისხმებოდა, რომ მათი შესწავლა უნდა მომხდარიყო მხაზველობითი გეომეტრიისა და ხაზის კურსების საშუალებით. როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, ამ კურსების პროგრამა არ შეიცავს სამთო გეომეტრიისათვის საჭირო სპეციფიკურ საკითხებს. ამ გარემოებამ განაპირობა სამთო გეომეტრიის თანამედროვე ლიტერატურაში (მაგ. Рыжов П. А. – Геометрия недр, 1964; Ушаков И.Н. - Горная геометрия, 1962) გრაფიკული გამოსახულებათა აგების მეთოდების შეტანა.

სამთო საქმეში არსებული შესაბამისი ლიტერატურის შესწავლამ და ანალიზმა გვიჩვენა გრაფიკული ამოცანების გადაწყვეტის ზოგიერთი ხარვეზიც. ამის მიზეზი ჩვენი აზრით, სამთო საქმეში

მხაზველობი გეომეტრიისა და ტექნიკური ხაზვის არასრული გამოყენების შედეგი უნდა იყოს.

ვფიქრობთ, რომ გამოსახულებების აგების იმ სპეციალურ თემებს, რომელთა ცოდნაც ერთი რაიმე დარგისთვისაა საჭირო, მიზანშეწონილია თავი მოუყარონ ერთ შრომაში, რომელსაც, მისი მოცულობის შესაბამისად შესაძლოა ეწოდოს ”ტექნიკური ხაზვის სახელმძღვანელოს დარგობრივი დანართი” ან “ტექნიკური ხაზვის სპეციალური კურსი”. ასეთი კურსების გამოყენება ნავარაუდები უნდა იყოს მხაზველობითი გეომეტრიისა და ხაზვის ზოგადი კურსების შესწავლის შემდეგ.

ჩვენ მივედით იმ დასკვნამდე, რომ საჭიროა დეტალურად იქნეს შესწავლილი ის მოთხოვნები, რომლებსაც სამთო საქმე და სახელდობრ, სამთო გეომეტრია აყენებს გრაფიკულ გამოსახულებათა აგების მეთოდების წინაშე. ამის მიხედვით უნდა დამუშავდეს ტექნიკური ხაზვის ისეთი სპეციალური კურსი, რომელშიც ყველა ეს მოთხოვნები იქნება გათვალისწინებული. ასეთი კურსის შექმნის შესახებ პირველად აზრი სამთო საქმის ერთ-ერთმა გამოჩენილმა მეცნიერმა პროფ. პ. რიჟოვმა გამოთქვა და დაასაბუთა მისი მნიშვნელობა (იხ. Рыжов П. А. – Проекции применяемые в геолого-маркшейдерском деле, 1951). ჩვენი მიზანია უფრო ფართოდ და დეტალურად გავაშუქოთ ამ საქმესთან დაკავშირებული თემები, გამოვიყენოთ მხაზველობითი გეომეტრიისა და საინჟინრო გრაფიკის თანამედროვე მიღწევები და ზოგი რამ შევაკლოთ საკუთარი გამოკვლევებით. (იხ. ა. შავგულიძე – ტექნიკური ხაზვის სპეც. კურსი)

ა. შავგულიძის ნაშრომმა სასურველი შედეგი გამოიღო, მაგრამ არა ყოველთვის და ყველგან. საქმე ისაა, რომ სამთო-სამარკშიდერო პრაქტიკა სწორედ წემოაღნიშნულ მიზნის რეალიზაციას მოერგო, მაგრამ სხვა შემთხვევებში, სხვა პრობლემებმა იჩინა თავი და საჭირო გახდა სხვა გზების ძიება. სახელდობრ, არქიტექტორებთან. საქმე ისაა, რომ თუ წინა შემთხვევაში საინჟინრო გრაფიკის საუნივერსიტეტო კურსის შევსებამ სამთო-სამარკშიდერო ამოცანების შევსებით წარმატებული შედეგი გამოიღო, არქიტექტურის სპეციალობებზე გრაფიკული მეთოდების სხვა გზით მიწოდება გახდა რენტაბელური.

სახელდობრ, ისევ პროფ. ა. შავგულიძის წინადადებით, საინჟინრო გრაფიკის ნაყოფიერი სწავლებისათვის, საინჟინრო გრაფიკის სწავლების გაგრძელება და მისი სპეციალური კურსით შევსება კი არა, არამედ, უფრო მიზანშეწონილი პროპედევტიკული ანუ წინმსწრები კურსის შემოტანა ჩაითვადა. საქმე ისაა, რომ საუნივერსიტეტო პროგრამა არქიტექტორებისათვის, მონჟისა და აქსონომეტრიის სწავლების შემდეგ თვითონ ითვალისწინებს დარგის სპეცნაწილის ანუ გამოყენებითი პერსპექტივის საფუძვლების სწავლებას და ამას გარდა, მთლიანად გრაფიკული მეთოდების ნაყოფიერი სწავლებისათვის სწორედ იმ თემების ცოდნაა საჭირო, რომელსაც არ შეიცავენ წინმსწრები სასწავლო დისციპლინები. (მაგ. სასკოლო ხაზვა და სასკოლო გეომეტრია) და რომელთა წინასწარი მიწოდებაც აუცილებელია სტუდენტისათვის. ასეთი თემების რიცხვს განეკუთვნება მაგალითად, დეზარგის თეორემა, პოლკე-შვარცის თეორემა, კონსტრუქციული გეომეტრიის საწყისი ცნებები, გეომეტრიული ასახვები, გეომეტრიული გარდაქმნები და სხვა (იხ. ა. შავგულიძე და სხვ. საინჟინრო გრაფიკის საწყისები. გამომცემლობა “ტექნიკური უნივერსიტეტი”, თბილისი 2004).

აღნიშნული იდეა და გამოქვეყნებული შრომების პრაქტიკაში დანერგვის დროს წარმოშობილი პრობლემების შესწავლა, ამ პრობლემების ძირითად მოთხოვნებთან მისადაგება (გვულისხმობთ ასეთი კურსის შექმნის ზოგადმეთოდოლოგიური და ზოგადპედაგოგიური მიმართულების გათვალისწინებას), საჭირო პროპედევტიკული თემების შესწავლა და ყოველივე ამის გათვალისწინებით ამ თემების სწავლების მეთოდის დამუშავება.

საკვალიფიკაციო ნაშრომის ძირითად ნაწილში მიზანშეწონილად არ მივიჩნიეთ უმაღლესი სკოლის ცნობილი დიდაქტიკური პრინციპების განხილვა და საკმარისად ჩავთვალეთ ის ფაქტი, რომ სწავლების ყოველი ამგვარი პრინციპი სრულადაა გათვალისწინებული ნაშრომის ცალკეული თემების გადმოცემაში და ამ თემების შინაარსისა და მოცულობის განსაზღვრაში.

2. შედეგები და მათი განსჯა

2.1. კონსტრუქციული გეომეტრიის ძირითადი ცნებები

გეომეტრიის ის განშტოება, რომლითაც შეისწავლება გეომეტრიული აგებანი, *კონსტრუქციული გეომეტრიის* სახელით არის ცნობილი [81]. კონსტრუქციული გეომეტრიის ძირითადი ცნებაა ავაგოთ გეომეტრიული ფიგურა. ეს ცნება მიღებულია განსაზღვრის გარეშე და მისი კონკრეტული აზრი პრაქტიკიდან არის ცნობილი, მაგალითად: “დავხაზოთ” (წირი), “გავავლოთ” (წრფე), “აღვნიშნოთ” (წერტილი) და ა.შ.

ლოგიკის ინტერესებიდან გამომდინარე, ჩვეულებრივ, წინასწარ ახდენენ კონსტრუქციული გეომეტრიის ძირითადი მოთხოვნების ანუ პოსტულატების ფორმულირებას და შემდეგ განიხილავენ მისი პრაქტიკული გამოყენების ნაწილს.

ვიდრე ყოველივე ამის თანამიმდევრულად განხილვას შევუდგებოდეთ, გავიხსენოთ სასკოლო გეომეტრიიდან ზოგიერთი ცნება, რომელთა გამოყენებაც დაგვჭირდება ქვემოთ მოყვანილ მსჯელობებში.

გეომეტრიაში წერტილთა ნებისმიერ სიმრავლეს, *გეომეტრიული ფიგურა* ეწოდება, რასაც შემდგომში მოკლედ “*ფიგურად*” მოვიხსენიებთ და მუდამ მხედველობაში გვაქნება მისი გეომეტრიული ხასიათი. (ტერმინოლოგიის დასაზუსტებლად, მოგვიანებით ისევ დავუბრუნდებით ამ საკითხს და ვუპასუხებთ კითხვაზე, რა არის გეომეტრია?).

წერტილი, *წერტილთა წყვილი*, *წრფე* (განიხილება როგორც მისი კუთვნილი წერტილების ერთობლიობა), *პარალელურ წრფეთა წყვილი*, *მონაკვეთი* (ფიგურა რომელიც შედგება ორი ერთმანეთისგან განსხვავებული წერტილისაგან და ასევე მათ შორის მოთავსებული წერტილებისაგან), *ინტერვალი* ანუ *ლია მონაკვეთი* (სიბრტყის მოცემულ ორ წერტილს შორის მდებარე წერტილთა ერთობლიობა), *სხივი* (ფიგურა, რომელიც შედგება წრფის რაიმე წერტილისა და ამ წრფის კუთვნილი იმ წერტილებისაგან, რომლებიც განლაგებულნი არიან ამ წერტილის ცალ მხარეს), *წრე* (სიბრტყის ყველა იმ წერტილის ერთობლიობა, რომელთა დაშორება ამავე სიბრტყის მოცემული

წერტილიდან არ აღემატება მოცემული მონაკვეთის სიგრძეს) და სხვ., ფიგურის მაგალითებია.

ერთი ფიგურა იმ შემთხვევაში შეიძლება განვიხილოთ როგორც მეორე ფიგურის ნაწილი, თუ პირველის ყველა წერტილი მეორე ფიგურის კუთვნილიცაა. მაგალითად, წრფის კუთვნილი ნებისმიერი მონაკვეთი შესაძლოა განხილულ იქნას, როგორც ამ წრფის ნაწილი; წრფის კუთვნილი ნებისმიერი წერტილი განიხილება, როგორც ამ წრფის ნაწილი და ა.შ.

ორი ან რამდენიმე ფიგურის *შეერთება* (აღინიშნება მაგ., $\Phi_1 + \Phi_2$ ან $\Phi_1 \cup \Phi_2$) ეს არის ყველა იმ წერტილთა ერთობლიობა, რომლებიც ეკუთვნიან ერთ ფიგურას მაინც. მაგალითად, ავიღოთ არაკოლინეარულ წერტილთა სიმრავლე $A_2, A_1, A_3, \dots, A_n$ და განვახორციელოთ მათი მიმდევრობით შეერთება წრფის მონაკვეთებით. მიღებულ $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ მონაკვეთების შეერთებას ეწოდება n კუთხედი.

თანაკვეთას (აღინიშნება მაგ. Φ_1, Φ_2 ან $\Phi_1 \Phi_2$) ანუ ორი ან მეტი ფიგურის საერთო ნაწილს ეწოდებენ ყველა იმ წერტილთა ერთობლიობას, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნიან თანაკვეთაში მონაწილე ფიგურებს. მაგალითისათვის განვიხილოთ წრეწირისა და წრფის ურთიერთდამოკიდებულება; თუ წრფის დაშორება წრეწირის ცენტრიდან ნაკლებია ამ წრეწირის რადიუსზე, მაშინ წრფის და წრეწირის თანაკვეთა წარმოადგენს ორ წერტილს, მაგრამ თუ ეს მანძილი რადიუსის ტოლია – თანაკვეთა იქნება ერთი წერტილი, რომელსაც შეხების წერტილი ჰქვია.

ორი ფიგურის (მაგ., Φ_1 და Φ_2) *სხვაობა* (აღინიშნება მაგ., $\Phi_1 \setminus \Phi_2$) ეწოდება Φ_1 ფიგურის ყველა იმ წერტილის ერთობლიობას, რომლებიც არ ეკუთვნიან Φ_2 -ს. მაგალითად, წრფის და მასზე მდებარე ინტერვალის სხვაობა არის ამ წრფის ორი სხივი.

შესაძლოა მოხდეს ისეც, რომ ორი ფიგურის თანაკვეთა ან სხვაობა არ შეიცავდეს არცერთ წერტილს ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ორი ფიგურის თანაკვეთა (ან სხვაობა) არის წერტილთა *ცარიელი სიმრავლე*. მაგალითად, წრფის და წრეწირის თანაკვეთაში ცარიელ

სიმრავლესთან მაშინ გვაქვს საქმე, როცა წრეწირის ცენტრიდან წრფემდე მანძილი წრეწირის რადიუსზე მეტია.

ახლა დავუბრუნდეთ კონსტრუქციული გეომეტრიის ძირითად პოსტულატებს და მიმდევრობით განვიხილოთ ისინი. შევნიშნავთ, რომ ქვემოთ მოყვანილი პოსტულატები სასკოლო გეომეტრიის კურსში ცალკე არ განიხილება, მაგრამ იგულისხმება ყოველი აგების ამოცანის შესრულების პროცესში.

პირველი პოსტულატი. [37] ყოველთვის, როცა ამბობენ, რომ რაიმე ფიგურა “მოცემულია”, ითვლება რომ ეს ფიგურა არის აგებული.

აღსანიშნავია, რომ ცნებები, “მოცემული ფიგურა” და “რაიმე ელემენტებით განსაზღვრული ფიგურა”, იგივეობრივი არ არის. საქმე ისაა, რომ პირველისაგან განსხვავებით, მეორე შემთხვევაში მოცემულია არა თვით ფიგურა, არამედ ის ელემენტები, რომლებიც განსაზღვრავენ ამ ფიგურის მდებარეობას. მაგალითად, თუ მოცემულია ერთმანეთისაგან განსხვავებული ორი წერტილი, არსებობს ამ ორი წერტილის შემაერთებელი ანუ მათზე გამავალი ერთადერთი წრფე, რომელიც განსაზღვრულია ამ ორი წერტილით; თუ მოცემულია არაკოლინეარული სამი წერტილი, არსებობს ერთადერთი სიბრტყე, რომელიც ამ წერტილებზე გადის, ანუ ამ სამი წერტილით განსაზღვრულია ერთადერთი სიბრტყე და ა.შ.

მოყვანილ მსჯელობაში ბოლომდე გარკვევისათვის მოვიყვანოთ კიდევ ერთი მაგალითი: როცა მოცემულია წრეწირის ცენტრი (O) და ამ წრეწირის ერთი წერტილი (A), განსაზღვრულია ერთადერთი წრეწირი როგორც სიდიდით, ასევე მდებარეობით, მაგრამ თუ ვიტყვით, რომ მოცემულია O და A წერტილები, კონსტრუქციული გეომეტრიის თვალსაზრისით, არ ითვლება, რომ მოცემულია (დახაზულია) თვითონ წრეწირი.



ნახ. 1 ორი ფიგურის შეერთება.

მეორე პოსტულატი. თუ აგებულია ორი ან მეტი ფიგურა, მაშინ აგებულია მათი შეერთებაც.

ვთქვათ, აგებულია რაიმე წრფის AM სხივი (ნახ. 1) და ამავე წრფის BN სხივი, მაშინ, რასაკვირველია, აგებულია MN წრფე, რომელიც განიხილება, როგორც ამ სხივების შეერთება.

ვთქვათ, აგებულია სამი მონაკვეთი – AB , BC და CA , მაშინ არანაირ საჭიროებას არ წარმოადგენს კიდევ რაიმეს აგება იმისთვის, რომ ავაგოთ ABC სამკუთხედი ანუ მოცემული ფიგურების შეერთება.

მესამე პოსტულატი. თუ აგებულია ორი ფიგურა, ითვლება, რომ ცნობილია მათი სხვაობა ანუ არის თუ არა ეს სხვაობა ცარიელი სიმრავლე.

წარმოვიდგინოთ, რომ აგებულია ერთი წრფის ორი მონაკვეთი – AB და CD . სურათების მიხედვით სავსებით შესაძლებელია იმის თქმა, რომ CD მონაკვეთი მთლიანად არის AB -ს კუთვნილი (ნახ. 2) ან CD მონაკვეთი მხოლოდ ნაწილობრივ ეკუთვნის AB -ს (ნახ. 3)



ნახ. 2 და ნახ. 3 ორი ფიგურის სხვაობა.

მოვიყვანოთ მეორე მაგალითი: წარმოვიდგინოთ, რომ აგებულია წრეწირი და წერტილი. ასეთ სურათზე ნათლად გამოჩნდება მათი კუთვნილება ანუ ძევს თუ არა აგებული წერტილი აგებულ წრეწირზე. საქმე ისაა, რომ მაგალითად, ერთი ფიგურა (Φ_1) მხოლოდ მაშინ არის მეორე ფიგურის (Φ_2) ნაწილი, როცა ამ ფიგურების სხვაობა წარმოადგენს ცარიელ სიმრავლეს, რაზეც ნათლად მიუთითებს მეორე პოსტულატი.

მეოთხე პოსტულატი. თუ ორი ფიგურის სხვაობა არ არის ცარიელი სიმრავლე, მაშინ ეს სხვაობაც აგრეთვე ითვლება აგებულ ფიგურად.



ნახ. 4 ორი ფიგურის სხვაობა

ვთქვათ, მოცემულია ერთი წრფის ოთხი წერტილი – A, B, C, D (ნახ. 4) დავუშვათ, რომ AC და BD მონაკვეთები აგებულია. მაშინ უნდა ჩავთვალოთ, რომ აგებულია AB მონაკვეთი (უფრო ზუსტად ნახევარინტერვალი AB), რომელიც განიხილება როგორც AC და

მონაკვეთების სხვაობა. ასევე შეიძლება ითქვას CD-ზე, რომელიც აგრეთვე შესაძლოა განხილულ იქნას, როგორც BD და AC მონაკვეთების სხვაობა.

მოვიყვანოთ მეორე მაგალითი: თუ აგებულია წრეწირი და მისი კუთვნილი წერტილი, შესაძლოა აგებულად ჩავთვალოთ ის ფიგურაც, რომელიც დარჩება სურათიდან წერტილის მოშორების შემდეგ ანუ აგებულად ჩავთვალოთ ფიგურაც, რომელიც შესაძლოა განხილულ იქნას როგორც წერტილისა და წრეწირის სხვაობა.

მეხუთე პოსტულატი. თუ აგებულია ორი ფიგურა, მაშინ შესაძლებელია იმის დადგენა, არის თუ არა ამ ფიგურების თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლე.

ორი აგებული წრფის შემთხვევაში ყოველთვის შეიძლება გაირკვეს ამ წრფეთა ურთიერთგანლაგება. სახელდობრ, არიან თუ არა ეს წრფეები გადაკვეთილი წრფეები ანუ გააჩნიათ თუ არა საერთო წერტილი. ასევე, თუ აგებულია ორი წრეწირი, ყოველთვის შეგვიძლია დავაფიქსიროთ მათი ურთიერთგანლაგება ანუ გააჩნიათ თუ არა მათ საერთო წერტილები. ეს მტკიცებულება ეხება ორ ნებისმიერ აგებულ ფიგურას.

მეექვსე პოსტულატი. თუ ორი აგებული ფიგურის თანაკვეთა არ წარმოადგენს ცარიელ სიმრავლეს, მაშინ ეს თანაკვეთაც ითვლება აგებულად.

დავუბრუნდეთ მე-4 სურათს. ვთქვათ ცნობილია, რომ AC და BD მონაკვეთები აგებულია. ასეთ შემთხვევაში უნდა ჩავთვალოთ, რომ აგებულია BC მონაკვეთიც, რომელიც შესაძლოა განხილულ იქნას, როგორც AC და BD მონაკვეთების თანაკვეთა.

მოვიყვანოთ მეორე მაგალითი: თუ დახაზულია ორი ურთიერთგადაკვეთილი წრეწირი, მაშინ აგებულად ითვლება ის ორი წერტილიც, რომლებიც მიღებულია აგებული წრეწირების თანაკვეთის შედეგად.

მეშვიდე პოსტულატი. შესაძლოა ავაგოთ ორი აგებული ფიგურის საერთო წერტილების ნებისმიერი სასრული სიმრავლე, თუ ასეთი წერტილები არსებობს.

მერვე პოსტულატი. შესაძლოა აგებულ იქნას წერტილი, რომელიც აგებული ფიგურისათვის უეჭველად იქნება კუთვნილი.

მეცხრე პოსტულატი. შესაძლოა აგებულ იქნას წერტილი, რომელიც აგებული ფიგურისათვის უეჭველად არ იქნება კუთვნილი (რასაკვირველია, თუ ეს ფიგურა მთელი სიბრტყისაგან იქნება განსხვავებული).

კონსტრუქციული გეომეტრიის ძირითადი მოთხოვნები, რომლებსაც ჩვენ პოსტულატები ეუწოდეთ, აბსტრაქტულ ფორმაში გამოხატავენ სამხაზველო პრაქტიკის არსებით მომენტებს. ყველა პოსტულატი, ისევე როგორც ქვემოთმოყვანილი აქსიომები, მიღებულია დაუმტკიცებლად და კონსტრუქციული გეომეტრიის ლოგიკური აგებისთვის არის გამიზნული.

პირველი აქსიომა. [37] ძირითადი სიბრტყე ითვლება აგებულად.

მეორე აქსიომა. თუ აგებულია ორი ფიგურა, მაშინ ცნობილია, არის თუ არა მათი სხვაობა ცარიელი სიმრავლე.

მესამე აქსიომა. თუ ორი აგებული ფიგურის სხვაობა არ არის ცარიელი სიმრავლე, მაშინ ითვლება, რომ ეს სხვაობაც აგებულ ფიგურად შეიძლება იქნეს ჩათვლილი.

პირველი შედეგი. თუ ორი ფიგურა არის აგებული, მაშინ ცნობილია არის თუ არა ცარიელი სიმრავლე მათი თანაკვეთა;

მეორე შედეგი. თუ აგებულია ორი ფიგურა და მათი თანაკვეთა არ არის ცარიელი სიმრავლე, მაშინ მათი თანაკვეთაც აგებულ ფიგურად შეიძლება იქნეს ჩათვლილი;

მესამე შედეგი. თუ აგებულია ორი ფიგურა, მაშინ მათი შეერთებაც აგებულ ფიგურად შეიძლება იქნეს ჩათვლილი.

მეოთხე აქსიომა. თუ აგებულია ორი ფიგურა და მათი თანაკვეთა არ წარმოადგენს ცარიელ სიმრავლეს, მაშინ შესაძლოა აგებულ იქნას არანაკლებ ერთი წერტილისა მაინც, რომელიც ამ თანაკვეთის კუთვნილი იქნება.

მეოთხე შედეგი. თუ აგებულია ორი ფიგურა და, n არის რაიმე ნატურალური რიცხვი, ყოველთვის შესაძლოა იმის დადგენა, შეიცავს თუ არა აგებული ფიგურების თანაკვეთა n რაოდენობის განსხვავებულ წერტილს ან n -ზე ნაკლებს.

ამ შედეგებში დასარწმუნებლად გავიხსენოთ პირველი შედეგი, რომლის თანახმად შეიძლება გაირკვეს ორი აგებული ფიგურის ხასიათი ანუ არის თუ არა იგი ცარიელი სიმრავლე ან შეიცავს თუ არა ერთ წერტილს მაინც. პირველ შემთხვევაში მეოთხე შედეგის მართებულობა სრულიად ნათელია. მეორე შემთხვევისათვის კი ვიმსჯელოთ ასე: მეოთხე აქსიომის თანახმად შესაძლოა აგებულ იქნას წერტილი, რომელიც ეკუთვნის $\Phi_1 \Phi_2$ თანაკვეთას, მეორე აქსიომის მიხედვით კი შესაძლოა გაირკვეს, არის თუ არა ცარიელი ერთ-ერთი სიმრავლე მაინც $\Phi'_1 = \Phi_1 \therefore \{P'\}$ და $\Phi' = \Phi_2 \therefore \{P'\}$ და აქედან გაირკვეს, არის თუ არა $\Phi'_1 \Phi'_2$ სიმრავლე ცარიელი. თუ ეს სიმრავლე ცარიელია, მაშინ P' წერტილი იქნება Φ_1 და Φ_2 ფიგურების ერთადერთი საერთო წერტილი. თუ $\Phi'_1 \Phi'_2$ სიმრავლე არ არის ცარიელი, მაშინ მეოთხე აქსიომის მიხედვით შესაძლოა აგებულ იქნას ერთი წერტილი (P'') მაინც, რომელიც ერთდროულად იქნება როგორც Φ'_1 ასევე Φ'_2 ფიგურისათვის კუთვნილი.

განვიხილოთ ფიგურები: $\Phi'_1 = \Phi_1 \therefore \{P', P''\}$ და $\Phi' = \Phi_2 \therefore \{P', P''\}$

მოცემულ შემთხვევაში ან თანაკვეთა ცარიელია და Φ_1 და Φ_2 ფიგურებს აქვთ ორი (P', P'') საერთო წერტილი, ან თანაკვეთა არ არის ცარიელი და შესაძლოა აგებულ იქნას Φ_1 და Φ_2 ფიგურების საერთო მესამე წერტილი. თუ ამ მსჯელობას გავყევით, სასრული რაოდენობის მოქმედებების შემდეგ მივიღებთ დასმულ კითხვაზე პასუხს – შეიცავს თუ არა $\Phi_1 \Phi_2$ თანაკვეთა n წერტილებს მაინც.

მეხუთე შედეგი. შესაძლოა ავაგოთ ორი აგებული ფიგურის საერთო წერტილების ნებისმიერი სასრული რაოდენობა, თუ ასეთი წერტილები არსებობს.

ამ შედეგის მართებულობა უშუალოდ გამომდინარეობს მეოთხე შედეგიდან.

მექვესე შედეგი. შესაძლოა ავაგოთ წერტილი, რომელიც უმჯვენად იქნება აგებული ფიგურის კუთვნილი.

ვთქვათ, აგებულია Φ ფიგურა. განვიხილოთ იგი როგორც ორი ფიგურის თანაკვეთა – $\Phi_1 = \Phi$ და $\Phi_2 = \Phi$ ისე, რომ $\Phi = \Phi_1 \Phi_2$. მეოთხე

აქსიომის თანახმად შესაძლოა აგებულ იქნას $\Phi \cdot \Phi_2$ თანაკვეთის ანუ Φ ფიგურის კუთვნილი წერტილი.

მეშვიდე შედეგი. შესაძლოა ავაგოთ წერტილი ძირითად სიბრტყეზე, რომელიც უეჭველად არ იქნება ფიგურის კუთვნილი, თუ ეს ფიგურა განსხვავებულია მთელი სიბრტყისაგან.

ვთქვათ, ძირითად სიბრტყეში აგებულია მთელი სიბრტყისგან განსხვავებული რაიმე Φ ფიგურა, მაშინ პირველი და მესამე აქსიომის მიხედვით აგებულად ჩაითვლება $\Pi \cdot \Phi$ ფიგურაც. მეექვსე შედეგის თანახმად შესაძლოა ავაგოთ $\Pi \cdot \Phi$ კუთვნილი წერტილი ანუ ისეთი წერტილი, რომელიც უეჭველად არ იქნება Φ ფიგურის კუთვნილი.

შევნიშნავთ, რომ ცნებას “მოცემული ფიგურა”, შესაძლოა მიენიჭოს ისეთივე აზრი, როგორც ცნებას – “აგებული ფიგურა”.

გავითვალისწინოთ, რომ აგების ამოცანები უპირატესად ფარგლისა და სახაზავის გამოყენებით წყდება. ამასთან ჩამოვთვალოთ ის აგებები, რომლებიც ამ ხელსაწყოებით ხორციელდება და რომლებსაც კონსტრუქციულ გეომეტრიაში ძირითადი აგებების სახელით იცნობენ. ესენია:

1. ავაგოთ ორი აგებული წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთი;
2. ავაგოთ ორ აგებულ წერტილზე გამავალი წრფე;
3. ავაგოთ სხივი, რომელიც გამოდის აგებული წერტილიდან და გადის მეორე აგებულ წერტილზე;
4. ავაგოთ წრეწირი, თუ აგებულია წრეწირის ცენტრი და წრეწირის რადიუსის ტოლი მონაკვეთის ბოლოები;
5. ავაგოთ წრეწირის ნებისმიერი ორი დამატებითი რკალი, თუ აგებულია წრეწირის ცენტრი და რკალის ბოლოები;
6. ავაგოთ ორი აგებული ფიგურის თანაკვეთის ნებისმიერი რაოდენობის წერტილი, თუ ასეთი წერტილები არსებობს;
7. ავაგოთ წერტილი, რომელიც რაიმე აგებული ფიგურის კუთვნილი იქნება;
8. ავაგოთ წერტილი, რომელიც ნამდვილად არ იქნება რომელიმე აგებული ფიგურის კუთვნილი.

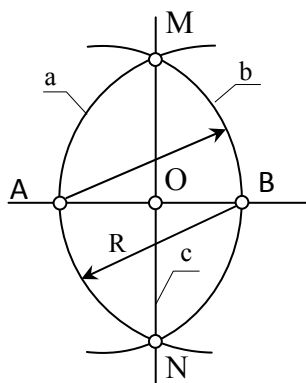
ძირითადი აგებების ყოველი სახე ეყრდნობა იმ პოსტულატებს, აქსიომებს და მათ შედეგებს, რაზეც ზემოთ გვქონდა საუბარი.

2.2. აგების ელემენტარული ამოცანები და მათი გადაწყვეტის მეთოდები

აგების ამოცანის შინაარსია, წინასწარ მოცემული ხელსაწყოების გამოყენებით ავაგოთ რაიმე ფიგურა, თუ მოცემულია სხვა რაიმე ფიგურა და მითითებულია მოცემული და საძიებელი ფიგურების ელემენტების ურთიერთობები [82]. ყოველი ფიგურა, რომელიც აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს, განიხილება როგორც ამ ამოცანის გადაწყვეტა.

აგების ამოცანის ამოხსნა ნიშნავს კონსტრუქციული გეომეტრიის აქსიომებზე დაფუძნებული, სასრული რაოდენობის მოქმედებათა ჩამონათვალის შედგენას, რომელთა თანმიმდევრული შესრულებით მივიღებთ საძიებელ ფიგურას. ამოცანის ამოხსნისათვის საჭირო მოქმედებების ჩამონათვალი დამოკიდებულია იმ ხელსაწყოებზე, რომელთა გამოყენებითაც ვაპირებთ ამოცანის ამოხსნას.

მაგალითისათვის განვიხილოთ აგების უმარტივესი ამოცანა:
– მოცემულია მონაკვეთი (AB) და საჭიროა მისი შუა წერტილის (O) აგება. ამოცანის ამოხსნისათვის ვისარგებლოთ ფარგლით და სახაზავით (ნახ. 5).



ნახ. 5 მონაკვეთის შუა წერტილის პოვნა.

აგებები შევასრულოთ ამგვარი თანამიმდევრობით:

1) ავაგოთ A და B წერტილებზე გამავალი წრფე;
საფუძველი: ორ აგებულ წერტილზე გამავალი წრფის აგება
(ერთმხრივი სახაზავის აქსიომა (2)).

2) ავაგოთ a წრეწირი ($A, [AB]$);

საფუძველი: აგებულია წრეწირის ცენტრი (A) და იმ მონაკვეთის ბოლოები, რომლის სიგრძე წრეწირის რადიუსის ტოლია ($[AB]=R$) (ფარგლის აქსიომა).

3) ავაგოთ b წრეწირი ($B, [BA]$);

საფუძველი: იხ. მე-2 პუნქტი;

4) ავაგოთ a და b წრეწირების თანაკვეთის M და N წერტილები;

საფუძველი: ორი აგებული ფიგურის თანაკვეთის წერტილების აგება, თუ ასეთი წერტილები არსებობს.

5) ავაგოთ M და N წერტილებზე გამავალი წრფე (C);
საფუძველი: იხ 1-ლი პუნქტი.

6) ავაგოთ O წერტილი, როგორც AB და MN წრფეების თანაკვეთის შედეგი – $O=AB \cap MN$.

საფუძველი: იხ მე-4 პუნქტი.

სიძნელეს არ წარმოადგენს იმის მტკიცება, რომ O წერტილი ნამდვილად არის საძიებელი წერტილი და აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას.

როგორც განხილული მაგალითიდან ჩანს (სურ.5), აგების ამოცანის ამოხსნა ხორციელდება ლოგიკურად დანაწევრებული მოქმედებების რიგით. მარტივ შემთხვევებში ამგვარი დანაწევრების გამოყენება სავსებით შესაძლებელია, მაგრამ უფრო რთული ამოცანების შემთხვევაში მოქმედებათა მიმდევრობის დაცვა რთულდება და ამიტომ პრაქტიკაში იქცევიან ასე: რაიმე ამოცანის გადაწყვეტის ლოგიკური სტრუქტურის მოძებნის შემდეგ აღარ მიმართავენ მოქმედებათა დანაწევრებას და არჩეული გზის, ე.წ. “მთლიანი” გამოყენებით ახდენენ ამოცანის გადაწყვეტას.

არსებობს აგების უმარტივესი ამოცანები, რომლებიც უფრო რთული ამოცანების ამოხსნის შემადგენელ ნაწილებს წარმოადგენენ. ამგვარი ამოცანების შესწავლა გეომეტრიის სასკოლო საწყის ეტაპებზეა გათვალისწინებული და მათ [69] აგების ელემენტარული ამოცანების სახელით იცნობენ.

გავიხსენოთ პრაქტიკაში შედარებით გავრცელებული ამოცანები, რომლებიც გეომეტრიის სასკოლო კურსში ისწავლება:

- 1) მოცემული მონაკვეთის გაყოფა შუაზე;
- 2) მოცემული კუთხის გაყოფა შუაზე;
- 3) მოცემულ წრეზე მოცემული სიგრძის მონაკვეთის აგება;
- 4) მოცემული კუთხის ტოლი კუთხის აგება;
- 5) მოცემულ წერტილზე მოცემული წრფისადმი პარალელური წრფის აგება;
- 6) მოცემულ წერტილზე მოცემული წრფისადმი პერპენდიკულარის აგება;
- 7) მოცემული ფარდობით მონაკვეთის დაყოფა;
- 8) მოცემული სამი გვერდით სამკუთხედის აგება;
- 9) მოცემული ერთი გვერდითა და მასთან მდებარე ორი კუთხით სამკუთხედის აგება;
- 10) მოცემული ორი გვერდითა და მათ შორის მდებარე კუთხით სამკუთხედის აგება;
- 11) მოცემულ წერტილზე მოცემული წრეწირისადმი მხების აგება;
- 12) მართკუთხა სამკუთხედის აგება მოცემული ჰიპოტენუზისა და კათეტის მიხედვით.

ჩამოთვლილი ამოცანებიდან პირველი ამოცანა დეტალურად გვაქვს განხილული (ნახ.1). ამ ნიმუშის მიხედვით შეგვიძლია ასევე დეტალურად შევისწავლოთ დანარჩენი ამოცანების ამოხსნა.

უკვე გავარკვეით, თუ რას ნიშნავს გამოთქმა: – ”აგების ამოცანის გადაწყვეტა”. აგების ამოცანის გადაწყვეტისათვის საჭირო სქემის შედგენა, როგორც უკვე ითქვა, კონსტრუქციული გეომეტრიის მეთოდური საკითხების შესწავლის სფეროს განეკუთვნება.

განვიხილოთ აგების ამოცანების გადაწყვეტის საორიენტაციო სქემა:

1) დავადგინოთ შემთხვევათა სასრული რაოდენობა, რომლითაც ამოწურული იქნება მონაცემების შერჩევის ყველა შესაძლებლობა;

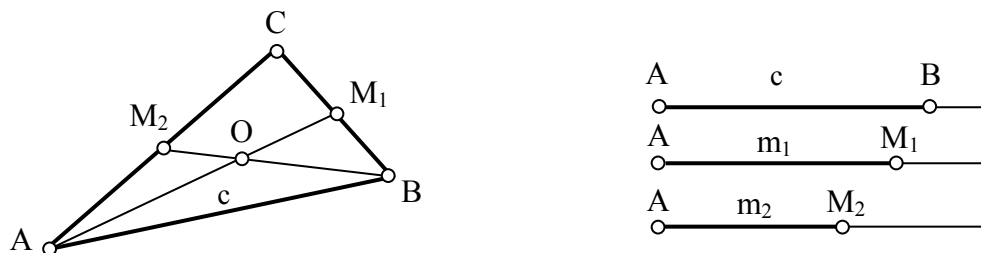
2) ყოველი შემთხვევისათვის დავადგინოთ პასუხი კითხვაზე, აქვს თუ არა ამოცანას ამონახსნი და თუ აქვს – რამდენი;

3) ყოველი იმ შემთხვევისათვის, როცა ამოცანას ამონახსნი გააჩნია, თითოეული ამონახსნისათვის დავადგინოთ მისი მიღების შესაძლებლობა მოცემული საშუალებებით.

სასწავლო მიზნებიდან გამომდინარე, რეკომენდებულია აგების ამოცანების ამოხსნა წარმართოს პრაქტიკაში გავრცელებული ეტაპებით: 1) ანალიზი; 2) აგება; 3) დამტკიცება; 4) გამოკვლევა. აქვე შევნიშნავთ, რომ ყოველთვის და ყველა ამოცანისათვის არ არის და არც შეიძლება იყოს აუცილებელი ამ ეტაპების ერთმანეთისაგან გამოიჯვანა.

ზემოთმოყვანილი ეტაპები რამდენადმე პირობითია და ისინი შეიძლება შეიცვალოს კონკრეტული ამოცანის ამოხსნისათვის საჭირო მიდგომის მიხედვით. მიუხედავად ამისა, აგების ამოცანების ამოხსნის წარმართვა ანალიზის, აგების, დამტკიცებისა და გამოკვლევის სქემით, უმეტესწილად, დადებითი შედეგებით ხასიათდება.

ზემოაღნიშნულის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ აგების კიდევ ერთი ცნობილი ამოცანა: – ავაგოთ სამკუთხედი (ABC), თუ ცნობილია მისი ფუძე და ფერდების მიმართ გავლებული მერიდიანები.



ნახ. 6 ფუძის და მედიანების მიხედვით სამკუთხედის აგება

ანალიზი. ვთქვათ, მე-6 ნახაზზე ნაჩვენები $\triangle ABC$ საძიებელი სამკუთხედია, AB არის ფუძე და AM_1 და BM_2 – შესაბამისი ფერდების მიმართ გავლებული მედიანები, ხოლო O წერტილი – მედიანების თანაკვეთის წერტილი.

როგორც მონაცემებიდან ჩანს, მოცემულ კონკრეტულ ამოცანაში ცნობილია c , m_1 და m_2 მონაკვეთები და მოითხოვება, რომ $[AB]=c$, $[AM_1]=m_1$ და $[BM_2]=m_2$. ABC სამკუთხედის აგება დაიყვანება მისი სამი წვეროს (A, B და C) აგებაზე.

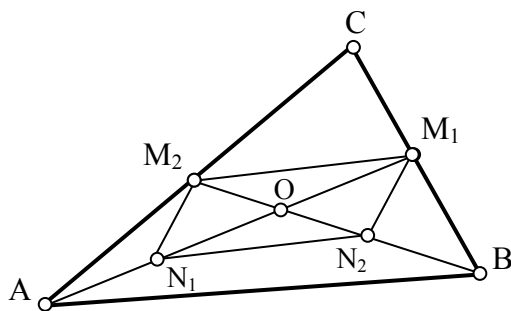
იმის გამო, რომ ფუძის ანუ $[AB]=c$ მონაკვეთის აგება არ წარმოადგენს სიძნელეს, ამოცანის ამოხსნა მხოლოდ C წვეროს აგებას

გულისხმობს. რადგანაც $C=AM_2 \cap BM_1$, ამოცანის ამოხსნა უნდა დავიწყოთ M_1 და M_2 წერტილების აგებით.

M_1 და M_2 წერტილები მოცემულია, ხოლო $AO=\frac{2}{3}m_1$ და $BO=\frac{2}{3}m_2$, გამოდის რომ ასაგები სამკუთხედის სამივე გვერდია ცნობილი და მისი აგება სიძნელეს არ წარმოადგენს.

აგება. ვისარგებლოთ ცნობილი ელემენტარული აგებებით და გრაფიკული სამუშაო წარმართოთ ამგვარი თანამიმდევრობით:

1. ავაგოთ მოცემული მონაკვეთის (C) ტოლი $[AB]$ (მე-3 ელემენტარული ამოცანა);
2. ავაგოთ $AO=\frac{2}{3}m_1$ (მე-7 და მე-3 ელემენტარული ამოცანები);
3. ავაგოთ $BO=\frac{2}{3}m_2$ (მე-7 და მე-3 ელემენტარული ამოცანები);
4. ავაგოთ ABO სამკუთხედი, რომლისთვისაც ცნობილია სამივე გვერდი C , $[AO]$ და $[BO]$ (მე-8 ელემენტარული ამოცანა);
5. ავაგოთ OA სხივი (მე-3 ძირითადი აგება);
6. ავაგოთ M_1 წერტილი OA სხივზე პირობით $AM_1=m_1$ (მე-3 ელემენტარული ამოცანა);
7. ავაგოთ M_2 წერტილი BO სხივზე პირობით $BM_2=m_2$ (მე-3 ელემენტარული ამოცანა);
8. ავაგოთ წერტილი $C=AM_2 \cap BM_1$.



ნახ.7 წინა ამოცანის დამტკიცება

დამტკიცება. განვიხილოთ ნახ.7. თუ N_1 და N_2 წერტილები შესაბამისად $[AO]$ -ს და $[BO]$ -ს შუა წერტილებია, მაშინ $M_1 M_2 N_1 N_2$ ოთხკუთხედი არის პარალელოგრამი (პარალელოგრამის დიაგონალები ერთმანეთს შუაზე ყოფენ). ამის შედეგად $[M_1 M_2]$ და $[N_1 N_2]$ ურთიერთპარალელურ მონაკვეთებს წარმოადგენენ, აქედან $[M_1 M_2] \parallel [AB]$

და $[M_1M_2]=\frac{1}{2}[AB]$. შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $[M_1M_2]$ არის $\triangle ABC$ შუა ხაზი და $[AM_1]$ და $[BM_2]$ მართლაც არიან სამკუთხედის მედიანები.

გამოკვლევა (ნახ. 6). აგების 1-ლი, მე-2 და მე-3 ეტაპები ყოველთვის შესრულებადია, იმაში დასარწმუნებლად, რომ მე-4 ეტაპიც შესრულებადია, უნდა განვიხილოთ, თუ რამდენად დაცულია სამი ცნობილი გვერდით სამკუთხედის არსებობის $\frac{2}{3}(m_1-m_2) < C < \frac{2}{3}(m_1+m_2)$

აგების მე-5, მე-6 და მე-7 ეტაპებიც ყოველთვის შესრულებადია. განვიხილოთ თუ რამდენად შესრულებადია მე-8 ეტაპი.

AM_2 და BM_1 წრფეები მოცემულ პირობებში ყოველთვის გადაკვეთილი იქნება და ამასთან ყოველთვის AB წრფის მხარეს, რომელ მხარესაც მდებარეობს O წერტილი. მართლაც AM_2 რომ BM_1 -ის პარალელური ყოფილიყო, მაშინ იმის გამო, რომ პარალელურ მონაკვეთებს $([AB] \parallel [M_2M_1])$ შორის მდებარე პარალელური მონაკვეთები $([A_2M_2] \parallel [BM_1])$ ტოლია, იქნებოდა წინააღმდეგობრივი იმისა, რომ $M_2M_1=\frac{1}{2}AB$ (იხ. დამტკიცება). თუ დავუშვებთ AM_2 და BM_1 წრფეების გადაკვეთას AB წრფის მეორე მხარეს, მაშინ $[M_1M_2]$ გამოვიდოდა $[AB]$ -ზე მეტი.

ამრიგად, განხილულ ამოცანას ამონახსნი შეიძლება ჰქონდეს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ დაცული იქნება პირობა $\frac{2}{3}(m_1-m_2) < C < \frac{2}{3}(m_1+m_2)$.

გამოკვლევა გვიჩვენებს, რომ განხილული ამოცანის პასუხი ერთადერთია, რადგან აგების ყოველი ნაბიჯი შესრულებულია ცალსახად, ტოლობის სიზუსტით.

შენიშვნა. სრული გამოკვლევისათვის საჭიროა იმის ჩვენებაც, რომ აგების სხვა ხერხით წარმოებისას შეუძლებელია ისეთი სამკუთხედის მიღება, რომელიც დააკმაყოფილებს ამოცანის ყველა პირობას და არ იქნება ჩვენს მიერ აგებული სამკუთხედის ტოლი. ამის მტკიცება ეყრდნობა თეორემას: თუ ერთი სამკუთხედის ფუძე და “გვერდითი” მედიანები შესაბამისად უდრის მეორე სამკუთხედის ფუძესა და “გვერდით” მედიანებს, ასეთი სამკუთხედები ტოლია.

2.3. წერტილთა გეომეტრიული ადგილი და მისი, როგორც მეთოდის გამოყენება აგების ამოცანებში

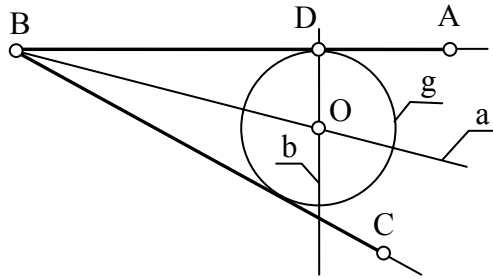
უწყვეტი სიდიდის განსაზღვრაში არისტოტელეს მიაჩნდა, [6] რომ თუ დისკრეტული სიდიდე განიხილება, როგორც წერტილთა სიმრავლე, მაშინ შეუძლებელია უწყვეტი სიდიდე განიხილულ იქნას, როგორც განუყოფელი ელემენტების სიმრავლე. იგი თვლიდა, რომ თუ წერტილს არ გააჩნია ზომები, მაშინ ერთმანეთთან უწყვეტად მიჯრილი ორი წერტილი გარდაიქმნება ერთ წერტილად და შესაბამისად მასაც არ ექნება ზომები. იგივე შეიძლება ითქვას სამ და ა.შ. ნებისმიერი რაოდენობის წერტილზეც. ამასთან ამგვარ მტკიცებას, რომელიც შესაძლოა მართებული იყოს წერტილების სასრული რიცხვისათვის, არისტოტელე ავრცელებდა წერტილთა უსასრულო სიმრავლეზეც. ამის გამო არისტოტელე წირებს განიხილავდა არა როგორც წერტილთა სიმრავლეს, არამედ როგორც “ადგილს” სადაც შესაძლოა წერტილების განლაგება. აქედან არის წარმოშობილი ტერმინი – “წერტილთა გეომეტრიული ადგილი”. არისტოტელე და მისი მიმდევარი მათემატიკოსები წირებს და ზედაპირებს არ განსაზღვრავდნენ, როგორც მოცემული პირობით ურთიერთთან დაკავშირებულ წერტილთა სიმრავლეებს. ამასთან დაკავშირებით, სწორედ ტერმინოლოგიის დასაზუსტებლად, საჭიროა გადაწყვეტიოთ ითქვას, რომ “წერტილთა გეომეტრიული ადგილის” ცნება, როგორც უკვე ითქვა, საგსებით ემთხვევა ტერმინს – “წერტილთა სიმრავლე”. წერტილთა ნებისმიერი სიმრავლე იმავდროულად არის წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომლის ყოველი წერტილი თავისი გარკვეული თვისებით ეკუთვნის ამ სიმრავლეს.

აგების ყოველი ამოცანა არსებითად დაიყვანება (ამოცანის მონაცემების მიხედვით) ერთი ან რამდენიმე წერტილის მოძებნაზე [85]. მაგალითად, სამკუთხედის აგება დაიყვანება მისი წვეროების მოძებნაზე; წრეწირის აგება – მისი ცენტრისა და ამ წრეწირის კუთვნილი ერთი წერტილის მოძებნაზე და ა.შ. საყურადღებოა ის გარემოებაც, რომ ჩვენს ხელთ არსებული სახაზავი ხელსაწყოები: სახაზავი, ფარგალი, სამკუთხედი, მრუდთარგა და სხვა – როგორც

წესი, მომარჯვებულნი არიან წირების გამოსახვაზე, ამიტომ აგების ყოველი ამოცანის გადაწყვეტაში ყოველი წერტილი (უშუალოდ მოცემული წერტილის გარდა) იძებნება ორი წირის თანაკვეთით. მაგალითისათვის დავუბრუნდეთ სამკუთხედს (ABC) და განვიხილოთ მისი აგება, როცა ცნობილია ამ სამკუთხედის სამი გვერდი (a, b და c) და დაცულია ამ გვერდებს შორის ზემოთ მოყვანილი თანაფარდობა ანუ პირობა ამ მონაცემების მქონე სამკუთხედის არსებობის შესახებ. ამ ამოცანაში ჩვეულებრივ ერთ-ერთ გვერდს (მაგალითად, $[AB]=C$) თვლიან აგებულად და ამის მიხედვით ეძებენ C წვეროს. ეს უკანასკნელი განისაზღვრება ორი $O=A$, $R=AC=b$ და $O=B$, $R=BC=a$ წრეწირის თანაკვეთის შედეგად (შესაბამისი ნახაზი მისი სიმარტივის გამო არ მოგვყავს და მის შესრულებას მკითხველს ვანდობთ).

იმის შესაბამისად, რომ საძიებელი წერტილი განისაზღვრება, როგორც ორი წირის თანაკვეთის შედეგი, საძიებელი წერტილის მიმართ ამოცანის მიერ წაყენებული მოთხოვნები შესაძლოა დავწეროთ ორ ცალ-ცალკე ჩამოყალიბებულ პირობად და თითოეული მათგანი (პირობა) E და F სიმბოლოებით აღვნიშნოთ, ამ პირობათაგან რომელიმე ცალკე აღებული ვერ უზრუნველყოფს საძიებელი წერტილის განსაზღვრას. ყველა წერტილის (რომლებიც აკმაყოფილებენ E პირობას) სიმრავლე აღვნიშნოთ M-ით, ხოლო იმ წერტილების, რომლებიც აკმაყოფილებენ F პირობას – N-ით. სასკოლო გეომეტრიაში E სიმრავლეს “წერტილთა გეომეტრიული ადგილი” ეწოდება. მიუხედავად ამისა, ჩვენ ამ უკანასკნელს ხშირად “სიმრავლის” სახელით მოვიხსენიებთ და ყოველთვის მხედველობაში გვქონება ამ ორი ცნების იდენტურობა. ამ სიმბოლოების შემოღების შემდეგ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ აგების ამოცანის პასუხი ეს არის M და N სიმრავლეების თანაკვეთის აგება ანუ ამ ორი სიმრავლის იმ წერტილებისაგან შედგენილი ფიგურა, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნიან როგორც ერთ (E), ისე მეორე (F) სიმრავლეს.

ზემოთთქმულის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაგალითები.

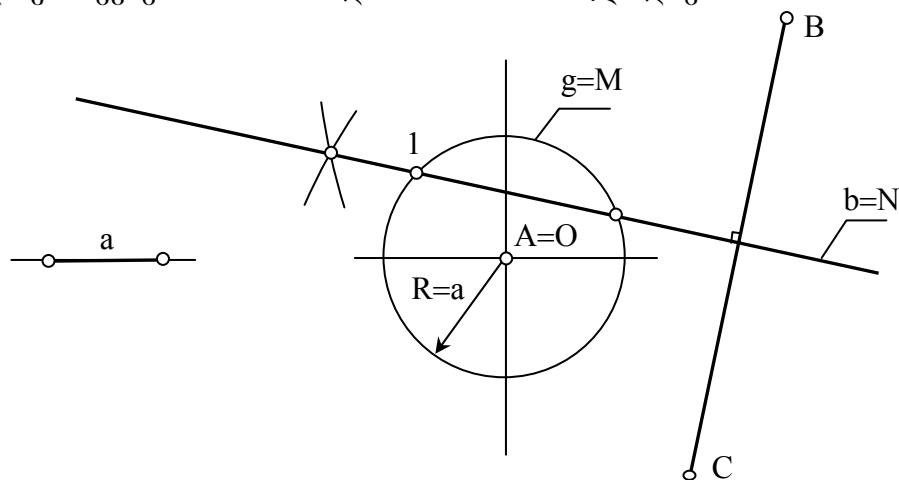


ნახ.8 მოცემული კუთხის გვერდების მხები წრეწირის აგება

პირველი მაგალითი. ავაგოთ მოცემული კუთხის ($\angle ABC$) გვერდების მხები წრეწირი ისე, რომ ეს წრეწირი ერთ-ერთ მოცემულ გვერდს (მაგ., BA) მოცემულ წერტილში (D) შეეხოს (სურ.8)

ამოცანის ამოსახსნელად საკმარისია ვიპოვოთ საძიებელი წრეწირის (g) ცენტრი (O). იმის გამო, რომ ასაგები წრეწირი (g) შეხებაში უნდა იყოს მოცემული კუთხის გვერდებთან (E პირობა), მისი ცენტრი მოთავსებული იქნება მოცემული კუთხის a ბისექტრისაზე (M სიმრავლე), ხოლო იმის გამო, რომ საძიებელმა წრეწირმა (g), ზემოთ აღნიშნული პირობის გარდა, უნდა დააკმაყოფილოს მეორე პირობაც (F პირობა) ანუ მოცემული კუთხის გვერდს უნდა შეეხოს მოცემულ წერტილში (D), საძიებელი წრეწირის ცენტრი (O) მოთავსებული უნდა იყოს AB გვერდის მიმართ D წერტილში აღმართულ b პერპენდიკულარზე (N სიმრავლე). ამგვარი მსჯელობით საძიებელი O ცენტრი მიიღება a და b წრფეების თანაკვეთის შედეგად – $O = a \cap b$.

როგორც ზემოთ აღნიშნულიდან ირკვევა, განხილულ ამოცანას ყოველთვის ექნება ამოსხნა და ამასთან მხოლოდ ერთი.



ნახ. 9 A წერტილიდან a მანძილით, ხოლო B და C წერტილებიდან ტოლი მანძილებით დაშორებული წერტილის აგება.

მეორე მაგალითი. მოცემულია სიბრტყის სამი წერტილი (A, B და C). მოცემულია აგრეთვე a მონაკვეთი და მოითხოვება ისეთი წერტილის აგება, რომელიც A-დან მოცემული a მონაკვეთის ტოლი მანძილით იქნება დაშორებული და რომლის B-დან და C-დან დაშორება იქნება ტოლი (ნახ. 9).

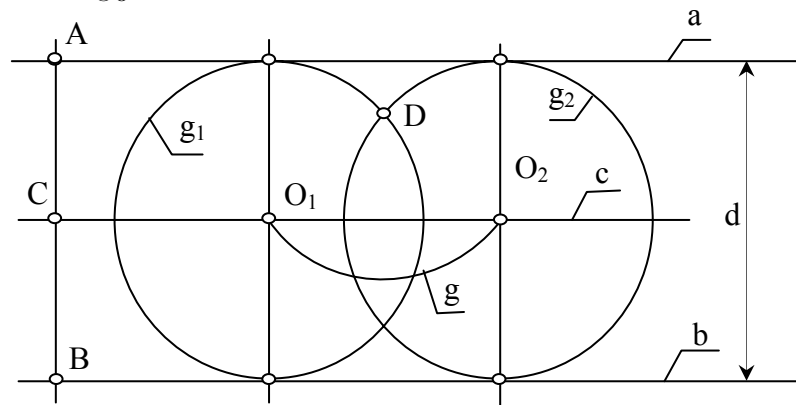
წინა ამოცანის ანალოგიურად, აქაც საძიებელმა წერტილმა ორი პირობა უნდა დააკმაყოფილოს:

პირველი. საძიებელი წერტილი დაშორებული უნდა იყოს A-დან a მანძილით (E პირობა). M სიმრავლის ყველა წერტილის ერთობლიობა იქნება გ წრეწირი $A=O$ ცენტრით და $R=a$ რადიუსით.

მეორე. საძიებელი წერტილი თანაბარი მანძილით უნდა იყოს დაშორებული B-დან და C-დან (F პირობა). N სიმრავლის ყველა წერტილის ერთობლიობა იქნება [AC]-ის შუაპერპენდიკულარი ($b=N$);

წერტილი, რომელიც დააკმაყოფილებს E და F პირობებს, განისაზღვრება M და N სიმრავლეების თანაკვეთით.

გ წრეწირის და b წრფის განლაგების მიხედვით ამოცანას შესაძლოა ჰქონდეს ორი (ნახ. 2-ზე ნახევნები შემთხვევა, წერტილი 1 და 2), ერთი ან არცერთი ამონახსნი.



ნახ. 10 ორი პარალელური წრფის მხები და მოცემულ წერტილზე გამავალი წრეწირის აგება

მესამე მაგალითი. მოცემულია ორი პარალელური წრფე (a და b) და D წერტილი. ავაგოთ წრეწირი (g_1), რომელიც იქნება ორი მოცემული პარალელური წრფის მხები და გაივლის მოცემულ D წერტილზე (ნახ. 10).

შენიშვნა. წინა ორი მაგალითისაგან განსხვავებით, განსახილველ მაგალითში დავიცავთ აგების ამოცანის ამოხსნის სქემას, რომელიც ოთხი ეტაპისაგან შედგება (ანალიზი, აგება, დამტკიცება, გამოკვლევა) და რომელზეც უკვე გვქონდა საუბარი.

ანალიზი. მოცემულ წრფეთა (a და b) შორის მანძილი აღვნიშნოთ d სიმბოლოთი, მაშინ საძიებელი წრეწირის რადიუსი უნდა უდრიდეს $d/2$. ასეთ შემთხვევაში ამოცანა დაიყვანება ისეთი წრეწირის ცენტრის აგებაზე, რომელიც დააკმაყოფილებს ორ პირობას – იგი დაშორებული უნდა იყოს a -დან და b -დან ერთნაირი მანძილით (F პირობა), ხოლო D -დან $d/2$ -მანძილით (F პირობა). აქედან გამომდინარეობს აგება.

აგება. a წრფის ნებისმიერი A წერტილიდან დაეუშვათ AB პერპენდიკულარი b წრფეზე. ავავოთ AB მონაკვეთის შუაპერპენდიკულარი c და დავნიშნოთ $[AB]$ -ს შუა წერტილი C . ავავოთ a და b წრფეებიდან თანაბრად დაშორებული წერტილების M სიმრავლე (F პირობა) ანუ C -ზე გამავალი $c \parallel a \parallel b$ წრფე, ავავოთ $g(D, d/2)$ წრეწირი ანუ წერტილთა N სიმრავლე (F პირობა). დავნიშნოთ $O_1 = g \cap c$ წერტილი. ავავოთ $g_1(O_1, [O_1D])$ წრეწირი. ეს იქნება საძიებელი წრეწირი.

დამტკიცება. g_1 წრეწირი შეხებაშია a და b წრფეებთან იმიტომ, რომ ამ წრეწირის O_1 ცენტრიდან a და b წრფეებამდე მანძილი ერთნაირია და უდრის $d/2$. ეს წრეწირი D -ზე გამავალია (ჩანს აგებიდან).

გამოკვლევა. შესაძლებელია სამი შემთხვევა:

1) D წერტილი მოთავსებულია a და b პარალელურ წრფეებს შორის (მე-3 სურათზე ნაჩვენები შემთხვევა). აგების ზემოაღნიშნული გზის გამოყენებით განსახილველ ამოცანას აქვს ორი ამონახსნი: $g_1(O_1, [O_1D])$ და $g_2(O_2, [O_2D])$. სხვა ამონახსნი ამოცანას არა აქვს. საქმე ისაა, რომ მესამე წრეწირის დაშვების შემთხვევაში ადგილი ექნება წინააღმდეგობას – სამი ცენტრი ერთი პირობისათვის მოთავსდება ერთ წრფეზე, ხოლო მეორე პირობისათვის იგივე სამი ცენტრი განლაგებული აღმოჩნდება ერთ წრეწირზე, რაც აბსურდია;

2) D წერტილი მოთავსებულია ერთ-ერთ მოცემულ წრფეზე ($D \in a$ ან $D \in b$). ამოცანას აქვს ერთი ამონახსნი;

3) D წერტილი არ მდებარეობს a და b წრფეებით შემოსაზღვრულ არეში და იგი მოთავსებულია მის გარეთ. ამოცანას არა აქვს ამონახსნი.

2.4 გეომეტრიული გარდაქმნები

გეომეტრიის სასკოლო კურსი [69] იწყება იმის განსაზღვრით, თუ რა არის გეომეტრია და ამასთან დაკავშირებით კვითხულობთ – გეომეტრია ეს არის *მეცნიერება გეომეტრიული ფიგურების თვისებათა შესახებ*. მიუხედავად იმისა, რომ ამ განსაზღვრებას, გეომეტრიის შესწავლის საწყის ეტაპზე, შეცდომას ვერ დავარქმევთ, შემდგომში მაინც ხდება მისი სერიოზული დაზუსტება. დაზუსტებაში კი იმის გარკვევა იგულისხმება, თუ ფიგურათა რომელ თვისებებზეა საუბარი და რას შეიძლება ეწოდოს ფიგურის გეომეტრიული თვისება [84].

მაგალითად, ავიღოთ ყველასთვის კარგად ცნობილი ამოცანა აგებაზე: მოცემულია სამკუთხედის ორი გვერდი და მათ შორის მდებარე კუთხე. საამისოდ რეკომენდებული აგებების შემდეგ ვასკენით, რომ დასმულ ამოცანას ერთადერთი ამონახსნი აქვს. ამ დასკვნაში ის აზრია ჩადებული, რომ ყველა სამკუთხედი, რომელსაც კი აქვს მოცემული გვერდები და მათ შორის მდებარე კუთხე, ერთმანეთის ტოლია. უკანასკნელი მოსაზრების გათვალისწინებით, ზემოთ აღნიშნულ განსაზღვრებაში, ალბათ უფრო სწორი იქნება იმის თქმა, რომ მოცემული ორი გვერდითა და მათ შორის მდებარე კუთხით შესაძლოა აგებულ იქნას უსასრულოდ ბევრი სამკუთხედი. აქედან კი შეიძლება ითქვას – ტოლი სამკუთხედები მხოლოდ მათი მდებარეობით არიან განსხვავებულნი.

განხილული მაგალითის მიხედვით შესაძლოა გაკეთდეს საერთო დასკვნა: ფიგურის გეომეტრიული თვისება ეს არის ის თვისება, რომელიც საერთოა ყველა ტოლი ფიგურისათვის. ამ საერთო დასკვნაშიც, როგორც ვხედავთ, ყველაფერი რიგზე არ არის და დასაზუსტებელია, თუ რა იგულისხმება ტერმინში – “ტოლი ფიგურები”. სასკოლო კურსიდან ცნობილია – ორი ფიგურა ტოლია მაშინ, თუ შესაძლებელია მათი ურთიერთშეთავსება მოძრაობით. აქედან გამომდინარეობს, რომ ტოლი ფიგურების საერთო თვისებები ის თვისებებია, რომლებიც არ იცვლება ფიგურების მოძრაობის დროს.

თუ მოცემული ფიგურის ყოველ წერტილს გადავაადგილებთ რაიმე საშუალებით, მივიღებთ ახალ ფიგურას. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ახალი ფიგურა მიღებულია მოცემულის გარდაქმნით.

ერთი ფიგურის მეორე ფიგურაში გარდაქმნას მაშინ ეწოდება *მოძრაობა*, თუ იგი ინარჩუნებს მანძილებს წერტილებს შორის ანუ ერთი ფიგურის ორი ნებისმიერი A და B წერტილი გადაჰყავს მეორე ფიგურის A' და B' წერტილში $|AB|=|A'B'|$ პირობით.

შევნიშნავთ, რომ მოძრაობის ცნება გეომეტრიაში დაკავშირებულია გადაადგილების ჩვეულებრივ პროცესთან, მაგრამ ვინაიდან გეომეტრიაში მნიშვნელოვანია მხოლოდ ფიგურის საწყისი და საბოლოო მდებარეობები და არა გადაადგილების მთელი პროცესი, ამიტომ ტერმინს – „მოძრაობა“ – ენიჭება უპირატესობა.

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან გამომდინარე, პასუხი კითხვაზე, თუ რა არის გეომეტრია, შესაძლოა ჩამოყალიბდეს ამგვარი რედაქციით: გეომეტრია ეს არის *მეცნიერება, რომელიც შეისწავლის გეომეტრიული ფიგურების იმ თვისებებს, რომლებიც უცვლელად რჩებიან ფიგურის მოძრაობის დროს* (პირველი განსაზღვრება).

საქმის ვითარებაში გარკვევის მიზნით კიდევ ერთხელ გავანალიზოთ ზემოთთქმული – ჩვენ მივედით იმ დასკვნამდე, რომ გეომეტრია, ეს არის მეცნიერება, რომელიც სწავლობს ფიგურის იმ თვისებებს, რომლებიც უცვლელია მოძრაობის დროს, ხოლო მოძრაობა – ეს არის გარდაქმნა, რომელიც არ ცვლის მანძილს ორ წერტილს შორის.

გეომეტრიის სასკოლო კურსის მთელი პროგრამა იმის დასტურია, თუ რა მნიშვნელობით სარგებლობს გეომეტრიაში მანძილის ცნება და რა ადგილი უკავია აგების ამოცანების ამოხსნაში მონაკვეთის სიგრძეს, მაგრამ, მიუხედავად ამისა, არსებობს თეორემები, რომლებიც არანაირად არ უკავშირდებიან მანძილის ცნებას, იმ თეორემებშიც კი, რომელთა ფორმულირებაში საუბარია მონაკვეთის სიგრძეზე, ფიგურირებულია არა მონაკვეთის სიგრძე, არამედ ორი ან მეტი სიგრძის ფარდობა. მაგალითად, “სამკუთხედის ნებისმიერი კუთხის ბისექტრისა, მოპირდაპირე გვერდს აღებულ კუთხესთან მიმდებარე გვერდების პროპორციულ ნაწილებად ჰყოფს”, “ერთ ან რამოდენიმე ტოლ წრეში აღებული ორი არათანაბარი სიგრძის ქორდიდან უგრძესია ის, რომელიც ახლოსაა წრის ცენტრთან”, “თუ მართკუთხა სამკუთხედის გვერდები გაზომილია ერთი და იგივე ზომის ერთეულით,

მაშინ ჰიპოტენუზის სიგრძის კვადრატი უდრის კათეტების სიგრძეთა კვადრატების ჯამს” (პითაგორას თეორემა) და ა.შ..

სიგრძის ცნება აუცილებლად შეიცავს ზომის ერთეულის არსებობას, მაგრამ გეომეტრიული თეორემა არ შეიძლება იყოს დაკავშირებული სიგრძის რაიმე ერთეულთან და ამიტომ ამ თეორემებში მონაკვეთების სიგრძეთა ფარდობაა პრევალირებული. ამიტომ არის, რომ პითაგორას ზემოთ მოყვანილი თეორემა იწყება ასე: “თუ მართკუთხა სამკუთხედის გვერდები გაზომილია ერთი და იგივე ზომის ერთეულით, მაშინ...” – თეორემის ამგვარი დასაწყისი იმაზე მიუთითებს, რომ მასში საუბარია გვერდების ფარდობაზე. საქმე ისაა, რომ თუ მოთხოვნილია მონაკვეთების ერთი და იგივე ზომის ერთეულით გაზომვა, მაგრამ მითითებული არ არის თვით ზომის ერთეული, ჩვენ შეგვიძლია ვიმსჯელოთ მხოლოდ მონაკვეთების სიგრძეთა ფარდობაზე. ბუნებრივია, რომ არ შეიძლება თეორემა მართებული იყოს მაშინ, როცა მონაკვეთები იზომება მილიმეტრებით და არამართებული, თუ იმავე მონაკვეთებს გაეზომავთ სანტიმეტრებით. ამრიგად, წერტილებს შორის მანძილს, გეომეტრიის ზემოთ მოყვანილ განსაზღვრებაში უნდა შეესრულებინა მთავარი როლი, მაგრამ შემდგომში მსჯელობამ საპირისპირო აჩვენა: – გეომეტრიულ თეორემებში წერტილებს შორის მანძილი საერთოდ არ ფიგურირებს. ამ გარემოებას პირველმა ფ. კლეინმა (გერმანელი მათემატიკოსი, 1849–1925) მიაქცია ყურადღება და გეომეტრიისათვის ამგვარი განსაზღვრება ჩამოაყალიბა: *გეომეტრია ეს არის მეცნიერება, რომელიც შეისწავლის გეომეტრიული ფიგურების იმ თვისებებს, რომლებიც არ იცვლებიან მსგავსების გარდაქმნაში (ძეორე განსაზღვრება).*

თავის მხრივ, მსგავსების გარდაქმნა განისაზღვრება როგორც გარდაქმნა, რომელიც არ ცვლის წერტილთა წყვილებს შორის მანძილების ფარდობას.

რგორც ვხედავთ, გეომეტრიულ თეორემებში არ ფიგურირებს მონაკვეთების სიგრძეები და იქ მხოლოდ ამ სიგრძეთა ფარდობაზეა საუბარი. ეს იმას ნიშნავს, რომ მსგავსი ფიგურები გეომეტრიისათვის ერთმანეთისაგან განსხვავებული ფიგურებია. მართალია, ეს აზრი სრულიად მართებულია მაშინ, როცა ვსაუბრობთ ელემენტარული

გეომეტრიის თეორემებზე, მაგრამ აგების ამოცანებზე გადასვლისთანავე იგი კარგავს ამ მართებულებას. საქმე ისაა, რომ აგების ამოცანებში მონაკვეთის სიგრძე განისაზღვრება არა რიცხვით, არამედ როგორც მოცემულის ტოლი. მაგალითად, თუ ამოცანა გულისხმობს ABC სამკუთხედის აგებას, როცა ცნობილია მისი ორი გვერდი (მაგ. AC და AB) და მედიანა (CD), ეს იმას ნიშნავს, რომ მოცემულია სამი აგებული მონაკვეთი [AC], [AB] და [CD]. ნათელია, რომ აგების ამ ამოცანებში ფიგურირებულია უშუალოდ მონაკვეთების სიგრძეები და არა ამ სიგრძეების ფარდობა. აქედან გამომდინარე, მსგავსი (და არა აუცილებლად ტოლი!) სამკუთხედები ჩვენთვის უკვე აღარ იქნება თანაბარუფლებიანი, კერძოდ თუ ერთი სამკუთხედი იქნება ამოცანის პასუხი, მაშინ სხვები (ამ სამკუთხედის არატოლი) ვერ დააკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს. როგორც ვხედავთ, აგების ამოცანები არსებითად ეყრდნობა პირველ განსაზღვრებას.

გეომეტრიის როგორც მეცნიერების ზემოთმოყვანილი პირველი და მეორე განსაზღვრებების შედარებითი ანალიზით მივდივართ ფაქტიურად ორი განსხვავებული გეომეტრიის – *მოძრაობის გეომეტრია* (პირველი განსაზღვრება) და *მსგავსების გეომეტრია* (მეორე განსაზღვრება) – არსებობამდე. [64]ამასთან მეორე გეომეტრიაში მიღებული ფიგურათა თვისებები ეხება პირველ გეომეტრიასაც. მართლაც, ფიგურის ყოველი თვისება, რომელიც არ იცვლება მსგავსების გარდაქმნაში, არც მოძრაობაში განიცდის ცვლილებას. აქვე შევნიშნავთ, რომ ამ მტკიცებულების შებრუნებული ძალაში არ რჩება. საქმე ისაა, რომ მოძრაობის გეომეტრიაში ფიგურის ორ წერტილს შორის მანძილი მის გეომეტრიულ თვისებას წარმოადგენს, ხოლო მსგავსების გეომეტრიაში მხოლოდ მანძილების ფარდობას განიხილავენ. ეს გარემოება იმის მიზეზი, რომ მსგავსების გეომეტრია გაცილებით ნაკლებად შეიცავს აგების ამოცანებს, ვიდრე მოძრაობის გეომეტრია.

დავფიქრდეთ იმაზე, თუ როგორ მივედით ორი გეომეტრიის არსებობის დაშვებამდე.

მოძრაობის გეომეტრია ჩვენ განვსაზღვრეთ, როგორც გეომეტრიული ფიგურების იმ თვისებათა შემსწავლელი მეცნიერება,

რომლებიც არ იცვლებიან მოძრაობის დროს. ამ გეომეტრიაში ორი ტოლი ფიგურა განუსხვავებელი ფიგურებია. რაც შეეხება მსგავსების გეომეტრიას, იგი განესაზღვრეთ, როგორც გეომეტრიული ფიგურების იმ თვისებათა შემსწავლელი მეცნიერება, რომლებიც არ იცვლება მსგავსების გარდაქმნით. ამ გეომეტრიაში განუსხვავებელია მსგავსი ფიგურები. ამგვარი ლოგიკით შესაძლოა უფრო შორს წასვლა და გარდაქმნათა ისეთი ერთობლიობის მოძებნა, რომელიც სხვა გეომეტრიას დაედება საფუძვლად. იმისათვის, რომ საბოლოოდ გავცეთ პასუხი კითხვაზე, რა არის გეომეტრია, საჭიროა წინასწარ გავარკვიოთ, გეომეტრიული გარდაქმნების რომელი ერთობლიობა შეიძლება იქნეს მიჩნეული ყოველი ახალი გეომეტრიის საფუძვლად.

იმის გათვალისწინებით, რომ მკითხველს უკვე შესწავლილი აქვს გეომეტრიის სასკოლო კურსი, ქვემოთ შევეცდებით აპრიორულად ჩამოვაყალიბოთ მოთხოვნები, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდეს გარდაქმნათა ერთობლიობა იმისათვის, რომ იგი მიჩნეულ იქნას ახალი გეომეტრიის საფუძვლად:

1) გარდაქმნათა ერთობლიობა უნდა შეიცავდეს იგივერ გარდაქმნას (ფიგურა რჩება ადგილზე და ითვლება, რომ გარდაქმნის შედეგად იგი გადავიდა თავისთავში);

2) თუ ერთობლიობაში შედის რაიმე Π გარდაქმნა, რომელშიც F ფიგურა გადადის F' ფიგურაში, მაშინ ამ ერთობლიობაში შედის შებრუნებული გარდაქმნა P , რომელშიც F' გადადის F ფიგურაში;

3) თუ ერთობლიობაში შედის ორი გარდაქმნა – Π_1 (F ფიგურა გადადის F_1 ფიგურაში) და Π_2 (F_1 ფიგურა გადადის F' ფიგურაში), მაშინ ამავე ერთობლიობაში შედის Π_3 გარდაქმნაც, რომელშიც F ფიგურა გადადის F' ფიგურაში.

გარდაქმნების ყოველ ერთობლიობას, რომლებიც ხასიათდებიან 1–3 თვისებებით, გეომეტრიაში *გარდაქმნების ჯგუფის* სახელით იცნობენ.

ზემოთ აღნიშნულის საფუძველზე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ გეომეტრიის, როგორც მეცნიერების განსაზღვრების განზოგადებული ვარიანტი – *გეომეტრია არის გეომეტრიულ ფიგურათა იმ თვისებების*

შემსწავლელი მეცნიერება, რომლებიც არ იცვლებიან რაიმე გარდაქმნების ჯგუფის გარდაქმნებში (მესამე განსაზღვრება).

ამ განსაზღვრების მიხედვით არსებობს არა ერთი, არამედ მრავალი გეომეტრია, აქედან რომელიმე ერთის ჩამოყალიბებისათვის საკმარისია გარდაქმნების რაიმე ჯგუფის არჩევა. ამგვარი არჩევანის კერძო მაგალითებია ზემოთ განხილული “მოძრაობის გეომეტრია” და “მსგავსების გეომეტრია”.

გეომეტრიის სასკოლო კურსიდან ჩვენთვის ცნობილია გარდაქმნის სხვადასხვა სახეები: სიმეტრია, ბრუნვა, მოძრაობა, მსგავსება და სხვ. ზემოთ ჩამოვყალიბეთ გეომეტრიული გარდაქმნების ზოგადი განსაზღვრება. ამ განსაზღვრებას ეფუძნება გეომეტრიაში ცნობილი სხვა გარდაქმნებიც, რომლებიც, ჩვენი აზრით, მნიშვნელოვანია ელემენტარული გეომეტრიისათვის, კერძოდ, ორთოგონალური გარდაქმნები, გეგმილური გარდაქმნები და ინვერსია. გარდაქმნები საინტერესოა ორი რამის გამო:

1) ისინი “უმარტივესია” იმ აზრით, რომ მათში შენარჩუნებულია გეომეტრიის ძირითადი ფიგურები – მონაკვეთები და კუთხეები (ორთოგონალური გარდაქმნა), წრფეები (აფინური და გეგმილური გარდაქმნები), წრფეები და წრეწირები (ინვერსია).

2) გეომეტრიის დაყოფა ელემენტარულ, აფინურ, გეგმილურ და სხვა გეომეტრიებად განპირობებულია იმით, თუ რომელი გეომეტრიული თვისებების შენარჩუნებით ხასიათდება ესა თუ ის გეომეტრიული გარდაქმნა და რომელი თვისებების დარღვევა ხდება ამ გარდაქმნებში, მაგალითად, ელემენტარულ გეომეტრიას საქმე აქვს გეომეტრიული ფიგურების იმ თვისებებთან, რომელთა შენარჩუნებაც შესაძლებელია მოძრაობაში ან მსგავსების გარდაქმნაში; აფინური გეომეტრია სწავლობს გეომეტრიული ფიგურების იმ თვისებებს, რომლებიც შენარჩუნებულია აფინურ გარდაქმნებში – წრფივობა, პარალელობა, ერთი წრფის მონაკვეთების ფარდობა. აფინურ გარდაქმნებში იცვლება ფიგურების მეტრული თვისებები – მონაკვეთის სიგრძე, კუთხის სიდიდე და სხვ. გეგმილური გეომეტრია სწავლობს იმ თვისებებს, რომლებიც არ იცვლებიან გეგმილურ გარდაქმნებში – წრფივობა, ერთი წრფის ოთხი წერტილის ორმაგი ფარდობა (კერძოდ ჰარმონიზმი). გეგმილურ

გარდაქმნებში იცვლება არა მარტო მონაკვეთის სიგრძე და კუთხის
სიდიდე, არამედ პარალელური წრფეებიც კი, რომლებიც, როგორც
წესი, გადაკვეთილ წრფეებში გადადიან.

2.5 გეომეტრიული ასახვები

ცნობილია, რომ წერტილთა ნებისმიერ სიმრავლეს გეომეტრიული ფიგურა ეწოდება. სიმოკლისათვის ამ უკანასკნელს მომავალში “ფიგურას” ვუწოდებთ და ყოველთვის მხედველობაში გვექნება მისი გეომეტრიული ხასიათი. წრფე, სიბრტყე და სივრცე ფიგურების მაგალითებია, როგორც წერტილთა უსასრულო სიმრავლეები. განმარტების მიხედვით, ერთი წერტილიც ფიგურას წარმოადგენს, ანუ სიმრავლეს, რომელიც ერთი ელემენტისაგან არის შედგენილი (იგულისხმება, რომ წერტილი არის ფიგურის (წერტილთა სიმრავლის) ელემენტი) [86].

იმ კანონს ან წესს, რომლითაც Φ ფიგურის ყოველ წერტილს Φ' ფიგურის რომელიმე ერთ გარკვეულ წერტილს შევუსაბამებთ, ეწოდება Φ ფიგურის Φ' ფიგურაში ასახვა.

ელემენტარული გეომეტრიიდან ცნობილია სიმრავლის სიმრავლეზე ასახვის ცნება. [66] სახელდობრ, Φ სიმრავლის Φ' სიმრავლეზე ასახვა (აღინიშნება f სიმბოლოთი) ნიშნავს Φ და Φ' სიმრავლეთა ელემენტებს შორის ისეთ შესაბამისობას, რომლის დროსაც მთელი Φ სიმრავლის სახე Φ' სიმრავლეს ემთხვევა, რაც სიმბოლურად შესაძლოა ჩაიწეროს ასე:

$$f(\Phi)=\Phi'$$

ასეთ შემთხვევაში Φ სიმრავლის ასხვას Φ' სიმრავლეზე (და არა სიმრავლეში) *სურექცია* ეწოდება.

ზოგად შემთხვევაში, როცა $(\Phi)\subset\Phi'$, ამბობენ, რომ არის Φ სიმრავლის ასახვა Φ' სიმრავლეში (და არა სიმრავლეზე).

თუ Φ სიმრავლის ორ ერთმანეთისაგან განსხვავებულ ელემენტს (წინა სახეს), $f(\Phi)=\Phi'$ (ან $(\Phi)\subset\Phi'$), დროს, შეესაბამება Φ' სიმრავლის აგრეთვე ორი განსხვავებული ელემენტი (სახე), მაშინ ასეთ ასახვას *ინექცია* ეწოდება.

ასახვას, რომელიც ერთდროულად სურექციაც არის და ინექციაც, *ბიექცია* ეწოდება. ამგვარად, ბიექცია ეს არის ორი სიმრავლის ისეთი ურთიერთცალსახა შესაბამისობა, რომლის დროსაც ერთი სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება მეორე სიმრავლის ერთი და მხოლოდ

ერთი ელემენტი და პირიქით, მეორე სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება პირველი სიმრავლის ერთი და მხოლოდ ერთი ელემენტი. ასეთ ასახვას ურთიერთცალსახა ანუ შექცევადი ასახვა ეწოდება. შექცევადი ასახვის მაგალითებია ჩვენთვის სასკოლო ხაზვის კურსიდან ცნობილი მონეის ეპიური და აქსონომეტრია.

სივრცის (ან სიბრტყის) თავისთავზე შექცევად ასახვას სივრცის (ან სიბრტყის) *გარდაქმნას* უწოდებენ, სხვაგვარად რომ ვთქვათ, სიმრავლის გარდაქმნა ეს არის ამ სიმრავლის თავისთავზე ურთიერთცალსახა ასახვა ანუ ბიექცია, რაც სიმბოლურად შესაძლოა ასე ჩავწეროთ:

$$f : \Phi \rightarrow \Phi$$

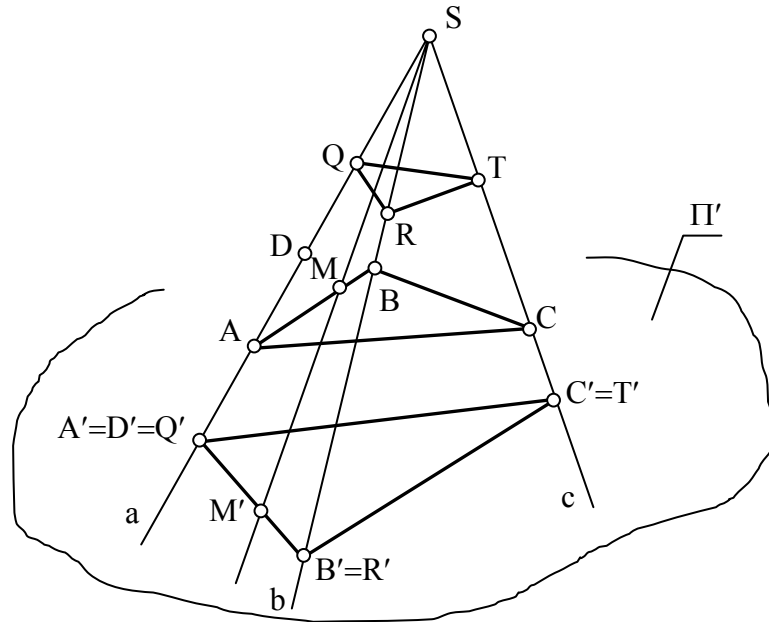
გავიხსენოთ ის, რაც გეომეტრიის სასკოლო კურსიდანაც ცნობილია და რაზეც წინა თავში ზოგადად უკვე გვქონდა საუბარი: სიბრტყის ან სივრცის გარდაქმნის უმარტივესი სახეებია – მოძრაობა (რომლის დროსაც ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი უცვლელია) და მსგავსება (რომლის დროსაც ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი ერთი და იგივე ფარდობით ($k>0$) იცვლება).

ტერმინოლოგიის შემდგომი დაზუსტების მიზნით შევნიშნავთ: თუ $A \in F$ წერტილს $A' \in F'$ წერტილი შევუსაბამეთ, ამბობენ, რომ A წერტილი A' წერტილზე აისახება. A' წერტილს A წერტილის *ანასახი* ეწოდება, A წერტილს კი – A' წერტილის *წინა სახე*.

Φ' ფიგურის ყველა წერტილის (რომლებიც Φ ფიგურის თითო წერტილის ანასახს მაინც წარმოადგენს) სიმრავლეს Φ ფიგურის ანასახი ეწოდება, ხოლო Φ ფიგურას – ამ ანასახის წინა სახე.

განმეორებით დავაზუსტოთ, რომ ასახვის განსაზღვრებაში საყურადღებოა “ში” და “ზე” თანდებულების ხმარება. სახელდობრ, როცა Φ' ფიგურა ისეთ წერტილებსაც შეიცავს, რომლებიც არ წარმოადგენენ Φ ფიგურის არც ერთი წერტილის ანასახს, ამბობენ, რომ Φ ფიგურა აისახა Φ' ფიგურაში. ამ შემთხვევაში შეცდომაა ვთქვათ, რომ Φ ფიგურა Φ' ფიგურაზეა ასახული.

ვთქვათ, სივრცეში გვაქვს Π' სიბრტყე, რომელსაც *გეგმილთა სიბრტყეს* ანუ “სასურათე” სიბრტყეს ვუწოდებთ (ნახ.11).



ავირჩიოთ რაიმე $S \notin \Pi'$ წერტილი და ვუწოდოთ მას დაგეგმილების ცენტრი. იმისათვის, რომ BC სამკუთხედი დავაგეგმილოთ Π' სიბრტყეში, S' წერტილიდან, როგორც დაგეგმილების ცენტრიდან, გავავლოთ თანმიმდევრობით, A , B , და C წვეროებზე გამავალი შესაბამისად a , b და c მკვეთრი სხივები და დავნიშნოთ მათი Π' გეგმილთა სიბრტყესთან თანაკვეთის A' , B' , და C' წერტილები ანუ სივრცის A , B , და C წერტილების ანაზახები (ცენტრალური გეგმილები) Π' სიბრტყეში (A წერტილი იქნება A' წერტილის წინა სახე, $B - B'$ წერტილის წინა სახე, ხოლო $C - C'$ წერტილის წინა სახე). მიღებული ანაზახების (გეგმილების) თანმიმდევრობითი შეერთებით მივიღებთ $\triangle ABC$ -ის (წინა სახე) $\triangle A'B'C'$ (ანაზახი) ცენტრალურ გეგმილს Π' სიბრტყეში.

ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ ზემოაღწერილი ხერხით ავაგებდით სამკუთხედის ნებისმიერ წვეროს, როგორც წერტილის

ცენტრალურ გეგმილს, თუ იგი დაგეგმილების S ცენტრთან არ იქნებოდა შეთავსებული. მართლაც, ასეთი დამოხვევის შემთხვევაში არც მაგეგმილებელი სხივი გამოვა განსაზღვრული და შესაბამისად არც ცენტრალური გეგმილი მოიძებნება Π' გეგმილთა სიბრტყეში. ამრიგად, დაგეგმილების S ცენტრი სივრცის ის განსაკუთრებული წერტილია, რომელსაც გეგმილი არა აქვს. S -ის ანალოგიურად არსებობს სხვა წერტილებიც, რომლებსაც აგრეთვე არა აქვთ ცენტრალური გეგმილი, მაგრამ ამაზე ცოტა მოგვიანებით გვექნება საუბარი.

დავუბრუნდეთ ნახ. 11 და ყურადღება მივაქციოთ იმ გარემოებას, რომ A და B წვეროების დაგეგმილებით დავაგეგმილეთ AB გვერდი და შესაბამისად A და B წერტილებზე გამავალი წრფის კუთვნილი წერტილების უსასრულო სიმრავლე. საქმე ისაა, რომ $M \in AB$ ნებისმიერი წერტილის M' გეგმილი $A'B'$ -თან იქნება შეთავსებული ($M' \in A'B'$). ძნელი არ არის იმის შემჩნევაც, რომ AB -ს კუთვნილ წერტილებზე გამავალი ნებისმიერი სხივი SAB სიბრტყეში იქნება მოთავსებული და AB -ს კუთვნილი ყოველი წერტილის გეგმილი $A'B'$ გეგმილთან იქნება შეთავსებული. აქედან გამომდინარე უკვე შეგვიძლია დავაფიქსიროთ ცენტრალური დაგეგმილების ზოგიერთი თვისება:

- 1) წერტილის გეგმილი ისევ წერტილია;
- 2) წრფის გეგმილი ისევ წრფეა;
- 3) თუ წერტილი სივრცეში ეკუთვნის წრფეს, მაშინ ამ წერტილის გეგმილი წრფის გეგმილთან არის შეთავსებული.

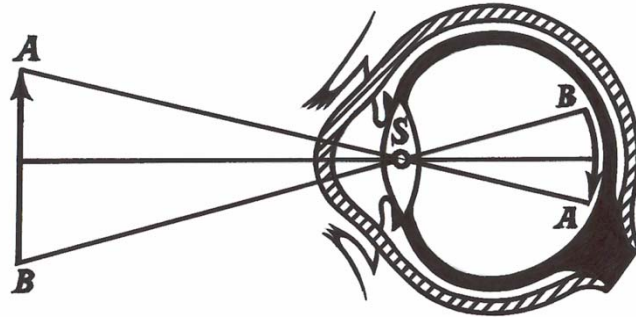
განვიხილოთ კერძო შემთხვევა: თუ მოცემული წრფე გადის დაგეგმილების S ცენტრზე, ე.ი. თვითონ წარმოადგენს მაგეგმილებელ წრფეს, მაშინ ასეთი წრფის ცენტრალური გეგმილი არის წერტილი. მართლაც, a მაგეგმილებელი წრფის ყველა წერტილი A' წერტილში აისახება (მაგ., თუ $D \in a$, მაშინ $D' \in A'$).

ცენტრალური დაგეგმილების ზემოაღნიშნულ სქემაში ჩვენ დავინახეთ, რომ წრფის გეგმილის ასაგებად საკმარისია მისი ორი წერტილის გეგმილის აგება, ხოლო ამ წერტილების შემაერთებელი წრფე საძიებელი გეგმილი იქნება. ამ ლოგიკით და ელემენტარული

გეომეტრიის აქსიომების გათვალისწინებით (სახელდობრ, სამ არაკოლინეარულ წერტილზე ერთადერთი წრფე გადის), შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ სივრცის სამი არაკოლინეარული წერტილის დაგეგმილებით გეგმილთა სიბრტყეში ერთადერთი სიბრტყე განისაზღვრება. აქ საყურადღებოა ის, რომ ამ გზით მიღებულ შედეგს წრფის ანალოგიით, სიბრტყის გეგმილს ვერ დავარქმევთ – სიბრტყე თუ მაგეგმილებელი არ არის (მაგ., SAB), მაშინ მისი გეგმილი ბრტყელ წერტილოვან ველს წარმოადგენს.

საქმის გამარტივების მიზნით შემოვიტანოთ დასაგეგმილებელი ობიექტის განმსაზღვრელის ცნება, რაც სიბრტყის შემთხვევაში სამი არაკოლინეარული წერტილი გამოდის. ეს ეხება ნებისმიერი ფიგურის დაგეგმილებას, რადგან ყოველი ფიგურის წერტილთა სიმრავლიდან ყოველთვის შესაძლოა გამოცალკევდეს (მიახლოებით მაინც) წერტილების ის ქვესიმრავლე, რომელიც ცალსახად განსაზღვრავს ამ ფიგურის გეგმილს. მაგალითისათვის წარმოვადგინოთ ნებისმიერი მრავალწახნაგა, ვთქვათ, პარალელეპიპედი. ამ ფიგურის ცენტრალური გეგმილის ასაგებად საკმარისია ავაგოთ მისი წვეროების (რვა წვერო) ცენტრალური გეგმილები, ხოლო შემდეგ შევაერთოთ ისინი იმავე თანამიმდევრობით, როგორითაც ისინი შეერთებულნი არიან თვით ფიგურაში. ამით ავაგებთ პარალელეპიპედის ემელემენტების (წვეროები, წიბოები, წახნაგები) გეგმილებს, რომლებიც საკმარისად განსაზღვრავენ მოცემულ ფიგურას გეგმილთა სიბრტყეში როგორც გეომეტრიული, ასევე თვალსაჩინოების თვალსაზრისით. დაინტერესებული მკითხველი ალბათ მიხვდება, რომ დაგეგმილების ამ პროცესს ბიექციას ვერ დავარქმევთ და დაგეგმილების მხოლოდ პირდაპირ ამოცანას აქვს ცალსახა პასუხი: მოცემულ წინა სახეს ერთადერთი ანასახი შეესაბამება. რაც შეეხება შებრუნებულ ამოცანას – ანასახის მიხედვით წინა სახის ცალსახად განსაზღვრა – ამ სქემაში დაცული არ არის და პასუხების უსასრულო სიმრავლესთან გვაქვს საქმე. ამაში დასარწმუნებლად ავიღოთ a, b და c მაგეგმილებელ სხივებზე განლაგებული წერტილების ნებისმიერი სამეული (მაგ., $Q \in a, R \in b$ და $T \in c$), რომელიც თავის მხრივ ABC სამკუთხედისაგან განსხვავებულ სამკუთხედს (QRT) განსაზღვრავს (სურ.1). უკანასკნელის ცენტრალური

გეგმილი გასაგები მიზეზით $A'B'C'$ ცენტრალურ გეგმილთან აღმოჩნდება შეთავსებული. თუ როგორ შეიძლება ამგვარი მდგომარეობის თავიდან აცილება, მოგვიანებით გვექნება საუბარი.



ნახ. 12 ადამიანის თვალის ფუნქციონირების სქემა

ფიგურათა ასახვის ცენტრალური გეგმილების მეთოდი გამოირჩევა დიდი თვალსაჩინოებით. ეს აიხსნება იმით, რომ ადამიანის მხედველობის ორგანოს ფუნქციონირების სქემა, გეომეტრიული თვალსაზრისით, გარკვეული მიახლოებით ცენტრალური დაგეგმილების მეთოდის სქემას ემთხვევა (ნახ. 12).

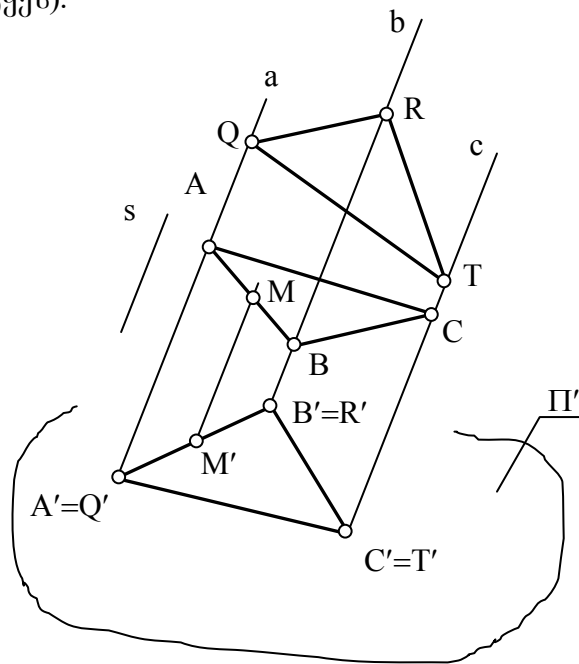
თვალის ბროლის ოპტიკური ცენტრი (S) შესაძლოა მივიჩნიოთ ცენტრალური დაგეგმილების S ცენტრად, ხოლო თვალის უკანა კედელი – Π' გეგმილთა სიბრტყედ. დასამზერი საგანი მოთავსებულია თვალის გარეთ. მზერის სხივები (ანუ მაგეგმილებელი სხივები), რომლებიც გამოდიან საგნის წერტილებიდან, ოპტიკური ცენტრის გავლით, თვალის ბადურაზე იძლევიან საგნის გამოსახულებას.

ამავე მიზეზის გამოა თვალსაჩინო ფოტოგრაფიული სურათები. საქმე ისაა, რომ ფოტოაპარატის ოპტიკური სქემაც ცენტრალური დაგეგმილების პრინციპებთან არის მიახლოებული.

ამრიგად, ცენტრალური დაგეგმილების მეთოდი განსაკუთრებული მნიშვნელობით ხასიათდება მაშინ, როცა ობიექტის თვალსაჩინო გამოსახულების მიღებაა საჭირო (მაგალითად არქიტექტურაში). თუმცა საერთოდ პრაქტიკაში და კერძოდ არქიტექტურულ პროექტებში, ხშირად ნახაზების ისეთ თვისებებსაც ექცევა დიდი ყურადღება, როგორიცაა გამოსახულების აგების სიმარტივე, საგნების ფორმისა და ზომების აღწარმოება და სხვ. ამასთან დაკავშირებით განვიხილოთ

დაგეგმილების კიდევ ერთი მეთოდი, რომელიც ცენტრალური დაგეგმილების მეთოდის კერძო სახედ შეიძლება იქნეს მიჩნეული.

ვთქვათ, მოცემულია გეგმილთა სიბრტყე Π' და დაგეგმილების s მიმართულება, რომელსაც Π' -ის მიმართ ნებისმიერი განლაგება შეიძლება ჰქონდეს, გარდა ერთისა – იგი არ უნდა იყოს Π' -ის პარალელური (ცენტრალურ გეგმილებში ამისი ექვივალენტურია ის პირობა, რომ დაგეგმილების S ცენტრი არ შეიძლება ეკუთვნოდეს Π' გეგმილთა სიბრტყეს).



ნახ. 13 პარალელური დაგეგმილების აპარატი

დასაგეგმილებელ ობიექტად მივიჩნიოთ ისევ $\triangle ABC$ (ნახ. 13) დაგეგმილების ოპერაცია განვახორციელოთ ასე: A -ზე B -ზე და C -ზე, დაგეგმილების მიმართულების (s) პარალელურად გავავლოთ შესაბამისად a, b და c მაგეგმილებელი სხივები და დავაფიქსიროთ გეგმილთა სიბრტყესთან მათი თანაკვეთის A', B' და C' წერტილები ანუ A, B და C წვეროების, როგორც წერტილების გეგმილები Π' გეგმილთა სიბრტყეში. გეგმილების შეერთებით მივიღებთ მოცემული სამკუთხედის (ABC) გეგმილს ($A'B'C'$) Π' გეგმილთა სიბრტყეში. დაგეგმილების ეს მეთოდი *პარალელური გეგმილების* მეთოდის სახელითაა ცნობილი. აქვე შეგვიძლია დავაფიქსიროთ პარალელური გეგმილების ზოგიერთი თვისება:

1) წერტილის გეგმილი ისევ წერტილია;

2) წრფის გეგმილი ზოგადად ისევ წრფეა, მაგრამ თუ დასაგეგმილებელი წრფე დაგეგმილების მიმართულების პარალელურია, მაშინ წრფე წერტილზე გეგმილდება;

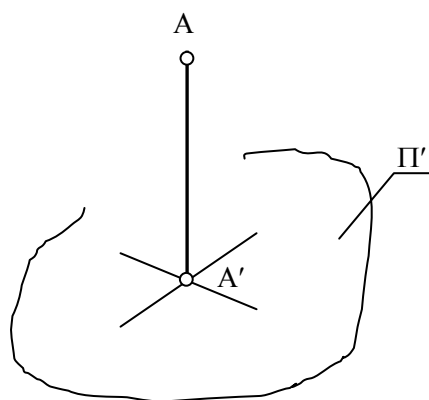
შენიშვნა. ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ წრფის დაგეგმილება ორი განსხვავებული წერტილითაც შეიძლება (მაგ., A და B წერტილებით განისაზღვრება ამ წერტილებზე გამავალი ერთადერთი წრფე) და დაგეგმილებელი სიბრტყითაც (მაგ., AB წრფეზე, s -ის პარალელურად ერთადერთი სიბრტყე გადის, რომელსაც Π' გეგმილთა სიბრტყესთან თანაკვეთის ერთადერთი წრფე გააჩნია. სწორედ ამ წრფესთან იქნება შეთავსებული დაგეგმილებელი სიბრტყის კუთვნილი AB წრფის $A'B'$ გეგმილი).

3) თუ წერტილი ეკუთვნის წრფეს (მაგ., $M \in AB$), მაშინ ამ წერტილის გეგმილი წრფის გეგმილთან არის შეთავსებული.

შენიშვნა. ცენტრალური გეგმილების ანალოგიურად, პარალელურ გეგმილებშიც დასაგეგმილებელ ფიგურას, როგორც წერტილთა სიმრავლეს, ერთადერთი გეგმილი შეესაბამება გეგმილთა სიბრტყეში ($\triangle ABC$ და მისი ერთადერთი გეგმილი $\triangle A'B'C'$), მაგრამ ამ მტკიცებულების შებრუნებული ძალაში არ არის (იხ. $\triangle QRT$. ამ სამკუთხედის გეგმილი ABC სამკუთხედის გეგმილთან არის შეთავსებული – $\triangle A'B'C' = \triangle Q'R'T'$ და ეს იმიტომ, რომ დაგეგმილებელი წრფის კუთვნილი წერტილების სიმრავლე ერთ წერტილში გეგმილდება (იხ. ნახ. 3. $A \in a, Q \in a$, შესაბამისად $A' = Q'$).

ჩვენ უკვე ვთქვით, რომ პარალელური გეგმილები შესაძლოა განხილულ იქნას როგორც ცენტრალურის კერძო შემთხვევა. საქმე ისაა, რომ დაგეგმილების ამ ორი მეთოდის გეომეტრიული არსი ფაქტიურად ერთი და იგივეა. განსხვავება ისაა, რომ ცენტრალური დაგეგმილების ცენტრი “საკუთრივ” წერტილს წარმოადგენს, ხოლო პარალელურის – “არასაკუთრივს”. თუ რას ნიშნავს ეს ორი ცნება, ამის შესახებ მომდევნო თავში გვექნება საუბარი. ახლა კი გავცნოთ დაგეგმილების კიდევ ერთ კერძო შემთხვევას, რომელიც ორთოგონალური დაგეგმილების სახელითაა ცნობილი.

ვთქვათ მოცემულია Π' სიბრტყე და დაგეგმილების მიმართულება $s \perp \Pi'$ (ნახ. 14). დასაგეგმილებელ ობიექტად ამჯერად A წერტილი მივიჩნიოთ. ზემოთ განხილული შემთხვევის ანალოგიურად, A წერტილის Π' სიბრტყეში დაგეგმილებისათვის გავავლოთ a სხივი, რომელიც გაივლის A -ზე s -ის პარალელურად და დავნიშნოთ მისი თანაკვეთა Π' სიბრტყესთან. $A' = \Pi' a$ იქნება საძიებელი გეგმილი. იმის გამო, რომ თავიდან დავუშვიტ $s \perp \Pi'$ პირობა, ზემოთ აღწერილი პროცესი ასეთი რედაქციითაც შეიძლება ჩამოყალიბდეს – A -დან Π' -ში დავუშვათ პერპენდიკულარი და დავნიშნოთ ამ პერპენდიკულარის ფუძე Π' გეგმილთა სიბრტყეში. მივიღებთ საძიებელ A' ეგმილს. სწორედ ამიტომ უწოდებენ დაგეგმილების განხილულ მეთოდს ორთოგონალურს (ორთოგონალური ბერძნული სიტყვაა და ქართულად სწორკუთხას ნიშნავს).



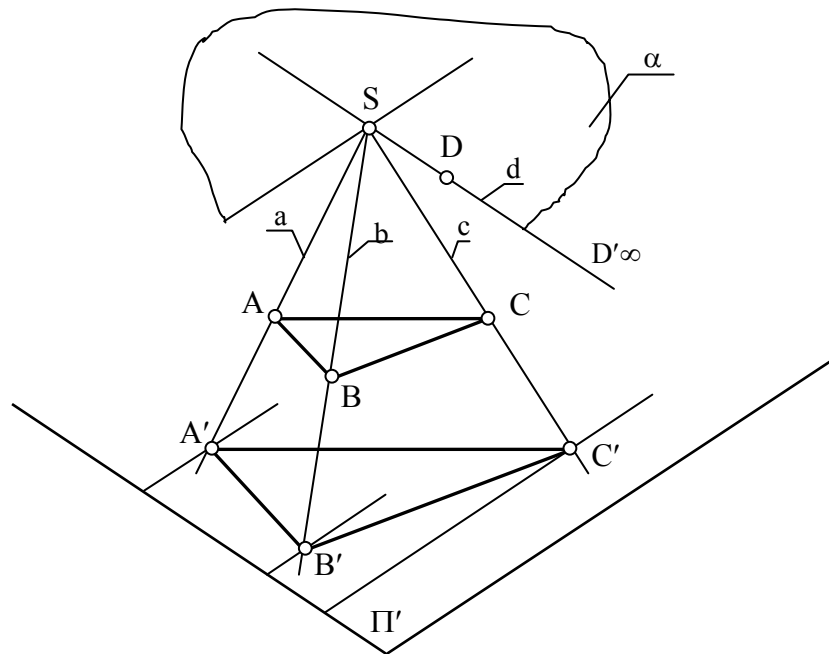
ნახ. 14 ორთოგონალური დაგეგმილების აპარატი

ორთოგონალური დაგეგმილების ის სამი ძირითადი თვისება, რაზეც უკვე იყო საუბარი, იგივეა და აღარ გავიმეორებთ. რაც შეეხება ცენტრალური, პარალელური და ორთოგონალური დაგეგმილების დანარჩენ თვისებებს, მათი გამოყენების სფეროებს და იმასაც თუ როგორ შეიძლება გადაწყდეს დაგეგმილების შებრუნებული ამოცანა ანუ როცა მოცემული იქნება ანასახი და ცალსახად როგორ უნდა მოიძებნოს წინა სახე, ჩვენ კვლავ დავუბრუნდებით და შევისწავლით მხაზველობითი გეომეტრიისა და პერსპექტივის კურსების გავლის დროს.

2.6 ევკლიდეს სივრცე და მისი შეესება არასაკუთრივი ელემენტებით

სამგანზომილებიანი სივრცის ძირითადი კანონზომიერებანი და თვისებები შესწავლილი იყო უძველეს დროში, ჩვენს წელთაღრიცხვამდე მე-3 საუკუნეში, ბერძენი გეომეტრის *ევკლიდეს* მიერ. ამის გამო გეომეტრიულ სივრცეს, რომელიც ელემენტარული გეომეტრიის შესწავლის ობიექტს წარმოადგენს, ხშირად *ევკლიდეს სივრცეს* უწოდებენ [83].

წინა თავში განვიხილეთ დაგეგმილების პროცესი, რომელიც ცენტრალური დაგეგმილებისა (ნახ. 11) და მისი კერძო შემთხვევების (პარალელური (ნახ. 13); ორთოგონალური (ნახ. 14)) მაგალითზე ვახვეწეთ.



ნახ. 15 ცენტრალური დაგეგმილების აპარატი

დავუბრუნდეთ ცენტრალური დაგეგმილების სქემას. როგორც ნახ. 15-დან ჩანს მოცემულ გეომეტრიულ აპარატში, რომელიც Π' გეგმილთა (სასურათე) სიბრტეისა და $S \notin \Pi'$ წერტილისაგან ანუ დაგეგმილების ცენტრისაგან შედგება, სივრცის ყოველი წერტილის ასახვა ვერ ხერხდება და ამ მხრივ გამონაკლისად S წერტილი მივიჩნიეთ. თუმცა, გამონაკლისი აქ სხვა წერტილებიცაა და მათი სიმრავლე S -ზე, Π' -ის პარალელურად გამავალ α სიბრტეეს ეკუთვნის. განვიხილოთ მაგ., $D \in \alpha$ წერტილის დაგეგმილების საკითხი. იმის გამო,

The diagram shows two intersecting lines, \$p'\$ and \$p''\$. Line \$p'\$ contains points \$D'\$, \$A'\$, \$B'\$, and \$M'\$. Line \$p''\$ contains points \$A\$, \$B\$, and \$M\$. Two dashed lines, labeled \$c\$ and \$d\$, are drawn through the intersection of \$p'\$ and \$p''\$. Line \$c\$ passes through point \$C\$ on \$p'\$ and point \$S\$ on \$p''\$. Line \$d\$ passes through point \$S\$ and another point further along \$p''\$. A vertical-ish line segment connects \$B'\$ and \$B\$. Another line segment connects \$M\$ and \$M'\$. The angle between \$p'\$ and \$p''\$ at their intersection is labeled \$\phi\$. Other labels include \$p'\$, \$D'\$, \$A'\$, \$B'\$, \$C\$, \$C'_\infty\$, \$D'_\infty\$, \$A\$, \$B\$, \$M\$, \$M'\$, \$a\$, \$b\$, \$m\$, and \$S\$.

ვთქვათ, დაგეგმილებას ვანხორციელებთ სიბრტყეზე და დაგეგმილების ცენტრის ფუნქციას ამავე სიბრტყის კუთვნილი S წერტილი ასრულებს. გარდა ცენტრისა, ვთქვათ, მოცემულია ამავე სიბრტყის კუთვნილი ორი (p და p') გადაკვეთილი წრფე, რომელთაგანაც არცერთი მათგანი S -ზე გამავალი არ არის. განვიხილოთ დაგეგმილების პროცესი და ამასთან დაკავშირებით

მიზნად დავისახოთ p წრფის ყველა წერტილის დაგეგმილება p' წრფეზე, მაგალითად, $A \in p$ წერტილის გეგმილი იქნება $A' \in p'$ წერტილი. ამის ანალოგიურად დავიწყოთ p წრფის წერტილების დაგეგმილება p' წრფეზე (მაგ., B, M და ა.შ.). A, B და M წერტილების მაგალითზე თუ ვიმსჯელებთ, მათთვის წინა სახის მიხედვით ცალსახად იძებნება ანასახი და პირიქით. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ: p და p' წრფეების წერტილებს შორის დამყარებულია *ურთიერთცალსახა შესაბამისობა*. მიუხედავად ამისა, თუ დავაკვირდებით, იოლად აღმოვაჩენთ ორ ისეთ შემთხვევას, (ნახ. 6) როცა ირდევია აღნიშნული შესაბამისობა. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ $C \in p$ წინა სახე, რომელსაც დაგეგმილების განსახილველ სქემაში არ ეძებნება ანასახი (C) და $D' \in p'$ ანასახი, რომელსაც არ ეძებნება წინა სახე. ეს აიხსნება იმით, რომ $SC \parallel p'$ და $SD \parallel p$.

ამგვარად, p და p' წრფეებს შორის ცენტრალური დაგეგმილებით დამყარებული წერტილოვანი შესაბამისობა შეიცავს არსებით ხარვეზს, რომლის აღმოფხვრის გარეშეც სრულყოფილი ვერ იქნება ცენტრალური დაგეგმილება.

აღნიშნული ხარვეზი, რომელიც ევკლიდეს სივრცის ძირითადი თვისებებით არის განპირობებული, შესაძლოა აღმოფხვრიდ იქნას, თუ ევკლიდეს სივრცეს “უსასრულოდ შორეული” ანუ “არასაკუთრივი” ელემენტებით შევავსებთ.

სურ.6-ზე ნაჩვენები სქემა პირდაპირ მიუთითებს იმაზე, თუ როგორ შეიძლება შევავსოთ ევკლიდეს სივრცე არასაკუთრივი ელემენტებით. იმისათვის რომ დაგეგმილების ოპერაციაში ყოველთვის იქნეს მიღებული შესაბამისი ელემენტების წყვილი (წინა სახე და ანასახი), საკმარისია მოთხოვნილ იქნას პირობა პარალელურ წრფეთა თანაკვეთის წერტილის არსებობაზე და მას, ევკლიდეს სივრცის წერტილებისაგან განსხვავებით, რომელთაც საკუთრივ წერტილებს ვუწოდებთ, ვუწოდოთ *არასაკუთრივი* წერტილი. ამით აღმოფხვრით ზემოაღნიშნულ ხარვეზებს და დაგეგმილების ოპერაციას იმ ორი გამონაკლისის (სურ.16 C და D წერტილები) გარეშე შევასრულებთ: C საკუთრივ წერტილს (წინა სახე) შეესაბამება C' (ანასახი)

არასაკუთრივი წერტილი (აღნიშნულია ქვედა ინდექსით – C'_∞), ხოლო საკუთრივ წერტილს D' (ანასახი) შეესაბამება D (წინა სახე) არასაკუთრივი წერტილი (აღნიშნულია ქვედა ინდექსით – D'_∞).

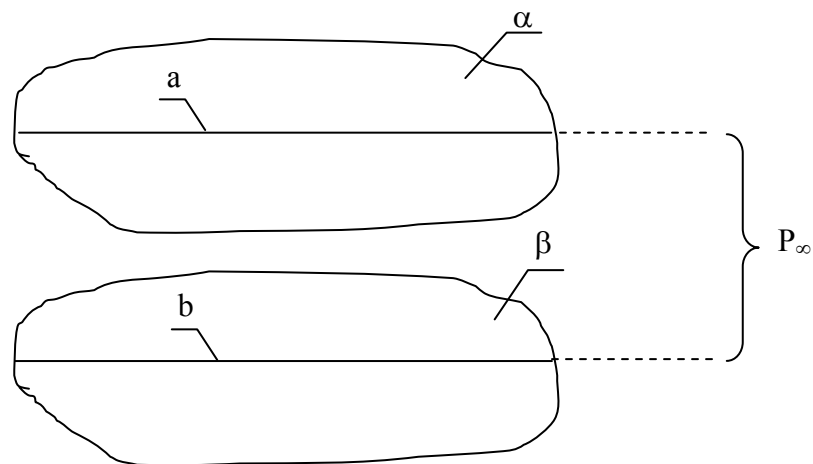
ის რაც ითქვა პარალელურ წრფეთა თანაკვეთის განხილულ ორ შემთხვევაზე, შესაძლოა გავრცელდეს ევკლიდეს სივრცის ნებისმიერ ურთიერთპარალელურ წრფეთა წყვილზე. აქედან გამომდინარე უნდა ჩავთვალოთ, რომ ევკლიდეს სივრცის ყოველ წრფეს აქვს ერთი და მხოლოდ ერთი არასაკუთრივი წერტილი.

დასახელების, “არასაკუთრივი წერტილი”, წარმოშობა შესაძლოა ავხსნათ M წერტილის მაგალითზე (ნახ. 6). ნახაზიდან ჩანს, რომ p' -ზე M' -ის მარცხნიდან მარჯვნივ გადაადგილებით m მაგეგმილებელი სხივის მიერ p' -თან შექმნილი φ კუთხე თანდათანობით შემცირდება და რაც უფრო მიუახლოვდება MC -ს, M' მით უფრო დაშორდება დაგეგმილების ცენტრს (S). ამის გამო, როცა $M=C$, მივიღებთ p' -ის არასაკუთრივ C'_∞ -ს (C -ს ანასახს). C'_∞ წერტილს ეწოდება “უსასრულოდ შორსმდებარე” ანუ “არასაკუთრივი” წერტილი. შევნიშნავთ, რომ ევკლიდეს სივრცეში, ერთმანეთის პარალელური ყველა წრფე ერთ და მხოლოდ ერთ არასაკუთრივ წერტილზე გადის.

გეომეტრიაში ერთ წერტილზე გამავალ წრფეთა ერთობლიობას *წრფეთა კონას* უწოდებენ, ხოლო ამ წერტილს – *კონის ცენტრს*. ევკლიდეს სივრცეში არსებობს წრფეთა კონები მხოლოდ საკუთრივი ცენტრით. მაგრამ იმის გამო, რომ ევკლიდეს სივრცეს არასაკუთრივი წერტილებიც დაემატეთ, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ამ სივრცეში საკუთრივი ცენტრის მქონე წრფეთა კონის პარალელურად დასაშვებია არასაკუთრივი ცენტრის მქონე წრფეთა კონის არსებობაც. ასეთ კონას კი ქმნის სივრცის ყველა ის წრფე, რომელიც ამავე სივრცის რომელიმე წრფის პარალელურია.

გავარკვიოთ, რას წარმოადგენს ერთ სიბრტყეში მდებარე არასაკუთრივ წერტილთა სიმრავლე. იმის გამო, რომ სიბრტყის კუთვნილ ნებისმიერ წრფეს ერთადერთი არასაკუთრივი წერტილი აქვს, ყოველმა წრფემ აღნიშნული სიმრავლე ერთ წერტილში უნდა გადაკვეთოს. აქედან გამომდინარე, სიბრტყის არასაკუთრივ წერტილთა

სიმრავლე ჩავთვალოთ არასაკუთრივ წრფედ და მივიჩნიოთ, რომ ყოველ სიბრტყეს ექნება ერთი და მხოლოდ ერთი არასაკუთრივი წრფე.



ნახ. 17 ორი სიბრტყის არასაკუთრივი წრფე

განვიხილოთ ორი სიბრტყე – $\alpha \parallel \beta$ (ნახ. 17). თუ ამ სიბრტყეებში გაავალებთ ორ $a \in \alpha$ და $b \in \beta$ წრფეს ისე რომ $a \parallel b$, მაშინ ისინი გადაიკვეთებიან არასაკუთრივ წერტილზე, რომელიც გასაგები მიზეზით მიეკუთვნება როგორც ერთ, ისე მეორე სიბრტყეს. იმის გამო შეგვიძლია მივიჩნიოთ, რომ ერთი სიბრტყის ყოველი არასაკუთრივი წერტილი ეკუთვნის ამ სიბრტყის პარალელურ მეორე სიბრტყესაც. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, მოცემულ ურთიერთპარალელურ სიბრტყეებს აქვთ საერთო არასაკუთრივი წრფე. ამის შედეგად შეგვიძლია დავასკვნათ: ევკლიდეს სივრცეში. როცა იგი შევსებულია არასაკუთრივი წერტილებით, პარალელურ სიბრტყეთა ყოველი წყვილი გადაკვეთილია არასაკუთრივ წრფეზე, ხოლო ერთი რაიმე სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეთა ერთობლიობას ექნება ერთი და მხოლოდ ერთი არასაკუთრივი წრფე.

გეომეტრიაში იმ წრფეთა ერთობლიობას, რომლებიც ერთ წრფეზე არიან გამავალი, *სიბრტყეთა კონა* ეწოდება, ხოლო ამ წრფეს – *კონის ღერძი*. ევკლიდეს სივრცეში კონის მხოლოდ საკუთრივი ღერძი არსებობს, ხოლო ევკლიდეს სივრცის არასაკუთრივი ელემენტებით შევსების შემთხვევაში ითვლება, რომ არსებობს სიბრტყეთა კონა *არასაკუთრივი ღერძით*.

ახლა გაგარკვიოთ, რას წარმოადგენს სივრცის არასაკუთრივ წერტილთა სიმრავლე.

როგორც შევთანხმდით, ევკლიდეს გაფართოებულ სივრცეში ანუ იმ შემთხვევაში, როცა იგი არასაკუთრივი წერტილებითაა შევსებული, ყოველ წრფეს ერთადერთი არასაკუთრივი წერტილი, ხოლო ყოველ სიბრტყეს – ერთადერთი არასაკუთრივი წრფე აქვს. არასაკუთრივი წერტილებისა და წრფეების ერთობლიობა წარმოადგენს ევკლიდეს გაფართოებული სივრცის არასაკუთრივი ელემენტების მთელ სიმრავლეს. თუ ამ სიმრავლეს განვიხილავთ როგორც წერტილთა სიმრავლეს, იოლად მივაღწიოთ იმ დასკვნამდე, რომ ამ სიმრავლეს ყოველ წრფესთან ერთი საერთო წერტილი, ხოლო ყოველ სიბრტყესთან – ერთი საერთო წრფე აქვს. ამიტომ მიზანშეწონილია ევკლიდეს სივრცის არასაკუთრივი წერტილების სიმრავლე არასაკუთრივ სიბრტყედ მივიჩნიოთ და ჩავთვალოთ, რომ ევკლიდეს სივრცეს ერთადერთი არასაკუთრივი სიბრტყე აქვს.

ამით მთავრდება ევკლიდეს სივრცის გაფართოება [60] ანუ ამ სივრცის არასაკუთრივი ელემენტებით შევსება. ამრიგად, ავაგეთ ისეთი გეომეტრიული სივრცე, რომელშიც დაგეგმილების ოპერაცია ყოველგვარი გამონაკლისის გარეშე შეიძლება იქნას განხორციელებული.

აღსანიშნავია, რომ ჩვენს მიერ შემოტანილი სივრცის არასაკუთრივი ელემენტები საკუთრივ ელემენტებთან დაკავშირებულნი არიან კუთვნილების ჩვეულებრივი დამოკიდებულებით, რომლებიც მხოლოდ სრული ფორმულირებების შესაძლებლობას იძლევიან, ასე მაგალითად, არასაკუთრივი ელემენტებით შევსებულ ანუ ევკლიდეს გაფართოებულ სივრცეში მართებული ხდება შემდეგი მტკიცებულებანი:

1) ერთ სიბრტყეში მდებარე ყოველი ორი წრფე ყოველთვის გადაკვეთილია და თანაკვეთის წერტილი შესაძლოა იყოს როგორც საკუთრივი, ასევე არასაკუთრივი წერტილი;

2) სივრცის ნებისმიერი ორი სიბრტყე ყოველთვის გადაკვეთილია და თანაკვეთის წრფე შესაძლოა იყოს როგორც საკუთრივი, ასევე არასაკუთრივი წრფე;

3) წრფე და სიბრტყე ყოველთვის გადაკვეთილია და თანაკვეთის წერტილი შესაძლოა იყოს როგორც საკუთრივი, ასევე არასაკუთრივი წერტილი.

შევნიშნავთ, რომ მეტრული ხასიათის ცნებები, მაგალითად, მონაკვეთის სიგრძე, კუთხის სიდიდე, ფართობი და სხვ., არასაკუთრივ ელემენტებზე არ ვრცელდება.

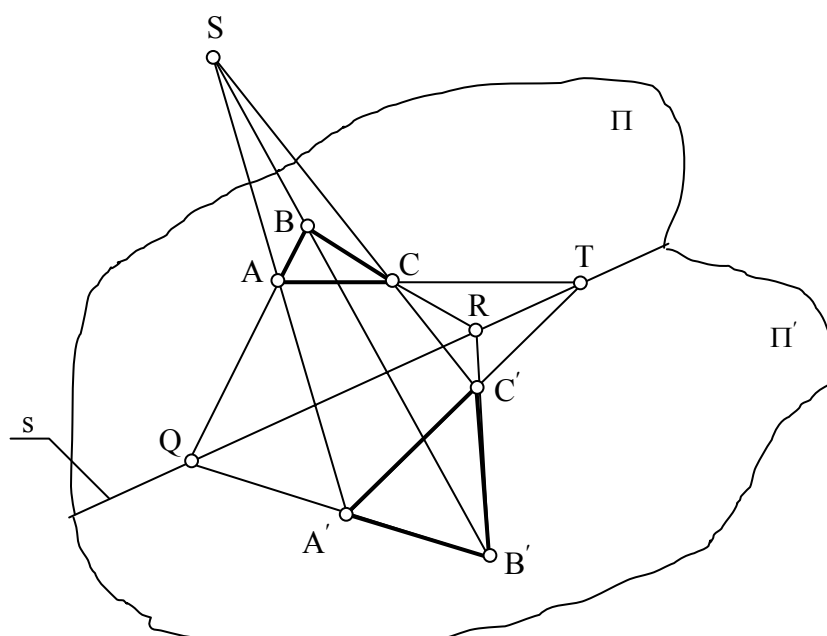
ზემოთ აპრიორულად მივიღეთ, რომ პარალელური დაგეგმილება შესაძლოა განხილულ იქნას, როგორც ცენტრალურის კერძო შემთხვევა. ეს დებულება, მას შემდეგ რაც ევკლიდეს სივრცე შევავსეთ არასაკუთრივი ელემენტებით, შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ ამგვარი რედაქციით: პარალელური დაგეგმილება შესაძლოა განხილულ იქნას, როგორც ცენტრალურის ის კერძო შემთხვევა, როცა დაგეგმილების ცენტრი არასაკუთრივი წერტილია.

2.7 დეზარგის თეორემა და მისი შედეგები

გეომეტრიულ ასახვას, სადაც ყოველი წრფე წრფეზე ანუ ერთ წრფეზე მდებარე წერტილები – აგრეთვე ერთ წრფეზე მდებარე წერტილებზე აისახება, *კოლინეარული ასახვა* ან მოკლედ *კოლინეაცია* ეწოდება. [64]

თუ *კოლინეაცია* მიღებულია ცენტრალური დაგეგმილებით, მაშინ მას *პერსპექტიული კოლინეაცია* ეწოდება.

დავინტერესდეთ პერსპექტიული კოლინეაციით და ამასთან დაკავშირებით განვიხილოთ ნახ.18.



ნახ. 18 დეზარგის კონფიგურაცია

ვთქვათ, სივრცის რაიმე Π სიბრტყე S ცენტრიდან დაგეგმილებულია Π' გეგმილთა სიბრტყეზე. იოლი დასანახია, რომ $A \in \Pi$ ნებისმიერ წერტილს (წინა სახე) Π' გეგმილთა სიბრტყეში შეესაბამება $A' \in \Pi'$ წერტილი (ანასახი). შებრუნებულად: ნებისმიერ $B' \in \Pi'$ წერტილს (ანასახი) Π სიბრტყეში შეესაბამება $B \in \Pi$ წერტილი (წინა სახე). ანალოგიურად შეგვიძლია ვიმსჯელოთ $C \in \Pi$ (წინა სახე) და $C' \in \Pi'$ (ანასახი) წერტილების მიმართაც. ამ მსჯელობიდან ის დასკვნა გამოდინარეობს, რომ დაგეგმილების ოპერაცია Π და Π'

სიბრტყეების წერტილთა შორის ამყარებს ურთიერთცალსახა შესაბამისობას. რაიმე სიბრტყის კუთვნილ წერტილთა სიმრავლეს ამ სიბრტყის წერტილოვანი ველი ვუწოდოთ და ზემოთ მოყვანილი მსჯელობისა და უკანასკნელი განსაზღვრების გათვალისწინებით დავასკვნათ: ცენტრალური დაგეგმილების მეთოდი რაიმე სიბრტყის (II) და გეგმილთა სიბრტყის (II') ველებს შორის ამყარებს ურთიერთცალსახა შესაბამისობას.

ერთი ველის ყოველ ფიგურას, რომელიც განიხილება როგორც წერტილთა სიმრავლე, შეესაბამება მეორე ველის რაიმე ფიგურა. ცნობილია რომ წრფის ცენტრალური გეგმილი ისევ წრფეა და თუ წერტილი კუთვნიან წრფეს, მაშინ ამ წერტილისა და წრფის ცენტრალური გეგმილები შეთავსებულია (თუ $M \in AB$, მაშინ $M' \in A'B'$). იგივე აზრი ახლა შეგვიძლია გამოვთქვათ სხვაგვარად: ორი ბრტყელი ველის ურთიერთცალსახა შესაბამისობა, რაზეც ზემოთ გვქონდა საუბარი, უზრუნველყოფს იმას, რომ ერთი ველის წრფეს მეორე ველში ისევ წრფე შეესაბამება, ხოლო ერთი ველის ერთ წრფეზე განლაგებულ წერტილებს – მეორე ველის შესაბამის წრფეზე განლაგებული წერტილები. ამრიგად, დაგეგმილების ოპერაციით დავამყარეთ ორი ბრტყელი ველის ისეთი ურთიერთცალსახა შესაბამისობა, რომელშიც ერთი ველის (II) წრფეზე განლაგებული წერტილების სირავლე გადადის მეორე ველის (II') შესაბამის წრფეზე განლაგებულ წერტილთა სიმრავლეში. ბოლო ფრაზა ადასტურებს კოლინეაციის ზემოთ მოყვანილ განსაზღვრებას.

შევამოწმებთ მაგ., Q წერტილს, მისი წინა სახე და ანასახი ურთიერთშეთავსებადია. ამის გამო S პერსპექტიული კოლინეაციის შემთხვევაში $S=II \cap II'$ წრფე კოლინეაციის განსაკუთრებულ წრფეს წარმოადგენს – ამ წრფის კუთვნილი ყოველი წერტილი (მაგ. Q,R,T) განიხილება, როგორც ორმაგი წერტილი. მართლაც, თუ წრფეს პერსპექტიული კოლინეაციის *ორმაგ წრფეს* პერსპექტიული კოლინეაციის *ღერძს* უწოდებენ.

ვთქვათ, ABC და A'B'C' სამკუთხედები (ნახ.18) პერსპექტიული კოლინეაციის ფიგურებს წარმოადგენენ. თუ დაგეგმილების ცენტრს S

სიმბოლოთი აღვნიშნავთ, მაშინ წვეროების შესაბამისი წვეილები (A და A', B და B', C და C') S ცენტრზე გამავალ შესაბამის მაგეგმილებელ წრეებზე იქნებიან განლაგებულნი. ამავე დროს, ორივე სამკუთხედის შესაბამისი გვერდები მაგეგმილებელ სიბრტყეში განლაგდებიან და ამის გამო ერთმანეთს გადაკვეთენ. მაგალითად, AB და $A'B'$ წრეები, რომლებიც SAB მაგეგმილებელ სიბრტყეში მდებარეობენ, კოლინეაციის ღერძთან Q წერტილში გადაიკვეთებიან. ანალოგიურად განიხილება R და T წერტილებიც და საბოლოოდ შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი:

$$Q = AB \cap A'B'; \quad R = BC \cap B'C'; \quad T = AC \cap A'C'.$$

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობით მივედით გეგმილური გეომეტრიის ფუნდამენტურ თეორემამდე, რომელსაც გეომეტრიაში *დეზარგის თეორემის* სახელით იცნობენ და რომლის შინაარსიც ასეთია:

– თუ ორი სამკუთხედის შესაბამისი წვეროების შემაერთებელი წრეები ერთ წერტილზე გადიან, მაშინ ამ სამკუთხედების შესაბამისი გვერდები ერთ წრეზე მდებარე სამ წერტილზე გადაიკვეთებიან და პირიქით;

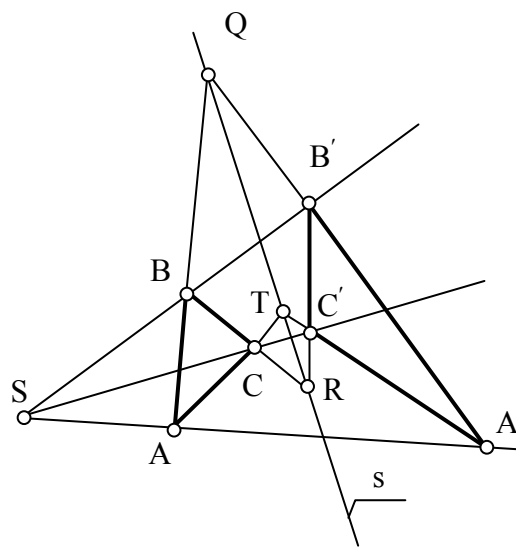
– თუ ორი სამკუთხედის შესაბამისი გვერდები იკვეთებიან ერთ წრეზე მდებარე სამ წერტილზე, ამ სამკუთხედების შესაბამისი წვეროების შემაერთებელი წრეები ერთ წერტილზე გაივლიან.

შენიშვნა. ელემენტარული გეომეტრიისაგან განსხვავებით, გეგმილურ გეომეტრიაში სამკუთხედის გვერდები ეწოდება წვეროებზე გამავალ სამ წრეს და არა წვეროების შემაერთებელ მონაკვეთებს.

ნახ.18-ზე ნახვენები წრეებისა და წერტილების ერთობლიობას *დეზარგის კონფიგურაცია* ეწოდება, რომელიც ხასიათდება იმით, რომ ათი წერტილისა და ათი წრეისაგან არის შედგენილი. ამასთან, ყოველ წერტილზე სამი წრე გადის და ყოველ წრეზე სამი წერტილი მდებარეობს.

ნახ.18-ზე ნახვენები შემთხვევა განიხილება, როგორც *დეზარგის თეორემა სივრცეში* [83]. საქმე ისაა, რომ ABC და $A'B'C'$ სამკუთხედები სხვადასხვა სიბრტყეში არიან განლაგებულნი. შევნიშნავთ, რომ კერძო შემთხვევაში ეს სამკუთხედები შესაძლოა ერთ განლაგდნენ და

აღნიშნული თეორემა კვლავ ძალაში დარჩეს. თუმცა იმის გამო, რომ ერთ სიბრტყეში მდებარე სამკუთხედების გვერდები ყოველთვის გადაკვეთილია (საკუთრივ ან არასაკუთრივ წერტილებში), უნდა შევცვალოთ მისი ფორმულირება და ჩამოვაყალიბოთ ასე: *თუ ორი სამკუთხედი (ABC და $A'B'C'$) ისეა განლაგებული სივრცეში, რომ შესაბამისი წვეროების შემაერთებელი წრფეები ერთ წერტილში (S) იკვეთებიან, მაშინ სამკუთხედების შესაბამისი გვერდების თანაკვეთის სამი წერტილი ($Q=AB\cap A'B'$, $R=BC\cap B'C'$ $T=AC\cap A'C'$) ერთ წრფეზე (S) იქნებიან განლაგებულნი (ნახ.19).*



ნახ. 19 დეზარგის კონფიგურაცია

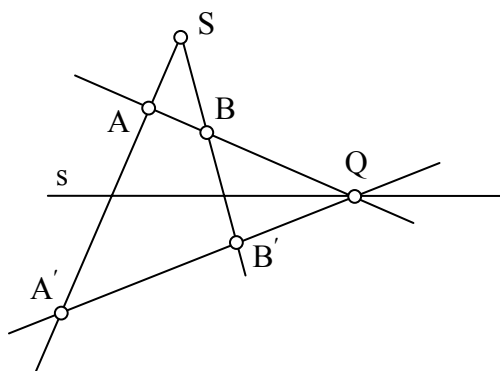
დეზარგის თეორემის დამტკიცება სიბრტყისათვის მოითხოვს სივრცით აგებებს, [60] კერძოდ, იგი შესაძლოა დამტკიცდეს ცენტრალური დაგეგმილების მეთოდის გამოყენებით. განვიხილოთ პეპსპექტიული კოლინეაციის სახეები, რომლებშიც დეზარგის თეორემაზე დაყრდნობით, კლასიფიცირების საფუძველად კოლინეაციის ცენტრისა და ღერძის მდებარეობა იქნება მიღებული:

1) *ჰომოლოგია* (ბერძნულია და ქართულად შესაბამისობას, შესატყვისობას ნიშნავს) – ეს არის პერსპექტიული კოლინეაციის სახე, როცა ცენტრიც (S) და ღერძიც (s) საკუთრივი ელემენტებია. ამ შემთხვევაში S ცენტრს, s ღერძს და მაგ. A და A' წერტილებს, შესაბამისად

ჰომოლოგიის ცენტრი, ჰომოლოგიის ღერძი და ჰომოლოგიური ფიგურები ეწოდებათ.

ჰომოლოგია განსაზღვრულია თუ მოცემულია მისი ცენტრი, ღერძი და ჰომოლოგიური წერტილების ერთი წყვილი.

მართლაც, ვთქვათ მოცემულია S ცენტრი, s ღერძი და ჰომოლოგიური წერტილების ერთი წყვილი – A და A' (პირობის თანახმად, S , A და A' წერტილები ერთ წრფეზეა განლაგებული), საჭიროა განისაზღვროს მოცემული B წერტილის ჰომოლოგიური (შესაბამისი) B' წერტილი (ნახ.20).



ნახ. 20 ჰომოლოგია

A და B წერტილებზე გამავალი წრფე ჰომოლოგიის ღერძს (s) – Q წერტილში გადაკვეთს (Q შეიძლება იყოს საკუთრივიც (სურათზე ნაჩვენები შემთხვევა) და არასაკუთრივიც), ხოლო AQ წრფის შესაბამისი წრფე A' წერტილზე გაივლის. რაც შეეხება საძიებელ B' -ს, იგი SB სხივს AQ' წრფესთან თანაკვეთით განისაზღვრება.

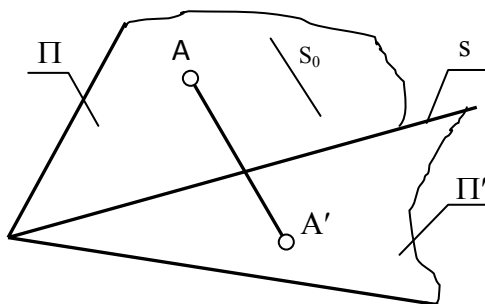
2) აფინური (ბერძნულია და ქართულად ნათესაობას ნიშნავს) – ეს არის პერსპექტიული კოლინეაციის სახე, როცა კოლინეაციის ცენტრი არასაკუთრივი წერტილია (S^∞), ხოლო ღერძი (s) – საკუთრივ წრფეს წარმოადგენს.

3) პომოთეცია (ბერძნულია და მისი ქართული თარგმანია – მსგავსი) – ეს არის პერსპექტიული კოლინეაციის სახე, როცა კოლინეაციის ცენტრი (S) საკუთრივია, ხოლო ღერძი (s) – არასაკუთრივი.

4) ტრანსლაცია (ლათინურია და ქართულად გადატანას ნიშნავს) – ეს არის პერსპექტიული კოლინეაციის სახე, როცა კოლინეაციის ცენტრიც და ღერძიც არასაკუთრივი ელემენტებია. ტრანსლაციაში შესაბამისი ფიგურები ტოლია (შესაბამის წრფეებს აქვთ საერთო არასაკუთრივი წერტილი ანუ პარალელურები არიან). ფიგურის ამგვარი გარდაქმნა ხორციელდება მისი პარალელური გადაადგილებით.

ბრტყელი ველების პერსპექტიულ – აფინური შესაბამისობა და მისი თვისებები

ეხლა უფრო დეტალურად შევეხოთ კოლინეაციის იმ სახეს რომელსაც *პერსპექტიულ–აფინური* ანუ *ნათესაური* ვუწოდეთ.



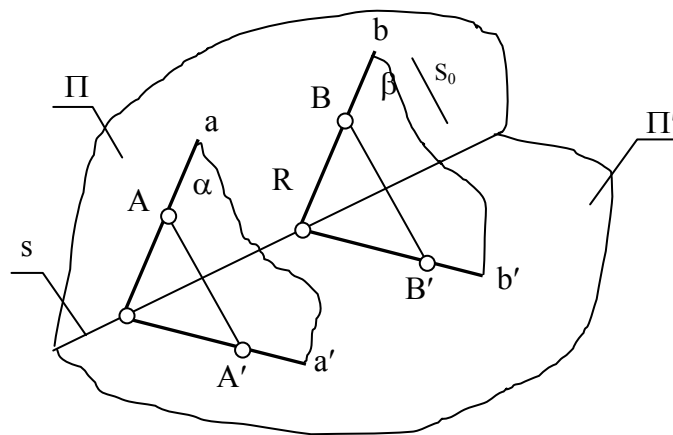
ნახ. 21 პარალელური დაგეგმილების გეომეტრიული სქემა

განვიხილოთ ნახ.21. აქ გამოსახულია პარალელური დაგეგმილების გეომეტრიული სქემა, სახელდობრ, მოცემულია Π და Π' სიბრტყეები და ნაჩვენებია ერთი კუთვნილი წერტილის ($A \in \Pi$) მეორეზე პარალელური დაგეგმილება ($A' \in \Pi'$). იმის გამო, რომ A წერტილზე S_0 მიმართულების პარალელური ერთი და მხოლოდ ერთი მაგეგმილებელი a სხივის გატარებაა შესაძლებელი, ხოლო ამ სხივის Π' -თან ერთადერთი თანაკვეთის $A' = a \cap \Pi'$ წერტილი გააჩნია, ამბობენ რომ $A \in \Pi$ წერტილს ერთადერთი პარალელური გეგმილი აქვს Π' სიბრტყეში ($A' \in \Pi'$) და პირიქით. ანალოგიურად შეგვიძლია ვიმსჯელოთ Π -ს კუთვნილი წერტილების სიმრავლიდან ადებულ ნებისმიერ წერტილზე. ამგვარ ვითარებაში შეგვიძლია ვთქვათ: Π -სა და Π' -ს შორის ჩამოყალიბებულია ისეთი წერტილოვანი შესაბამისობა, რომლის დროსაც პირველი ველის (Π) ანუ სიმრავლის ნებისმიერ A წერტილს ცალსახად შეესაბამება მეორე ველის (Π') ანუ სიმრავლის A' წერტილი და პირიქით. ასეთ შესაბამისობას *პერსპექტიულ-აფინური* ანუ *ნათესაური* შესაბამისობა ეწოდება, სხვაგვარად, ეს არის პერსპექტიული კოლინეაციის ის სახე, როცა კოლინეაციის ცენტრი (S) არასაკუთრივი წერტილია, ხოლო ღერძი (s) – საკუთრივი.

ზემოთ თქმულიდან ის გამომდინარეობს, რომ აფინურ (ნათესაურ) შესაბამისობას ახსიათებს პერსპექტიული კოლინეაციის ყველა თვისება: 1) ურთიერთცალსახა შესაბამისობა; 2) წრფეების წრფეებთან შესაბამისობა; 3) წერტილებისა და წრფეების ურთიერთკუთვნილების თვისების შენარჩუნება (მაგ., თუ $A \in a$, მაშინ $A \in a$); 4) მაგეგმილებელი წრფეების თავმოყრა დაგეგმილების ცენტრში (აფინური შესაბამისობის შემთხვევაში, იმის გამო, რომ ცენტრი (S) არასაკუთრივ წერტილს წარმოადგენს, მაგეგმილებელი სხივები ურთიერთპარალელურია); 5) $s = \Pi \Pi'$ არის ორმაგი წერტილების გეომეტრიული ადგილი (აფინური შესაბამისობის შემთხვევაში s წრფეს ნათესაობის ღერძი ეწოდება).

ჩამოთვლილი თვისებები, როგორც უკვე ითქვა, ახსიათებს პერსპექტიული კოლინეაციის ნებისმიერ სახეს და მათ შორის, აფინურ შესაბამისობასაც, მაგრამ ამ უკანასკნელისთვის დამატებით სხვა თვისებებიც არის დამახასიათებელი:

1) *ერთი ველის პარალელურ წრფეებს მეორე ველში აგრეთვე პარალელური წრფეები შეესაბამება.*



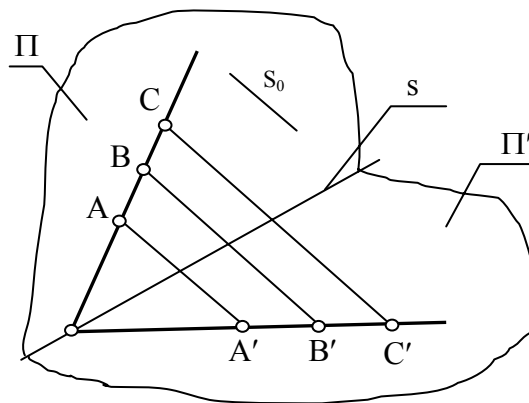
ნახ. 22 პარალელური წრფეები

ამ თვისების დასამტკიცებლად განვიხილოთ ნახ.22. Π სიბრტყეში აღებული ორი პარალელური წრფე – $a \parallel b$ დავაგეგმილოთ s_0 მიმართულების პარალელურად Π' სიბრტყეში. იმის გამო, რომ a წრფის მაგეგმილებელ α სიბრტყეში მოთავსებულია გადაკვეთილ წრფეთა წყვილი (a და AA'), რომელიც b წრფის მაგეგმილებელ β სიბრტყეში

მოთავსებულ გადაკვეთილ წრფეთა წყვილის (b და BB') პარალელურია, დაცულია ორი სიბრტყის პარალელობის ნიშანი (თუ ერთი სიბრტყის ორი გადაკვეთი წრფე შესაბამისად პარალელურია მეორე სიბრტყის ორი გადაკვეთი წრფისა, მაშინ ეს სიბრტყეები პარალელურია) და $\alpha \parallel \beta$, ვინაიდან a და b' წრფეები შესაძლოა განხილულ იქნან, როგორც ორი პარალელური სიბრტყის ($\alpha \parallel \beta$) მესამე სიბრტყით (Π') გადაკვეთის შედეგი, ისინი ურთიერთპარალელურია ანუ $a' \parallel b'$. თვისება დამტკიცებულია.

2) ერთი კვლის სამი წერტილის მარტივი ფარდობა უდრის მეორე კვლის შესაბამისი სამი წერტილის მარტივ ფარდობას.

ჯერ გავიხსენოთ “სამი წერტილის მარტივი ფარდობის” ცნება, ვთქვათ, A, B და C წერტილები ერთ წრფეზე არიან განლაგებულნი. ასეთ შემთხვევაში AC და BC მონაკვეთების ფარდობას, სამი წერტილის მარტივ ფარდობას უწოდებენ და აღნიშნავენ (ABC) სიმბოლოთი.



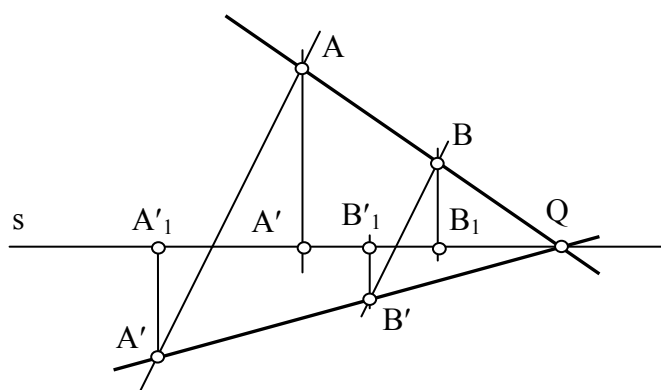
ნახ. 23 სამი წერტილის მარტივი ფარდობა

Π სიბრტყის კუთვნილი AB და C წერტილები პარალელურად დავაგეგმილოთ Π' სიბრტყეში (ნახ. 23). AB და $A'B'$ შესაბამისი წრფეები s ღერძზე, გადაიკვეთებიან Q წერტილში. ამის გამო, CQC კუთხის გვერდებზე მივიღებთ პარალელური წრფეებით მოკვეთილ მონაკვეთებს, რის შედეგადაც გვექნება: $\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$ ეს ფორმულა გამოხატავს აფინური შესაბამისობის იმ თვისებას, რომლის დამტკიცებაც გვინდოდა.3) შესაბამისი წერტილების (მაგ., A და A') ნათესაობის ღერძიდან (s) დაშორებათა ფარდობა არის მუდმივი სიდიდე, რომელიც შესაბამისი წერტილების წყვილის არჩევაზე არ არის დამოკიდებული.

განვიხილოთ ნახ. 24. აქ ნაჩვენებია შესაბამისი წერტილების ორი წყვილი და თითოეულიდან შესაბამისობის ღერძზე დაშვებული პერპენდიკულარები. ამით განსაზღვრულია ის მონაკვეთები, რომლებიც ზომავენ განსახილველი თვისების ფორმულაში ნახსენებ დაშორებებს. ესენია: $[AA_1]$, $[AA_1']$, $[BB_1]$, და $[BB_1']$. თუ მათ განვიხილავთ, როგორც

დადებით სიდიდეებს, შეგვიძლია დავწეროთ: $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AQ}{BQ}$; $\frac{A'A_1'}{B'B_1'} = \frac{A'Q}{B'Q}$

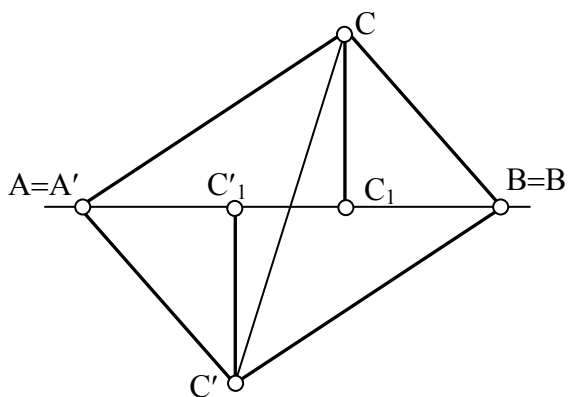
სურ.7-დან ჩანს $\frac{AQ}{BQ} = \frac{A'Q}{B'Q}$ აქედან $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{A'Q}{B'Q}$ ანუ $\frac{AA_1}{A'A_1'} = \frac{BB_1}{B'B_1'} = k = const$



ნახ. 24 შესაბამისი წერტილების ნათესაობის ღერძიდან დაშორებათა ფარდობა

k სიმბოლოთი აღნიშნულია აფინური შესაბამისობის ღერძამდე შესაბამისი წერტილების დაშორებათა მუდმივი ფარდობა.

4) აფინურ შესაბამისობაში მეოფი ორი სამკუთხედის ფართობების ფარდობა მუდმივი სიდიდეა და უდრის k -ს.



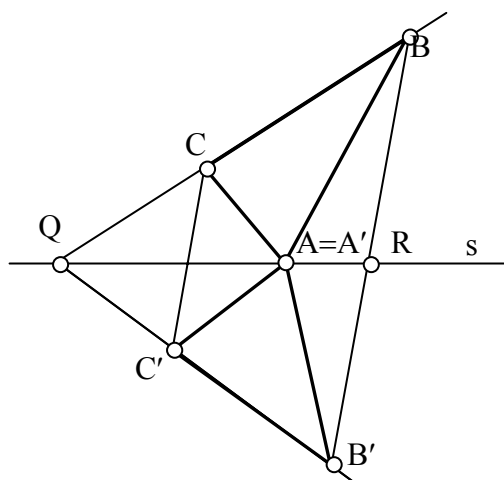
ნახ. 25 სამკუთხედის ფართობების ფარდობა

განვიხილოთ სამი შემთხვევა:

პირველი. აფინურ შესაბამისობაში მყოფ ორ სამკუთხედს აქვს ნათესაობის ღერძთან შეთავსებული საერთო გვერდი (სურ.25). შესაბამისობაში მყოფი სამკუთხედების ($\triangle ABC$ და $\triangle A'B'C'$) ფართობების

ფარდობა შესადლოა აისახოს ასე: $\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB \cdot CC_1}{A'B' \cdot C'C_1} = \frac{CC_1}{C'C_1} = k$

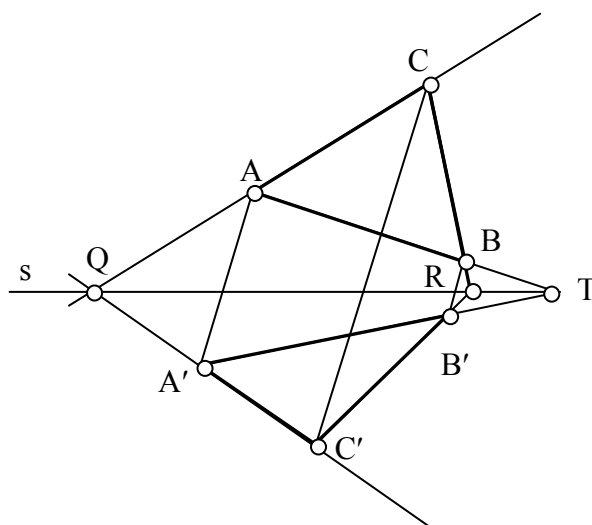
მეორე. აფინურ შესაბამისობაში მყოფ ორ სამკუთხედს აქვთ ნათესაობის ღერძთან შეთავსებული საერთო წვერო (ნახ. 26).



ნახ. 26 სამკუთხედის ფართობების ფარდობა

შესაბამისობაში მყოფი სამკუთხედების BC და $B'C'$ შესაბამისი გვერდები უნდა გადაიკვეთონ ნათესაობის s ღერძზე, რაც განსახილველ შემთხვევაში B წვეროს ემთხვევა.

მეორე თვისებიდან გამომდინარე შეგვიძლია დავწეროთ $\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = k$



ნახ. 27 სამკუთხედების ფართობების ფარდობა

მესამე. აფინურ შესაბამისობაში მყოფ სამკუთხედებს უჭირავთ ზოგადი მდებარეობა (ნახ. 27)

განვიხილოთ ABC სამკუთხედი. ამ სამკუთხედის ფართობი შესაძლოა წარმოვადგინოთ ასე:

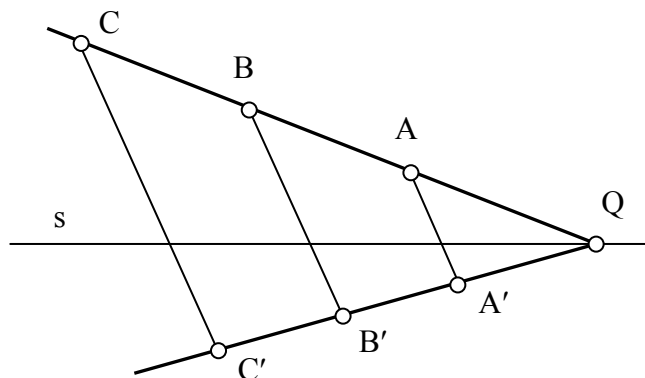
$$\Delta ABC = \Delta QRC - \Delta QBA - \Delta QRB$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ყველა სამკუთხედი უკვე განხილული ორი შემთხვევის ანალოგიურია და აქედან გამომდინარე შეგვიძლია დავწეროთ: $\Delta ABC = k \cdot \Delta QRC - k \cdot \Delta QBA - k \cdot \Delta QRB$ ან

$\Delta ABC = k(\Delta QRC - \Delta QBA - \Delta QRB) = k \cdot \Delta A'B'C'$ აქედან $\frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'} = k = \text{const}$, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ზემოთ მოყვანილი თვისებები, რომლებიც აფინურ შესაბამისობაში მყოფი სამკუთხედების ფართობებს შეეხო, შესაძლოა გავრცელდეს შესაბამისობაში მყოფ სხვა მრავალკუთხედებზეც. საქმე ისაა, რომ ნებისმიერი მრავალკუთხედი შესაძლოა დაიყოს რამდენიმე სამკუთხედად და მოცემული მრავალკუთხედის ფართობი განისაზღვროს მისი შემადგენელი სამკუთხედების ფართობების ჯამით. გარკვეული მიახლოებით შესაძლოა იგივე გავრცელდეს იმ ფიგურებზეც, რომელთა ფართობიც შემოსაზღვრულია ჩაკეტილი მრუდწირით.

ჩვენთვის განსაკუთრებით საინტერესოა აფინური შესაბამისობის შემთხვევა, როცა ორივე ბრტყელი ველი (Π და Π') ერთსა და იმავე სიბრტყეშია მოთავსებული.



ნახ. 28 აფინური შესაბამისობა

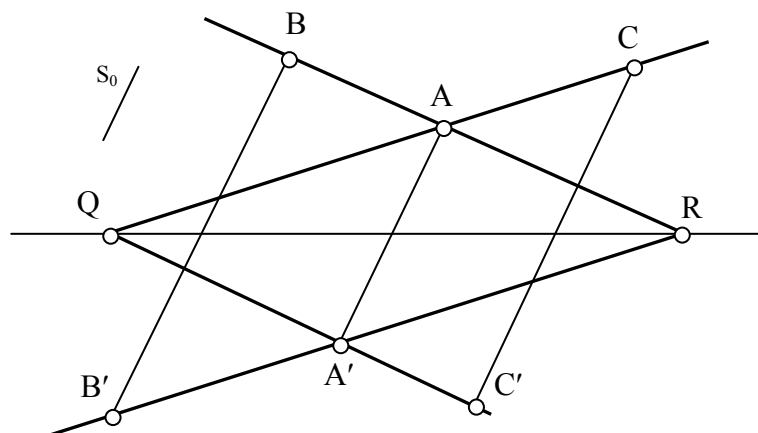
ამ შემთხვევამდე იოლად მივაღწეოთ, თუ მაგალითად, Π' -ს ვაბრუნებთ s -ის ირგვლივ Π -თან მის სრულ შეთავსებამდე. საკმე ისაა, რომ ასეთი ბრუნვის დროს, და ბუნებრივია Π -სა და Π' -ის შეთავსების მომენტშიც, აფინური შესაბამისობის ყველა თვისება უცვლელი რჩება (ნახ. 28).

განსაკუთრებით აღსანიშნავია ის გარემოება, რომ შესაბამისი წერტილების შემაერთებელი წრფეების ანუ კავშირის წრფეების პარალელურობა არ ირღვევა Π' -ის Π -თან შეთავსების შედეგადაც.

მართლაც, $\frac{AQ}{BQ} = \frac{A'Q}{B'Q}$ ტოლობა არ ირღვევა Π -სა და Π' -ის შეთავსების დროს. ამის შედეგად AA' , BB' , CC' წრფეები ურთიერთპარალელურია იმის გამო, რომ ისინი კუთხის გვერდებზე აღებული პროპორციული მონაკვეთების ბოლოების შემაერთებელ წრფეებს წარმოადგენენ.

როგორ შეიძლება განისაზღვროს აფინური შესაბამისობა, როცა ამგვარ შესაბამისობაში მყოფი ველები ერთ სიბრტყეში არიან მოთავსებული. ნათელია, რომ ამ შემთხვევაში ვერ შევძლებთ აფინური შესაბამისობის დამყარებას პარალელური დაგეგმილებით, რადგან შესაბამისობაში მყოფი ველების სიბრტყეები ერთ სიბრტყესთან არიან შეთავსებული.

წინასწარ შევნიშნავთ, რომ ერთ სიბრტყესთან შეთავსებული ორი ველის აფინური შესაბამისობა სრულიად განსაზღვრულია, თუ ცნობილია ღერძი (s) და შესაბამისობაში მყოფი ერთი წყვილი (მაგ., A და A').



ნახ. 29 აფინური შესაბამისობა

ვთქვათ, s ღერძით და AA' შესაბამისი წყვილით განსაზღვრულ შესაბამისობაში $A'B'$ და წრფეები, შესაბამისობის ღერძს (s) ორმაგ წერტილში (R) გადაკვეთენ და ამ უკანასკნელის აგება შესაძლოა ასე: $R=AB \cap s$. R -ის აგების შემდეგ AR -ის შესაბამისი $A'R$ -ის აგება სიძნელეს არ წარმოადგენს. იგი R -სა და A' -ის შეერთებით მოიძებნება. რაც შეეხება საძიებელ B' -ს, იგი გასაგები მიზეზის გამო მოთავსებული იქნება RA' წრფეზე და განისაზღვრება, როგორც B -ზე AA' -ის პარალელურად გამავალი წრფის RA' -თან გადაკვეთის შედეგი. ანალოგიურად მოიძებნება C' თუ მოცემულია C (ნახ. 29) და ა.შ..

თუ ნახ. 27-ზე ნახვენებ გამოსახულებას მოვკეცავთ s ღერძზე, Π' ველი Π ველის პარალელური გეგმილი აღმოჩნდება, რაც გამომდინარეობს აფინური შესაბამისობის თვისებიდან: აფინური შესაბამისობა არ ცვლის სამი წერტილის მარტივ ფარდობას და შესაბამისად კავშირის წრფეების პარალელურობასაც არ არღვევს.

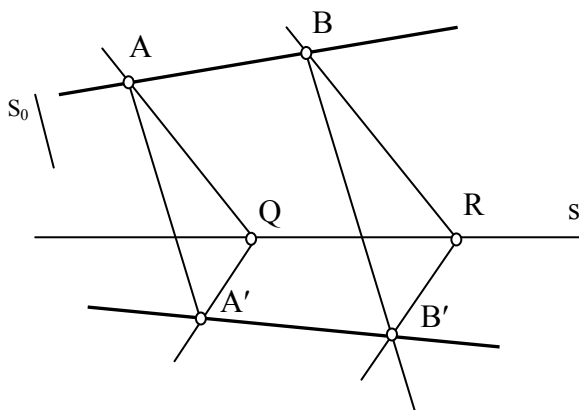
ნახ. 29-ზე ნახვენებია აფინური შესაბამისობის განსაზღვრა ღერძით (s) და შესაბამისობაში მყოფი წერტილების ერთი წყვილით (AA'). ამგვარად, განსაზღვრულ შესაბამისობაში თავისუფლად განისაზღვრება შესაბამისობაში მყოფი წერტილების წყვილები. მაგალითად, თუ მოცემულია B , ვიპოვიოთ B' -ს; მოცემულია C , ვიპოვიოთ C' -ს; მოცემულია B' , ვიპოვიოთ B -ს და ა.შ..

განხილულ მაგალითებში დანაკლისი შესაბამისი წერტილის აგების ზემოთ მითითებული ხერხი შესაძლოა არ გამოგვადგეს, მაგალითად მაშინ, როცა მოცემულ A და B წერტილებზე გამავალი წრფე შესაბამისობის ღერძს ნახაზის ფარგლებში არ ჰკვეთს და იგი სახაზავი ფართობის გარეთაა მოთავსებული. ამასთან დაკავშირებით განვიხილოთ ნახ.30. აქ აფინური შესაბამისობა კვლავინდებურად განსაზღვრულია s ღერძით და AA' შესაბამისი წერტილების წყვილით. მოცემულია აგრეთვე B და საჭიროა მისი შესაბამისი B' -ის აგება. წინა მაგალითისაგან განსხვავებით AB წრფე s ღერძს ნახაზის ფარგლებში არ ჰკვეთს და იგი სახაზავი ფართობის გარეთაა მოთავსებული. მდგომარეობიდან გამოსვლის მიზნით მივმართოთ აგების სხვა ხერხს.

ავაგოთ A -დან A' -მდე რაიმე ტეხილი, მაგ., AQA' . ანალოგიური ტეხილის აგება შესაძლებელი იქნება მოცემულ წერტილზეც. სახელდობრ, ჯერ ავაგოთ $BR \parallel AQ$, ხოლო R -დან გაავაგლოთ QA' -ის პარალელური წრფე და ამ უკანასკნელზე AA' -ის პარალელურად, გადმოვიტანოთ B წერტილი და დავნიშნოთ საძიებელი B' .

როგორც ნახ30-დან ჩანს, აგების აღწერილი ხერხი შესაძლოა გამოყენებულ იქნას მოცემული ელემენტების ნებისმიერი განლაგების შემთხვევაში. ამ ხერხს ხშირად მსგავსი სამკუთხედების ხერხსაც უწოდებენ. საქმე ისაა, რომ $\triangle AQA'$ და $\triangle BRB'$ მსგავსი სამკუთხედებია.

ამრიგად, განვიხილოთ ორი ბრტყელი ველის პერსპექტიულ-აფინური ანუ ნათესაური შესაბამისობა, შევნიშნავთ, რომ ამგვარი შესაბამისობა მყარდება, როცა ხდება ერთი ბრტყელი ველის ანუ სიბრტყის წერტილთა სიმრავლის პარალელური დაგეგმილება მეორე სიბრტყეში.



ნახ. 30 პერსპექტიულ-აფინური შესაბამისობა

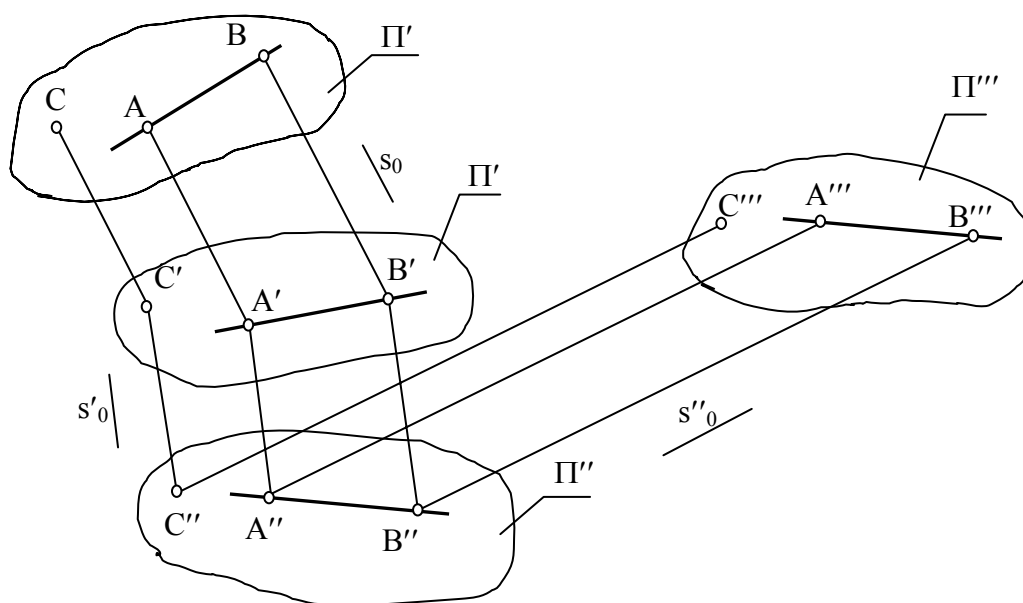
მკითხველს ვთხოვთ ყურადღება მიაქციოს იმ გარემოებას, რომ შესაბამისობაში მეოფი ველები განხილულ შემთხვევაში ერთ სიბრტყესთან არიან შეთავსებულნი და შესაბამისობაში მეოფი წერტილების წყვილები პარალელურ წრფეებში არიან განლაგებულნი. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, აფინურ შესაბამისობაში მეოფ ბრტყელ წერტილოვან ველებს პარალელურ-პერსპექტიული განლაგება აქვთ.

ბრტყელი ველების აფინური შესაბამისობა შესაძლოა გაგებულ იქნას, როგორც ისეთი კოლინეარული შესაბამისობა, რომელშიც არ იცვლება წრფეთა პარალელურობა და სამი წერტილის მარტივი ფარდობა.

კერძო შემთხვევაში, თუ მოცემული ბრტყელი ველისათვის (Π) გამოვიყენებთ მსგავსების გარდაქმნას, მივიღებთ (Π') ველს, რომელიც იქნება Π სიბრტყის აფინური ველი. ამგვარი დასკვნა გამომდინარეობს იქედან, რომ მსგავსების გარდაქმნის შემდეგ პირველი ველის პარალელურ წრფეებს შეესაბამება მეორე ველის პარალელური წრფეები, ასე რომ, ეს არის აფინური გარდაქმნა.

2.9 ზოგადი აფინური შესაბამისობა

როგორც უკვე აღვნიშნეთ პერსპექტიულ-აფინური შესაბამისობა შესაძლოა ჩამოყალიბდეს ერთი სიბრტყის მეორე სიბრტყეზე პარალელური დაგეგმილების შედეგად. ასევე აღვნიშნეთ, რომ პერსპექტიულ-აფინური შესაბამისობის გარდა არსებობს აფინური შესაბამისობა და პირველისაგან იგი განსხვავებულია შესაბამისობაში მყოფი ბრტყელი ველების მდებარეობით ანუ როცა ეს ველები აღარ იმყოფებიან პარალელურ-პერსპექტიულ განლაგებაში. განვიხილოთ აფინური შესაბამისობის ამგვარი ზოგადი შემთხვევა.

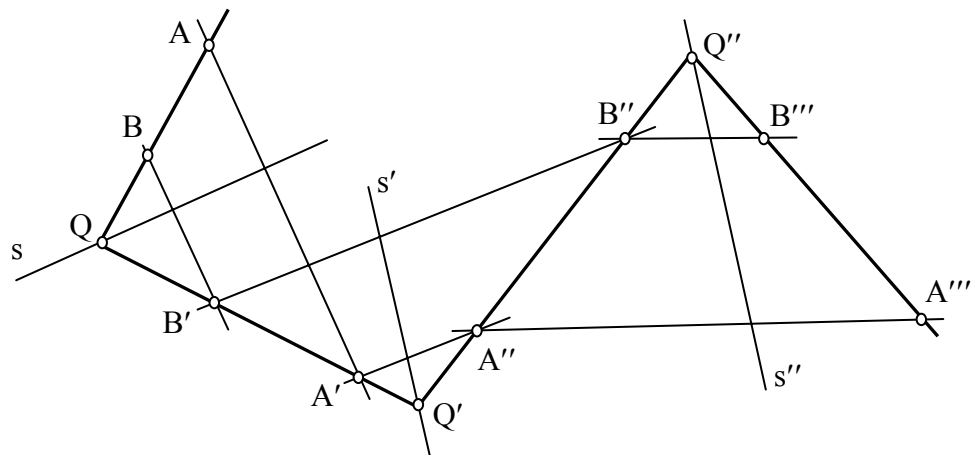


ნახ. 31 მრავალჯერადი პარალელური დაგეგმილება

31-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ორი სიბრტყის ისეთი შესაბამისობა, რომელიც მიღებულია მრავალჯერადი პარალელური დაგეგმილებით.

ვთქვათ, თანამიმდევრობით აგებულია Π სიბრტყის პარალელური გეგმილი Π' სიბრტყეზე, Π' სიბრტყის პარალელური გეგმილი Π'' სიბრტყეზე და Π'' სიბრტყის პარალელური გეგმილი Π''' სიბრტყეზე. ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ პირველ შემთხვევაში დაგეგმილების მიმართულებაა – s , მეორეში – s' ხოლო მესამეში – s'' . პარალელური დაგეგმილების ამ კომბინაციის შედეგად შესაძლოა ვთქვათ, რომ Π და Π''' სიბრტყეებს შორის დამყარებულია შესაბამისობა, რომელშიც პირველი სიბრტყის A, B, C წერტილებს შეესაბამება რიგით მეოთხე სიბრტყის (Π''') A''', B''', C''' წერტილები. ძნელი არ არის იმის მიხვედრა, რომ ამ შესაბამისობაში Π''' სიბრტყის წერტილები არ წარმოადგენენ Π სიბრტყის წერტილების პარალელურ გეგმილებს, მაგრამ ამ შემთხვევაშიც ძალაში რჩება პერსპექტიულ-აფინური შესაბამისობის ყველა თვისება. მართლაც Π და Π''' სიბრტყეების შესაბამისობა

შესაძლოა განხილულ იქნას, როგორც თანამიმდევრული პარალელური დაგეგმილების ჯაჭვი. იმის გამო, რომ ამ ჯაჭვის ყოველ რგოლში შენარჩუნებულია კოლინეარულობა (წერტილთა წრფივ სიმრავლეს წერტილთა წრფივი სიმრავლე შეესაბამება) და სამი წერტილის მარტივი ფარდობა (პარალელურ წრფეთა მონაკვეთების სიგრძეთა ფარდობა უცვლელია), იგივე თვისებები ძალაში უნდა დარჩეს Π და Π''' სიბრტყეთა შეჯამებულ შესაბამისობაში. აქედან გამომდინარე, Π და Π''' სიბრტყეების შესაბამისობას ეწოდება ზოგადი აფინური შესაბამისობა. შესაბამისობის ამგვარ ცნებამდე მივყავართ პერსპექტიულ-აფინური გარდაქმნის ჯაჭვის ანუ პარალელური დაგეგმილების მრავალჯერადი გამოყენების საშუალებით.



ნახ. 32 პერსპექტიულ-აფინური გარდაქმნა

ანალოგიური მსჯელობით შესაძლოა პერსპექტიულ-აფინური შესაბამისობის ჯაჭვი განვიხილოთ ისე, რომ მისი ყველა რგოლი ერთ სიბრტყეში იქნას დატოვებული, რაც იქნებოდა სიბრტყის თავისთავში პერსპექტიულ-აფინური გარდაქმნა.

უკვე ვიცით, რომ პერსპექტიულ-აფინური გარდაქმნა შესაძლოა მოცემული იყოს შესაბამისობის ღერძით (s) და შესაბამისობაში მყოფი წერტილების წყვილით. მაგალითად, 32-ე ნახაზზე ჯაჭვის პირველი რგოლი მოცემულია s ღერძით და AA' წყვილით, მესამე – s'' ღერძით და $A''A'''$ წყვილით. შეჯამებულ შესაბამისობაში A წერტილის შესაბამისია A''' წერტილი. ამავე ნახაზზე ნახვენებია B წერტილის შესაბამისი B''' წერტილი.

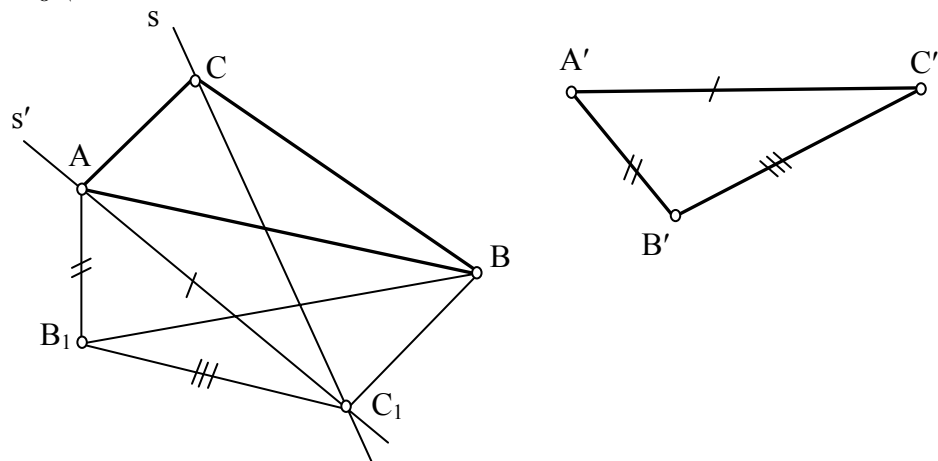
ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან ჩანს, რომ გარდაქმნა, რომელიც მიღებულია პარალელური დაგეგმილების ანუ პერსპექტიულ-აფინური გარდაქმნების საშუალებით, ინარჩუნებს კოლინეარობის თვისებას და სამი წერტილის მარტივ ფარდობას. აქედან გამომდინარე კი შეგვიძლია დავასკვნათ:

აფინური გარდაქმნა შესაძლოა ეწოდოს Π სიბრტყის ყოველ გარდაქმნას Π' სიბრტყეში, როცა შენარჩუნებულია კოლინეარობა და სამი წერტილის მარტივი ფარდობა.

განვიხილოთ წინადადება: თანამიმდევრობით შესრულებული ორი პარალელური დაგეგმილების შედეგად Π სიბრტყე ყოველთვის შეიძლება გარდაიქმნას Π' სიბრტყეში ისე, რომ Π სიბრტყის კუთვნილი რაიმე სამკუთხედი (ABC) პერსპექტიულ-აფინური შესაბამისობაში აღმოჩნდეს Π' -ის კუთვნილ ისეთ სამკუთხედთან, რომელიც ნებისმიერად მოცემული სამკუთხედის ($A'B'C'$) კონგრუენტული იქნება.

მოყვანილ წინადადებაში დასარწმუნებლად განვიხილოთ 33-ე სურათი, რომელზეც მოცემულია Π სიბრტყის კუთვნილი ABC და აგრეთვე, ნებისმიერი $A'B'C'$ სამკუთხედები. უნდა დავამტკიცოთ, რომ ორჯერადი პარალელური დაგეგმილებით შესაძლოა Π სიბრტყის ისეთი გარდაქმნა, რომელიც ABC სამკუთხედს ნებისმიერად მოცემულ $A'B'C'$ სამკუთხედში გადაიყვანს.

A წერტილზე გაავადოთ ნებისმიერი სხივი და მასზე გადავდოთ $[AC_1]=[A'C']$ მონაკვეთი. ეს უკანასკნელი მივიღოთ სამკუთხედის ერთ გვერდად და მასთან ავაგოთ $A'B'C'$ სამკუთხედის კონგრუენტული $A_1B_1C_1$ სამკუთხედი. AB წრფე მივიჩნიოთ პერსპექტიულ-აფინური შესაბამისობის ღერძად, ხოლო C და C_1 წერტილები – შესაბამისობაში მყოფ წერტილებად. ამით განვსაზღვრავთ პერსპექტიულ-აფინურ შესაბამისობას, რომელიც ABC სამკუთხედს გადაიყვანს ABC სამკუთხედში.



ნახ. 33 პერსპექტიულ-აფინური შესაბამისობა

ანალოგიური მსჯელობით AC_1 მივიღოთ ახალი პერსპექტიულ-აფინური შესაბამისობის ღერძად ხოლო B და B_1 წერტილები, ამ შესაბამისობის წერტილების წყვილად. ამგვარად დამყარებული პერსპექტიულ-აფინური შესაბამისობა ABC_1 სამკუთხედს გადაიყვანს AB_1C_1 სამკუთხედში. ამრიგად, Π სიბრტყის ორჯერადი გარდაქმნით გადავალოთ Π' სიბრტყეში, ხოლო ABC სამკუთხედი გადავა AB_1C_1

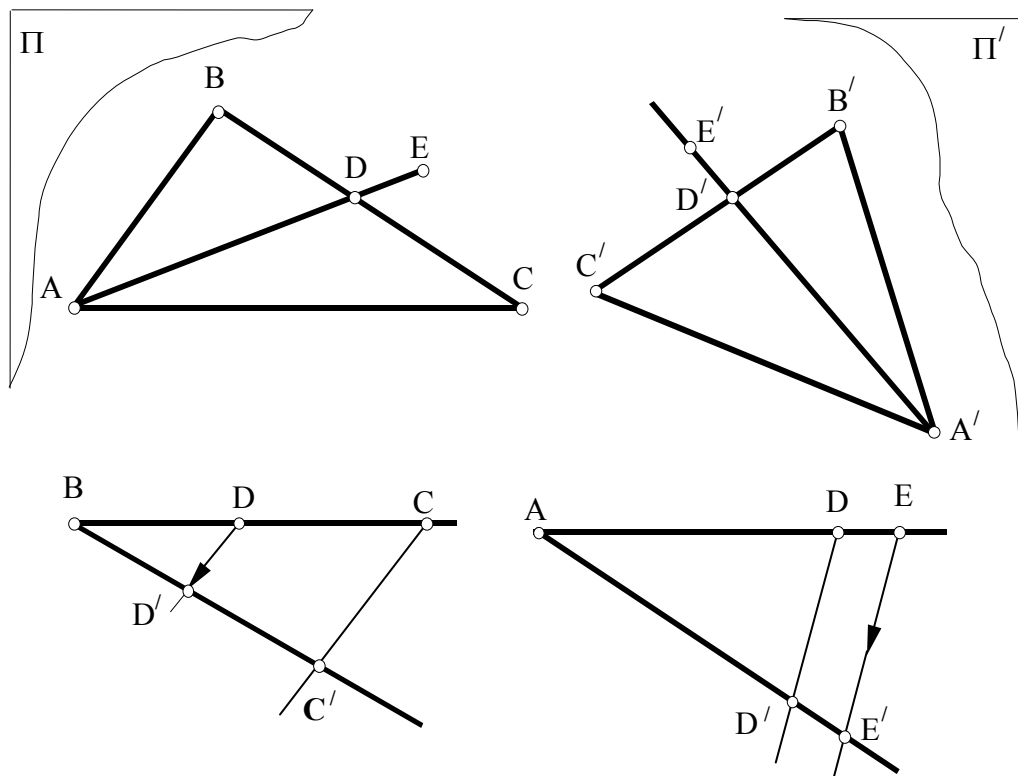
სამკუთხედში, რომელიც ჩვენივე აგების მიხედვით მოცემული $A'B'C'$ სამკუთხედის კონგრუენტულია.

შენიშვნა. იმისათვის, რომ Π სიბრტყის აფინურმა გარდაქმნამ $\triangle ABC$ გადაიყვანოს $\triangle A'B'C'$ -ში, საჭიროა განხილულ ორჯერად პარალელურ დაგეგმილებას დაეუმატოთ მოძრაობა, რომელიც სიბრტყის გადაადგილებას განახორციელებს ისე, რომ $\triangle AB_1C_1$ შეუთავსდეს $\triangle A'B'C'$ -ს. Π სიბრტყის ამგვარი გადაადგილება ანუ მოძრაობა სივრცეში, რომელიც არ ცვლის მის მთლიანობას, წარმოადგენს აფინურ გარდაქმნას. საქმე ისაა, რომ ამ გარდაქმნაში შენარჩუნებულია სამი წერტილის მარტივი ფარდობა.

ფორმულირებათა გამარტივების მიზნით, ჩვეულებრივ, არ მიუთითებენ გადაქმნის შევსებაზე მოძრაობით.

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან ის შედეგი გამოდინარეობს, რომ ნებისმიერად მოცემული სამკუთხედების წყვილიდან ერთი შესაძლოა განხილულ იქნას, როგორც მეორის აფინურად შესაბამისი.

განვიხილოთ წინადადება: არსებობს მხოლოდ ერთი აფინური შესაბამისობა, რომელსაც ერთი სიბრტყის კუთვნილი (ABC) სამკუთხედი გადაჰყავს მეორე სიბრტყის კუთვნილ $(A'B'C')$ სამკუთხედში



ნახ. 34 აფინური შესაბამისობა

მოყვანილ წინადადებაში დასარწმუნებლად განვიხილოთ 34-ე ნახაზი. ვთქვათ, არსებობს აფინური გარდაქმნა, რომელსაც ABC

სამკუთხედი გადაჰყავს $A'B'C'$ სამკუთხედში. ავირჩიოთ ნებისმიერი $E \in \Pi$ წერტილი და ვცადოთ მისი შესაბამისი $E' \in \Pi'$ წერტილის აგება. ამისათვის E შევაერთოთ A -თან და დავნიშნოთ $D = AE \cap BC$ წერტილი.

იმის გამო, რომ აფინურ შესაბამისობაში არ იცვლება სამი წერტილის მარტივი ფარდობა, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$(BCD) = (B'C'D')$$

აქედან D –ს შესაბამისი D' წერტილი ცალსახად განისაზღვრება $B'C'$ -ზე (34-ე ნახაზზე ნაჩვენებია გრაფიკული აგება, რომელიც დაფუძნებულია თაღესის თეორემაზე).

ანალოგიური მსჯელობით, იმის გამო, რომ $(ADE) = (A'D'E')$, შეგვიძლია E –ს შესაბამისი E' ცალსახად განვსაზღვროთ $A'D'$ წრფეზე (34-ე ნახაზზე ნაჩვენები აგება, აქაც თაღესის თეორემაზეა დაფუძნებული).

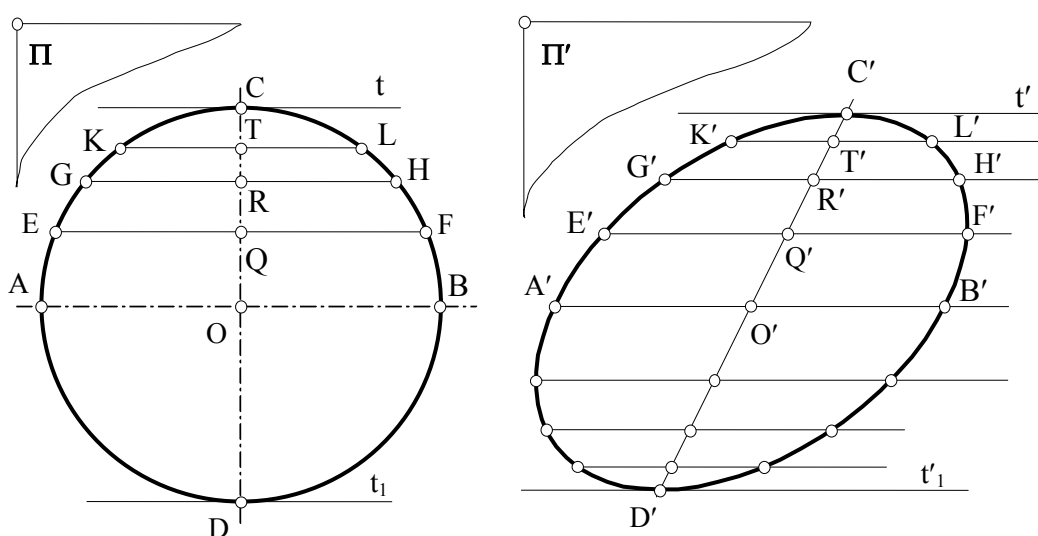
ამრიგად, ერთი სიბრტყის მეორე სიბრტყედ აფინურ გარდაქმნაში, რომელსაც ABC სამკუთხედი გადაჰყავს $A'B'C'$ სამკუთხედში, წერტილების შესაბამისობა განსაზღვრულია ცალსახად. ამგვარი დასკვნის მართებულობა ნაჩვენებია E წერტილის მაგალითზე (ნახ. 34).

მოყვანილი მსჯელობიდან საინტერესოა ასეთი შედეგი:

ორი სიბრტყის აფინური შესაბამისობა სრულიად განსაზღვრულია, თუ მოცემულია შესაბამისი სამკუთხედების წყვილი.

2.10 ელიფსი როგორც წრეწირის აფინურად შესაბამისი მრუდი

ვთქვათ ბრტყელ ველს (Π და Π') შორის დამყარებულია აფინური შესაბამისობა. ჩვენთვის უკვე ცნობილია, რომ ასეთ შემთხვევაში ყოველ $\Phi \in \Pi$ ფიგურას შეესაბამება მისი აფინური $\Phi' \in \Pi'$ ფიგურა. მაგალითად, Π ველის კუთვნილ კვადრატს Π' ველში შეესაბამება ოთხკუთხედი. აფინური შესაბამისობის თვისებებიდან გამომდინარე ეს ოთხკუთხედი იქნება პარალელოგრამი, იმის გამო, რომ აფინურ შესაბამისობაში წრფეთა პარალელურობა არ ირღვევა. კვადრატის დიაგონალები ერთმანეთს შუაზე ყოფენ. ეს თვისებაც შენარჩუნებული იქნება და კვადრატის აფინურად შესაბამისი ფიგურის – პარალელოგრამის დიაგონალებიც შუაზე გაყოფენ ერთმანეთს. ამასთან კვადრატის ტოლი მონაკვეთები (იგულისხმება გვერდები და დიაგონალები), აფინურ პარალელოგრამში არატოლ მონაკვეთებში გადავლენ. როგორც ვხედავთ, აფინურ გარდაქმნაში ყოველი ფიგურის ზოგიერთი თვისება უცვლელია (ასეთ თვისებებს აფინური გარდაქმნის ინვარიანტები ეწოდება), ხოლო ზოგიერთი კი განიცდის ცვლილებას. ამ თვალსაზრისით შესაძლოა გაანალიზებულ იქნას ყოველი ფიგურა და მათ შორის, წრეწირი და ელიფსი. [70]



ნახ. 35 წრეწირის აფინურად შესაბამისი მრუდი

წინა თავში ჩამოვყალიბეთ წინადადება: სიბრტყეთა შორის აფინური შესაბამისობა ცალსახად არის განსაზღვრული, თუ მოცემულია შესაბამის სამკუთხედთა ერთი წყვილი. ამ წინადადების საფუძველზე განვიხილოთ მოცემული წრეწირის აფინურად შესაბამისი ფიგურის აგება (ნახ. 35), თუ ცნობილი იქნება წრეწირის სამი ნებისმიერი წერტილი.

წინასწარ შევნიშნავთ, რომ წრეწირის აფინურად შესაბამის ფიგურას ეწოდება ელიფსი. ელიფსის ამგვარი განმარტება შესაძლებლობას გვაძლევს დავადგინოთ ის თვისებები, რომლებიც წრეწირის აფინური თვისებებიდან იქნება გამომდინარე. ამასთან დაკავშირებით განვიხილოთ სიმეტრიის ცენტრის, შეუღლებული დიამეტრებისა და მხეხების საკითხი.

ცნობილია, რომ წრეწირი ცენტრალურ-სიმეტრიული მრუდია ანუ აქვს სიმეტრიის ცენტრი. წრეწირის ყოველ დიამეტრს ამ წრეწირის ცენტრი შუაზე ყოფს. იმის გამო, რომ აფინურ გარდაქმნაში არ ირღვევა სამი წერტილის მარტივი ფარდობა, წრეწირის აფინურად შესაბამისი ფიგურა – ელიფსი უნდა ხასიათდებოდეს ანალოგიური თვისებით ანუ ელიფსის ცენტრიც უნდა ყოფდეს მის დიამეტრებს შუაზე და წრეწირის ანალოგიურად, ელიფსიც უნდა იყოს ცენტრალურ-სიმეტრიული მრუდი.

ცნობილია აგრეთვე, რომ წრეწირის ორი ურთიერთპერპენდიკულარული დიამეტრიდან ერთი შუაზე ყოფს მეორის პარალელურ ყველა ქორდას. ასეთ დიამეტრებს შეუღლებული დიამეტრები ეწოდებათ. ამ განმარტებიდან ჩანს, რომ წრეწირის ურთიერთპერპენდიკულარული დიამეტრების ნებისმიერი წყვილი იმავე დროს შესაძლოა განხილულ იქნას, როგორც შეუღლებული დიამეტრები. ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ წრეწირისათვის შეუღლებული დიამეტრების თვისება ემთხვევა ამ დიამეტრების ურთიერთპერპენდიკულარობის თვისებას.

II კელის აფინურად გარდაქმნის შემდეგ (იხ. ნახ. 35) დავინახავთ ასეთ სურათს: წრეწირის შეუღლებული დიამეტრები გადავლენ ელიფსის შეუღლებულ დიამეტრებში (მაგალითად, AB და CD

შეუღლებული დიამეტრები გადავლენ შესაბამისად $A'B'$ და $C'D'$ შეუღლებულ დიამეტრებში).

საქმე ისაა, რომ დიამეტრების შეუღლებულობის თვისება ეს არის ერთის მიერ მეორის პარალელური ქორდების შუაზე გაყოფა, რაც არ ირღვევა აფინურ გარდაქმნაში. აქედან გამომდინარე, ელიფსის $C'D'$ დიამეტრი შუაზე ყოფს $A'B'$ დიამეტრის პარალელურ ყველა ქორდას.

ამგვარი მსჯელობიდან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ დიამეტრების შეუღლების თვისება აფინურია, ხოლო მათი ურთიერთპერპენდიკულარულობა, როგორც წესი, არააფინური. ამ განმარტებაში “როგორც წესი” მიუთითებს იმაზე, რომ არსებობს გამონაკლისიც, რაზეც ქვემოთ გვექნება საუბარი. ახლა კი დავაფიქსიროთ, რომ AB და CD ურთიერთპერპენდიკულარულ დიამეტრებს, ზოგადად არაურთიერთპერპენდიკულარული $A'B'$ და $C'D'$ დიამეტრები შეესაბამებათ.

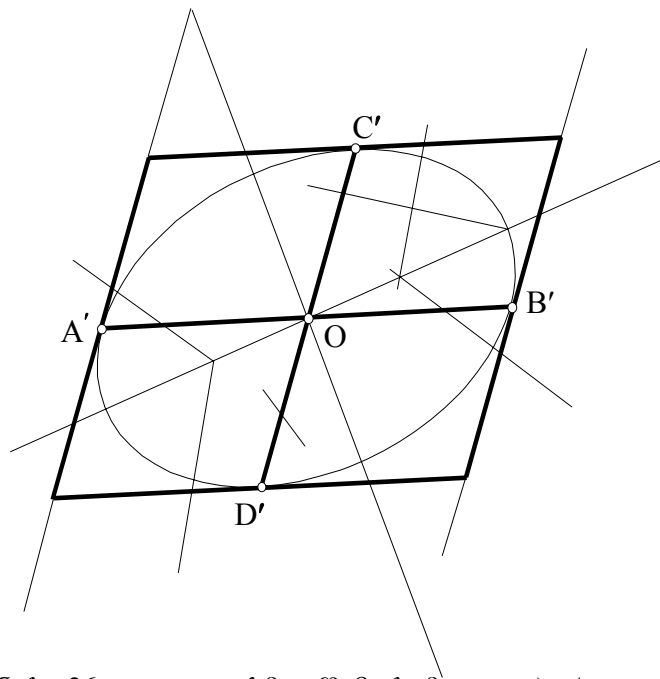
35-ე ნახაზზე ნაჩვენებია წრეწირის C და D წერტილებში გავლებული მხეხები (t და t_1).

როგორც ცნობილია, წრეწირის მხეხი შეხების წერტილში გამავალი დიამეტრის AB და CD პერპენდიკულარულია. ამის გამო, მაგალითად t მხეხი CD დიამეტრის პერპენდიკულარულია, მაგრამ CD -ს შეუღლებული დიამეტრისადმი (AB) – პარალელური. აქედან, წრეწირისათვის დიამეტრის ბოლოში გავლებული მხეხი ამ დიამეტრის პარალელურია. იმის გამო, რომ პარალელურობა აფინური გარდაქმნის ინვარიანტულ თვისებას წარმოადგენს, ელიფსისათვისაც მხეხისა და დიამეტრის ამგვარი განლაგება უცვლელად რჩება ძალაში ანუ ერთი დიამეტრის ბოლოში გავლებული ელიფსის მხეხი, მეორე დიამეტრის პარალელურია (იხ. ნახ. 34. წრეწირის t' და t_1' მხეხები და ამ მხეხების აფინურად შესაბამისი t' და t_1' ელიფსის მხეხები).

დავუბრუნდეთ ისევ 35-ე ნახაზს და განვიხილოთ წრეწირის აფინურად შესაბამისი მრუდის – ელიფსის აგება. ამ სურათზე Π და Π' ბრტყელი ველების აფინური შესაბამისობა განსაზღვრულია წერტილების სამი წყვილით AA', BB' – და CC' . როგორც სურათიდან ჩანს, $A'B'$ დიამეტრი წრეწირის AB დიამეტრის შესაბამისია, ელიფსის O'

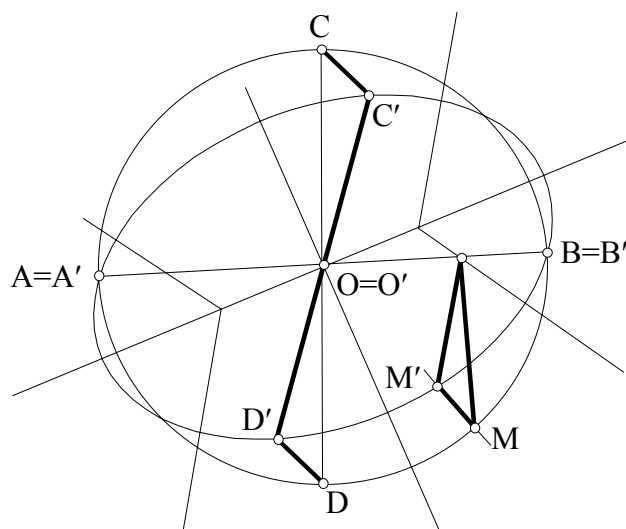
ცენტრი განსაზღვრულია, როგორც $A'B'$ დიამეტრის შუა წერტილი. რაც შეეხება Q', R' და T' , აგრეთვე E', G', K', L', H' და F' წერტილებს, ისინი მოძებნილია აფინური შესაბამისობის იმ თვისების გათვალისწინებით, რომ ამ შესაბამისობაში სამი წერტილის მარტივი ფარდობა უცვლელია და გამომდინარეობს წინა თავის დასკვნით ნაწილში ნაჩვენები აგებებიდან (იხ. ნახ.34).

თუ Π ველის კუთვნილ წრეწირზე შემოვხაზავთ კვადრატს, მაშინ Π' ველში მივიღებთ მოცემული წრეწირის აფინურად შესაბამის მრუდზე – ელიფსზე შემოხაზულ პარაბელოგრამს. პრაქტიკაში, ელიფსის ფორმის სწრაფი განსაზღვრისათვის ხშირად მიმართავენ ამ ელიფსის გარშემო შემოხაზული პარაბელოგრამის გამოყენებას. ამგვარი პარაბელოგრამის აგება კი იოლია, თუ ცნობილია ელიფსის ორი შეუღლებული დიამეტრი, მაგალითად, $A'B'$ და $C'D'$ (ნახ.36).



ნახ. 36 ელიფსზე შემოხაზული პარაბელოგრამი

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ მოცემულია ორი გადაკვეთილი მონაკვეთი ($A'B'$ და $C'D'$), რომელთა თანაკვეთის წერტილი (O) თითოეულ მათგანს შუაზე ყოფს. მოცემული მონაკვეთები მივიღოთ ელიფსის შეუღლებულ დიამეტრებად და დავამტკიცოთ, რომ ამგვარი მონაკვეთები სავსებით საკმარისია ერთადერთი ელიფსის ასაგებად (ნახ. 37).

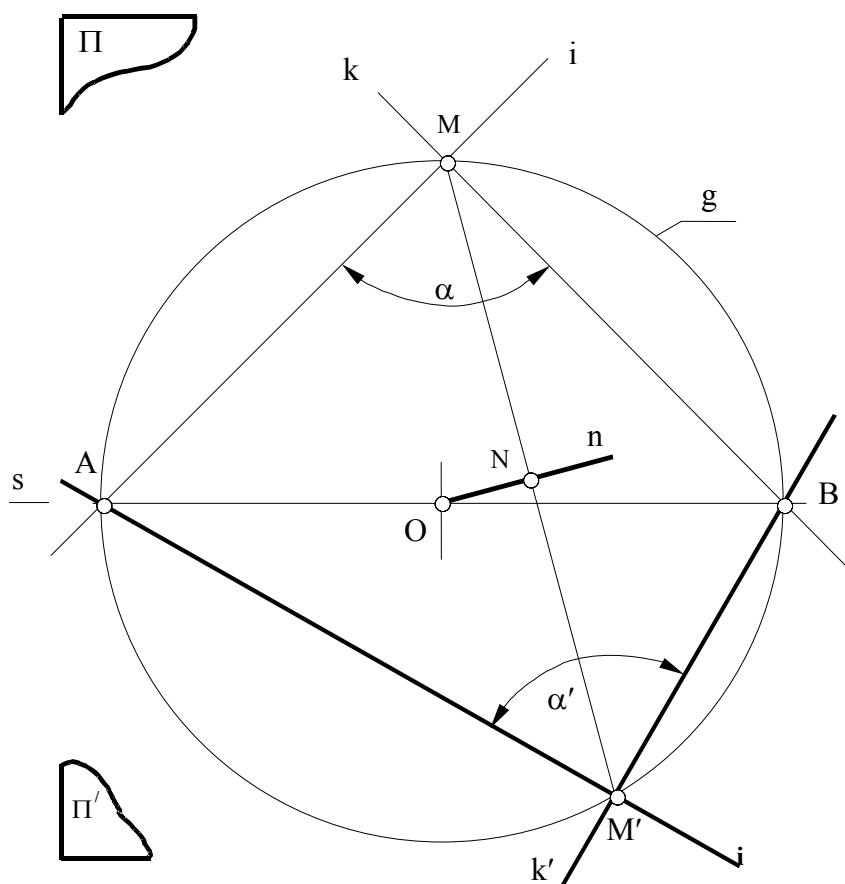


ნახ. 37 ელიფსი

$A'B'$ ღერძი მივიღოთ Π და Π' კვლების ნათესაობის ღერძად ისე, რომ Π -ს კუთვნიდეს წრეწირი, ხოლო Π' -ს ელიფსი. ამგვარი დაშვებით ელიფსის $A'B'$ დიამეტრის შესაბამისი იქნება წრეწირის AB დიამეტრი, რომლებიც ურთიერთთან იქნებიან შეთავსებული – $A'B'=AB$. იმის გამო, რომ ჩვენი შეთანხმებით $A'B'$ და $C'D'$ მონაკვეთები ასაგები ელიფსის შეუღლებულ დიამეტრებს წარმოადგენენ, ამ ელიფსის მონათესავე წრეწირის დიამეტრების შესაბამისი წყვილიც შეუღლებული იქნება და აქედან გამომდინარე – ურთიერთპერპენდიკულარული ($AB \perp CD$). ელიფსის C' წერტილის შესაბამისი წერტილი წრეწირზე იქნება C წერტილი. აქედან გამომდინარე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ Π და Π' კვლებს შორის დამყარებული აფინური შესაბამისობა სრულიად განსაზღვრულია, რადგანაც ცნობილია ამ შესაბამისობის ღერძი ($A'B'=AB$) და შესაბამისი C და C' წერტილების წყვილი (ანალოგიურია D და D' წერტილების წყვილი). AB – დიამეტრიანი შესაბამისი წრეწირის აგების შემდეგ შეგვიძლია ავაგოთ საძიებელი ელიფსის წერტილების ნებისმიერი სიმრავლე. ამ სიმრავლის დახასიათებისთვის ნახ.37-ზე ნაჩვენებია წრეწირზე ნებისმიერად აღებული M წერტილის აფინურად შესაბამისი M' -ის ანუ საძიებელი ელიფსის კუთვნილი წერტილი აგება.

2.11 აფინურად შესაბამისი ველების მთავარი მიმართულებანი

დავუშვათ, რომ Π ველის კუთვნილი k და l გადაკვეთილ წრფეთა წყვილი აფინურად შეესაბამება Π' ბრტყელი ველის კუთვნილ k' და l' გადაკვეთილ წრფეთა წყვილს. აფინურ შესაბამისობაში მეოფ წრფეთა წყვილებს შორის მდებარე კუთხეთა ურთიერთდამოკიდებულება, აფინური შესაბამისობის ინვარიანტულ თვისებებში არ შედის. სახელდობრ, თუ ერთი კუთხე მართია, მეორე ნებისმიერი შეიძლება იყოს, მაგრამ არსებობს გამონაკლისიც, როცა ერთი ბრტყელი ველის კუთვნილ ურთიერთპერპენდიკულარულ გადაკვეთილ წრფეთა წყვილს მეორე ველის აგრეთვე ურთიერთპერპენდიკულარული გადაკვეთილ წრფეთა წყვილი შეესაბამება. [70] ამ გამონაკლისის მისაგნებად განვიხილოთ 38-ე ნახაზი.



ნახ. 38 აფინურად შესაბამისი ველების მთავარი მიმართულებები

ვთქვათ, $K \perp l$ და $K' \perp l'$. $A = l \cap l'$ და $B = k \cap k'$ წერტილები განსაზღვრავენ აფინური შესაბამისობის ღერძს (s). მართი კუთხის M წვეროს აფინურად შეესაბამება აგრეთვე მართი კუთხის M' წვერო. აქედან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ AB მონაკვეთზე, როგორც დიამეტრზე აგებული წრეწირი $(g)M$ და M' წერტილებზე გამავალი იქნება. ამ წრეწირის ცენტრის აგება ძნელი არ არის და იგი MM' ქორდის შუა პერპენდიკულარისა და ღერძის თანაკვეთაში იქნება მოთავსებული. ამგვარი ანალიზი შესაძლოა საფუძვლად დაედოს გეომეტრიული აგების მეთოდს, რომლის საშუალებითაც შევძლებთ ამგვარი ამოცანების ამოხსნას: ვთქვათ ორი ველის პერსპექტიულ-აფინური შესაბამისობა განსაზღვრულია ღერძით (s) და წერტილების წყვილით (M და M') და საჭიროა M -ზე გაავალოთ ურთიერთპერპენდიკულარული წრეების წყვილი (k და l) ისე, რომ ამ წრეეთა შესაბამისი წრეების წყვილი (k' და l') აგრეთვე ურთიერთპერპენდიკულარული გამოვიდეს.

დასმული ამოცანის ჩვენებისათვის ვისარგებლოთ ისევ 38-ე ნახაზით რომელიც ზემოთ ანალიზისათვის იყო მოყვანილი.

წარმოვიდგინოთ, რომ სურათზე დაფიქსირებულია მხოლოდ ამოცანის ამოსავალი მონაცემები: შესაბამისობის s ღერძი და შესაბამისობაში მყოფი წერტილების M და M' წყვილი. როგორც უკვე ვიცით, ამ მონაცემებით სრულიად განსაზღვრულია ორი ბრტყელი ველის პერსპექტიულ-აფინური შესაბამისობა. M შევაერთოთ M' -თან და გაავალოთ $[MM']$ -ის შუაპერპენდიკულარი (n). დავნიშნოთ $O = n \cap s$ წერტილი და მისგან, როგორც ცენტრიდან $R = [OM] = [OM']$ რადიუსით შემოვხაზოთ წრეწირი (g) . დავნიშნოთ ამ უკანასკნელის შესაბამისობის s ღერძთან თანაკვეთის A და B წერტილები. $\angle AMB$, როგორც დიამეტრზე დაყრდნობილი, იქნება მართი. ამავე მიზეზით $AM'B$ კუთხეც იქნება მართი, ხოლო $l(AM) \perp k(BM)$ და $l'(AM') \perp k'(BM')$ წრეები – ამოცანის პასუხი.

შევნიშნავთ, რომ განხილულ შემთხვევაში, ამოცანას ერთადერთი პასუხი გააჩნია, მაგრამ არსებობს გამონაკლისიც, მაგალითად:

1) როცა $MM' \perp s$ და $O \in s$, მაშინ $n(NO)$ დაემთხვევა შესაბამისობის ღერძს (s) და O ცენტრის მდებარეობა აღმოჩნდება განუსაზღვრელი. საწყისი მონაცემების ამგვარ განლაგებაში ადგილი ექნება ღერძულ სიმეტრიას ($MM' \perp s$ და $MN=M'N$) ანუ სარკისებრ ასახვას. ნათელია, რომ წრფეთა ურთიერთპერპენდიკულარულ ყოველ წყვილს შეესაბამება ასევე ურთიერთპერპენდიკულარული წყვილი ანუ ამოცანას ექნება ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა.

2) როცა $NO \parallel s$, $MM \perp s$, მაშინ მაშინ საძიებელი წრფეებიდან ერთი დაემთხვევა MM -ს, ხოლო მეორე ამ უკანასკნელის პერპენდიკულარული ანუ შესაბამისობის ღერძის (s) პარალელური გამოვა.

აქ საყურადღებოა კიდევ ერთი გარემოება: თუ Π ველის კუთვნილი k და l წრფეები, რომლებიც M წერტილში იკვეთებიან და წარმოადგენენ ამოცანის პასუხს, მაშინ ამ წრფეთა პარალელური ნებისმიერი წყვილიც მოგვცემს ამოცანის პასუხს. რადგან პარალელურობის თვისებიდან გამომდინარე, Π ველთან შესაბამისობაში მყოფი, Π' ველში მდებარე k' და l' გადაკვეთილ წრფეთა წყვილის პარალელური წრფეების ნებისმიერი წყვილი ურთიერთპერპენდიკულარული იქნება.

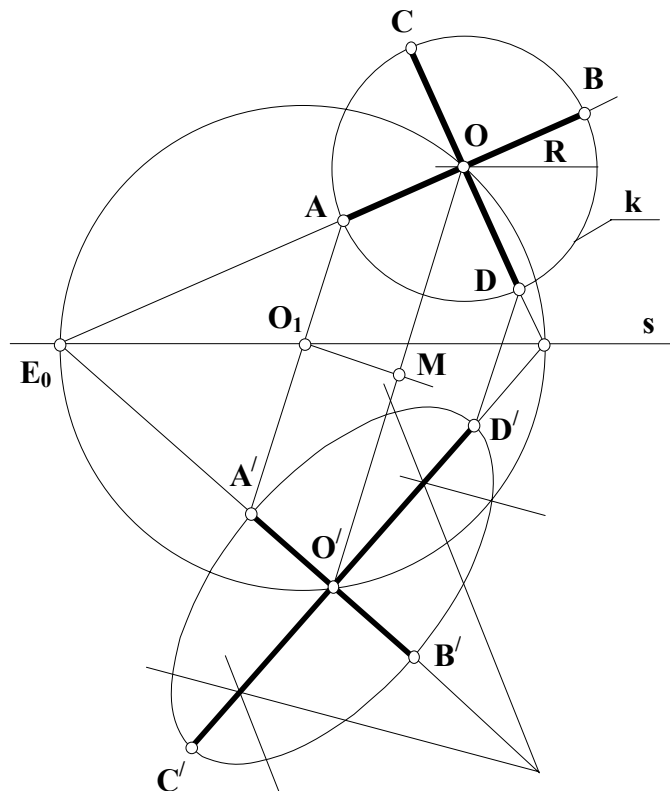
ამგვარად მოძებნილ მიმართულებებს პროექციულ გეომეტრიაში პერსპექტიულ-აფინური შესაბამისობის მთავარი მიმართულებები ეწოდება.

როგორც ვხედავთ, სიბრტყეთა (ბრტყელი ველების) პერსპექტიულ-აფინური შესაბამისობაში ყოველთვის არსებობს მთავარი მიმართულების ორი შესაბამისი წყვილი. გამონაკლისს წარმოადგენს ღერძული სიმეტრია ანუ სარკისებრი ასახვა, როცა მთავარი მიმართულებების უსასრულო სიმრავლესთან გვაქვს საქმე.

განვიხილოთ მაგალითები:

პირველი მაგალითი (ნახ.39). მოცემულია წრეწირი ($k(R,O)$) შესაბამისობის ღერძი (s) და ცენტრის (O) შესაბამისი წერტილი (O') (სხვაგვარად რომ ვთქვათ, აფინური შესაბამისობა განსაზღვრულია

ღერძით (s) და შესაბამისი წერტილების წყვილით – OO'). 39-ე ნახაზზე ნაჩვენებია გრაფიკული აგება 38-ე ნახაზის ანალოგიურია.



ნახ. 39 აფინურად შესაბამისი ველების მთავარი მიმართულებები

$[AB']$ და $[C'D']$ ღერძების აგების შემდეგ ამოცანა დაყვანილია ელიფსის აგების იმ შემთხვევაზე, როცა მოცემულია ელიფსის ღერძები (39-ე ნახაზზე საძიებელი ელიფსი შეცვლილია მისი მსგავსი ოვალით).

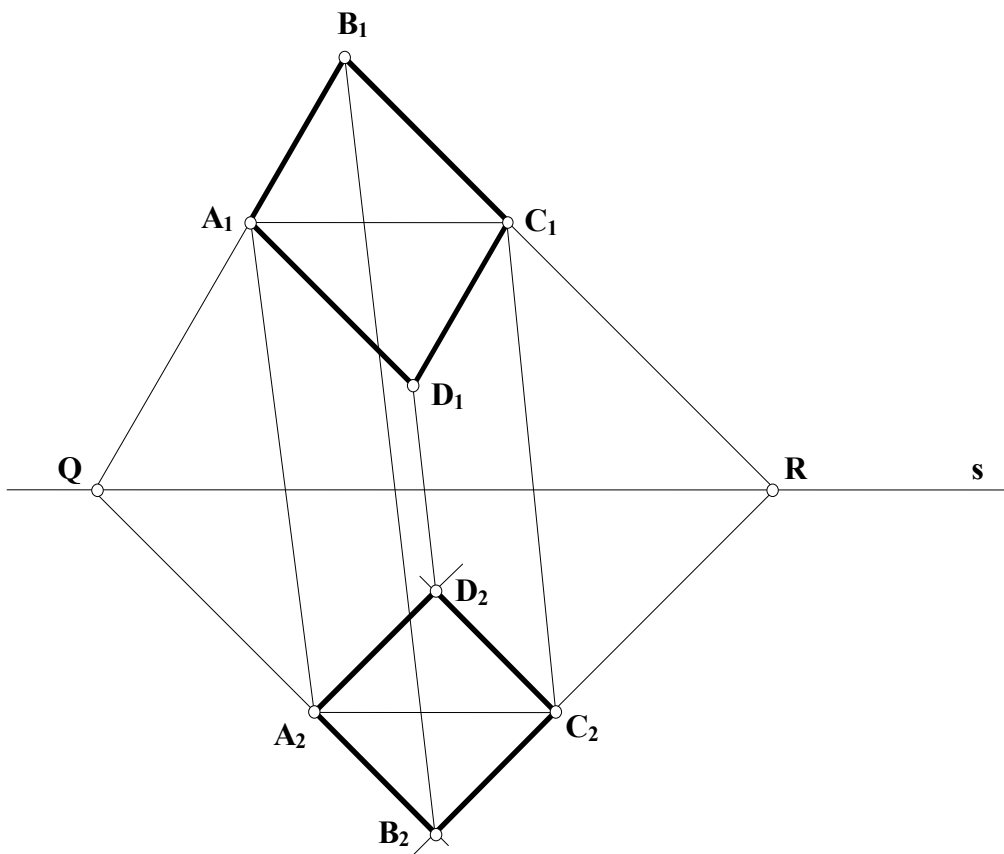
მეორე მაგალითი (ნახ.40. განვსახდვროთ ნათესაური შესაბამისობა, სადაც მოცემული პარალელოგრამი კვადრატზე აისახება.

ავაგოთ $A_1 B_1 C_1 D_1$ პარალელოგრამის $[A_1 C_1]$ დიაგონალი (ნახ. 40). თუ ეს პარალელოგრამი კვადრატზე უნდა აისახოს, $A_1 B_1 C_1$ სამკუთხედი ისეთ ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედზე აისახება, რომლის ჰიპოტენუზა $[A_1 C_1]$ დიაგონალის შესაბამისია.

ამოცანის გამარტივების მიზნით ნათესაობის s ღერძი ($A_1 C_1$) წრფის პარალელურად გავატაროთ. ($A_1 B_1$) და ($B_1 C_1$) წრფეები s ღერძს ორმაგ Q და R წერტილებზე კვეთენ. თუ $A_1 B_1 C_1$ სამკუთხედი

ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედზე აისახა, ასეთივე სამკუთხედზე აისახება QB_1R სამკუთხედიც, რადგან $(A_1C_1) \parallel (QR)$.

აეგოთ ტოლფერდა მართკუთხა QB_2R სამკუთხედი და დავამყაროთ ნათესაური შესაბამისობა, სადაც B_1 და B_2 წერტილები მონათესავეა. აეგოთ A_1 და C_1 წერტილების შესაბამისი A_2 და C_2 .



ნახ. 40 აფინურად შესაბამისი ველების მთავარი მიმართულებები

რადგან $(A_1C_1) \parallel s$, ამიტომ $(A_2C_2) \parallel s$. მაშასადამე $\Delta A_2B_2C_2 - QB_2R$, ე.ი. $A_2B_2C_2$ სამკუთხედიც ტოლფერდა და მართკუთხაა.

$(A_1D_1) \parallel (B_1C_1)$ და $(C_1D_1) \parallel (A_1B_1)$, ამიტომ მათი მონათესავე წრფეებიც, შესაბამისად, პარალელურია: $(A_2D_2) \parallel (B_2C_2)$ და $(C_2D_2) \parallel (A_2B_2)$.

$\angle A_2B_2C_2$ მართია. ამგვარად, $A_1B_1C_1D_1$ პარალელოგრამის მონათესავე $A_2B_2C_2D_2$ ფიგურა კვადრატია.

ელიფსი წრეწირის აფინური წირია, მაშასადამე, წრეწირი ნათესაობით ელიფსზე აისახება, და შებრუნებით, ელიფსიც შეიძლება წრეწირზე აისახოს.

95

წრეწირის დიამეტრების პერპენდიკულარული წვეილი, რომელსაც ელიფსის დიამეტრების ასეთივე წვეილი (ე. ი. ელიფსის ღერძები) შეესაბამება (იხ ნახ.39).

განსახილვერით ნათესაური შესაბამისობა, სადაც მოცემული ელიფსის $[A_1B_1]$ და $[C_1D_1]$ ღერძები ორ კონგრუენტულ და პერპენდიკულარულ მონაკვეთებზე აისახება (ნახ.41).

ნათესაობის s ღერძი (A_1C_1) წრფის პარალელურად გავატაროთ. (A_1B_1) და (C_1D_1) წრფეების s ღერძთან გადაკვეთის Q და R წერტილები ისეთი წრეწირის დიამეტრის ბოლოებია, რომლებიც ელიფსის O_1 ცენტრზე გაივლიან. ამ წრეწირში ტოლფერდა მართკუთხა QO_2R სამკუთხედი ჩავსახოთ.

O_1 და O_2 მონათესავე წერტილებად ჩავთვალოთ. ეს ორი წერტილი, s ღერძთან ერთად, ისეთ ნათესაურ შესაბამისობაში განსახილვერავს, სადაც პერპენდიკულარულ (O_1Q) და (O_1R) წრფეებს აგრეთვე პერპენდიკულარული (O_2Q) და (O_2R) წრფეები ენათესავენ. მაშასადამე, წრფეთა ამ ორ წვეილს ნათესაობის მთავარი მიმართულებები აქვს.

A და C_1 ისეთ A_2 და C_2 წერტილებზე აისახება, რომ ტოლფერდა მართკუთხა $A_2O_2C_2$ სამკუთხედს მივიღებთ.

O_2 წერტილი ცენტრად მივიღოთ და $[O_2A_2]$ რადიუსით ავაგოთ წრეწირი. უკანასკნელი წარმოადგენს იმ ელიფსის მონათესავე წრეწირს, რომელიც თავისი $[A_1B_1]$ და $[C_1D_1]$ ღერძებით არის განსახილვერული.

ავაგოთ l_1 წრფის მონათესავე l_2 წრფეც. l_1 წრფე (C_1D_1) და (A_1B_1) წრფეებს, შესაბამისად, კვეთს 1_1 და 2_1 წერტილებში, რომელთა მონათესავე l_2 და 2_2 წერტილები (O_2Q) და (O_2R) წრფეებზე მდებარეობენ. l_2 და 2_2 წერტილები ეკუთვნიან საძიებელ l_2 წრფეს, რომელიც ელიფსის მონათესავე წრეწირს E_2 და F_2 წერტილებში კვეთს.

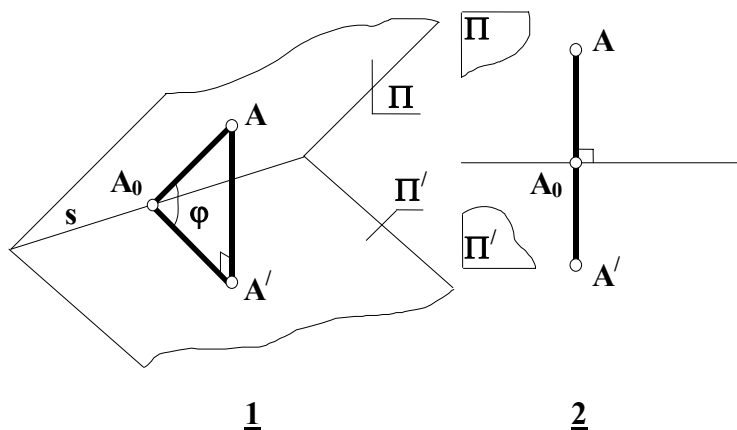
ცხადია, რომ ამ ორი წერტილის შესაბამისი E_1 და F_1 წერტილები l_1 წრფისა და $[A_1B_1]$ და $[C_1D_1]$ ღერძებით განსახილვერული ელიფსისათვის საერთოა.

2.12 პოლკე-შვარცის თეორემა

ვიდრე პოლკე-შვარცის თეორემის შესწავლას დავიწყებდეთ, განვიხილოთ აფინურად შესაბამისი ველების პერსპექტიულ-ორთოგონალური განლაგების საკითხი.

თუ Π ველს ორთოგონალური დაგეგმილებით, მათ ორთოგონალურ-პერსპექტიული ეწოდება. ვთქვათ A და A' ასეთი ველების შესაბამისი წერტილებია (ნახ. 42-1), მაშინ

$$AA' \perp \Pi' \text{ და } AA' \perp S.$$



ნახ. 42 ორთოგონალურ-პერსპექტიული ველები

განვიხილოთ $AA'.A_0$ მაგეგმილებელი სიბრტყე, რომელიც S ღერძის პერპენდიკულარულია. $\triangle AA'.A_0$ -ში $A'A_0A$ კუთხე (ϕ) არის Π და Π' სიბრტყეებს შორის მდებარე ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე,

$$A_0A' = A_0A \cos \phi \text{ ან } \frac{A_0A'}{A_0A} = \cos \phi$$

თუ Π და Π' სიბრტყეებს მოვაბრუნებთ ირგვლივ შეთავსებამდე, მაშინ A_0A და A_0A' გარდაიქმნებიან ერთ წრფეში, რომელიც s ღერძის პერპენდიკულარული იქნება (ნახ. 42-2).

ამრიგად, ორი ბრტყელი ველის ორთოგონალურ-პერსპექტიული განლაგების შემთხვევაში ნათესაობის მიმართულება ნათესაობის ღერძის პერპენდიკულარულია.

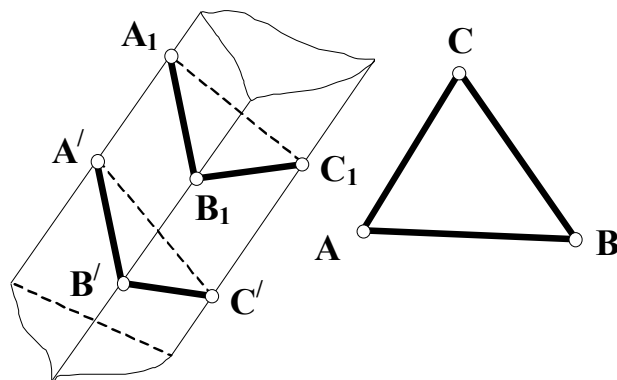
ვთქვათ, ნათესაობის მიმართულება $AA' \perp S$. თუ $A_0A > A_0A'$ მაშინ

$$\text{ფკუთხე შესაძლოა განისაზღვროს ასე: } \cos \phi = \frac{A_0A'}{A_0A}$$

თუ Π სიბრტყეს s ღერძის ირგვლივ მოვაბრუნებთ ფკუთხით, მაშინ Π ბრტყელი ველი Π' -ში ორთოგონალურად დეგეგმილებული გამოვა.

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ თეორემა ორი აფინურად შესაბამისი ველის ორთოგონალურ-პერსპექტიულ განლაგებაში მოყვანის შესახებ.

თეორემა; ორი აფინურად შესაბამისი ველი, მსგავსების გარდაქმნისა და ერთ-ერთის გადაადგილებით, ყოველთვის შეიძლება მოყვანილ იქნეს ისეთ ორთოგონალურ-პერსპექტიულ მდებარეობაში, რომ ერთ-ერთი იყოს მეორის ორთოგონალური გეგმილი.



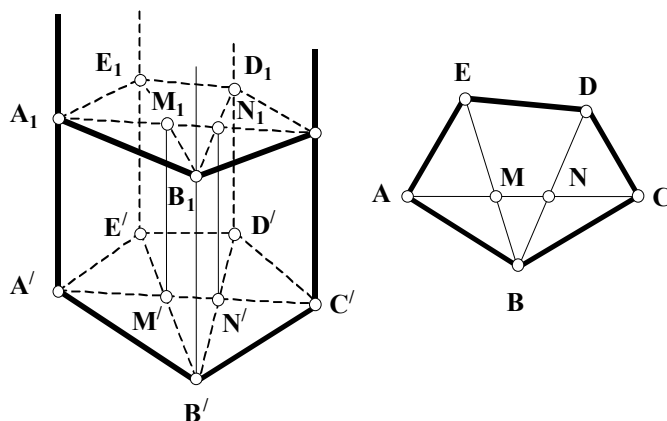
ნახ. 43 პრიზმის კვეთა სიბრტყით

ასევე დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ აღნიშნული თეორემის რამდენიმე შედეგი:

1. ვთქვათ, მოცემულია ნებისმიერი სამკუთხედი ABC და $A'B'C'$. ამ ორი სამკუთხედიდან ერთი შესაძლოა განვიხილოთ, როგორც მეორის მსგავსი სამკუთხედის ორთოგონალური გეგმილი.

2) სამკუთხა პრიზმა შესაძლოა გადაკვეთილ იქნას სიბრტყით ისე, რომ კვეთაში მიღებული სამკუთხედი წინასწარ მოცემული სამკუთხედის მსგავსი გამოვიდეს (ნახ. 43)

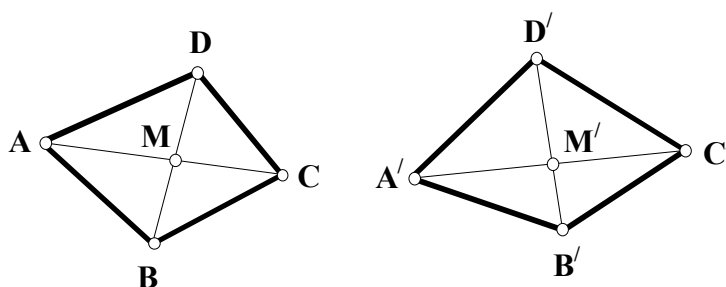
3) ნებისმიერი პრიზმა შესაძლოა გადაკვეთილ იქნას სიბრტყით ისე, რომ კვეთაში მიღებული მრავალკუთხედი წინასწარ მოცემული პრიზმის ფუძესთან აფინურ შესაბამისობაში მყოფი, მრავალკუთხედის მსგავსი გამოვიდეს (ნახ. 44)



ნახ. 44 პრიზმის კვეთა სიბრტყით

4) აფინურად შესაბამისი ორი ფიგურიდან ერთი შესაძლოა განხილულ იქნას, როგორც მეორეს მსგავსი ფიგურის ორთოგონალური გეგმილი.

შენიშვნა. იმისათვის, რომ ავაგოთ მრავალკუთხედი, რომელიც მოცემულის მიმართ აფინურ შესაბამისობაშია, აგება დავიწყოთ ამ მრავალკუთხედების შემადგენლობაში მყოფი ორი სამკუთხედის აგებით (ნახ.45)



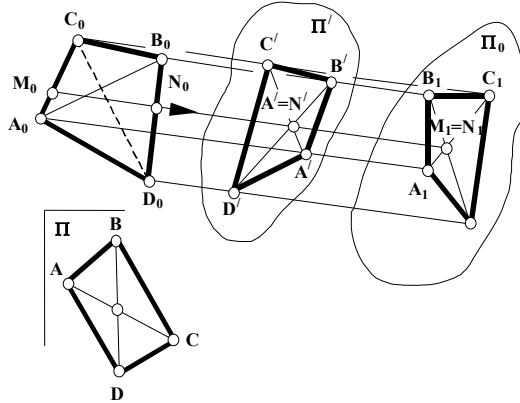
ნახ. 45 პოლკე-შვარცის თეორემა

ყოველი არაგადაგვარებული სრული ოთხკუთხედი შესაძლოა განვიხილოთ, როგორც წინასწარ მოცემული ფორმის ტეტრაედრის პარალელური გეგმილი (პოლკე-შვარცის თეორემა)

მითითება. 1) ფიგურა, რომელიც აგებულია წერტილით (წვეროები) და ამ წერტილებით განსაზღვრული ექვსი წრფით

(გვერდები) სრული ოთხკუთხედი ეწოდება. როცა ოთხივე წვერო ერთ წრეზე არ მდებარეობს, მაშინ ოთხკუთხედს გადაუგვარებელი სრული ოთხკუთხედი ჰქვია.

2) რეკომენდირებულია პოლკე-შვარცის თეორემასთან დაკავშირებული ისტორიული ნარკვევის გაცნობა.



ნახ. 46 პოლკე-შვარცის თეორემა

ვთქვათ, მოცემულია ტეტრაედრი $(A_0B_0C_0D_0)$ და სრული ოთხკუთხედი $(ABCD)$ (ნახ. 46) მოცემული სრული ოთხკუთხედი განვიხილოთ, როგორც რაიმე ტეტრაედრის პარალელური გეგმილი. აქედანა გამომდინარე, მოცემული სრული ოთხკუთხედის ყოველი გვერდი განიხილება, როგორც მოცემული ტეტრაედრის წიბოების პარალელური გეგმილი, ოთხკუთხედის დიაგონალების თანაკვეთის წერტილი $(M=N)$ კი, როგორც ტეტრაედრის ორ წიბოზე $(A_0B_0$ და $C_0D_0)$ მდებარე წერტილების $(M \in A_0C_0$ და $N \in B_0D_0)$ გეგმილების შეთავსება. სამი წერტილის მარტივი ფარდობის (პარალელურ გეგმილებში), როგორც პარალელური გეგმილების ინვარიანტული თვისების მიხედვით შეგვიძლია ვიპოვოთ M_0 და N_0 ტეტრაედრების შესაბამის გვერდებზე $M \in A_0C_0$ და $N \in B_0D_0$.

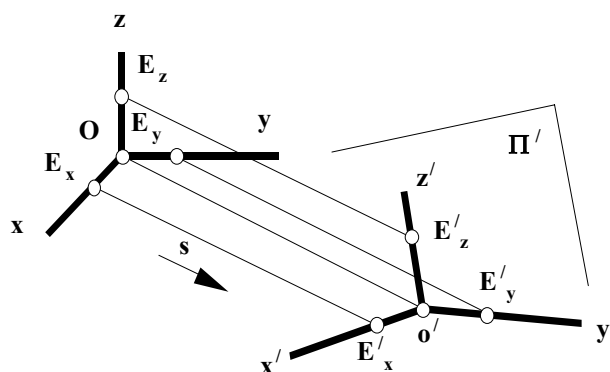
M_0 და N_0 წერილებზე წრფის მიმართულება მივიღოთ დაგეგმილების მიმართულებად (სურ. 45). ეს უზრუნველყოფს M_0 და N_0 წერტილების გეგმილების შეთავსებას გეგმილთა სიბრტყეში $(M' N'$ და $M_1 N_1)$.

ავაგოთ მოცემული ტეტრაედრის პარალელური გეგმილი Π' გეგმილთა სიბრტყეში. ამისათვის ტეტრაედრის წვეროებზე გამავალი

მაგეგმილებელი სხივები, რომლებიც ქმნიან პრიზმას, გადაკვეთით ნებისმიერი Π' სიბრტყით, კვეთაში მივიღებთ $A' B' C' D'$. სრული ოთხკუთხედი არის $ABCD$ ოთხკუთხედის აფინურად შესაბამისი ფიგურა. თუ $A' B' C' D'$ ოთხკუთხედს პრიზმის ფუძედ მივიღებთ, შეგვიძლია ავაგოთ კიდევ ერთი კვეთი (ამჯერად Π' სიბრტყის საშუალებით) $A_1B_1C_1D_1$ რომელიც $ABCD$ ოთხკუთხედის მსგავსი იქნება.

ამრიგად $A_1B_1C_1D_1$ სრული ოთხკუთხედი განიხილება როგორც $A_0B_0C_0D_0$ ტეტრაედრის პარალელური გეგმილი. მოცემული ოთხკუთხედი ($ABCD$) როგორც $A_1B_1C_1D_1$ ოთხკუთხედის მსგავსი, არის მოცემულის მსგავსი ტეტრაედრის პარალელური გეგმილი.

პოლკე-შვარცის თეორემის არსი ისაა, რომ გეგმილთა სიბრტყეზე მოცემული სრული ოთხკუთხედი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მოცემული ფორმის ტეტრაედრის პარალელური გეგმილი.



ნახ. 47 პოლკე-შვარცის თეორემა

პოლკე-შვარცის თეორემის პრაქტიკული მნიშვნელობა შეისწავლება მხაზველობითი გეომეტრიის ცალკე ნაწილში – აქსონომეტრია. ის იძლევა ძალზე ზოგად დასკვნას მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის (სივრცეში) დაგეგმილებასთან დაკავშირებით. თუ წარმოვიდგენთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას სივრცეში (ნახ. 47) და მის ღერძებზე გადავდებთ სამასშტაბო მონაკვეთებს ($OE_x = OE_y = OE_z$) მივიღებთ ე.წ. სამასშტაბო ტეტრაედრს $OE_xE_yE_z$. თუ ამ შემთხვევაში ვისარგებლებთ პოლკე-შვარცის თეორემით, როცა ტეტრაედრის ორიგინალი არის სამასშტაბო ტეტრაედრი, მივიღებთ რომ ნებისმიერი გადაუგვარებელი სრული ოთხკუთხედი ყოველთვის

შეიძლება განვიხილოთ როგორც მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის (სივრცეში) სამასშტაბო ტეტრაედრის პარალელური გეგმილი.

ერთმანეთთან ნებისმიერი კუთხით დაკავშირებული და ერთ სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი სიგრძის სამი მონაკვეთი $O'E'_x, O'E'_y, O'E'_z$ გამოდის ერთი წერტილიდან (O) და წარმოადგენს სამი ისეთი ტოლი მონაკვეთის (OE_x, OE_y, OE_z) პარალელურ გეგმილებს, რომლებიც ერთი სათავიდან (O) გამოდიან და გადაღებული არიან მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე.

2.13 “საინჟინრო გეომეტრიის საფუძვლების”, როგორც პროპედევტიკული კურსის დანიშნულება, გამოყენებითი პერსპექტივის სწავლების მეთოდოლოგიაში

არქიტექტორების მომზადების პროგრამაში “საინჟინრო გრაფიკის საწყისების”, როგორც პროპედევტიკული კურსის შემოღების მიზანი ისაა, რომ საინჟინრო გრაფიკის (მონუხის ეპიური, აქსონომეტრია და გამოყენებითი პერსპექტივის საფუძვლები) სწავლება გარკვეულ გეომეტრიულ ფუნდამენტზე იქნას დაფუძნებული. მიგვაჩნია, რომ მაგალითად გამოყენებითი პერსპექტივის საფუძვლების ისეთი რეგლამენტით სწავლება რაზედაც ქვემოთ გვექნება საუბარი, შესაძლებელია მხოლოდ მას შემდეგ, როცა სტუდენტის ცოდნის არსენალი წინასწარ შევსილი იქნება იმ საკითხებით, რასაც ჩვენს მიერ რეკომენდებული სასწავლო დისციპლინის “საინჟინრო გრაფიკის საწყისების” პროგრამა შეიცავს.

პერსპექტიული გეგმილი ანუ პერსპექტივა ეწოდება ცენტრალური დაგეგმილების შედგად მიღებულ გამოსახულებას. იგი წარმოადგენს სამგანზომილებიანი ობიექტის ბრტყელ ანახსახს, რომელიც ძალიან ჰგავს იმას, რაც სივრცის გარკვეული წერტილიდან მზერის ან ფოტოგრაფირების დროს წარმოგვიდგება [87]. სწორედ ამის გამო, არქიტექტურული პროექტირებისას, ხშირად დგება მისი გამოყენების აუცილებლობა.

გეომეტრიისა და კერძოდ პერსპექტივის მნიშვნელობა არქიტექტურისა და ხელოვნების განვითარების ყველა ეტაპზე იყო ცნობილი. როგორც გასპარ მონუი აღნიშნავდა, მხაზველობითი გეომეტრია იძლევა ცნობილი ელემენტებიდან სივრცის უცნობი მოვლენების დადგენის საშუალებას. არქიტექტურულ შემოქმედებაშიაც ცენტრალური დაგეგმილება წარმოადგენს იმ საშუალებას, რომლითაც ორთოგონალური გეგმილების, ანუ პროექტის მიხედვით გამოვსახავთ სინამდვილეში ჯერ კიდევ განუხორციელებელი შენობის პერსპექტიულ გამოსახულებას, ე.ი. ისეთ სივრცობრივ სურათს, როგორსაც ადამიანი დაინახავს მხოლოდ მაშინ, როცა ნაგებობა აიგება.

ამრიგად, პერსპექტივა საშუალებას გვაძლევს მშენებლობის დაწყებამდე ბევრად უფრო ადრე შევაფასოთ პროექტის მხატვრულ-არქიტექტურული ღირსებები და შევიტანოთ მასში სათანადო შესწორებები. წინააღმდეგ შემთხვევაში ხარვეზები მუდამდება მხოლოდ აშენების შემდეგ, შეცდომის გამოსწორება ნაგებობის რეკონსტრუქციას საჭიროებს და ხშირად საერთოდაც შეუძლებელი ხდება.

სიტყვა პერსპექტივა წარმოშობილია ლათინური ზმნისაგან – „პერსპიცერე“, რაც გამჭოლ ხედვას ნიშნავს. პერსპექტივი, ერთის მხრივ, ეწოდება მეცნიერებას ცენტრალური, ანუ კონუსური დაგეგმილების შესახებ, ხოლო მეორეს მხრივ, პერსპექტივა ჰქვია თვით იმ გამოსახულებას, ანუ სურათს, რომელიც მიიღება ამ დაგეგმილების შედეგად.

პერსპექტივის რამოდენიმე სახე არსებობს, რომელთაც განასხვავებენ იმისდა მიხედვით, თუ რა ზედაპირზე ხდება დაგეგმილება:

1) *წრფივი* (ხაზოვანი) *პერსპექტივა* – მიიღება მაშინ, როცა დაგეგმილება ხდება სიბრტყეზე;

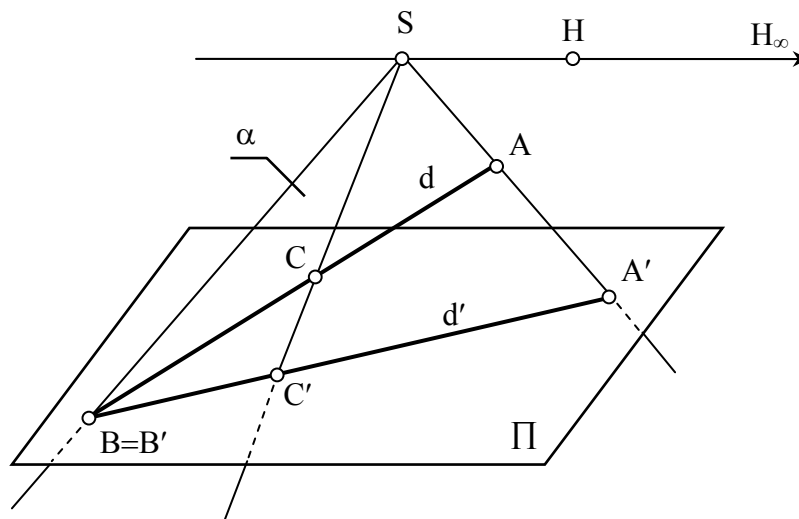
2) *პანორამული პერსპექტივა* – მიიღება ცილინდრის ზედაპირზე დაგეგმილების შედეგად;

3) *გუმბათოვანი ანუ სფერული პერსპექტივა* – მიიღება დაგეგმილებით სფეროს ზედაპირზე და ა.შ..

გარდა ამისა განიხილავენ კომბინირებული მეთოდით მიღებულ პერსპექტივის სახეებსაც. [71] მაგალითად: *თეატრალური პერსპექტივა* – როცა გამოსახულებები აიგება რამოდენიმე სიბრტყეზე, რომელთა ერთობლიობითაც დადგმისათვის საჭირო სივრცითი ილუზია იქმნება სცენაზე; *ღიორამული პერსპექტივა* – წრფივი პერსპექტივისა და მოცულობითი გამოსახულებების სინთეზი; *სტერეოსკოპიული პერსპექტივა* – ერთი და იგივე ობიექტის ორი სხადასხვა მხერის წერტილიდან წრფივი პერსპექტივის წესებით აგებული ორი გამოსახულება და ა.შ.. ქვემოთ დაწვრილებით შევხერდებით მხოლოდ წრფივი (ხაზოვანი) პერსპექტივის აგების მეთოდებს.

ცენტრალური დაგეგმილების აპარატი შედგება დაგეგმილების S ცენტრისგან და იმ Π ზედაპირისგან, რომელზეც ხდება დაგეგმილება. განვიხილოთ დაგეგმილება სიბრტყეზე. ასეთი დაგეგმილების დროს, სივრცის ყოველ წერტილს S წერტილზე (დაგეგმილების ცენტრი) გამავალი მაგეგმილებელი სხივებით აგეგმილებენ გეგმილთა სიბრტყეზე (ნახ. 48). რადგან S წერტილსა და ნებისმიერ A წერტილზე ერთადერთი სხივის გატარება შეიძლება, ამიტომ სივრცის ყოველ წერტილს, ამ სიბრტყეზე, ერთი და მხოლოდ ერთი გეგმილი შეესაბამება.

თუ H წერტილი ისეთ სიბრტყეში დევს, რომელიც დაგეგმილების S ცენტრზე გადის და Π სიბრტყის პარალელურია, მაშინ მაგეგმილებელი SH სხივიც სიბრტყის პარალელური გამოვა და მას არასაკუთრივ H_{∞} წერტილში გადაკვეთს.



ნახ. 48 ცენტრალური დაგეგმილების აპარატი

სიბრტყეზე ცენტრალური დაგეგმილების დროს სივრცითი ობიექტების (მრავალკუთხედი, მრუდე წირი, მრავალწახნაგა, მრუდე ზედაპირი და სხვ.) მეტრული მახასიათებლები იცვლება, მაგრამ გარკვეული თვისებები უცვლელი რჩება. ასეთ უცვლელ თვისებებს *ინვარიანტები* ეწოდება.

განვიხილოთ ცენტრალური დაგეგმილების ინვარიანტული თვისებები:

- 1) წერტილის გეგმილი წერტილს წარმოადგენს;

2) წრფის გეგმილი საზოგადოდ წრფეა;

d წრფის წერტილებზე გამავალი მაგეგმილებელ სხივთა სიმრავლე მაგეგმილებელ α სიბრტყეს წარმოადგენს (ნახ.48), რომელიც განსაზღვრულია d წრფითა და მასზე არამდებარე S წერტილით. d წრფის ცენტრალური გეგმილი განიხილება, როგორც α და Π სიბრტყეების ურთიერთკვეთა, რომელიც რათქმაუნდა d' წრფეს წარმოადგენს.

3) წრფეზე მდებარე წერტილის გეგმილი ამ წრფის გეგმილზე მდებარეობს;

4) ურთიერთპარალელურ წრფეთა გეგმილები გადაკვეთილ წრფეთა კონას წარმოადგენს;

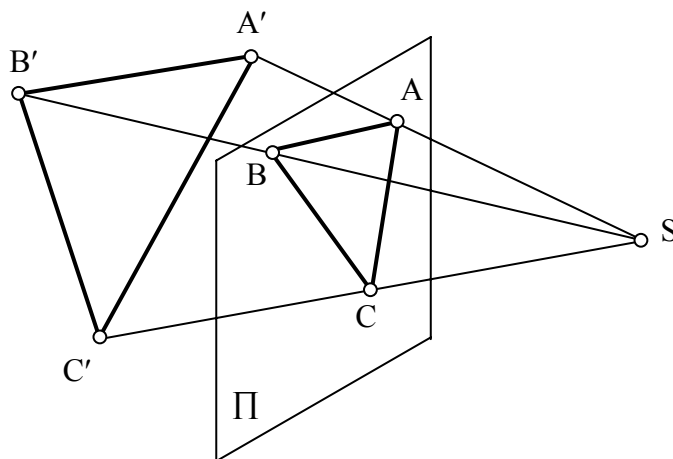
5) წრფეთა გადაკვეთის წერტილის გეგმილი ამ წრფეთა გეგმილების გადაკვეთის წერტილს წარმოადგენს;

6) ბრტყელი მრავალკუთხედის გეგმილი საზოგადოდ იგივე რაოდენობის კუთხეების მქონე მრავალკუთხედია (ნახ.49);

7) დაგეგმილების ცენტრზე გამავალი წრფის გეგმილი წერტილია;

8) გეგმილთა სიბრტყის პარალელური ფიგურის გეგმილი მისი მსგავსი ფიგურაა;

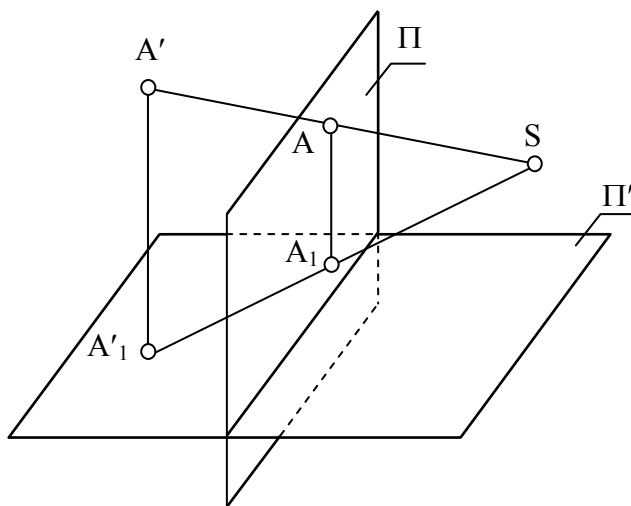
9) კონუსური ზედაპირის გეგმილი, რომლის წვერო დაგეგმილების ცენტრს ემთხვევა – მრუდე წირია.



ნახ. 49 სამკუთხედის ცენტრალური გეგმილი

2.13.1. წერტილის პერსპექტივა. როგორც გვახსოვს, წერტილის სივრცეში მდებარეობის განსაზღვრა მისი ერთი გეგმილის მიხედვით შეუძლებელია, ხოლო ჩვენი მიზანია სივრცითი ფიგურების ისეთი

ბრტყელი გამოსახულების მიღება, რომლის მიხედვითაც სრულიად განსაზღვრული იქნება მათი ადგილსამყოფელიც და ურთიერთმდებარეობაც. ამ მიზნის მისაღწევად შემოღებულია ცენტრალური დაგეგმილების სპეციალური სისტემა.

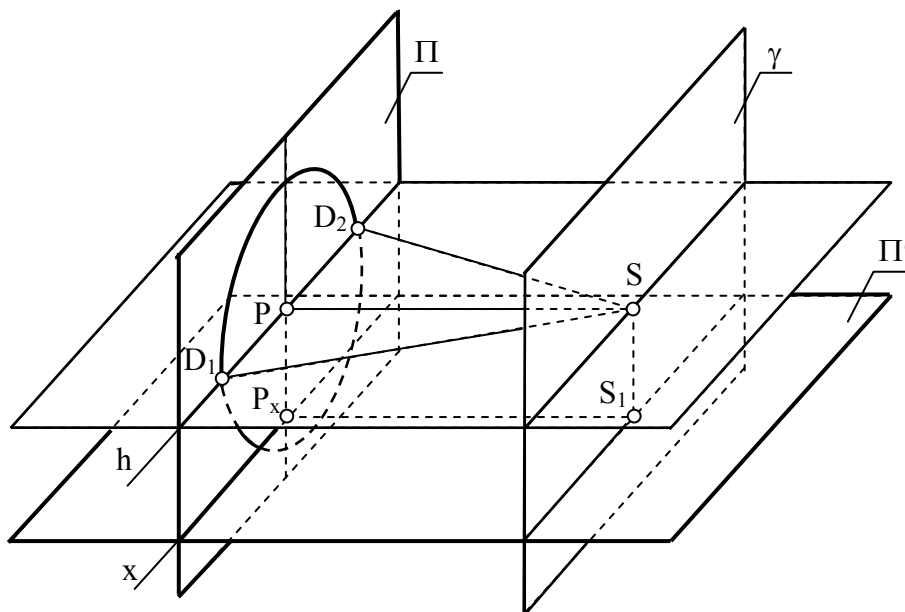


ნახ. 50 პერსპექტივის აპარატი

შეგარჩილთ ვერტიკალური მდებარეობის გეგმილთა (სასურათე) Π და მისი მართობული დამხმარე Π' სიბრტყეები, ისე რომ S გეგმილთა ცენტრი არცერთ მათგანს არ ეკუთვნოდეს (ნახ. 50). ნებისმიერი A' წერტილის პერსპექტივის ასაგებად იგი ჯერ Π' სიბრტყეზე ორთოგონალურად დავაგეგმილთ (*წერტილის ფუძე* – A'_1), ხოლო შემდეგ, მიღებული A'_1 და A' წერტილი S ცენტრიდან Π სიბრტყეზე – ცენტრალურად (მეორეული გეგმილი – A_1).

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ამ გზით Π სიბრტყეზე მიღებული ორი გეგმილი (A და A_1) სრულიად განსაზღვრავს A' წერტილის მდებარეობას ცივრცეში, ანუ იგი ცალსახადაა განსაზღვრული, რაც ნიშნავს იმას, რომ *ნებისმიერი A' წერტილისათვის Π სიბრტყეზე ყოველთვის მოიძებნება ერთადერთი (A, A_1) წყვილი, და პირიქით ამ წესით აგებული (A, A_1) წყვილი ერთადერთ A' წერტილს განსაზღვრავს სივრცეში.*

შემდგომში აგებები მთლიანად დამყარებული იქნება ნაჩვენებ გეომეტრიულ ხერხზე, [77] ამიტომ დაწვრილებით განვიხილოთ ამ სისტემის შემადგენელი ძირითადი ელემენტები და ტერმინები (ნახ.51).



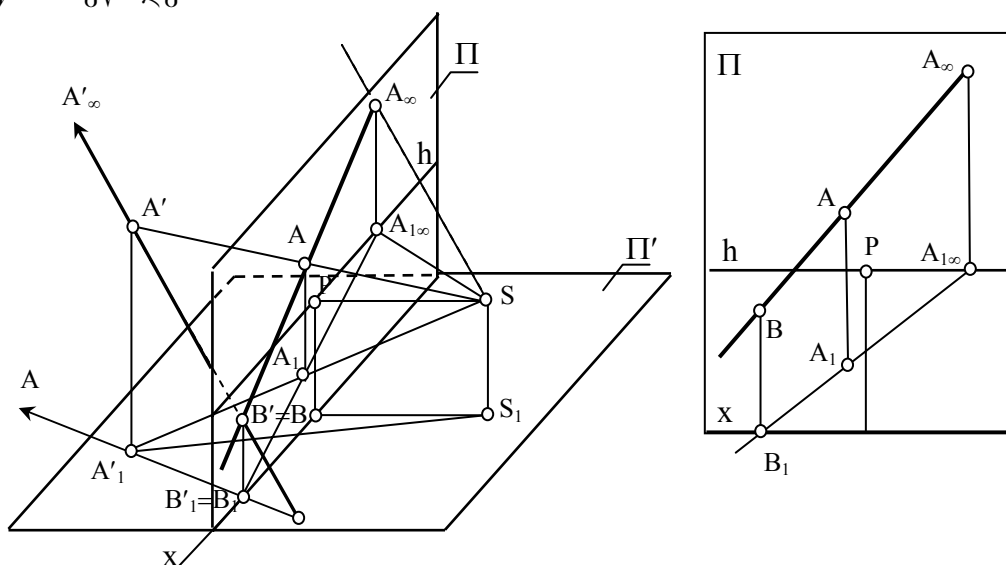
ნახ. 51 პერსპექტივის აპარატი

1. Π – გეგმილთა სიბრტყე ვერტიკალურ მდგომარეობაში ავიდოთ. მას *სურათის სიბრტყეს* ან უბრალოდ *სურათს* უწოდებენ.
2. Π' – გეგმილთა სიბრტყე ჰორიზონტალური მდებარეობისაა და მას *ფუძეთა სიბრტყე* ეწოდება.
3. S – დაგეგმილების ცენტრი, რომელსაც ხშირად *მზერის წერტილად* მოიხსენიებენ
4. x – Π და Π' სიბრტყეების გადაკვეთის წრფეს *სურათის ფუძე* ეწოდება.
5. P – წერტილი მიიღება S -დან Π -ზე მართობის დაშვების შედეგად და მას *სურათის მთავარი წერტილი* ეწოდება.
6. λ – გატარებულია S წერტილზე Π' -ის პარალელურად; მას *ჰორიზონტის სიბრტყეს* უწოდებენ.
7. γ – ნეიტრალური სიბრტყე S წერტილზე გადის Π -ს პარალელურად.
8. h – წრფეს *ჰორიზონტის წრფე* ან, მოკლედ, *ჰორიზონტი* ეწოდება.
9. S – წერტილზე Π სიბრტყის მართობულად გატარებულ SP სხივს, *მთავარი სხივი*.
10. SP სხივის SP მონაკვეთს – *მთავარი მანძილი*.
11. SP სხივის Π სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილს – *მთავარი წერტილი*.

12. P წერტილზე h წრფის მართობულად გატარებულ x წრფეს – სურათის ღერძი.

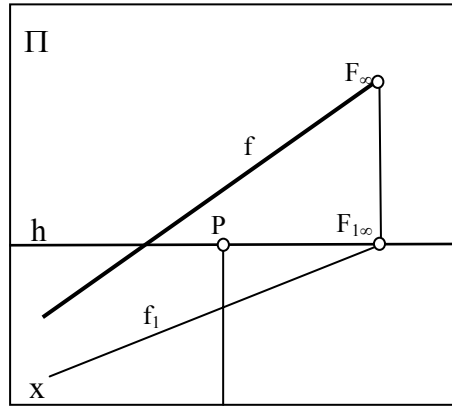
13. D_1 და D_2 წერტილებს – დისტანციის წერტილები. ისინი მიიღება S წერტილზე გამავალი Π' -ის პარალელური ხოლო Π -ს მიმართ 45° -ით დახრილი წრფეების Π -თან გადაკვეთის შედეგად.

14. Π სიბრტყეში მდებარე PD_1 რადიუსიან წრეწირს – მთავარი წრეწირი ეწოდება.



ნახ. 52 წრფის პერსპექტივა

2.13.2. წრფის პერსპექტივა. ცნობილია, რომ სივრცეში წრფის მდებარეობას ორი წერტილის მდებარეობა განსაზღვრავს, აქედან გამომდინარე წრფის პერსპექტივის ასაგებად საკმარისია ამ წრფის კუთვნილი ორი წერტილისა და მათი მეორეული გეგმილების პერსპექტივის აგება. ამ ორ წერტილად უმჯობესია წრფის ეგრეთწოდებული *შესანიშნავი* ანუ *მახასიათებელი* წერტილები შევარჩიოთ (ნახ.52). ასეთი წერტილებია – მოცემული წრფის გადაკვეთის წერტილი სასურათე სიბრტყესთან (B') და ამ წრფის უსასრულოდ შორს მდებარე ანუ *არასაკუთრივი* წერტილი (A'_∞). სასურათე სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილის გეგმილი თავისთავს შეუთავსდება ($B'=B$), ხოლო არასაკუთრივი წერტილის გეგმილის ასაგებად მზერის წერტილზე (S) უნდა გატარდეს მოცემული წრფის პარალელური წრფე და მოიძებნოს მისი გადაკვეთის წერტილი სურათთან (A_∞).

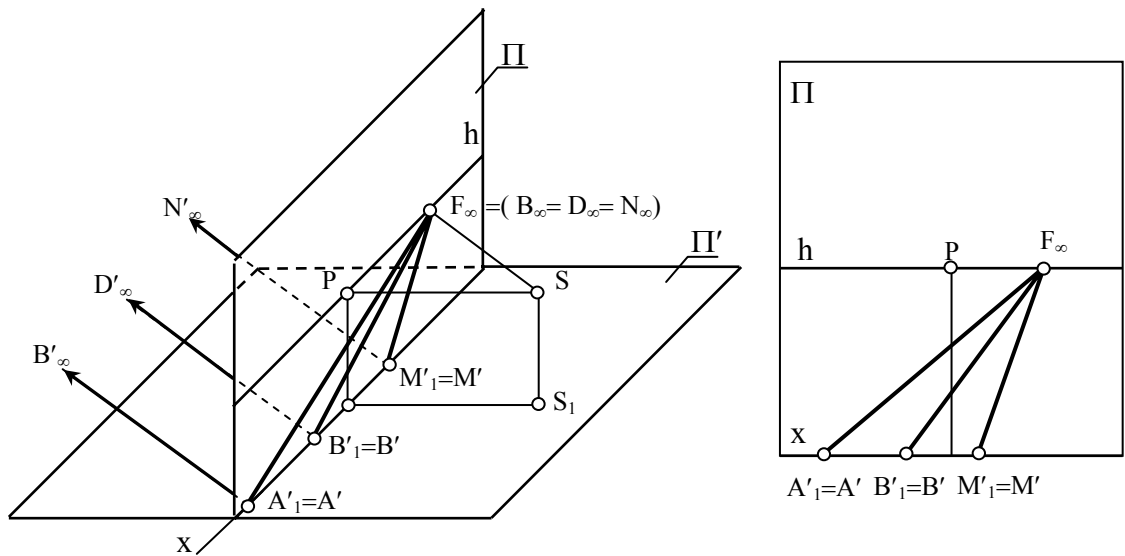


ნახ. 53 წრფის პერსპექტივა

წრფის არასაკუთრივ წერტილს განსაკუთრებული როლი აკისრია მრავალი ამოცანის ამოხსნისას. მისი პერსპექტივის ასაგებად, როდესაც მოცემულია წრფისა და მისი ფუძის პერსპექტივა (ნახ.52), შევნიშნოთ შემდეგი: თუ A' წერტილს $A'B'$ წრფეზე უსასრულობისაკენ გადავადგილებთ, მისი A'_1 ფუძეც A_1B_1 წრფეზე უსასრულობისაკენ გადავადგილებთ. როდესაც A_1 წერილი უსასრულობაში გადავა, მისი მაგეგმილებელი SA_1 სხივი A_1B_1 წრფის და, მაშასადამე, ფუძეთა სიბრტყის პარალელური გახდება, აქედან გამომდინარე იგი სასურათე სიბრტყეს ჰორიზონტის ხაზზე გადაკვეთს. ამავდროს A' წერტილის გადაადგილების პროცესის განმავლობაში ამ წერტილის და მისი ფუძის A და A_1 პერსპექტივა ჰორიზონტის ხაზის მიმართ მართობულ კავშირის წრფეზე იქნებიან განლაგებულნი. აქედან კი წრფის არასაკუთრივი წერტილის პერსპექტივის აგების მარტივი წესი გამომდინარეობს: *თუ სასურათე სიბრტყეზე მეცემულია რაიმე წრფის f პერსპექტივა და აგრეთვე მისი ფუძის f_1 პერსპექტივა* (ნახ. 53), *მაშინ საჭიროა f_1 წრფე გაავარდულოთ ჰორიზონტის ხაზის გადაკვეთამდე ($F_{1\infty}$), აღვმართოთ ვერტიკალური კავშირის წრფე, რომელიც f წრფესთან გადაკვეთაში მოგვცემს საძიებელ არასაკუთრივ წერტილის პერსპექტივას (F_∞),*

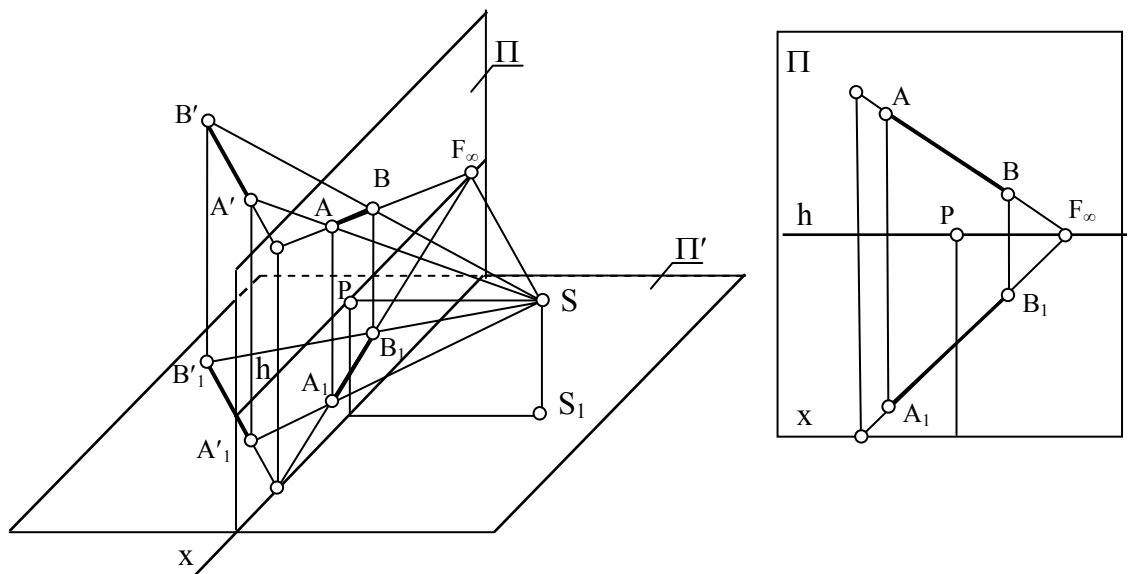
2.12.3. პარალელურ წრფეთა კონის პერსპექტივა. მაგალითისათვის განვიხილოთ ფუძეთა სიბრტყეში მდებარე პარალელურ წრფეთა კონა ($A'B'$, $C'D'$, $M'N'...$) (ნახ. 54). ამ წრფეების სურათთან გადაკვეთის წერტილების გეგმილები, როგორც აღვნიშნეთ, თავისთავს შეუთავსდება

($A'=A$, $C'=C$, $M'=M$), არასაკუთრივ წერტილთა გეგმილების მოსაძებნად დაგეგმილების S ცენტრზე უნდა გატარდეს თითოეული მათგანის პარალელური წრფე და მოიძებნოს მათი სასურათე სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილები. ნათელია, რომ ისინი ერთმანეთს დაემთხვევიან $F_{\infty}=(B_{\infty}=D_{\infty}=N_{\infty})$. აქედან გამომდინარე, პარალელურ წრფეთა კონის პერსპექტივა გადაკვეთილ წრფეთა კონას წარმოადგენს, მათ გადაკვეთის წერტილს კი პარალელურ წრფეთა თავმოყრის წერტილს უწოდებენ.



ნახ. 54 პარალელურ წრფეთა პერსპექტივა

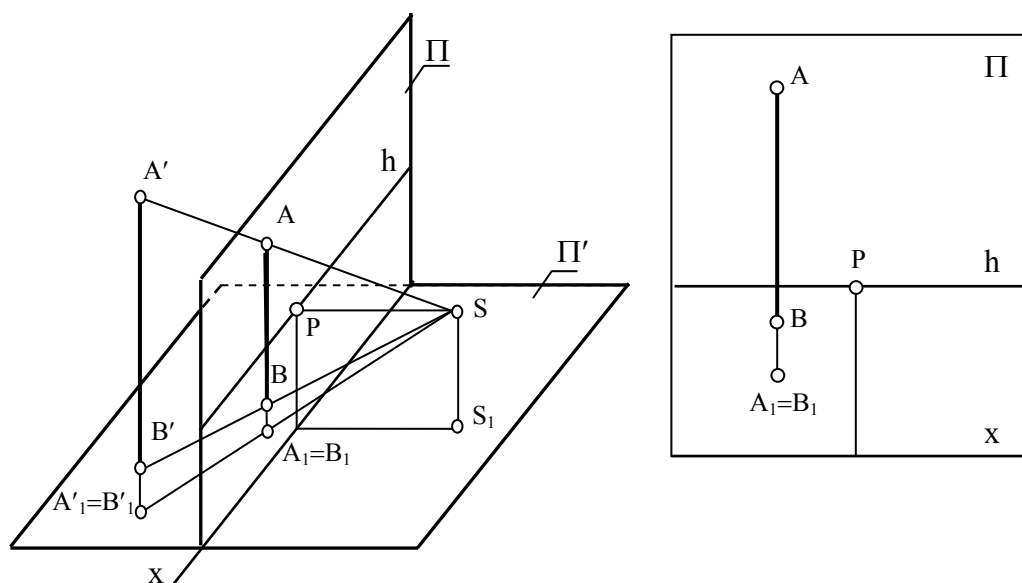
განვიხილოთ წრფის სივრცეში მდებარეობის რამდენიმე კერძო შემთხვევა და ამ წრფეთა თავმოყრის წერტილების მდებარეობანი:



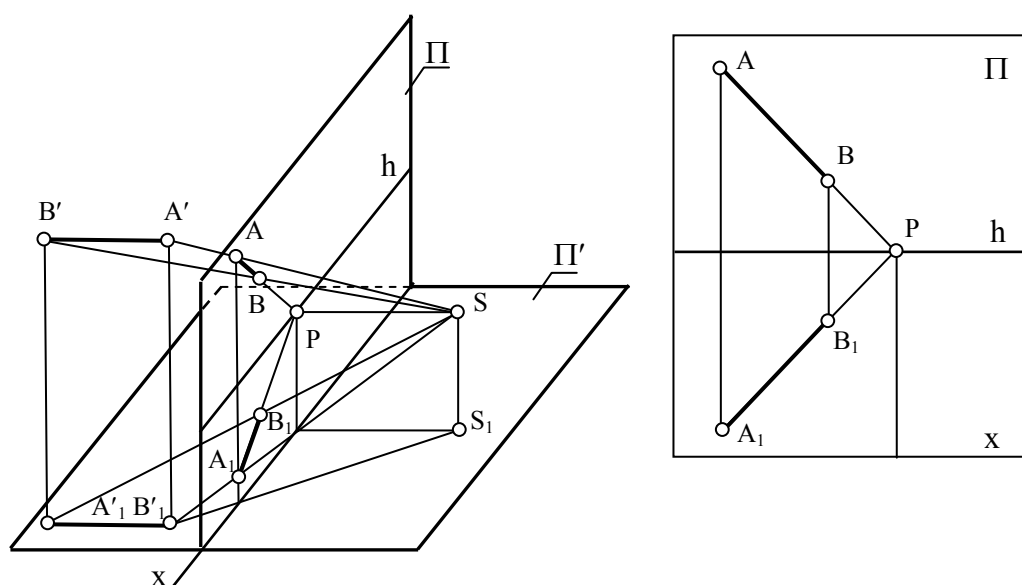
ნახ. 55 ფუძეთა სიბრტყის პარალელური წრფის პერსპექტივა

ფუძეთა სიბრტცის პარალელური $A'B'$ წრფე (ნახ55), თავისი A_1B_1 ფუძის პარალელური იქნება. რადგან პარალელურ წრფეებს ერთი თავმოყრის წერტილი აქვთ, მათაც საერთო თავმოყრის F_∞ წერტილი ექნებათ და იგი ჰორიზონტის ხაზზე იქნება მოთავსებული.

ფუძეთა სიბრტცის მართობული $A'B'$ წრფის პერსპექტივა (ნახ56), სურათის x ფუძის პერპენდიკულარული იქნება, ხოლო მისი A_1B_1 ფუძის A_1B_1 პერსპექტივა წერტილს წარმოადგენს. ასეთი წრფეების თავმოყრის წერტილი არასაკუთრივია.

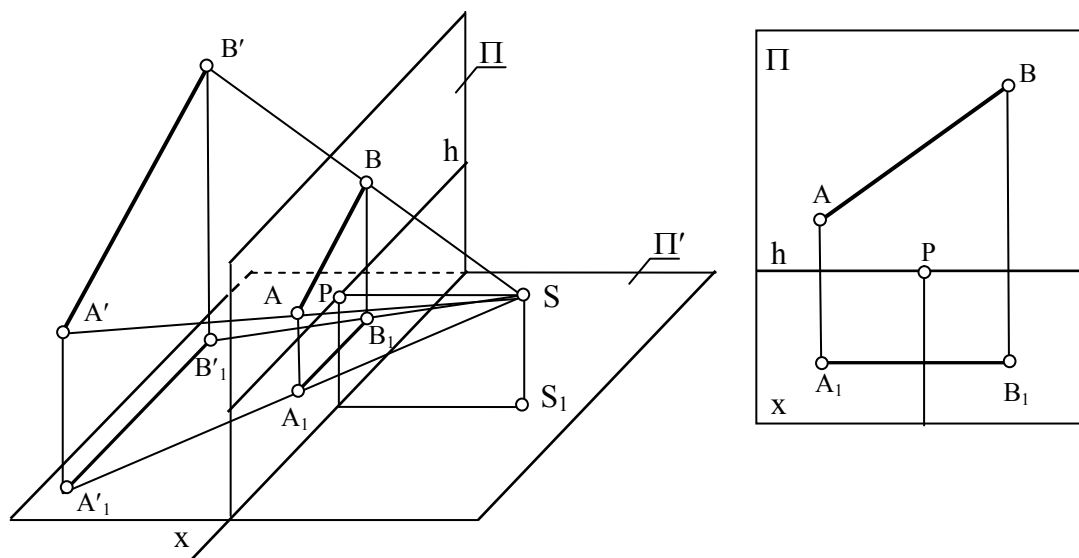


ნახ. 56 ფუძეთა სიბრტცის მართობული წრფის პერსპექტივა



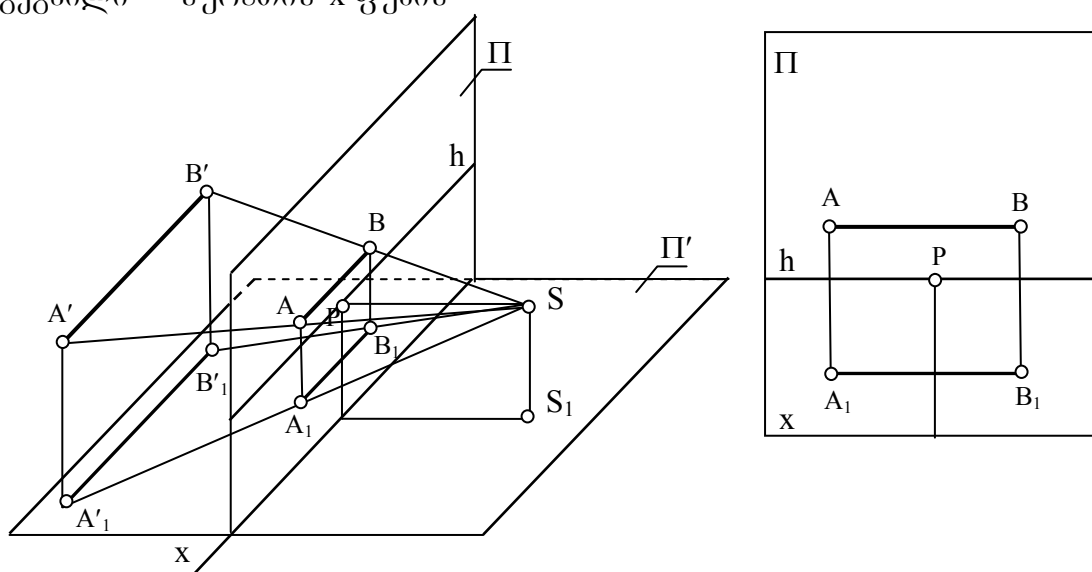
ნახ. 57 სასურათო სიბრტცის მართობული წრფის პერსპექტივა

ნახ.57-ზე მოცემულია სასურათე სიბრტყის მიმართ მართობული $A'B'$ წრფის პერსპექტივა. ასეთი წრფის უსასრულოდ შორს მდებარე წერტილისაკენ მიმართული მაგეგმილებელი წრფეც სასურათე სიბრტყის მიმართ მართობულია, ესე იგი მთავარ სხივს ემთხვევა და სურათს P წერტილში კვეთს. აქედან გამომდინარე სასურათე სიბრტყის მართობული წრფეებისა და მათი ფუძეების თავმოყრის წერტილს მთავარი წერტილი P წარმოადგენს.



ნახ. 58 სასურათე სიბრტყის პარალელური წრფის პერსპექტივა

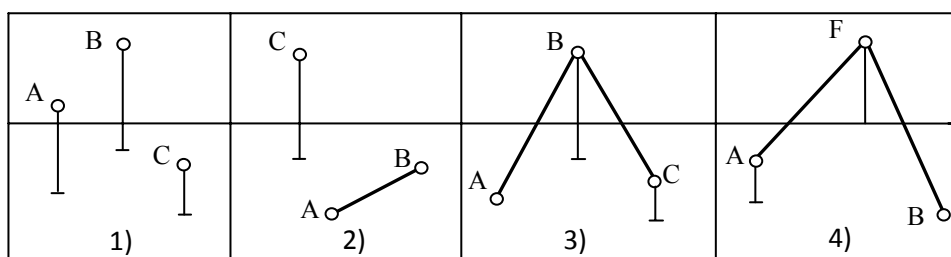
სასურათე სიბრტყის პარალელური $A'B'$ წრფის AB პერსპექტივა თავისივე პარალელურია (ნახ.58), ხოლო მეორეული A_1B_1 გეგმილი – სურათის x ფუძის



ნახ. 59 სურათის ფუძის პარალელური წრფის პერსპექტივა

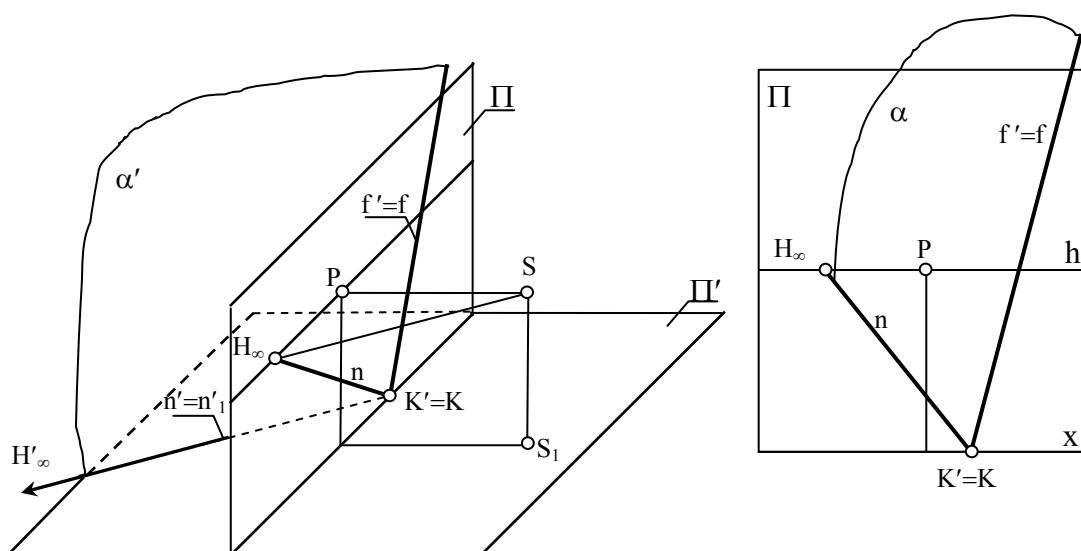
სურათის ფუძის პარალელური $A'B'$ წრფის AB პერსპექტივაც და მისი მეორეული A_1B_1 გეგმილიც სურათის ფუძის პარალელურია (ნახ.59).

2.13.4.სიბრტყის პერსპექტივა. სივრცეში სიბრტყე შეიძლება შემდეგი ელემენტებით იყოს განსაზღვრული: 1) სამი არაკოლინეარული წერტილით; 2) წრფით და მასზე არამდებარე წერტილით; 3) ორი გადაკვეთილი წრფით; 4) ორი პარალელური წრფით (ნახ.60)



ნახ. 60 სიბრტყის პერსპექტივა

ამ ელემენტებით განსაზღვრული სიბრტყე, მიღებულ სურათზე, საკმარისი თვალსაჩინოებით არ სარგებლობს. იმისათვის რომ გამოსახულება თვალსაჩინო გახადონ და თანაც მასზე გრაფიკული აგებების შესრულებაც მარტივი იყოს, სიბრტყეს ორი გადაკვეთილი წრფით განსაზღვრავენ, რომელთაგანაც ერთი წარმოადგენს ამ სიბრტყის გადაკვეთის წრფეს ფუძეთა სიბრტყესთან, ხოლო მეორე გადაკვეთის წრფეს სასურათე სიბრტყესთან.

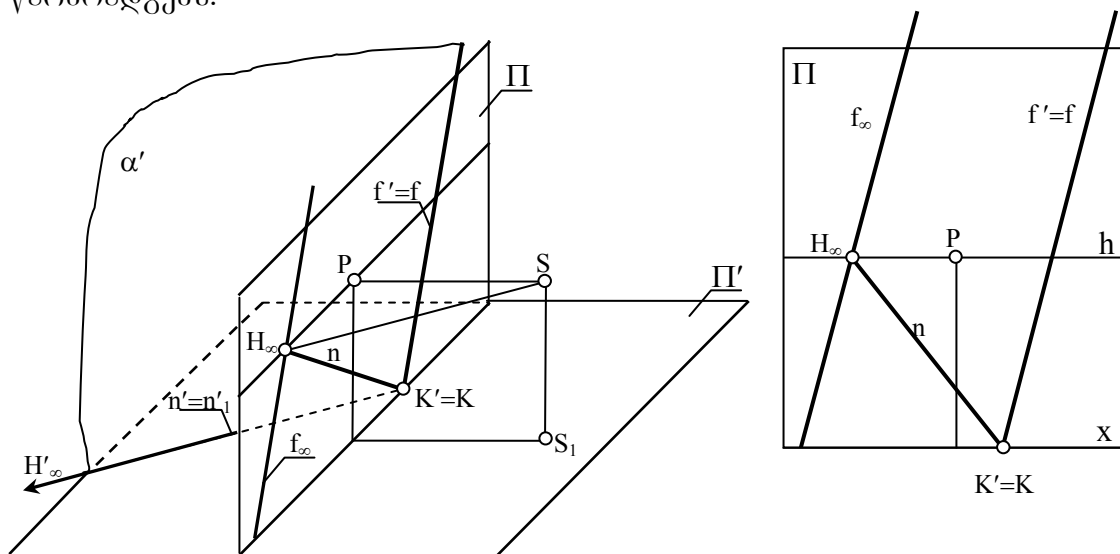


ნახ. 61 სიბრტყის პერსპექტივა

ნახ.61-ზე მოცემულია α' სიბრტყე, რომელიც ფუძეთა სიბრტყეს n' წრფეზე, ხოლო სურათს f' წრფეზე კვეთს. ეს წრფეები – *სასურათე* და *ფუძეთა კვალები* – სურათის ფუძეზე მდებარე K' წერტილში იკვეთებიან.

სურათზე სასურათე კვალის გამოსახულება თავისთავს ემთხვევა $f=f'$. ფუძეთა კვალის გამოსახულების ასაგებად, ერთ წერტილად $K'=K$ გამოვიყენოთ, ხოლო მეორე წერტილად ამ წრფის უსასრულოდ შორს მდებარე H'_∞ .

სურათზე ავაგოთ α სიბრტყის ზღვრული წრფე, რომელიც α' სიბრტყის უსასრულოდ შორს მდებარე წრფის პერსპექტივას წარმოადგენს (ნახ.62). თუ მხერის წერტილზე მოცემული სიბრტყის პარალელურ წრფეთა კონას გავატარებთ და ვიპოვიოთ მათი არასაკუთრივი წერტილების გეგმილებს, მივიღებთ წრფეს, რომელიც თავისთავად ამ სიბრტყის არასაკუთრივი წრფის გეგმილს (f_∞) წარმოადგენს.



ნახ.62 სიბრტყის პერსპექტივა

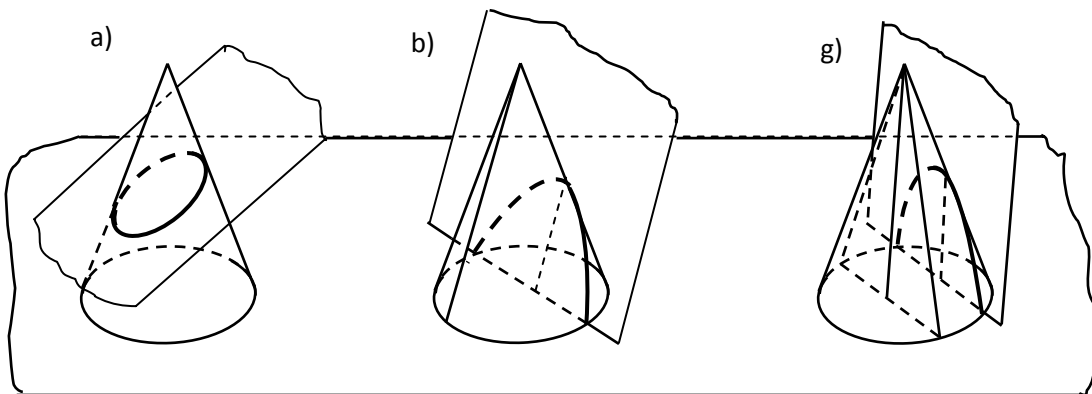
აგებიდან გამომდინარე: 1) სიბრტყის ზღვრული წრფე (f_∞) მისი სასურათე კვალის (f) პარალელურია, ვინაიდან ორივე მათგანი მიღებულია ორი პარალელური სიბრტყის სურათთან გადაკვეთის შედეგად. 2) სიბრტყის ზღვრული (f_∞) წრფე სიბრტყის ფუძეთა კვალის ზღვრულ (H_∞) წერტილზე გადის, რადგანაც ეს წერტილი მოცემული

სიბრტყის ერთერთი უსასრულოდ შორს მდებარე წერტილის პერსპექტივას წარმოადგენს.

ზემოთქმულიდან გამომდინარე, კვანძებით მოცემული სიბრტყის ზღვრული წრფის ასაგებად სურათზე, საკმარისია სიბრტყის ფუძეთა კვანძის ზღვრულ წერტილზე გატარდეს სასურათე კვანძის პარალელური წრფე.

2.13.5. წრეწირის პერსპექტივა. წრეწირის პერსპექტივის აგება მდგომარეობს მის თითოეულ წერტილზე გამავალი მაგვემილებელი სხივების სასურათე სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილების მოძებნაში. ამ სხივების ერთობლიობა კონუსის ზედაპირს წარმოქმნის, რომელსაც *სხივურ კონუსს* უწოდებენ. აქედან გამომდინარე შეიძლება ითქვას, რომ წრეწირის პერსპექტივა სხივური კონუსის სურათთან გადაკვეთის წირს წარმოადგენს.

წირი რომელზეც კონუსის ზედაპირი სიბრტყესთან იკვეთება მეორე რიგისაა და მას *კონუსური კვეთი* ეწოდება. კონუსის მსახველებისა და მკვეთი სიბრტყის (სურათი) ურთიერთმდებარეობის მიხედვით კონუსურ კვეთს შეიძლება შემდეგი სახეები ჰქონდეს:



ნახ. 63 კონუსური კვეთები

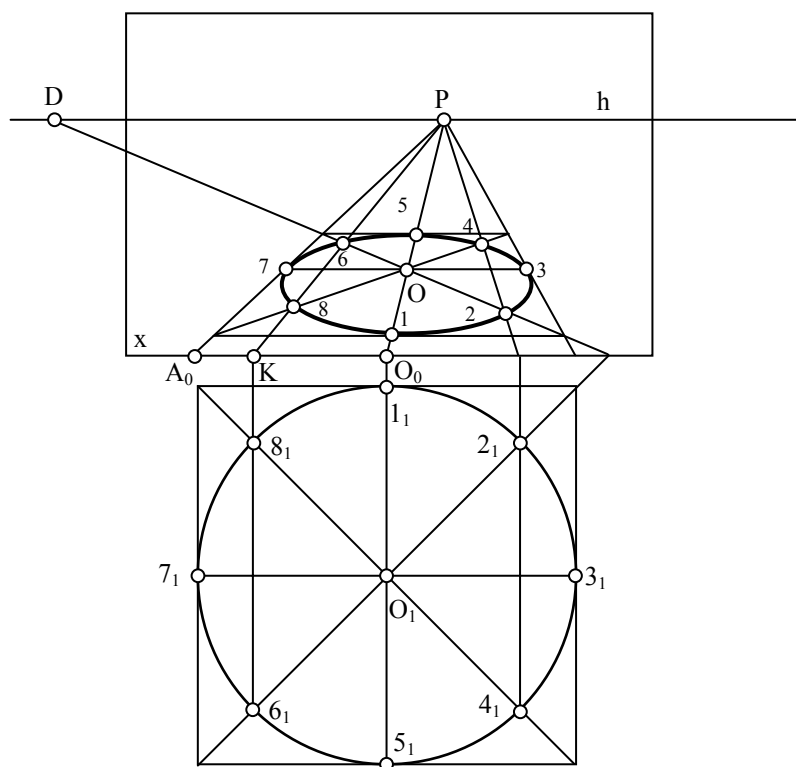
ა) თუ მკვეთი სიბრტყე (სურათი) კონუსის ყველა მსახველს კვეთს, კვეთაში შეკრული წირი მიიღება, რომელსაც *ელიფსი* ეწოდება, ხოლო კერძო შემთხვევაში, როცა მკვეთი სიბრტყე კონუსის ღერძის მართობულია მიღებული წირი წრეწირს წარმოადგენს (ნახ.63-ა).

ბ) თუ მკვეთი სიბრტყე (სურათი) პარალელურია კონუსის ერთი რომელიმე მსახველისა, მაშინ კვეთაში *პარაბოლა* მიიღება (ნახ.63-ბ).

გ) თუ მკვეთი სიბრტყე (სურათი) პარალელურია კონუსის ორი მსახველისა, მაშინ კვეთაში *ჰიპერბოლა* მიიღება (ნახ.63-გ).

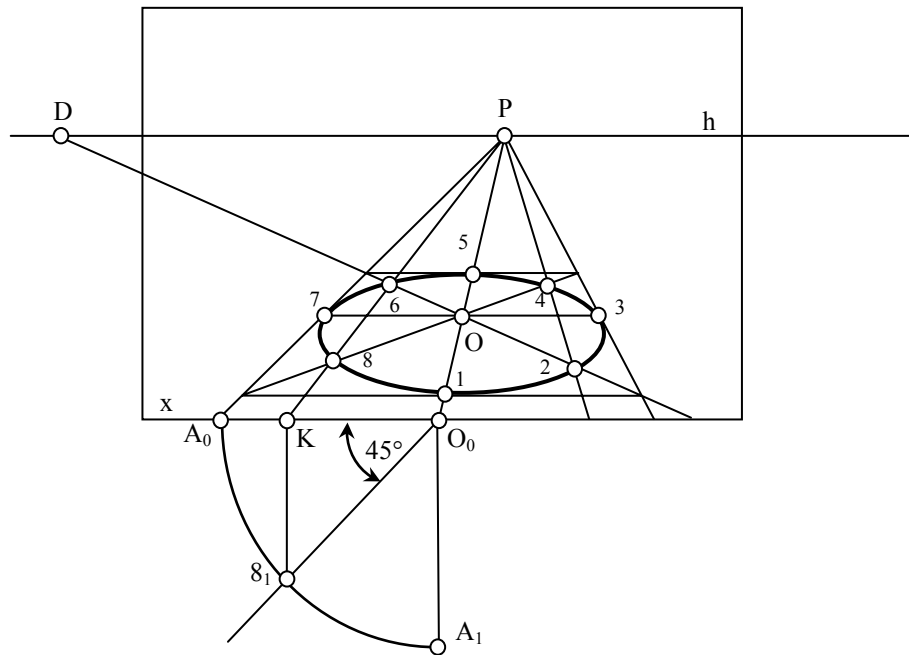
ჩვენ დაწვრილებით მხოლოდ პირველ შემთხვევაზე შევჩერდებით. ვინაიდან ელიფსი ლეკალური წირია და მისი აგება ფარგლის მეშვეობით შეუძლებელია, პოულობენ საძიებელი წირის კუთვნილ წერტილებს, რის შემდეგაც მათ შემოავლებენ ხელით ან ლეკალოთი. ნათელია რომ, რაც უფრო გრძელია ასაგები მრუდი, მით უფრო მეტი წერტილის მოძებნაა საჭირო დამაკმაყოფილებელი სიზუსტისათვის და თანაც დიდი სიმრუდის ადგილებში ეს წერტილები უფრო ახლოახლო უნდა იყვნენ განლაგებულნი.

ქვემოთ მოგვყავს წრეწირის პერსპექტივის აგების ორი მეთოდი. პირველი მეთოდი ძალიან მოსახერხებელია, მაგრამ მხოლოდ რვა წერტილის აგების საშუალებას იძლევა, რის გამოც, ძირითადად, მცირე ზომის გამოსახულებების ასაგებად იყენებენ. მეორე მეთოდის მეშვეობით ნებისმიერი ზომის ელიფსის დიდი სიზუსტით აგებისათვის საჭირო წერტილთა განუსაზღვრელი რაოდენობის აგება შეიძლება.



ნახ. 64 შემოსახული კვადრატის მეთოდი

1) *შემოხაზული კვადრატის მეთოდი*: დაფუძნათ სურათზე მოცემულია წრეწირის O ცენტრის პერსპექტივა და რადიუსის A_0O_0 ნატურალური ზომა (ნახ.64). P და D წერტილების მეშვეობით ვიპოვოთ O ცენტრის სურათთან შეთავსებული O_1 მდებარეობა, შემოვაგლოთ A_0O_0 რადიუსიანი წრეწირი და ავაგოთ მასზე შემოხაზული კვადრატი, ისე რომ მისი ორი გვერდი სურათის ფუძის მართობული იყოს. გაგატაროთ მიღებული კვადრატის შუახაზები და დიაგონალები, რომლებიც წრეწირთან გადაკვეთაში $1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1$ წერტილებს მოგვცემენ. მიღებული გამოსახულების მიხედვით ავსახოთ კვადრატის პერსპექტივა და განვსაზღვროთ ამ წერტილთა შესაბამისი 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 წერტილები, რომელთა მდორე შეერთებითაც საძიებელი წირი აიგება.

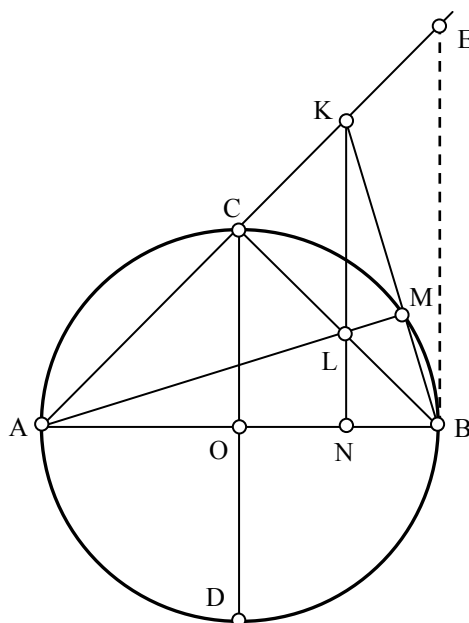


ნახ.65 შემოხაზული კვადრატის მეთოდი

აღნიშნული მეთოდის პრაქტიკული გამოყენებისათვის არ არის აუცილებელი სურათთან შეთავსებულ მდგომარეობაში აიგოს O_1 წრეწირი და მასზე შემოხაზული კვადრატი, რადგან ამ კვადრატის აგება უშუალოდ სურათზეც შეიძლება (ნახ.65). აგება წარმოებს წინასწარ მოცემული O ცენტრის და რადიუსის A_0O_0 ნატურალური ზომის მიხედვით, P და D წერტილების გამოყენებით. შეხების 1,3,5 და 7 წერტილები კვადრატის შუახაზებთან გადაკვეთაში მიიღება, ხოლო დიაგონალებზე მდებარე 2,4,6, და 8 წერტილების ასაგებად, სურათის

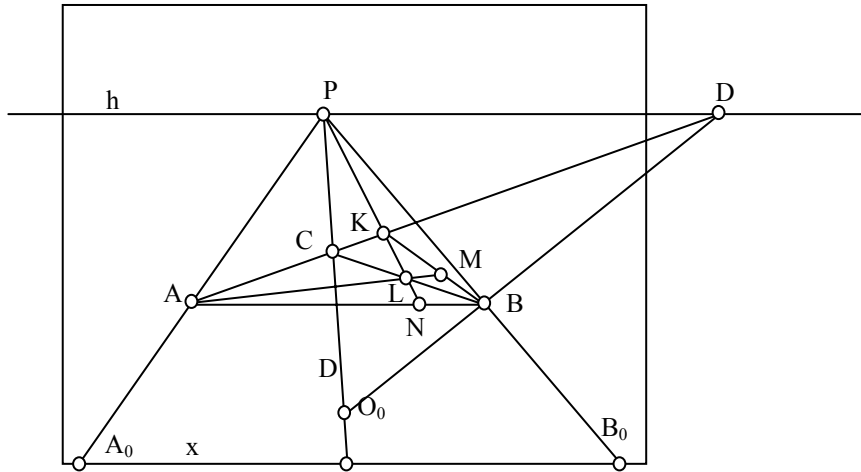
ფუძეზე K წერტილი უნდა მოიძებნოს. ამისათვის საკმარისია O_0 წერტილზე A_0O_0 რადიუსიანი A_0A_1 რკალი შემოივლოს, O_0 -დან სურათის ფუძის მიმართ 45° -ით დახრილი ხაზი გაივლოს, მოინიშნოს მათი S_1 გადაკვეთა დაიშვას მართობი სურათის ფუძეზე. მიღებული K წერტილი ზუსტად იგივე თანაფარდობით დაეოფს A_0O_0 მონაკვეთს, როგორც წინა შემთხვევაში.

2) *სამკუთხედის სიმაღლეების მეთოდი*: ავაგოთ წრეწირი O ცენტრითა და AB , CD შეუღლებული დიამეტრებით (ნახ.66). გაატაროთ AC ქორდა და მის გაგრძელებაზე მოვნიშნოთ K წერტილი (C და E -ს შორის). თუ K წერტილს B -სთან შევაერთებთ, მივიღებთ AKB სამკუთხედს, რომლის KB გვერდი წრეწირს გარკვეულ M წერტილში გადაკვეთს.



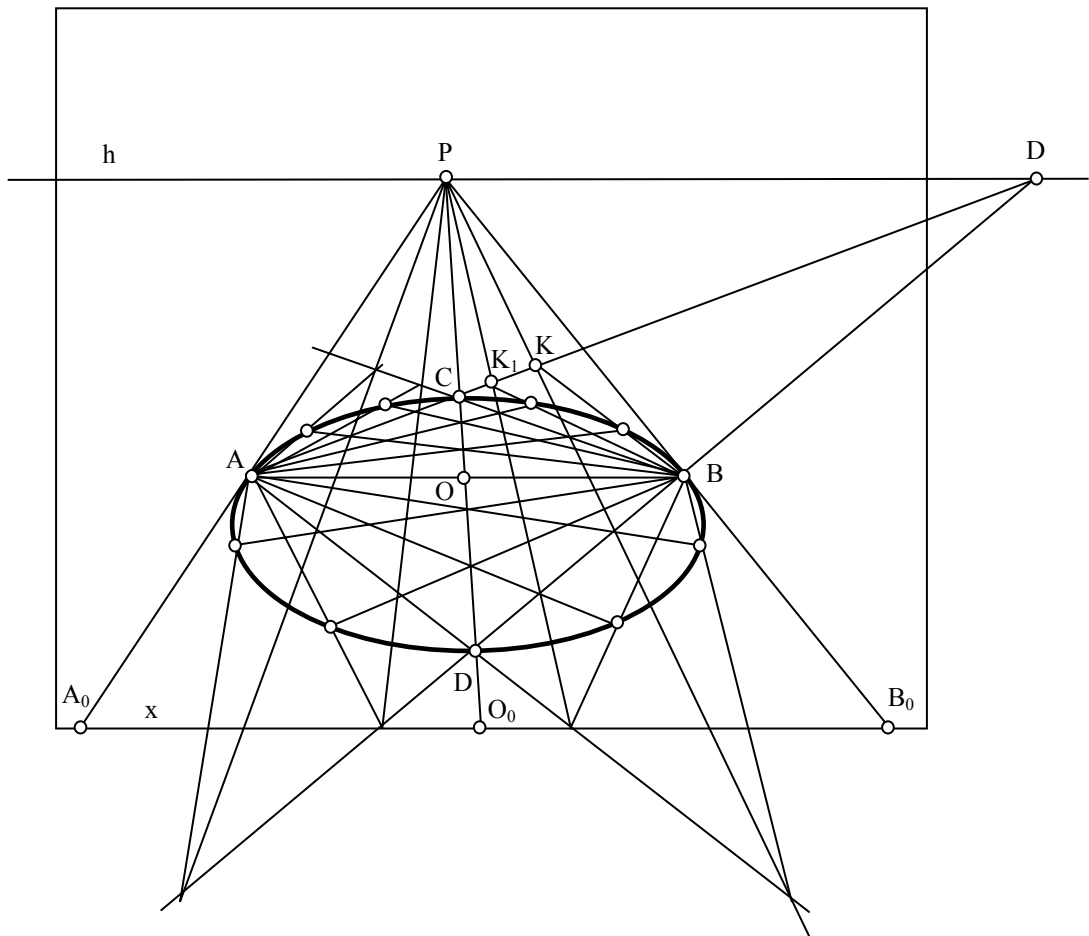
ნახ.66 სამკუთხედის სიმაღლეების მეთოდი

AKB სამკუთხედში ავაგოთ BC , KN , AM სიმაღლეები და მოვნიშნოთ მათი გადაკვეთის L წერტილი. შევნიშნოთ, რომ K წერტილის არჩევანის მიუხედავად (AC წრფეზე, მითითებულ ფარგლებში), B წვეროდან დაშვებული სიმაღლის ფუძე ყოველთვის OC რადიუსის C ბოლოს შეუთავსდება, ხოლო A წვეროდან დაშვებული სიმაღლის ფუძე წრეწირზე იდება, რადგანაც BCA და AMB კუთხეები, როგორც AB დიამეტრზე დაყრდნობილი მართი კუთხეები, წრეწირში ჩახაზულ კუთხეებს უნდა წარმოადგენდნენ.



ნახ. 67 სამკუთხედის სიმაღლეების მეთოდი

იგივე ფიგურის პერსპექტივში გამოსახვა ელიფსის ხუთ A, B, C, D და M წერტილს მოგვცემს (ნახ.67). პირველი ოთხი წერტილის მდებარეობა ამოცანის პირობაზეა დამოკიდებული, ხოლო M წერტილისა K წერტილის მდებარეობაზე AC წრფეზე.



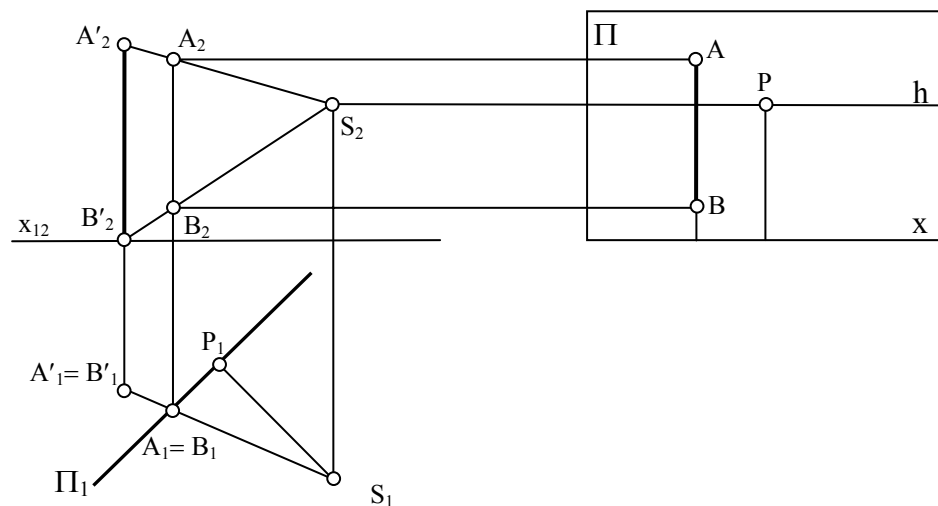
ნახ. 68 სამკუთხედის სიმაღლეების მეთოდი

თუ AC წრფეზე მიმდევრობით შევარჩევთ $K, K_1, K_2, \dots, K_n$ წერტილებს, ზემოთაღწერილი აგებების შედეგად მივიღებთ საძიებელი ელიფსის კუთვნილ $M, M_1, M_2, \dots, M_n$ წერტილებს, რომელთა მდორე შეერთებითაც საძიებელი წირი აიგება (ნახ.68).

2.13.6. პერსპექტივის აგების მეთოდები. არსებობს ორთოგონალური გეგმილების მიხედვით პერსპექტივის აგების რამდენიმე ხერხი. [73] განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი.

რადიალური მეთოდი. რადიალური მეთოდის არსი შემდეგში მდგომარეობს. ორთოგონალურ გეგმილებში მონიშნავენ ობიექტის, სასურათე სიბრტცისა და დაგეგმილების ცენტრის მდებარეობას. დაგეგმილების ცენტრიდან ატარებენ მაგეგმილებელ სხივებს ობიექტის მახასიათებელ წერტილებზე და პოულობენ მათ გადაკვეთას სასურათე სიბრტცესთან, ე.ი. ობიექტის წერტილების პერსპექტივებს. ამასთანავე განსაზღვრავენ ობიექტის წერტილების მეორეული გეგმილების მდებარეობას. ამის შემდეგ ორთოგონალურ გეგმილებში მიღებული წერტილის პერსპექტივები და მეორეული გეგმილები გადააქვთ ნახაზის სიბრტცესთან შეთავსებულ სურათზე.

განვიხილოთ მაგალითი:



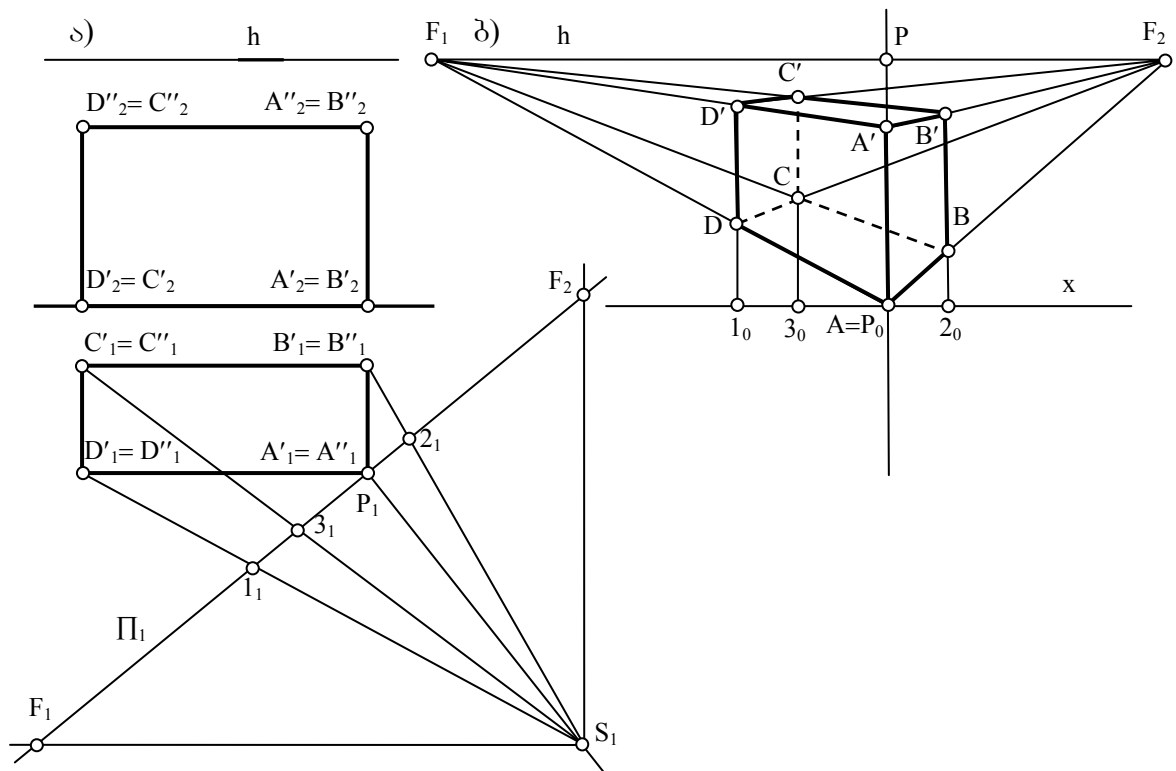
ნახ. 69 რადიალური მეთოდი

ვთქვათ, ორთოგონალურ გეგმილებში მოცემულია ვერტიკალური $A'B'$ მონაკვეთი (ნახ.69). შევარჩიოთ დაგეგმილების ცენტრის მდებარეობა, ვერტიკალური სასურათე სიბრტყე და მის მიმართ მართობული მზერის მიმართულება. დაგეგმილების S ცენტრიდან A წერტილზე ვატარებთ მაგეგმილებელ სხივს (გეგმილებში $S_1 A'_1$ და S_2

A'_2) და სურათთან გადაკვეთაში მივიღებთ წერტილის პერსპექტივას (A_1 A_2). შემდეგ A_2 გადაგვაქვს ნახაზთან შეთავსებულ სურათზე (A). იგივე მოქმედებებს ვატარებთ B წერტილისათვის.

არქიტექტორების მეთოდი. ამ მეთოდის საფუძველში დევს პარალელური წრფეების ის თვისება, რომ პერსპექტივში ისინი ერთ წერტილში იკრიბებიან. რადგან არქიტექტურული ფორმები შეზღუდული რაოდენობით პარალელურ წრფეთა რიგებს შეიცავენ, პერსპექტივის აგებას ამარტივებს მათი თავმოყრის წერტილების წინასწარი განსაზღვრა.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, პერსპექტივში წრფის მდებარეობას მისი არასაკუთრივი წერტილისა და კიდევ ერთი წერტილის მეშვეობით განსაზღვრავენ. ამ წერტილად ძირითადად წრფის სურათთან გადაკვეთის წერტილს იყენებენ, ან რაიმე სხვა წერტილს აგებენ რადიალური მეთოდით.



ნახ. 70 არქიტექტორების მეთოდი

განვიხილოთ არქიტექტორების მეთოდის გამოყენება ორთოგონალური გეგმილებით მოცემული $A'A'', B'B'', C'C'', D', D''$ მართკუთხა პრიზმის პერსპექტივის აგების მაგალითზე (ნახ.70 ა.).

სასურათე Π სიბრტყე პრიზმის $A'A''$ წიბოზე გავატაროთ, სურათის ჰორიზონტალური Π_1 გეგმილი ამ წიბოს $A'_1=A''_1$ გეგმილზე გაივლის. ორთოგონალურ გეგმილებში შევარჩიოთ მზერის S წერტილის მდებარეობა ისე, რომ მისგან სურათზე დაშვებულმა მართობმა სურათი $A'A''$ წიბოზე გადაკვეთოს (P). მზერის S წერტილზე პრიზმის $A'D'$ და $A'B'$ წიბოების პარალელური წრფეები გავატაროთ და ვიპოვოთ მათი სურათთან გადაკვეთის წერტილები. მივიღებთ F_1 და F_2 წერტილებს, რომლებიც შესაბამისი მიმართულების პარალელურ წრფეთა კონების თავმოყრის წერტილებს წარმოადგენენ. ვინაიდან $A'D'$ და $A'B'$ წრფეები ჰორიზონტალური მდებარეობისანი არიან, მათი თავმოყრის წერტილები ჰორიზონტის ხაზზე იქნებიან განლაგებულნი, PF_1 და PF_2 მანძილებზე P მთავარი წერტილიდან.

სასურათე სიბრტყეზე (ნახ.70-ბ.) გავავლოთ სურათის x ფუძე, შერჩეულ სიმაღლეზე მისი პარალელური h ჰორიზონტის ხაზი, P მთავარი წერტილი და თავმოყრის F_1 და F_2 წერტილები, რის შემდეგაც შეგვიძლია შევუდგეთ პრიზმის პერსპექტივის აგებას.

სასურათე სიბრტყეში მდებარე $A'A''$ წიბო დაუმახინჯებლად დაგეგმილდება, ამასთან მისი A' წერტილი სურათის ფუძეზე იდება. $A'D'$ წიბო F_1 თავმოყრის წერტილისკენ იქნება მიმართული, ხოლო $A'A''$ წიბო – F_2 თავმოყრის წერტილისაკენ.

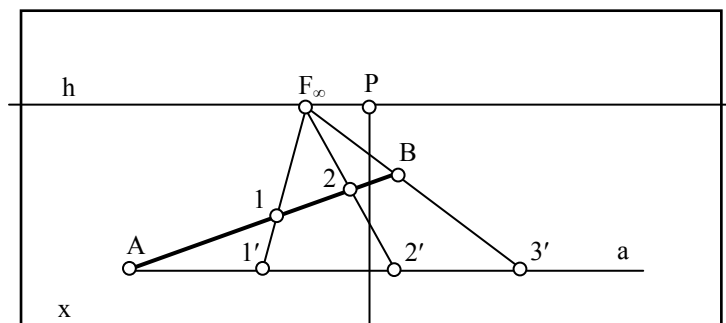
D' წერტილის პერსპექტივის ასაგებად მის ჰორიზონტალურ D'_1 გეგმილზე გავატაროთ მაგეგმილებელი $S_1D'_1$ სხივი და ვიპოვოთ მისი სურათთან გადაკვეთის 1_1 წერტილი. მიღებული წერტილი გადავიტანოთ სურათის x ფუძეზე, რისთვისაც P_11_1 მანძილი გადავზომოთ P_0 წერტილიდან შესაბამისად მარცხნივ. მიღებული 1_0 წერტილიდან აღვმართოთ ვერტიკალური კავშირის ხაზი, რომელიც AF_1 წრფესთან გადაკვეთაში მოგვცემს საძიებელ D' წერტილის D პერსპექტივას. იგივე კავშირის ხაზზე, ოღონდ AF_1 წრფესთან გადაკვეთაზე იდება D'' წერტილის D' პერსპექტივა. ანალოგიური აგებებით მივიღებთ $B'B''$ წიბოს პერსპექტივასაც. C' წერტილის პერსპექტივის აგება უფრო

მარტივადაც შეიძლება, საკმარისია მოძებნოს BF_1 და DF_2 წრფეების გადაკვეთის წერტილი.

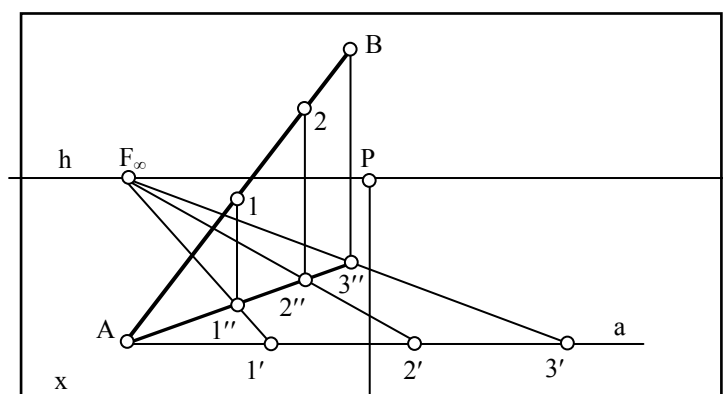
2.13.7 მეტრული ამოცანები.

1) პერსპექტივში მოცემული მონაკვეთის დაყოფა რამდენიმე ტოლ ნაწილად.

ა) განვიხილოთ შემთხვევა, როცა AB მონაკვეთი ფუძეთა სიბრტყეში მდებარეობს (ნახ.71). წერტილზე გავატაროთ სურათის ფუძის პარალელური წრფე და გადავზომოთ მასზე რამდენიმე, მაგალითად სამი ტოლი მონაკვეთი ($[A1']=[1'2']=[2'3']$). გავავლოთ $3'B$ წრფე და მოვნიშნოთ მისი ზღვრული F_∞ წერტილი. $1'$ და $2'$ წერტილებზე გავავლოთ $3'F_\infty$ წრფის პარალელური $1'F_\infty$ და $2'F_\infty$ წრფეები. ეს წრფეები AB წრფეს 1 და 2 წერტილებში გადაკვეთენ, რომლებიც მას სამ თანაბარ ნაწილად დაყოფენ.



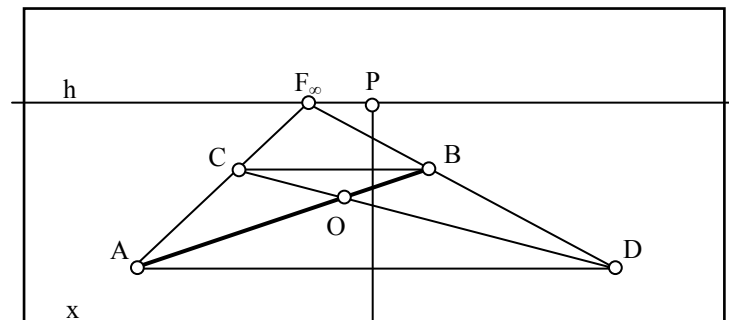
ნახ. 71 მეტრული ამოცანები



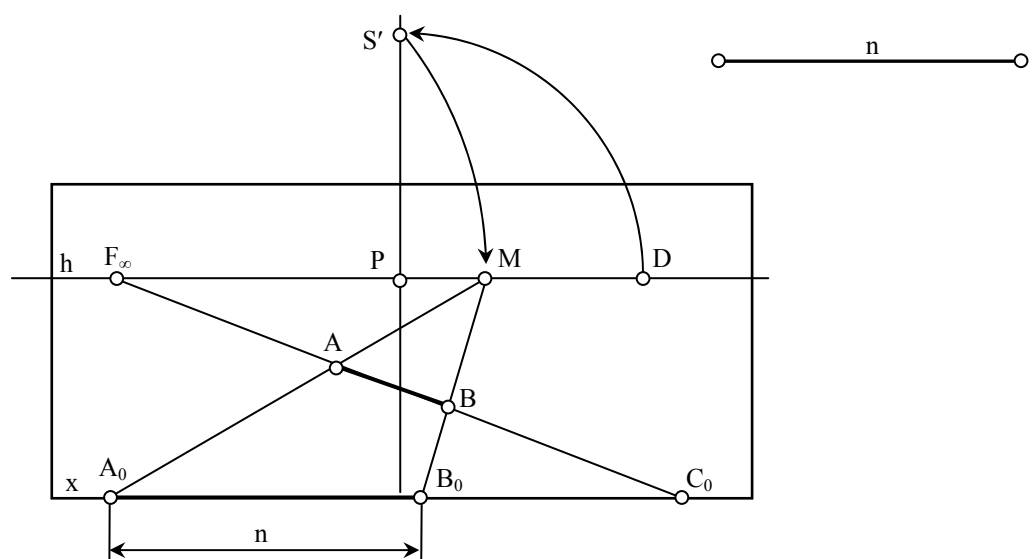
ნახ. 72 მეტრული ამოცანები

ბ) დავუშვათ AB მონაკვეთი დახრილია გეგმილთა სიბრტყეების მიმართ (ნახ.72). ასეთ შემთხვევაში ჯერ მისი მეორეული გეგმილი დავყოთ წინა მეთოდით ($[A1'']=[1''2'']=[2''3'']$), ხოლო შემდეგ

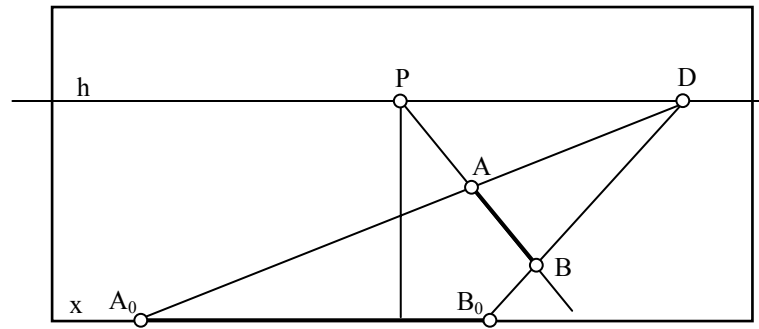
გ) თუ ფუძეთა სიბრტყეში მდებარე AB მონაკვეთის ორ ტოლ ნაწილად გაყოფაა საჭირო (ნახ.73), შეიძლება გამოვიყენოთ მეთოდი, რომელიც დაფუძნებულია პარალელოგრამის დიაგონალების იმ თვისებაზე, რომ ისინი ერთმანეთს შუაზე ყოფენ. ამისათვის მონაკვეთის ბოლოებზე გავატაროთ ნებისმიერი მიმართულების პარალელური AF_∞ , BF_∞ და სხვა მიმართულების BC და AD წრფეები (ამ შემთხვევაში BC და AD სურათის ფუძის პარალელურია). AB მონაკვეთი მიღებული პარალელოგრამის დიაგონალი გამოვა და მას მეორე CD დიაგონალი შუაზე გაყოფს.



2) სურათზე მოცემულ წრეზე წინასწარ განსაზღვრული სივრცის მონაკვეთის აგება.



125



ნახ. 76 მეტრული ამოცანები

ასეთ შემთხვევაში გრაფიკული აგებები დავის DA და DB წრფეებით AB მონაკვეთის სურათის ფუძეზე გადატანაზე (A_0B_0).

2.14. ჩრდილები ორთოგონალურ გეგმილებსა და აქსონომეტრიაში

სხვადასხვა სამშენებლო და არქიტექტურული ფორმების ორთოგონალურსა და აქსონომეტრიულ გეგმილებში ჩრდილებს აგებენ იმ მიზნით, რომ ისინი უფრო რელიეფური და თვალსაჩინო გახადონ. ნახაზები, სივრცითი სხეულების გამოსახულებებით რომლებზეც ჩრდილებია დატანილი, საშუალებას გვაძლევენ უფრო ზუსტად ვიმსჯელოთ მათ ურთიერთგანლაგებასა და ცალკეული ფრაგმენტების ფორმაზე.

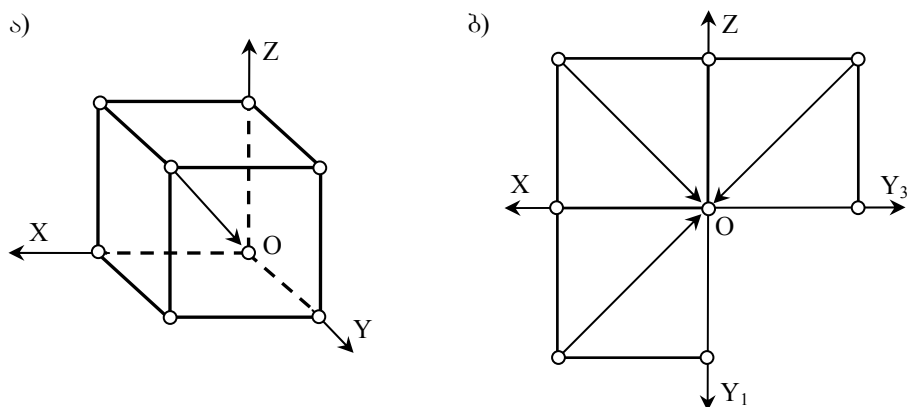
ტექნიკურ ნახაზებზე ჩრდილის აგება მხოლოდ გეომეტრიული თვალსაზრისით ხდება და მისი ფიზიკური ასპექტები (განათების წყაროს ინტენსივობა, ობიექტის განათებულობის სიდიდე, სინათლის ბლიკები და სხვ.) მხედველობაში არ მიიღება [87]. მიიჩნევენ, რომ სინათლის სხივები სივრცეში სწორხაზოვნად ვრცელდებიან. განათების წყაროს სახისა და ადგილმდებარეობის მიხედვით, განიხილავენ სამი ტიპის განათებას: *ბუნებრივი* ანუ *მზის* (პარალელური სხივებით), *ხელოვნური* (ურთიერთგადაკვეთილი სხივებით) და *შერეული*.

ქვემოთ საუბარი გვექნება მხოლოდ მზის განათებაზე. ასეთ შემთხვევაში მზეს განიხილავენ, როგორც უსასრულოდ შორს მდებარე წერტილს და მისგან გამომავალ სხივებს ურთიერთპარალელურებად თვლიან.

განათებისას, სინათლის სხივები სივრცეში მდებარე ობიექტის ზედაპირის გარკვეულ ნაწილს ანათებენ, დანარჩენი კი გაუნათებელი (ჩრდილში) რჩება. ამ ჩრდილს *საკუთარ ჩრდილს* უწოდებენ, განათებული და გაუნათებელი ზედაპირის „გამყოფ წირს“ *საკუთარი ჩრდილის კონტურს*, ხოლო ჩრდილს, რომელიც ობიექტისაგან ეცემა მის შემდეგ მდებარე ზედაპირებზე – *დაცემულ ჩრდილს*. დაცემული ჩრდილის კონტური – *საკუთარი ჩრდილის კონტურის ჩრდილია*.

განათების ნებისმიერი მიმართულება შეგვიძლია შევარჩიოთ, მაგრამ ჩრდილების აგების გამარტივების მიზნით, ტექნიკურ ნახაზებზე, სინათლის სხივის მიმართულებად კუბის დიაგონალს მიიჩნევენ, [76] (რომლის ქვედა და უკანა წახნაგები ეკუთვნიან შესაბამისად

ჰორიზონტალურ Π_1 და ფრონტალურ Π_2 გეგმილთა სიბრტყეებს) წინა მარცხენა წვეროდან – ქვედა მარჯვენა უკანმდებარე წვერომდე



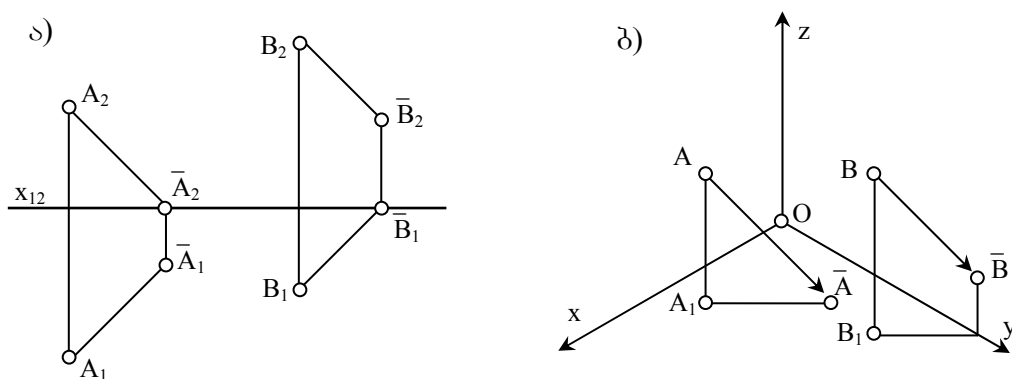
ნახ. 77 განათების მიმართულება

ნახაზიდან თვალნათლივ ჩანს, რომ ეპიურზე, ასეთი მიმართულების განათების სხივების გეგმილები, შესაბამისი X,Y და Z ღერძების მიმართ 45° -ით იქნებიან დახრილები (ნახ.77-ბ).

2.14.1 წერტილის ჩრდილი

წერტილის ჩრდილი წარმოადგენს წერტილს, რომელიც მიიღება ამ წერტილზე გამავალი სინათლის სხივის გადაკვეთაში რაიმე ზედაპირთან.

წერტილის ჩრდილი გეგმილთა სიბრტყეზე. წერტილის ჩრდილი გეგმილთა სიბრტყეზე წარმოადგენს მასზე გატარებული განათების სხივის კვალს ამ სიბრტყეზე.



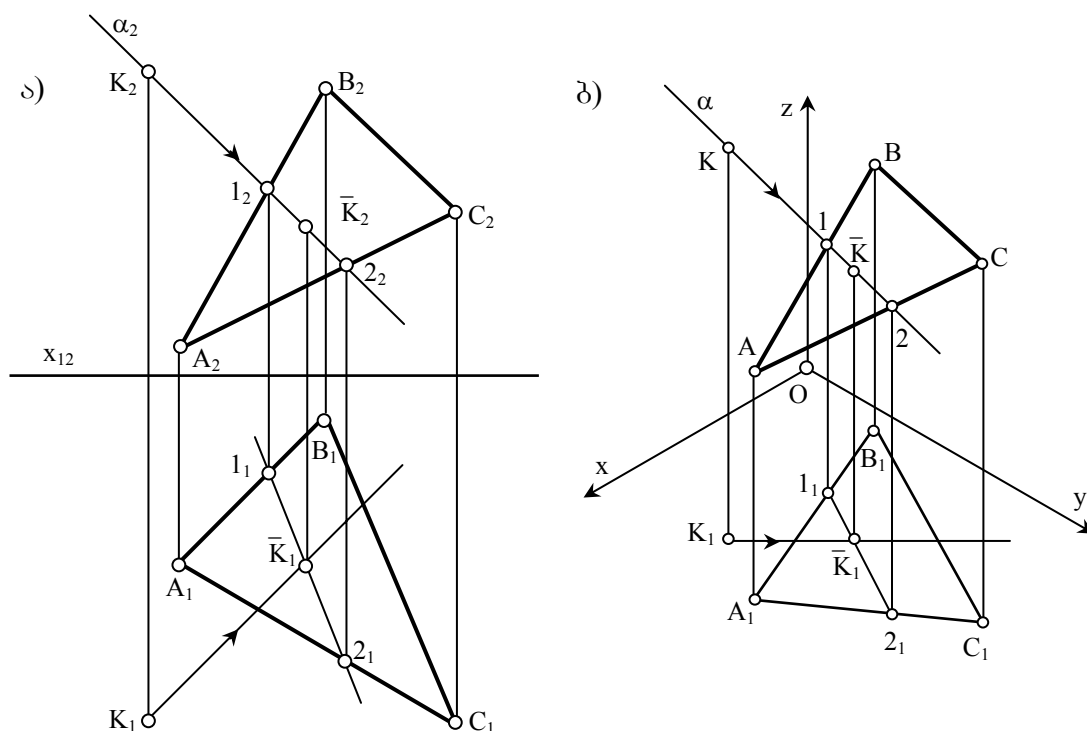
ნახ. 78 წერტილის ჩრდილი

ნახ. 78-ა-ზე ნახვენებია A და B წერტილების ჩრდილების აგება ჰორიზონტალურ და ფრონტალურ გეგმილთა სიბრტყეებზე. ორივე შემთხვევაში ამოცანა დაიყვანება სინათლის სხივისა და შესაბამისი

გეგმილთა სიბრტყის თანაკვეთაზე ანუ წრფის პორიზონტალური ან ფრონტალური კვალის აგებაზე.

ნახ. 78-ბ-ზე ნაჩვენებია A და B წერტილების ჩრდილების აგება აქსონომეტრიაში.

წერტილის ჩრდილი ბრტყელ ფიგურაზე. წერტილის ჩრდილი ბრტყელ ფიგურაზე წარმოადგენს მასზე გატარებული განათების სხივის გადაკვეთას ამ ფიგურასთან.



ნახ. 79 წერტილის ჩრდილი ბრტყელ ფიგურაზე

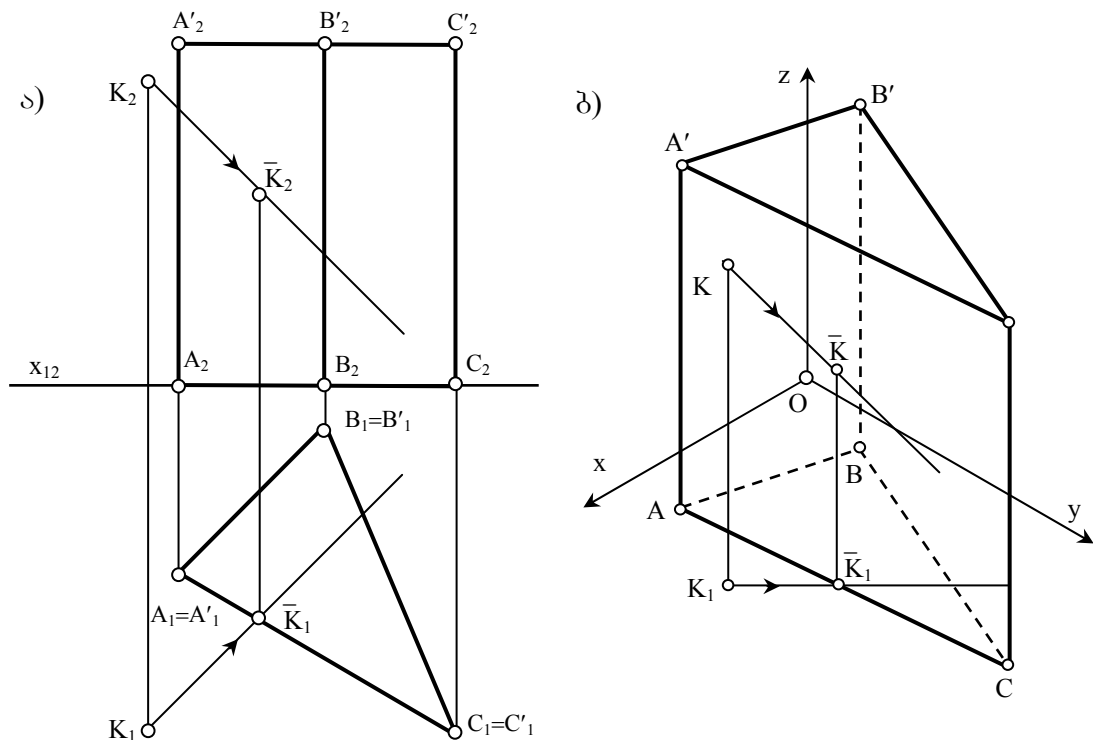
ნახ.79-ა-ზე მოცემულია ორთოგონალურ გეგმილებში K წერტილის ჩრდილის აგება ზოგადი მდებარეობის ABC სიბრტყეზე.

ჩრდილის ასაგებად K წერტილზე გავატაროთ განათების მიმართულების პარალელური წრფე და შევუთავსოთ მას დამხმარე მაგეგმილებელი α სიბრტყე (ამ შემთხვევაში ფრონტალურად მაგეგმილებელი). ვიპოვოთ α სიბრტყისა და ABC სიბრტყის გადაკვეთის (12) წრფე, რომლის გადაკვეთაც განათების სხივთან მოგვცემს საძიებელ წერტილს.

ნახ.79-ბ-ზე აქსონომეტრიაში ნაჩვენებია K წერტილის ჩრდილის აგება ზოგადი მდებარეობის ABC სიბრტყეზე.

აგებები იგივე თანმიმდევრობით მიმდინარეობს, როგორც ეპიურზე.

წერტილის ჩრდილი მრავალწახნაგა ზედაპირზე. წერტილის ჩრდილი მრავალწახნაგა ზედაპირზე წარმოადგენს მასზე გატარებული განათების სხივის გადაკვეთას ამ ზედაპირთან. ვინაიდან მრავალწახნაგას ზედაპირი ბრტყელი მრავალკუთხედებისაგან შედგება, ამოცანა დაიყვანება წრფის და სიბრტყის გადაკვეთის წერტილის მოძებნაზე.



ნახ. 80 წერტილის ჩრდილი მრავალწახნაგაზე

ნახ.80-ა-ზე მოცემულია K წერტილის ჩრდილის აგება $AA'BB'CC'$ სამკუთხა მართი პრიზმის ზედაპირზე ორთოგონალურ გეგმილებში, ხოლო ნახ.80-ბ-ზე – აქსონომეტრიაში.

წერტილის ჩრდილი მრუდ ზედაპირზე. წერტილის ჩრდილი მრუდ ზედაპირზე ასევე წარმოადგენს მასზე გატარებული განათების სხივის გადაკვეთას ამ ზედაპირთან.

ნახ.81-ზე მოცემულია ეპიურზე K წერტილის ჩრდილის აგება ბრუნვის კონუსზე, რომლის ფუძე Π_1 სიბრტყეზე დევს.

აგებები შემდეგი თანმიმდევრობით ვაწარმოოთ:

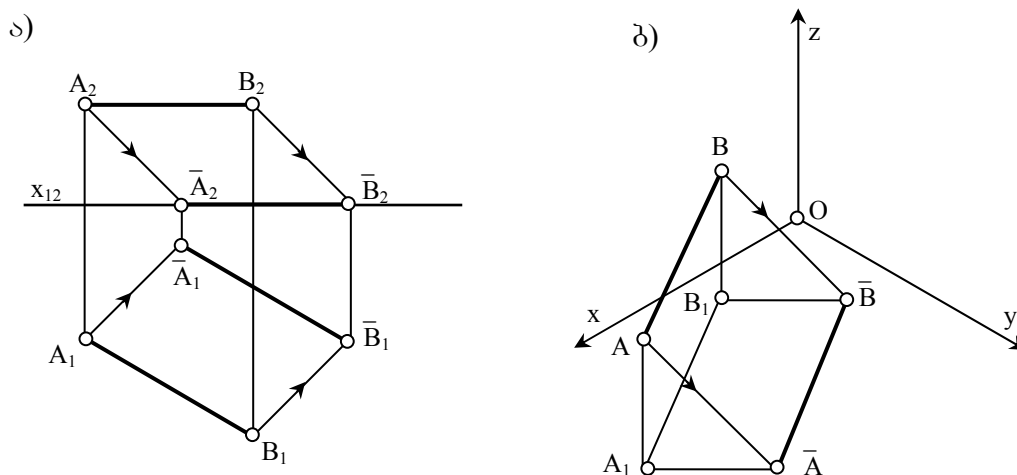
2.14.2 წრფის ჩრდილი

სხივები, რომლებიც წრფეზე გაივლიან, წარმოქმნიან *სხივურ* სიბრტყეს. წრფის ჩრდილი განისაზღვრება ამ წრფის კუთვნილ წერტილთა დაცემული ჩრდილების ერთობლიობით ანუ სხივური სიბრტყის გადაკვეთით იმ ზედაპირთან, რომელზეც ჩრდილი ეცემა. აქედან გამომდინარე, წრფის დაცემული ჩრდილი სიბრტყეზე წრფე იქნება, ცილინდრულ ზედაპირზე მას შეიძლება ჰქონდეს როგორც ელიფსის, ისე წრიული ფორმა, სფეროზე წრიული იქნება, მრავალწახნაგზე – ტეხილი წირი...

თუ წრფე ემთხვევა სინათლის სხივის მიმართულებას, მაშინ მისი ჩრდილი ნებისმიერ ზედაპირზე წერტილია.

წრფის ჩრდილი გეგმილთა სიბრტყეზე. წრფის ჩრდილი გეგმილთა სიბრტყეზე მიიღება სხივური სიბრტყის გადაკვეთაში გეგმილთა სიბრტყესთან, ანუ იგი საზოგადოდ წრფეს წარმოადგენს.

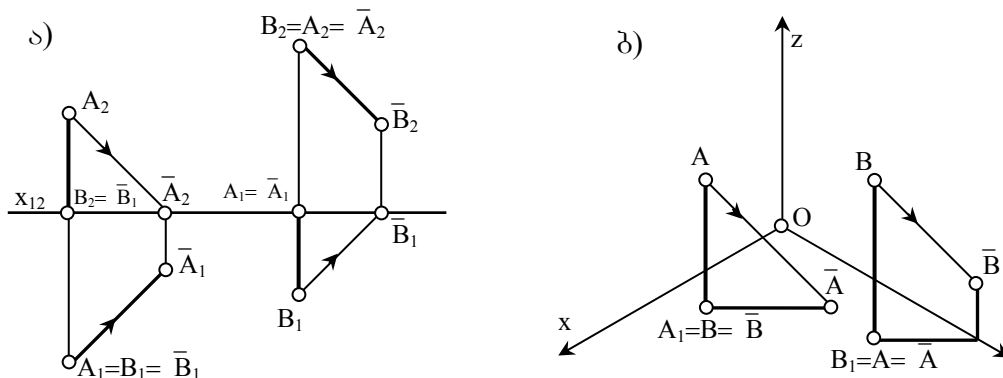
ღონის წრფის ჩრდილი გეგმილთა სიბრტყეზე, პარალელური დაგეგმილების ინვარიანტული თვისებებიდან გამომდინარე, თავისი ტოლი და პარალელურია (ნახ.82 ა-ბ). მის ასაგებად საკმარისია წრფის ერთი წერტილის ჩრდილის აგება, უკვე ცნობილი მეთოდით, ხოლო შემდეგ ამ წრფის ტოლი და პარალელური წრფის გატარება.



ნახ. 82 ღონის წრფის ჩრდილი

მაგეგმილებელი წრფის ჩრდილის ასაგებად საკმარისია აიგოს A და B წერტილების ჩრდილები (ნახ.83-ა). A წერტილიდან დაშვებული სხივის

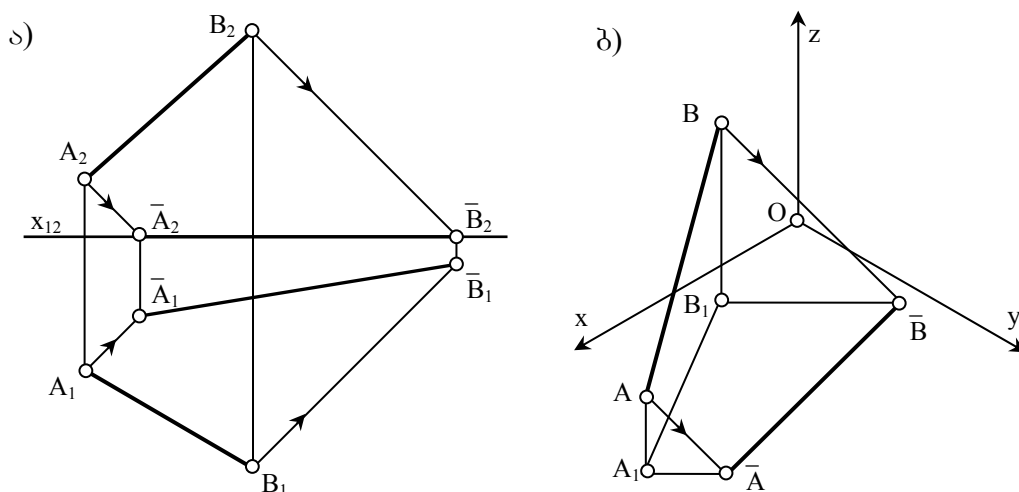
კვეთით გეგმილთა სიბრტყესთან მიიღება $\bar{A}$ ჩრდილი. B წერტილის ჩრდილი კი ემთხვევა ამავე წერტილს, რადგან ის გეგმილთა სიბრტყეს ეკუთვნის. A და B წერტილების $\bar{A}$ და $\bar{B}$ ჩრდილების შეერთებით მივიღებთ AB მონაკვეთის ჩრდილს, რომელიც გეგმილზე x ღერძის მიმართ 45° არის დახრილი.



ნახ. 83 მაგეგმილებელი წრფის ჩრდილი

აქსონომეტრიულ გეგმილებში ჩრდილი პარალელურია სინათლის სხივის პორიზონტალური გეგმილისა (ნახ.83-ბ). აქედან გამომდინარე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მაგეგმილებელი წრფის ჩრდილი გეგმილთა სიბრტყეზე ემთხვევა სინათლის სხივის გეგმილს.

ზოგადი მდებარეობის AB წრფის ჩრდილის ასაგებად A და B წერტილების ჩრდილების აგებაა აუცილებელი (ნახ.84).

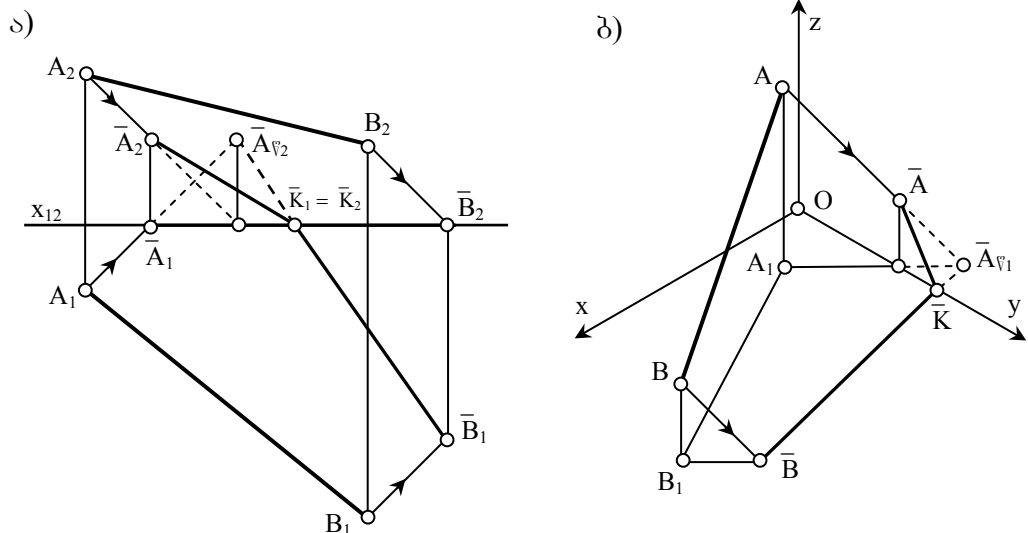


ნახ. 84 ზოგადი მდებარეობის წრფის ჩრდილი

ნახ.85-ა-ზე განხილულია ზოგადი მდებარეობის AB წრფის ჩრდილის აგების ისეთი შემთხვევა, როდესაც A წერტილის ჩრდილი

ფრონტალურ გეგმილთა სიბრტყეს ეცემა, ხოლო B წერტილის ჩრდილი – პორიზონტალურს.

ამოცანის გადასაწყვეტად უნდა ავაგოთ A და B წერტილების $\bar{A}$ და $\bar{B}$ ჩრდილები. რადგან A წერტილის ჩრდილი ფრონტალურ გეგმილთა სიბრტყეზე მდებარეობს, ხოლო B წერტილისა კი პორიზონტალურზე, უნდა ვიპოვოთ A წერტილის წარმოსახვითი $\bar{A}_\nabla$ ჩრდილი პორიზონტალურ გეგმილთა სიბრტყეზე, გავატაროთ $\bar{A}_\nabla \bar{B}$ წრფე, რომელიც x ღერძთან გადაკვეთაში მოგვცემს გარდატეხის K წერტილს. აგებების შედეგად მივიღებთ, რომ AK მონაკვეთის ჩრდილი ფრონტალურ გეგმილთა სიბრტყეს ეცემა, ხოლო BK მონაკვეთის ჩრდილი – პორიზონტალურ გეგმილთა სიბრტყეს.



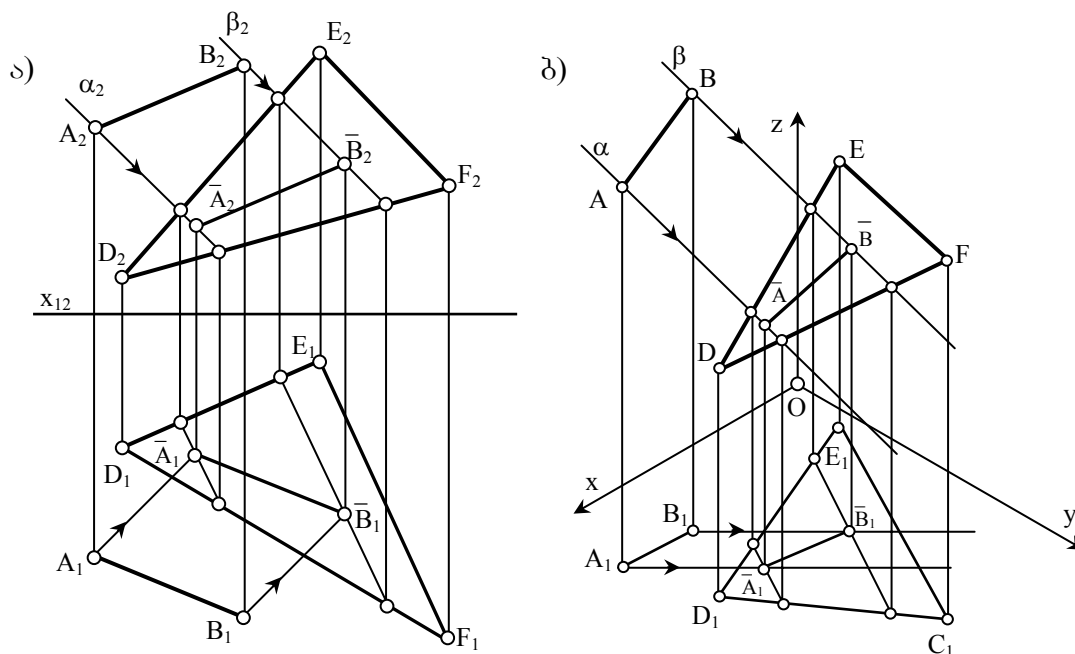
ნახ. 85 ზოგადი მდებარეობის წრფის ჩრდილი

აქსონომეტრიაშიც აგებები იგივე თანამიმდევრობით უნდა ვაწარმოოთ (ნახ.85-ბ).

წრფის ჩრდილი ზოგადი მდებარეობის სიბრტყეზე წარმოადგენს ამ წრფეზე გატარებული სხივური სიბრტყის გადაკვეთას მოცემულ სიბრტყესთან. ამ ორი სიბრტყის გადაკვეთის წრფის საპოვნელად კი სრულიად საკმარისია მისი ორი წერტილის მოძებნა.

ნახ.86-ზე ნაჩვენებია AB მონაკვეთის ჩრდილის აგება DEF სამკუთხედზე, ორთოგონალურ გეგმილებსა და აქსონომეტრიაში. ორივე შემთხვევაში აგებები შესრულებულია ერთი და იგივე

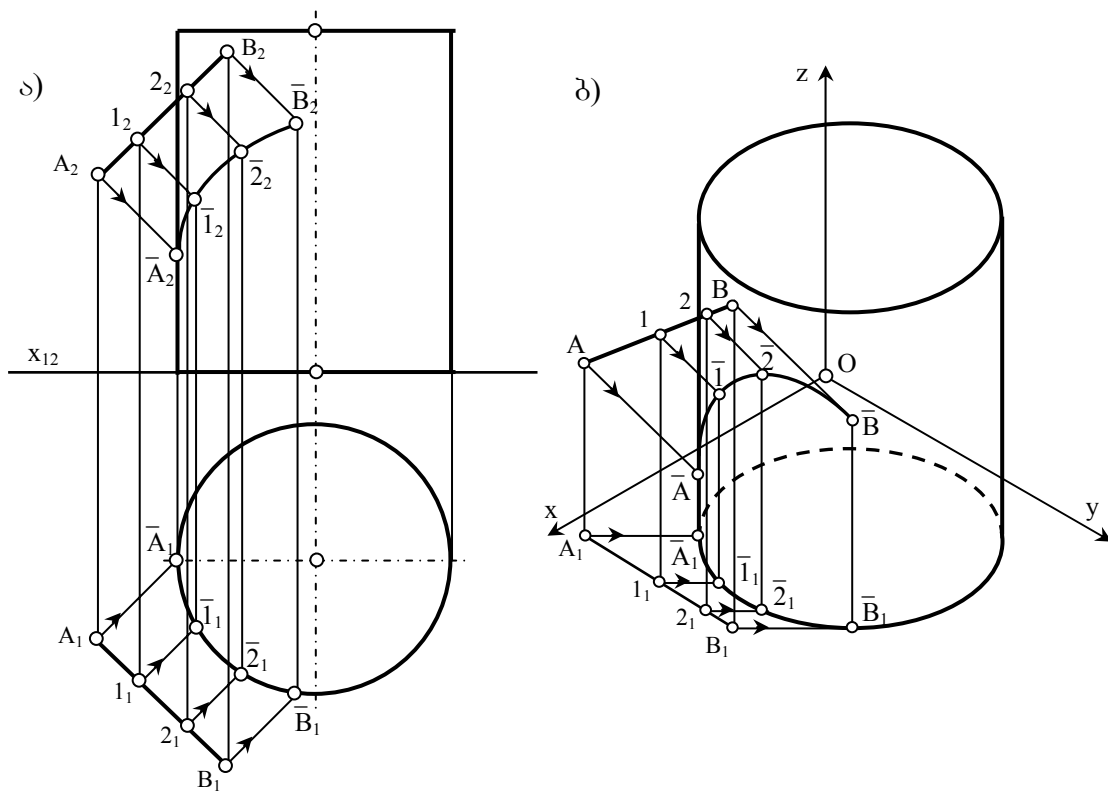
თანამიმდევრობით: ზემოთაღწერილი მეთოდით ნაპოვნია A და B წერტილების ჩრდილები, რომელთა შეერთებითაც მიღებულია საძიებელი $\bar{A} \bar{B}$ მონაკვეთი.



ნახ. 86 წრფის ჩრდილი ბრტყელ ფიგურაზე

წრფის ჩრდილი მრუდ ზედაპირზე წარმოადგენს ამ წრფეზე გატარებული სხივური სიბრტყის გადაკვეთას მოცემულ ზედაპირთან. ზედაპირისა და სიბრტყის ურთიერთკვეთის ამოცანა შეიძლება მხაზველობითი გეომეტრიის ჩვენთვის უკვე ცნობილი მეთოდებით გადაწყდეს, მაგრამ უფრო ხშირად, წრფის ჩრდილს ზედაპირზე, განსაზღვრავენ, როგორც ამ წრფის შემადგენელი წერტილების ჩრდილთა ერთობლიობას.

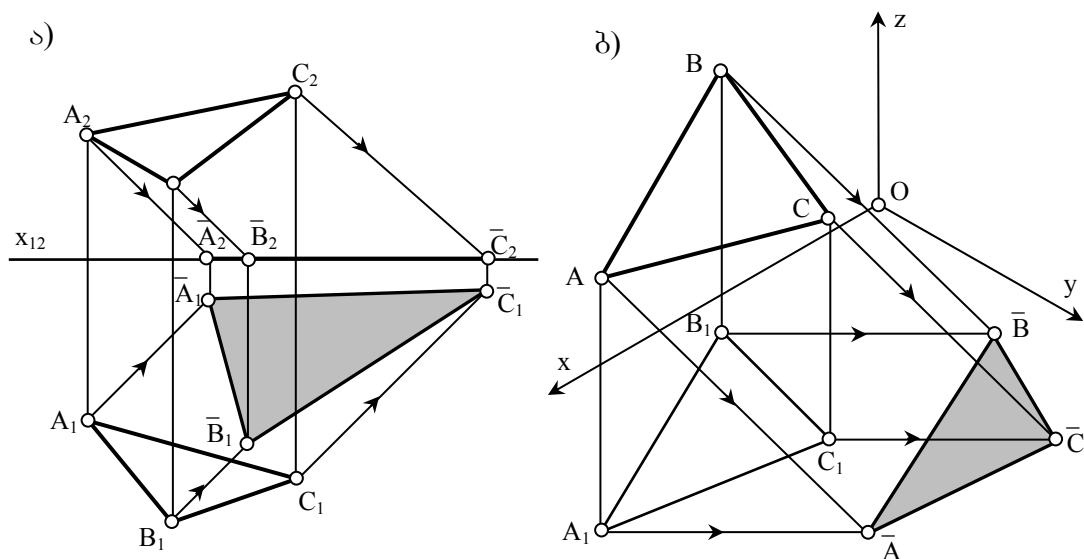
ნახ.86-ზე ორთოგონალურ გეგმილებსა და აქსონომეტრიაში ნაჩვენებია AB მონაკვეთის ჩრდილის აგება ბრუნვის ცილინდრის ზედაპირზე. რადგან AB მონაკვეთზე გატარებული სხივური სიბრტყის გადაკვეთა ცილინდრის ზედაპირთან ელიფსის ნაწილს წარმოადგენს, აუცილებელია AB მონაკვეთზე რამდენიმე წერტილი მოვნიშნოთ და მათი ჩრდილები ავაგოთ, რომელთა მდოვრე შეერთებითაც საძიებელ წირს მივიღებთ. ნათელია, რომ აღებულ წერტილთა რაოდენობა განსაზღვრავს ამონახსნის სიზუსტეს



ნახ. 87 წრფის ჩრდილი მრუდ ზედაპირზე

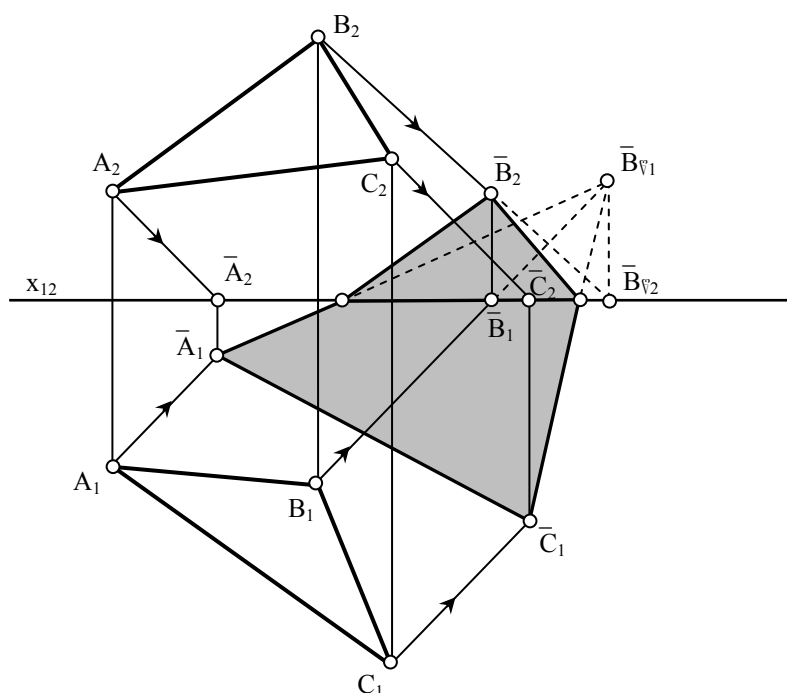
2.14.3 ბრტყელი ფიგურის ჩრდილი

მრავალკუთხედის ჩრდილი გეგმილთა სიბრტყეზე შეიძლება აიგოს, როგორც მისი კუთხილი წვეროების და გვერდების ჩრდილების ერთობლიობა. აქედან გამომდინარე მრავალკუთხედის ჩრდილის აგება გეგმილთა სიბრტყეზე შეიძლება დავიყვანოთ მისი კუთხილი წვერტილებისა და წრფეების ჩრდილების აგებაზე.



ნახ. 88 ბრტყელ ფიგურის ჩრდილი

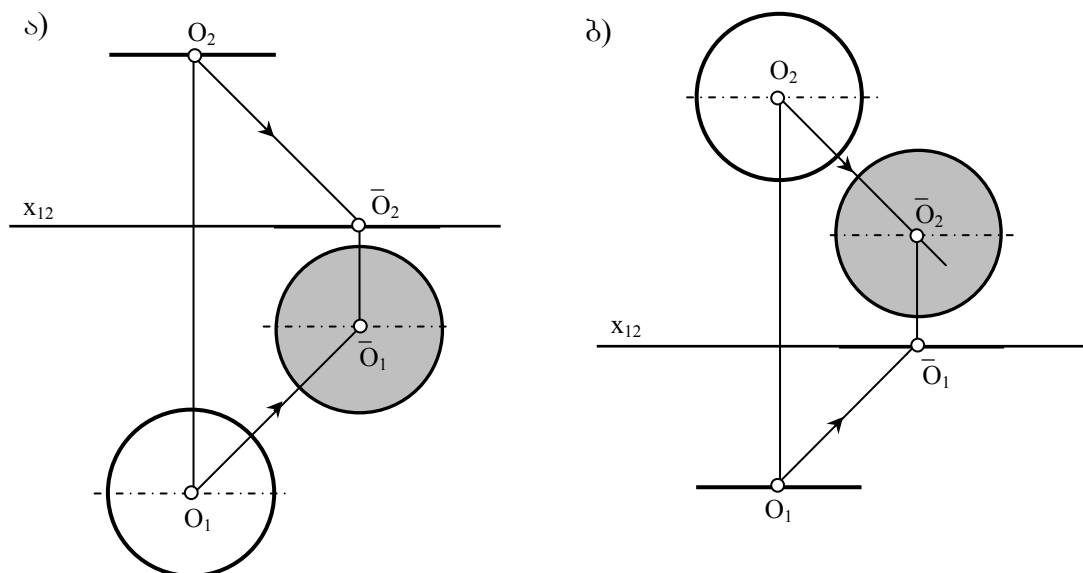
ABC სამკუთხედის ჩრდილის ასაგებად (ნახ.88), აქსონომეტრიაშიც და ორთოგონალურ გეგმილებშიც, უკვე ცნობილი მეთოდით ვიპოვოთ A,B და C წერტილების ჩრდილები. მათი შეერთება მოგვცემს ABC სამკუთხედის საძიებელ $\bar{A} \bar{B} \bar{C}$ ჩრდილს. თუ სამკუთხედის წვეროების ჩრდილები სხვადასხვა გეგმილთა სიბრტყეებს ეცემა, მაშინ სამკუთხედის *ნამდვილი* ჩრდილის ასაგებად წვეროს *წარმოსახვითი* ჩრდილი უნდა გამოვიყენოთ (ნახ.89).



ნახ. 89 ბრტყელ ფიგურის ჩრდილი

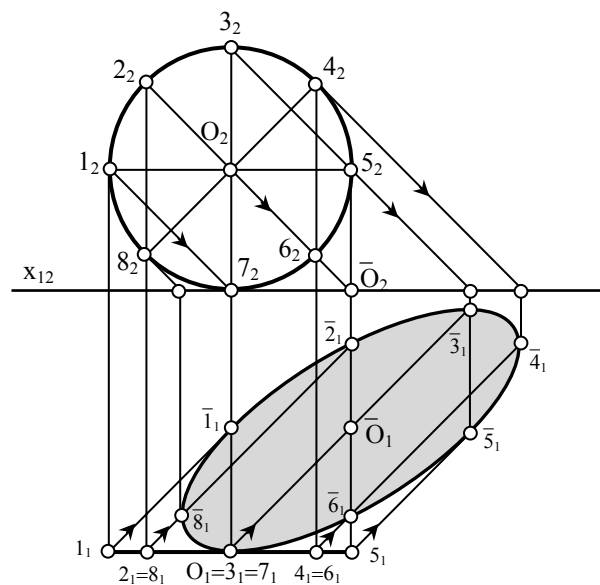
წრეწირის ჩრდილი გეგმილთა სიბრტყეზე შეიძლება წარმოადგენდეს წრეწირს, ელიფსს ან მონაკვეთს, იმისდა მიხედვით თუ რა მდგომარეობა უჭირავს მას სივრცეში. წრეწირის ჩრდილი წრეწირია, თუ ის პარალელურია იმ გეგმილთა სიბრტყისა, რომელზეც მისი ჩრდილი ეცემა. წრეწირის ჩრდილი მონაკვეთია თუ ის დევს ისეთ სიბრტყეში, რომელიც განათების მიმართულების პარალელურია. სხვა ყველა შემთხვევაში წრეწირის ჩრდილი ელიფსს წარმოადგენს.

გეგმილთა სიბრტყის პარალელური წრის ჩრდილის ასაგებად საკმარისია აიგოს წრის ცენტრის ჩრდილი და მასზე შემოვივლოს მოცემული წრის ტოლი წრე (ნახ.90).



ნახ. 90 წრეწირის ჩრდილი

ნახ.91-ზე ნახვენებია პორიზონტალური გეგმილთა სიბრტყის მიმართ მართობული წრის ჩრდილის აგება პორიზონტალური გეგმილთა სიბრტყეზე.

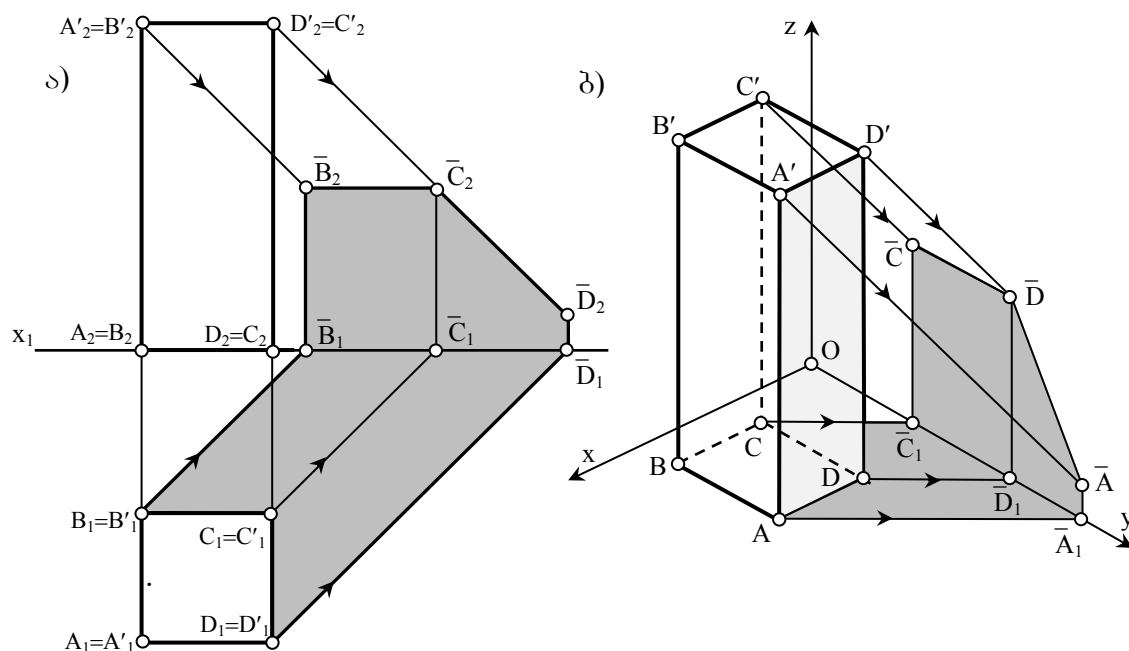


ნახ. 91 წრეწირის ჩრდილი

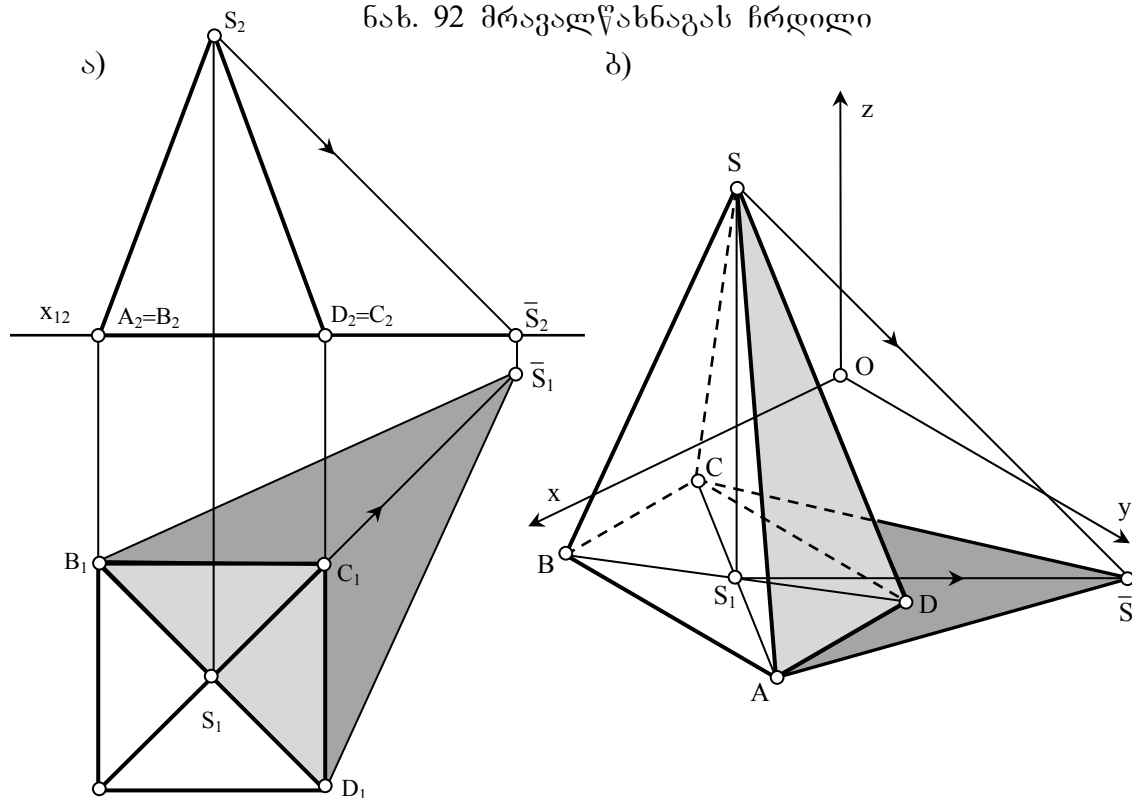
ასეთ შემთხვევაში წრის ჩრდილი ელიფსს წარმოადგენს, ელიფსი კი ლეკალური წირია და ამიტომ მის ასაგებად საჭიროა წრის რამდენიმე წერტილის ჩრდილის მოძებნა და მათი მდოვრედ შემოვლება. თვალსაჩინოა, რომ რაც უფრო მეტია აგებულ წერტილთა რაოდენობა, მით უფრო მეტია საძიებელი წირის სიზუსტე. მცირე ზომის წრისათვის მისი რვა წერტილის ჩრდილის აგება გრაფიკულად ადვილი შესასრულებელია და დამაკმაყოფილებელ სიზუსტესაც იძლევა.

2.14.4 მრავალწახნაგას ჩრდილი

მრავალწახნაგას საკუთარი და დაცემული ჩრდილების აგება დაიყვანება, მისი წახნაგების ანუ ბრტყელი ფიგურების საკუთარი და დაცემული ჩრდილების აგებაზე.



ნახ. 92 მრავალწახნაგას ჩრდილი



ნახ. 93 მრავალწახნაგას ჩრდილი

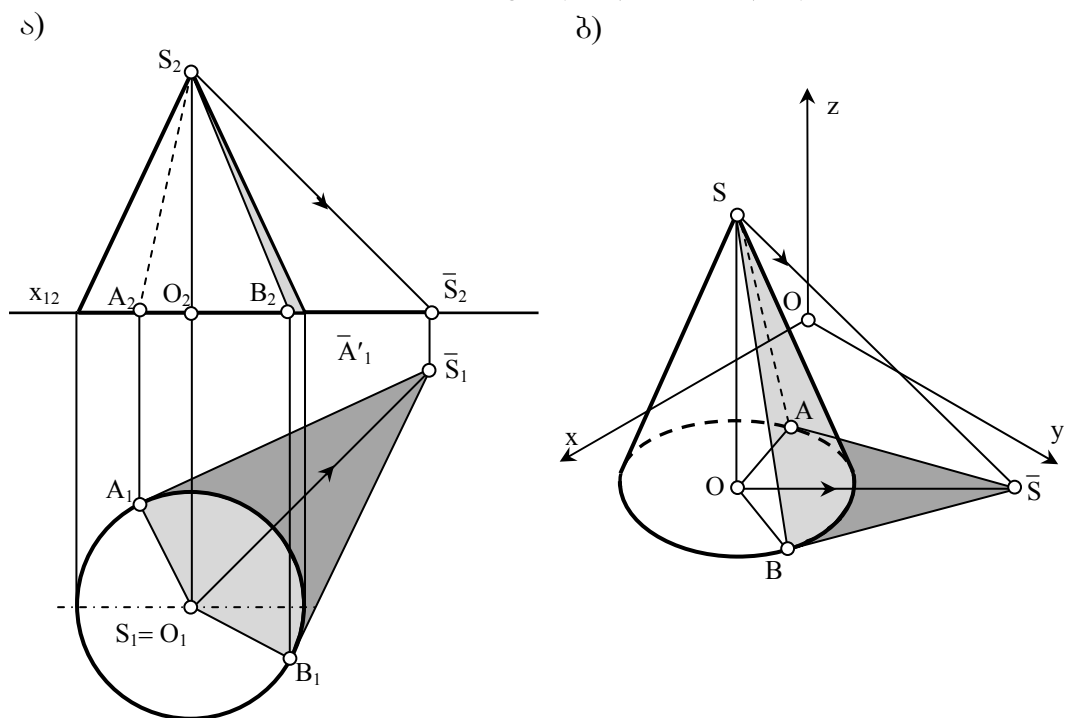
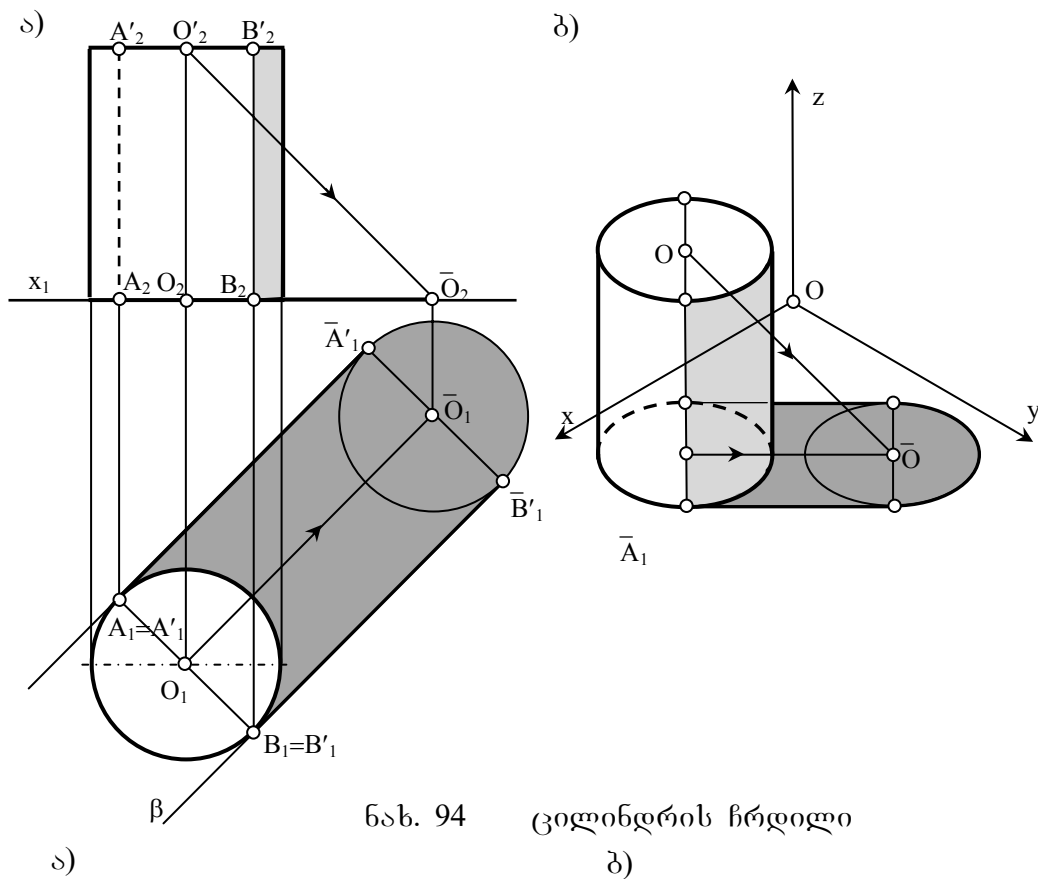
ნახ.92-ზე ნახვენებია $AA'BB'CC'DD'$ მართი პარალელეპიპედის საკუთარი და დაცემული ჩრდილების აგება, ეპიურზეც და აქსონომეტრიაშიც. საკუთარ ჩრდილში იმყოფება მრავალწახნაგას ორი $AA'DD'$ და $CC'DD'$ წახნაგი, ამიტომ მრავალწახნაგას ჩრდილი წარმოადგენს ამ ორი წახნაგის ჩრდილთა შეერთებას

ნახ.93-ზე ეპიურზე და აქსონომეტრიაში ნახვენებია $SABCD$ ოთხწახნაგა პირამიდის საკუთარი და დაცემული ჩრდილების აგება. რადგან A, B, C და D წერტილები ჰორიზონტალურ გეგმილთა სიბრტყეზე დევს, ისინი თავის ჩრდილს შეუთავსდებიან. ესე იგი პირამიდის ჩრდილის ასაგებად, ამ შემთხვევაში მხოლოდ S წვეროს $\bar{S}$ ჩრდილის აგებაა საკმარისი, წიბოების ჩრდილები კი, $\bar{S}$ ჩრდილის ფუძის მრავალკუთხედის წვეროებთან შეერთებით მიიღება. მოცემული პირამიდის ორი, SBC და SCD წახნაგია საკუთარ ჩრდილში

2.14.5 მრუდე ზედაპირების ჩრდილი

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, საკუთარი ჩრდილის კონტური ნებისმიერ ზედაპირს ყოფს ორ ნაწილად, განათებულ და გაუნათებელ ნაწილად. ზედაპირის დაცემული ჩრდილის კონტურს შემოსაზღვრავს საკუთარი ჩრდილის კონტურის ჩრდილი. აქედან გამომდინარე, ნებისმიერი ზედაპირის ჩრდილის ასაგებად, ჯერ უნდა დადგინდეს საკუთარი ჩრდილის კონტური და შემდეგ უნდა აიგოს ამ კონტურის დაცემული ჩრდილი.

ბრუნვის ცილინდრის საკუთარი ჩრდილის კონტურის დასადგენად (ნახ.94), ცილინდრის მხები ორი ჰორიზონტელურად მაგეგმილებელი α და β სხივური სიბრტყე გავატაროთ, რომლებიც ფრონტალური გეგმილთა სიბრტყის მიმართ 45° -ით იქნებიან დახრილი. AA' და BB' მსახველები, რომლებზეც α და β სიბრტყეები ეხებიან ცილინდრს და აგრეთვე ცილინდრის ზედა და ქვედა ფუძის ორი ნახევარწრეწირი განსაზღვრავენ საკუთარი ჩრდილის კონტურს. ამ კონტურის დაცემული ჩრდილი შემოსაზღვრავს ცილინდრის დაცემულ ჩრდილს. ფრონტალურ გეგმილზე, BB' მსახველის მარჯვნივ ცილინდრი საკუთარ ჩრდილში იქნება.

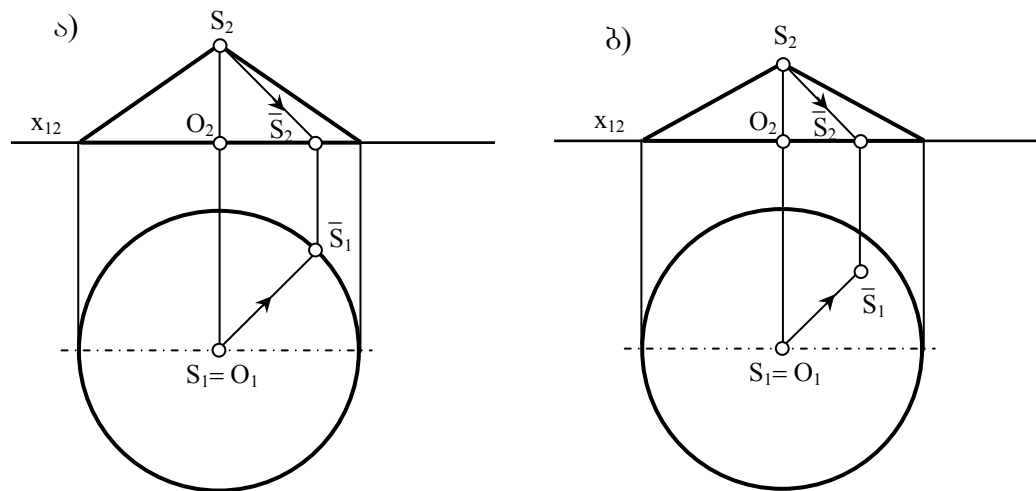


ნახ.95-ზე ნაჩვენებია ისეთი ბრუნვის კონუსის საკუთარი და დაცემული ჩრდილების გება, რომლის ფუძეც ჰორიზონტალურ გეგმილთა სიბრტყეზე მდებარეობს.

კონუსის დაცემული ჩრდილის ასაგებად, პირველ რიგში საჭიროა მისი S წვეროს ჩრდილის $\bar{S}$ აგება. შემდეგ, მიღებული ჩრდილის

ჰორიზონტალურ $\bar{S}_1$ გეგმილზე გავატაროთ კონუსის ფუძის წრეწირის ორი მხევი წრფე ($\bar{S}_1A_1$ და $\bar{S}_1B_1$). შეხების A და B წერტილები განსაზღვრავენ კონუსის იმ მსახველების მდებარეობას, რომლებიც ფუძის წრეწირის მცირე რკალთან ერთად საკუთარი ჩრდილის კონტურს წარმოადგენენ (SA და SB).

კონუსის საკუთარ ჩრდილში მეოფი ნაწილის ზომა დამოკიდებულია კონუსის მსახველების დახრის კუთხეზე ჰორიზონტალურ გეგმილთა სიბრტყის მიმართ.



ნახ. 96 კონუსის ჩრდილი

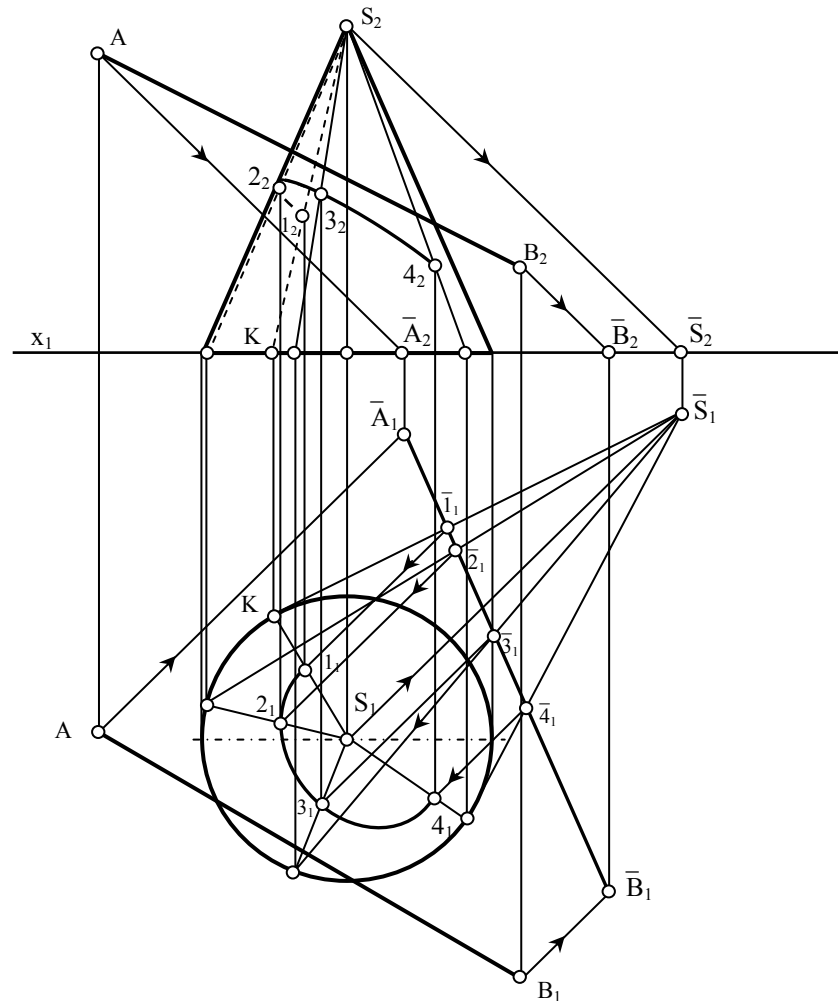
მაშინ როცა კონუსის მსახველების დახრის კუთხე ჰორიზონტალური გეგმილთა სიბრტყის მიმართ განათების მიმართულების დახრის კუთხის ტოლია, S წვეროს ჩრდილი ფუძის წრეწირს ეცემა (ნახ.96-ა). ასეთ შემთხვევაში კონუსის მხოლოდ ერთი $S \bar{S}$ მსახველი იქნება გაუნათებელი.

თუ კონუსის მსახველების დახრის კუთხე ჰორიზონტალური გეგმილთა სიბრტყის მიმართ განათების მიმართულების დახრის კუთხეზე ნაკლებია, მაშინ S წვეროს $\bar{S}$ ჩრდილი ფუძის წრეწირს შიგნით მოხვდება (ნახ.96-ბ), მასზე ფუძის წრეწირის მიმართ მხებების გატარება შეუძლებელია და ამიტომ, კონუსის ზედაპირი მთლიანად განათებული იქნება.

2.14.6 ჩრდილების აგების ხერხები

ზემოთ განხილული იყო გეომეტრიული ფიგურების ჩრდილების აგება გეგმილთა სიბრტყეებზე, პრაქტიკაში კი უფრო ხშირად

სხივური სიბრტყეების ხერხი. როგორც უკვე აღვნიშნეთ სხივური სიბრტყე α ეწოდება განათების S მიმართულების პარალელურ სიბრტყეს ($\alpha \parallel S$). სხივური სიბრტყეების ხერხი გამოიყენება წერტილებისა და წრფეების დაცემული ჩრდილების ასაგებად ნებისმიერ ზედაპირზე. მისი არსი მდგომარეობს იმაში, რომ მოცემულ a წრფეზე ატარებენ სხივურ α სიბრტყეს და პოულობენ ამ სიბრტყის გადაკვეთას მოცემულ Π ზედაპირთან. მიღებული წირი წარმოადგენს საძიებელ წირს.



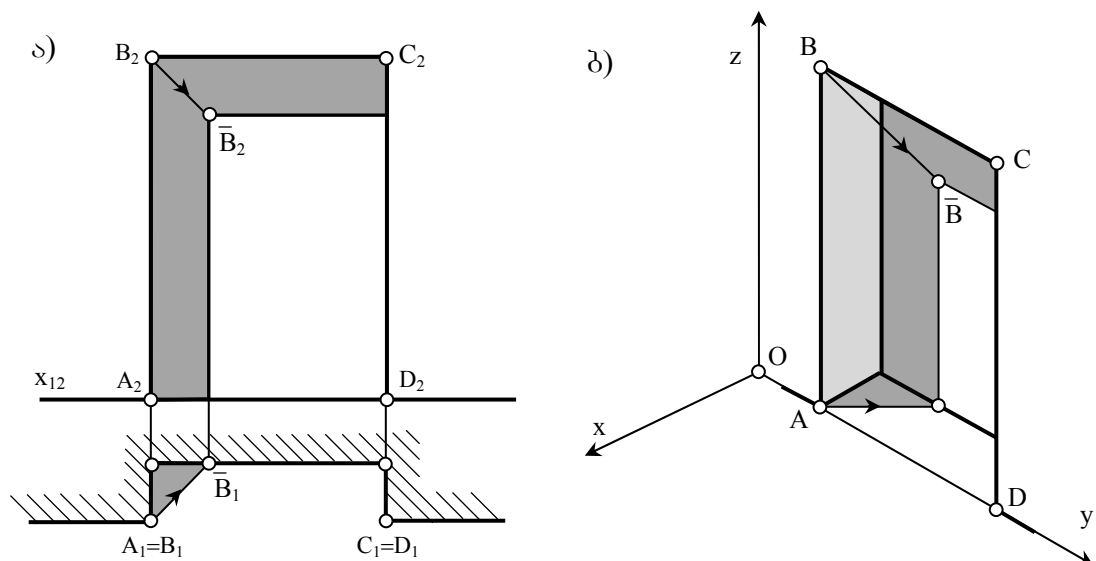
144

შებრუნებული სხივების ხერხი. ეს ხერხი გამოიყენება ერთი გეომეტრიული ფიგურიდან მეორე ერთი გეომეტრიულ ფიგურაზე დაცემული ჩრდილების ასაგებად. ერთზეც და მეორე ფიგურაზეც შეარჩევენ ყველაზე მარტივ წირს (წრფეს ან წრეწირს) და აგებენ მათ ჩრდილებს რაიმე დამხმარე სიბრტყეზე (უმრავლეს შემთხვევაში დამხმარედ გეგმილთა სიბრტყეებს იყენებენ). ჩრდილების გადაკვეთის წერტილს განათების მიმართულების შებრუნებული მიმართულებით აგებმილებენ ერთერთ შერჩეულ წირზე.

განვიხილოთ ამ ხერხის გამოყენება AB წრფიდან კონუსის ზედაპირზე დაცემული ჩრდილის აგების მაგალითზე (ნახ.97). პირველ რიგში ავაგოთ AB წრფის დაცემული $\bar{A} \bar{B}$ ჩრდილი პორიზონტალურ გეგმილთა სიბრტყეზე. შევარჩიოთ კონუსის ნებისმიერი მსახველი (მაგ. SK) და ვიპოვოთ მისი პორიზონტალური ჩრდილი. ამ ორი ჩრდილის გადაკვეთის წერტილი განათების მიმართულების შებრუნებული მიმართულებით დავაგებმილოთ შერჩეულ მსახველზე. ამ ოპერაციის რამდენჯერმე გამეორებით მივიღებთ საძიებელი წირის კუთვნილ წერტილებს (1,2,3,4...).

2.14.7 ნიშაში დაცემული ჩრდილი

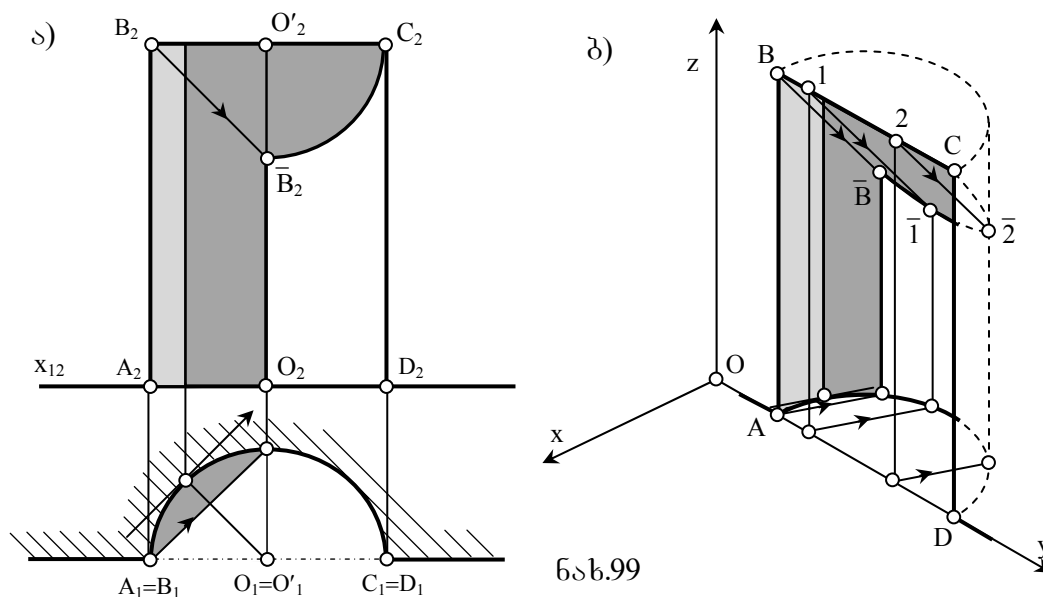
ბრტყელ ნიშაში დაცემული და საკუთარი ჩრდილების აგებისას, იყენებენ წრფისა და წერტილის ჩრდილების აგების ჩვენთვის უკვე ცნობილ წესებს.



ნახ. 98 ბრტყელ ნიშაში დაცემული ჩრდილი

ნახ. 98-ზე, ეპიურზე და აქსონომეტრიაში, ნაჩვენებია ABCD ბრტყელ ნიშაში ჩრდილების აგების მაგალითი. ნიშის ჩრდილის ასაგებად საკმარისია B წერტილის ჩრდილის პოვნა ნიშის უკანა კედელზე (AB და BC მონაკვეთების ჩრდილები მათი ტოლი და პარალელური გამოვა).

ცილინდრული ნახევარწრიული ნიშის ჩრდილების აგების მაგალითია ნახ.99-ზე.



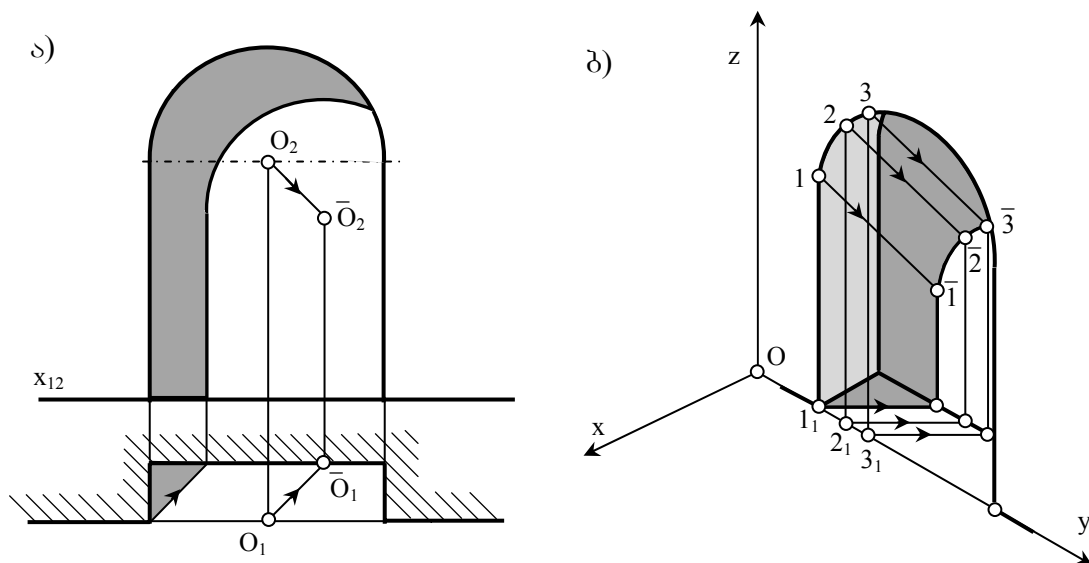
ნახ. 99 ცილინდრულ ნიშაში დაცემული ჩრდილი

საკუთარი ჩრდილის კონტურის დასადგენად, ფუძის წრეწირის მიმართ გაავლოთ განათების მიმართულების პარალელური მხები. შეხების წერტილი განსაზღვრავს იმ მსახველს, რომელიც საკუთარი ჩრდილის საზღვარს წარმოადგენს.

დაცემულ ჩრდილს წარმოშობენ ნიშის AB და BC ვერტიკალური და ჰორიზონტალური წიბოები. B წერტილის ნიშაზე დაცემული ჩრდილი განისაზღვრება, როგორც წერტილის ჩრდილი ცილინდრზე. ჰორიზონტალური BC წიბოს ჩრდილის ასაგებად, მასზე სხივური სიბრტყე უნდა გაატაროთ და ვიპოვოთ ამ სიბრტყისა და ცილინდრის გადაკვეთა. გადაკვეთაში ელიფსს მივიღებთ.

ჩვენს მიერ შერჩეული განათების მიმართულების შემთხვევაში ამ ელიფსის გეგმილი წრეწირი იქნება, O' ცენტრითა და O'C რადიუსით.

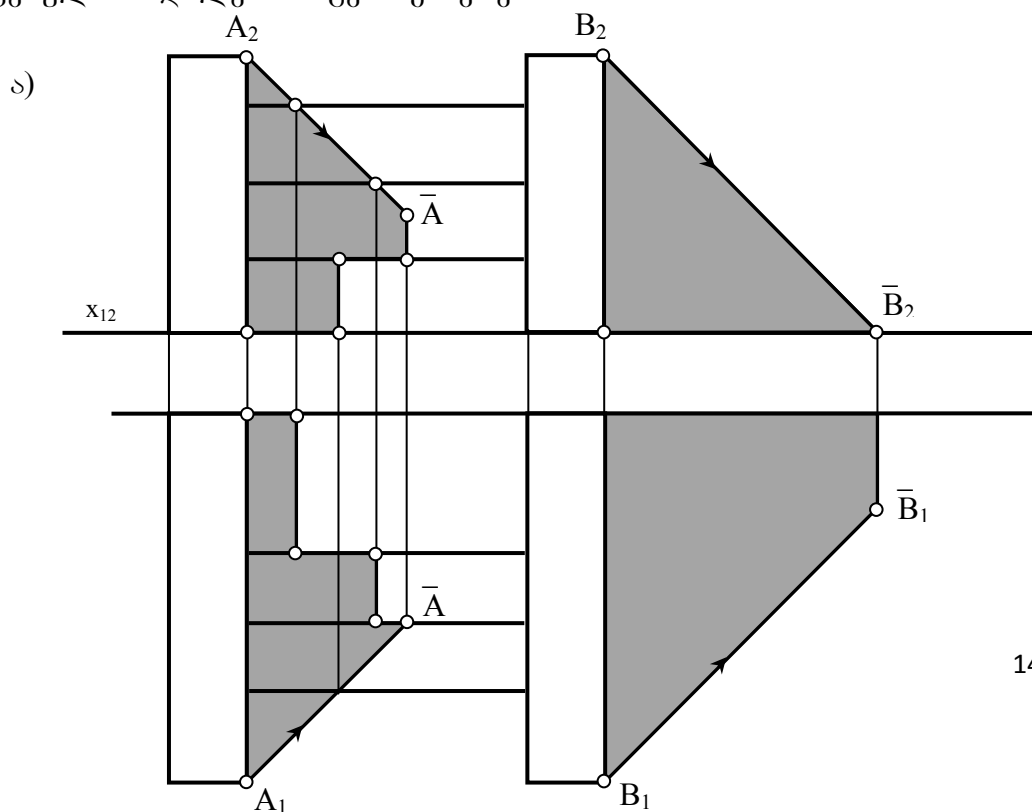
ბრტყელი წრიული ნიშის ჩრდილებია აგებული ნახ.100-ზე. O წრეწირის დაცემული ჩრდილი ნიშაზე, განისაზღვრება, როგორც წრეწირის ჩრდილი სიბრტყეზე. ორთოგონალურ გეგმილებში საკმარისია O ცენტრის $\bar{O}$ ჩრდილი ავაგოთ და მასზე ნიშის წრეწირის ტოლი წრეწირი შემოვაგლოთ. აქსონომეტრიაში კი საჭიროა ამ წრეწირის კუთვნილი რამდენიმე წერტილის ჩრდილი ავაგოთ და მდოვრედ შემოვაგლოთ.

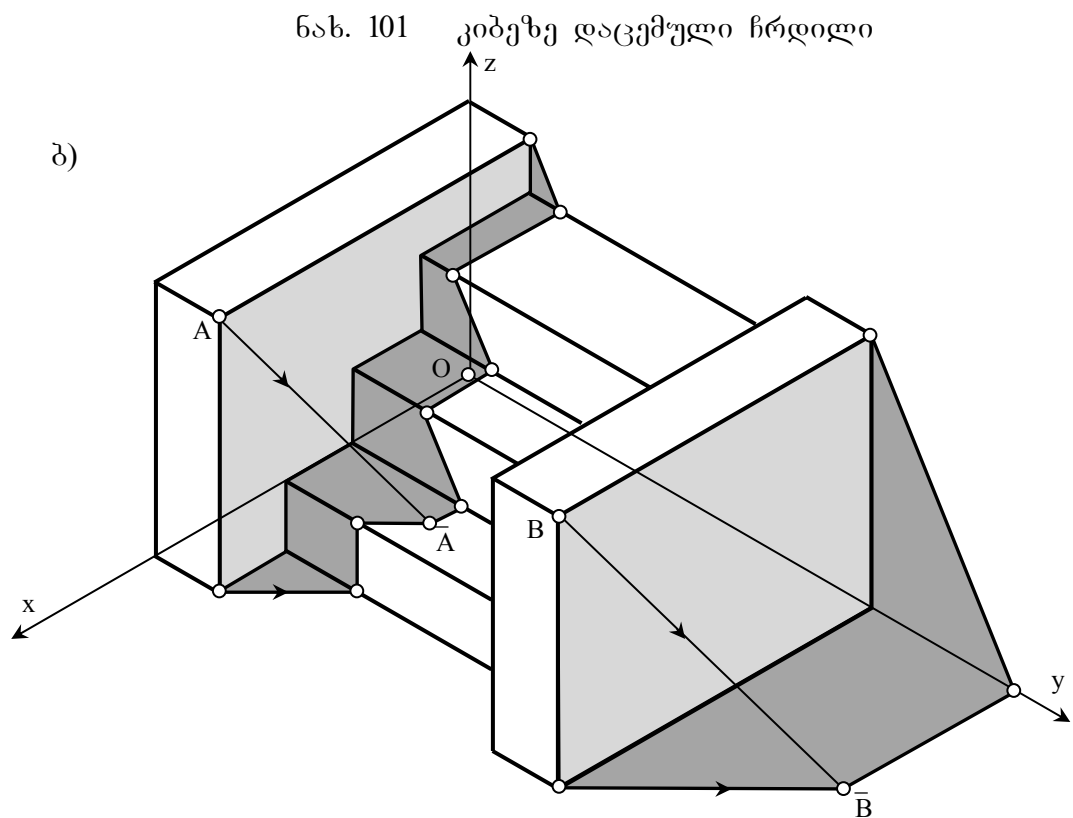


ნახ. 100 წრიულ ნიშაში დაცემული ჩრდილი

2.14.8 ჩრდილების აგება კიბეზე

ნახ.101-ზე ეპიურზე და აქსონომეტრიაში, ნაჩვენებია საკუთარი და დაცემული ჩრდილების აგება კიბეზე.





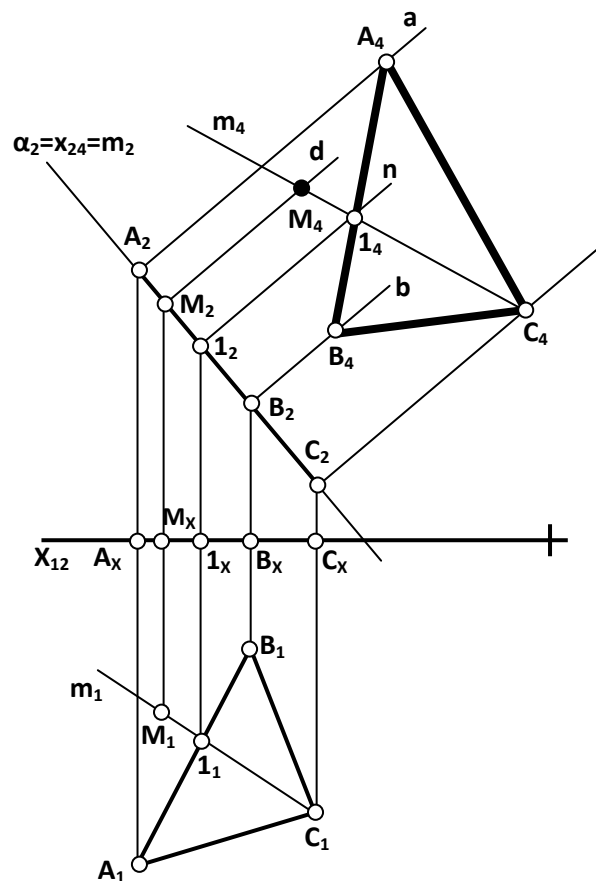
საკუთარ ჩრდილში იმყოფება ვერტიკალური კედლების მარჯვენა წახნაგები. მარცხენა კედლის ჩრდილი, კიბის საფეხურებზე, სხივური სიბრტყეების ხერხის გამოყენებით იგება. მარჯვენა კედლის ჩრდილი კი ისე, როგორც ბრტყელი ფიგურის ჩრდილი გეგმილთა სიბრტყეზე.

2.15 საინჟინრო გეომეტრიის კომპიუტერული მხარდაჭერა

ცნობილია, რომ კომპიუტერული პროგრამა არის ბრძანებათა თანმიმდევრობა, რომელთაგან თითოეული ატყობინებს პროცესორს, თუ რა მოქმედება უნდა შეასრულოს ყოველ მოცემულ მომენტში. პროგრამული უზრუნველყოფის ღირებულება, როგორც წესი, ბევრად აღემატება თვით კომპიუტერის ღირებულებას. ამიტომაც პროგრამული უზრუნველყოფის ინდუსტრია დღეისათვის ერთ-ერთი ყველაზე მომგებიან და სწრაფად განვითარებად ბიზნესად ითვლება. მსოფლიოში გავრცელებულ პროგრამულ უზრუნველყოფის უდიდეს ნაწილს ქმნიან მძლავრი კორპორაციები, როგორიცაა მაგალითად, Microsoft, Adobe Systems, IBM და სხვა. თუმცა არსებობს ათასობით წვრილმანი ფირმები და ინდივიდუალური პროგრამისტებიც კი, რომლებიც ქმნიან სპეციალური დანიშნულების პროგრამულ პროდუქციას. ჩვენი მოკრძალებული მიზანი, რასაკვირველია შემოფარგლულია ბოლო მოსაზრების საზღვრებით და ძირითადად, კონკრეტულ შემთხვევებში ინდივიდუალური პროგრამის შედგენას და ავტომატიზებული პროექტირების ყველაზე მძლავრ სისტემაში (Auto CAD) მისი დანერგვის სურვილის რეალიზაციას გულისხმობს. საამისოდ ჩვენ შევისწავლეთ პერსონალური კომპიუტერების აპარატურული და პროგრამული უზრუნველყოფის ზოგადი თეორია და პრაქტიკა, ოპერაციული სისტემა Windows XP და გრაფიკული პროცესორები Word XP და Auto CAD-ი.

ვიდრე კონკრეტულ ამოცანას შევეხებოდეთ, მიზანშეწონილად მივიჩნიეთ, პერსპექტულ-აფინური შესაბამისობის გეომეტრიული არსის ჩვენეული თვალთახედვით წარმოჩენა. სახელდობრ, ცნობილია, რომ ერთი სიბრტყის მეორე სიბრტყეზე შექცევად ასახვას მაშინ ეწოდება აფინური, როცა წრფე წრფეზეა, პარალელური და გადაკვეთილი წრფეები, შესაბამისად პარალელურ და გადაკვეთილ წრფეებზეა და

ზემოთქმულიდან გამომდინარე სიბრტყეთა შორის აფინური შესაბამისობა ცალსახად არის განსაზღვრული, მოცემულია შესაბამის სამკუთხედთა ერთი წყვილი (ჩვენს შემთხვევაში (იხ. ნახ.102) ნაჩვენებია ორ სამკუთხედს ($\Delta A_1B_1C_1$ და $\Delta A_4B_4C_4$) შორის დამყარებული ზოგადაფინური შესაბამისობა მონჟის ეპიურის გამოყენებით) [88].



თუ მოცემულია M_1 წერტილი, რომელიც $A_1B_1C_1$ ბრტყელი ველის კუთვნილია, ცალსახად შეგვიძლია განვსაზღვროთ $A_4B_4C_4$ ბრტყელი ველის კუთვნილი და M_1 -ის შესაბამისი M_4 წერტილი. ჩვენ შემთხვევაში

(იხ. ნახ.102) ამოცანა გადაწყვეტილია, როგორც მონუის ეპიურისათვის დამახასიათებელი აგებებით (კუთვნილების პირობა და მისი რეალიზაცია) ასევე აფინური ასახვის თვისებების გამოყენებით. სახელდობრ, არაკოლენიალური (არაერთწრფეზე მდებარე) წერტილთა სამი წყვილი ცალსახად განსაზღვრავს ორი სიბრტყის აფინურ შესაბამისობას, ხოლო ერთ სიბრტყეში აღებული ნებისმიერი მე-4 წერტილის შესაბამისი წერტილის მოძებნა მეორე სიბრტყეში – ითხოვს სპეციალურ გრაფიკულ აგებებს, რომლის კონკრეტული მაგალითი ნაჩვენებია ქვემოთ მოყვანილ პროგრამაში, რომელიც ნახ.102-ზე ნაჩვენები მოქმედებების ინტუიციურ ალგორითმად შეიძლება იქნას მიჩნეული.

მოცემული M_1 -ის აფინურად შესაბამისი M_4 -ის აგების ინტუიციური ალგორითმი

- | | | |
|-----|---------------------------------|--|
| 1. | $A_2 \in a \perp x_{24}$ | A_2 წერტილზე გავატაროთ a წრფე x_{24} -ის პერპენდიკულარულად; |
| 2. | $ A_2A_4 = A_1A_x $ | a წრფეზე, A_2 -დან გადავზომოთ $ A_1A_x $ -ის ტოლი მონაკვეთი; |
| 3. | $B_2 \in b \perp x_{24}$ | B_2 წერტილზე გავატაროთ b წრფე x_{24} -ის პერპენდიკულარულად; |
| 4. | $ B_2B_4 = B_1B_x $ | b წრფეზე, B_2 -დან გადავზომოთ $ B_1B_x $ -ის ტოლი მონაკვეთი; |
| 5. | $C_2 \in c \perp x_{24}$ | C_2 წერტილზე გავატაროთ c წრფე x_{24} -ის პერპენდიკულარულად; |
| 6. | $ C_2C_4 = C_1C_x $ | c წრფეზე, C_2 -დან გადავზომოთ $ C_1C_x $ -ის ტოლი მონაკვეთი; |
| | | $\Delta ABC \cong \Delta A_4B_4C_4$ |
| 7. | $m_1(M_1C_1)$ | გავატაროთ M_1 და C_1 წერტილებზე m_1 წრფე; |
| 8. | $l_1 = m_1 \cap (A_1B_1)$ | განვსაზღვროთ m_1 და (A_1B_1) წრფეების თანაკვეთის l_1 წერტილი; |
| 9. | $l_1 \in (l_1l_2) \perp x_{12}$ | l_1 წერტილზე გავატაროთ (l_1l_2) წრფე x_{12} -ის პერპენდიკულარულად; |
| 10. | $l_2 = (l_1l_2) \cap \alpha_2$ | განვსაზღვროთ (l_1l_2) და α_2 წრფეების თანაკვეთის l_2 წერტილი; |
| 11. | $l_2 \in n \perp x_{24}$ | l_2 წერტილზე გავატაროთ n წრფე x_{24} -ის პერპენდიკულარულად; |
| 12. | $l_4 = n \cap (A_4B_4)$ | განვსაზღვროთ n და (A_4B_4) წრფეების თანაკვეთის l_4 წერტილი; |
| 13. | $m_4(C_4l_4)$ | გავატაროთ C_4 და l_4 წერტილებზე m_4 წრფე; |
| 14. | $M_1 \in (M_1M_2) \perp x_{12}$ | M_1 წერტილზე გავატაროთ (M_1M_2) წრფე x_{12} -ის პერპენდიკულარულად; |
| 15. | $M_2 = (M_1M_2) \cap \alpha_2$ | განვსაზღვროთ (M_1M_2) და α_2 წრფეების თანაკვეთის M_2 წერტილი; |
| 16. | $M_2 \in d \perp x_{24}$ | M_2 წერტილზე გავატაროთ d წრფე x_{24} -ის პერპენდიკულარულად; |

17 $M_4 = d \cap m_4$ განესაზღვროთ d და m_4 წრეების
თანაკვეთის M_4 საძიებელი წერტილი;

შენიშვნა: M_4 -ის აგება შესაძლებელია წერტილისა და წრის კუთვნილების პირობის და აფინური ასახვის იმ თვისების ერთობლიობით, რომლის ძალითაც, ამ ასახვაში, მონაკვეთების სიგრძეთა ფარდობა უცვლელია. უკანასკნელი მოსაზრების მიხედვით

შედგენილია ფარდობები: $\frac{A_1 I_1}{I_1 B_1} = \frac{A_4 I_4}{I_4 B_4}$ და $\frac{C_1 I_1}{I_1 M_1} = \frac{C_4 I_4}{I_4 M_4}$.

ზემოთ მოყვანილი ინტუიციური ალგორითმის საფუძველზე შედგენილია პროგრამა, Auto CAD -ის ბაზური პრიმიტივების გამოყენებით;

Line

specify first point: A_1 ;

Specify next point or [Undo]: A_x + Enter;

Modify - Move

Select object: მოვნიშნოთ $A_1 A_x$ მონაკვეთი +Enter

Specify base point: A_1 : გადავიტანოთ ეს მონაკვეთი A_2 wertilSi;

Modify - Rotate

Select object: მოვნიშნოთ გადატანილი მონაკვეთი;

Specify base point: A_2 ;

Specify Rotation angle: აქ უნდა მივუთითოთ მობრუნების კუთხე, თუ იგი ცნობილია, ან კურსორის საშუალებით ვაბრუნოთ იგი სანამ მისი 90° -მდე შემავსებელი გვერდი არ შეუთავსდება x_{24} ღერძს;

1. $A_2 \in a \perp x_{24}$
2. $|A_2 A_4| = |A_1 A_x|$

3. $B_2 \in b \perp x_{24}$
4. $|B_2 B_4| = |B_1 B_x|$
5. $C_2 \in c \perp x_{24}$
6. $|C_2 C_4| = |C_1 C_x|$

იგივეა რაც 1-2

იგივეა რაც 1-2

Line

specify first point: C_1 ;

Specify next point or [Undo]: M_1 + Enter;

7. $m_1 (M_1 C_1)$
8. $l_1 = m_1 \cap (A_1 B_1)$

აღვნიშნოთ l_1 წერტილი;

მდგომარეობის სტრიქონში ჩავერთოთ Ortho რეჟიმი;

9. $l_1 \in (l_1 l_2) \perp x_{12}$
10. $l_2 = (l_1 l_2) \cap a_2$

Line

specify first point: l_1 ; გავაგრძელოთ ეს მონაკვეთი x_{24} -ის გადაკვეთამდე და აღვნიშნოთ l_2 წერტილი;

Line

Shift + მაუსის მარჯვენა კნოპი. პანელზე ავირჩიოთ Perpendicular ბრძანება. კურსორი მივიტანოთ x_{24} ღერძზე (რადგან მისი მართობი

11. $l_2 \in n \perp x_{24}$
12. $l_4 = n \cap (A_4 B_4)$

უნდა გავატაროთ) და კურსორის გარკვეულ მანძილზე გადაადგილების მართობის ბოლოს l_2 შეთავსების შემდეგ დავაწკაპუნოთ მაუსის მარცხენა კნოპი.

აღვნიშნოთ გატარებული მართობის A_4B_4 -თან გადაკვეთის l_4 წერტილი;

Line

specify first point: C_4 ;

13. $m_4(C_4l_4)$

Specify next point or [Undo]: l_4 ; გავაგრძელოთ ეს მონაკვეთი გარკვეულ მანძილზე;

მდგომარეობის სტრიქონში ჩავრთოთ Ortho რეჟიმი;

Line

specify first point: M_1 ; გავაგრძელოთ ეს მონაკვეთი

14. $M_1 \in (M_1M_2) \perp x_{12}$

15. $M_2 = (M_1M_2) \cap \alpha_2$

x_{24} -ის გადაკვეთამდე და აღვნიშნოთ M_2 წერტილი;

Line

Shift + მაუსის მარჯვენა კნოპი. პანელზე ავირჩიოთ Perpendicular ბრძანება. კურსორი მივიტანოთ x_{24} ღერძზე (რადგან მისი მართობი უნდა გავატაროთ) და კურსორის გარკვეულ მანძილზე გადაადგილების და მართობის ბოლოს M_2 შეთავსების შემდეგ დავაწკაპუნოთ მაუსის მარცხენა კნოპი.

16. $M_2 \in d \perp x_{24}$

17. $M_4 = d \cap m_4$

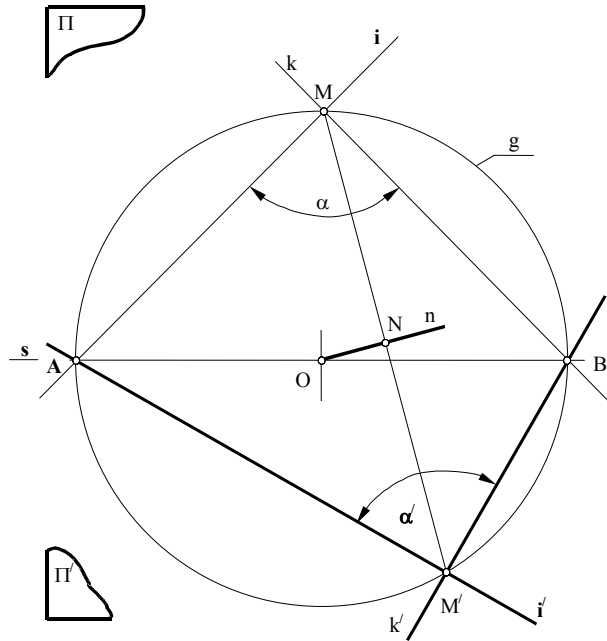
აღვნიშნოთ გატარებული მართობის m_4 -თან გადაკვეთის საძიებელი M_4 წერტილი;

დავუშვათ, რომ Π კელის კუთვნილი k და l გადაკვეთილ წრფეთა წყვილი აფინურად შეესაბამება Π' ბრტყელი კელის კუთვნილ k' და l' გადაკვეთილ წრფეთა წყვილს. აფინურ შესაბამისობაში მყოფ წრფეთა წყვილებს შორის მდებარე კუთხეთა ურთიერთდამოკიდებულება, აფინური შესაბამისობის ინვარიანტულ თვისებებში არ შედის. სახელდობრ, თუ ერთი კუთხე მართია, მეორე ნებისმიერი შეიძლება იყოს, მაგრამ არსებობს გამონაკლისიც, როცა ერთი ბრტყელი კელის კუთვნილ ურთიერთპერპენდიკულარულ გადაკვეთილ წრფეთა წყვილს მეორე კელის აგრეთ-ვე ურთიერთპერპენდიკულარული გადაკვეთილ წრფეთა წყვილი შეესაბამება. გამონაკლისი ნაჩვენებია 103-ე ნახაზზე [89].

წარმოვიდგინოთ, რომ ნახაზზე დაფიქსირებულია მხოლოდ ამოცანის ამოსავალი მონაცემები: შესაბამისობის s ღერძი და შესაბამისობაში მყოფი

წერტილების M და M' წყვილი. როგორც უკვე ვიცით, ამ მონაცემებით სრულიად განსაზღვრულია ორი ბრტყელი ველის პერსპექტიულ-აფინური შესაბამისობა. M შევადერთოთ M' -თან და გაავლოთ $[MM']$ -ის შუაპერპენდიკულარი (n). დავნიშნოთ

$O = n \cap s$ წერტილი და მისგან, როგორც ცენტრიდან $R = [OM] = [OM']$ რადიუსით შემოვხაზოთ წრეწირი (g). დავნიშნოთ ამ უკანასკნელის შესაბამისობის s ღერძთან თანაკვეთის A და B წერტილები. $\angle AMB$, როგორც დიამეტრზე დაყრ-



ნახ. 103 აფინურად შესაბამისი ველების მთავარი მიმართულებები დნობილი, იქნება მართი. ამავე მიზეზით $AM'B$ კუთხეც იქნება მართი, ხოლო $l(AM) \perp k(BM)$ და $l'(AM') \perp k'(BM')$ წრფეები – ამოცანის პასუხი.

შევნიშნოთ, რომ განხილულ შემთხვევაში, ამოცანას ერთადერთი პასუხი გააჩნია, მაგრამ არსებობს გამონაკლისებიც, რომლებზედაც სტატიის მოცულობის რეგლამენტის გამო არ შევჩერდებით.

ნახ.103-ზე ნაჩვენები მოქმედებების ინტუიციურ ალგორითმი

1. $m(M', r = |M'M|)$. ავაგოთ $m(M', r = |M'M|)$ წრეწირი.
2. $m(M, r = |MM'|)$. ავაგოთ $m(M, r = |MM'|)$ წრეწირი.
3. $K = m \cap m'$.
 $F = m \cap m'$. განვსაზღვროთ m და m' წრეწირების თანაკვეთის K და F წერტილები.
4. $n(KF) \perp (MM')$ ავაგოთ MM' -ის მართობული $n(KF)$ წრფე.
5. $N = (KF) \cap (MM')$,
 $O = (KF) \cap s$. განვსაზღვროთ KF წრფის MM' წრფესა და s ღერძთან.
6. $g(O, r = |OM| = |OM'|)$. ავაგოთ $g(O, r = |OM| = |OM'|)$ წრეწირი.

7. $A = g \cap s, B = g \cap s$. განვსაზღვროთ g წრეწირისა და s ღერძის გადაკვეთის A და B წერტილები.
8. $k(MA) \perp l(MB)$. ავაგოთ k და l ურთიერთმართობული წრფეები.
9. $k'(M'A) \perp l'(M'B)$. ავაგოთ k' და l' ურთიერთმართობული წრფეები.
 $\angle AMB = \angle AM'B = 90^\circ$

ზემოთ მოყვანილი ინტუიციური ალგორითმის საფუძველზე შედგენილია პროგრამა, Auto CAD–ის ბაზური პრიმიტივების გამოყენებით;

1. $m(M', r = |M'M|)$. Tools – Drafting settings – Object snap ფანჯარაში
2. $m(M, r = |MM'|)$. CavrToT Midpoint და Perpendicular რეჟიმები.
3. $K = m \cap m'$. **Line**
4. $F = m \cap m'$. specify first point: MM' მონაკვეთის შუა წერტილიდან
5. $n(KF) \perp (MM')$ აღმართოთ მართობი s ღერძის
5. $N = (KF) \cap (MM')$ გადაკვეთამდე და აღნიშნოთ
- $O = (KF) \cap s$. გადაკვეთის O წერტილი;

Circle

- circle specify center point: მიუთითოთ ცენტრად O წერტილი.
6. $g(O, r = |OM| = |OM'|)$ specify radius of circle or $< >$: კურსორით მიუთითოთ
7. $A = g \cap s, B = g \cap s$. $|OM|$ – რადიუსი და
- აღნიშნოთ A და B წერტილები.

Line

- specify first point: M ;
- Specify next point or [Undo]: A ;
8. $k(MA) \perp l(MB)$. Specify next point or [Undo]: M' ;
9. $k'(M'A) \perp l'(M'B)$. Specify next point or [Undo]: B ;
- Specify next point or [Undo]: A' ;

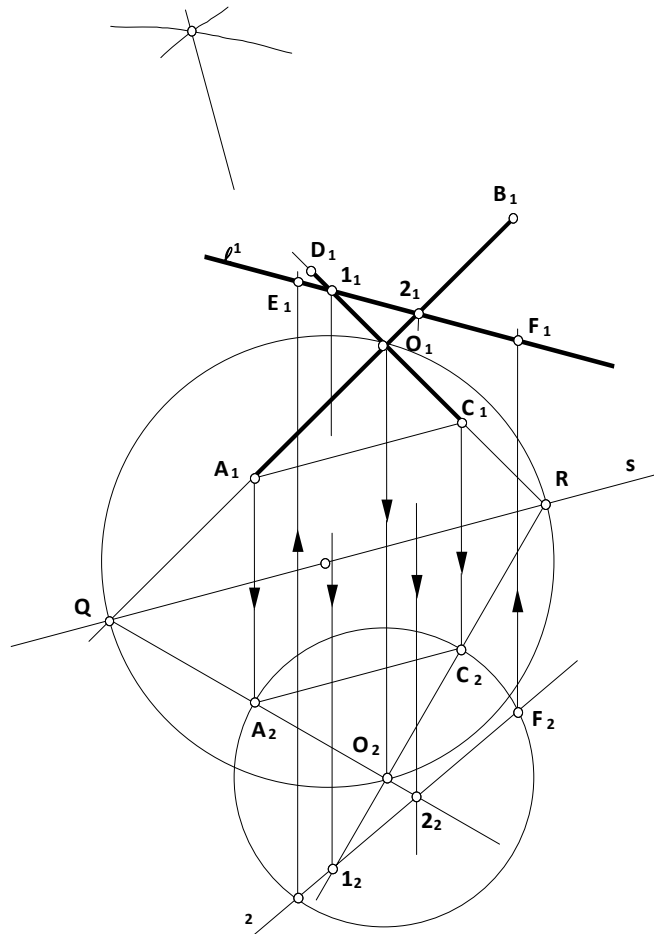
განვიხილოთ მეორე მაგალითი: მოცემულია ელიფსის $[A_1B_1]$ და $[C_1D_1]$ ღერძები და l_1 წრფე. ავაგოთ ელიფსის და l წრფის გადაკვეთის წერტილები ელიფსის აუგებლად (ნახ. 104).

ელიფსი წრეწირის აფინური წირია, მაშასადამე, წრეწირი ნათესაობით ელიფსზე აისახება, და შებრუნებით, ელიფსიც შეიძლება წრეწირზე აისახოს. წრეწირის დიამეტრებს ელიფსის დიამეტრები შეესაბამება. ცხადია, რომ საერთოდ, წრეწირის დიამეტრების ურთიერთპერპენდიკულარული წყვილის შესაბამისი ელიფსის დიამეტრები ურთიერთპერპენდიკულარული არ არის, მაგრამ არსებობს წრეწირის დიამეტრების პერპენდიკულარული წყვილი, რომელსაც ელიფსის დიამეტრების ასეთივე წყვილი (ე. ი. ელიფსის ღერძები) შეესაბამება.

განვსაზღვროთ ნათესაური შესაბამისობა, სადაც მოცემული ელიფსის $[A_1B_1]$ და $[C_1D_1]$ ღერძები ორ კონგრუენტულ და მართობულ მონაკვეთებზე აისახება (ნახ.2).

ნათესაობის s ღერძი (A_1C_1) წრფის პარალელურად გავატაროთ. (A_1B_1) და (C_1D_1) წრფეების s ღერძთან გადაკვეთის Q და R წერტილები ისეთი წრეწირის დიამეტრის ბოლოებია, რომლებიც ელიფსის O_1 ცენტრზე გაივლიან. ამ წრეწირში ტოლფერდა მარ-თკუთხა QO_2R სამკუთხედი ჩავხაზოთ.

O_1 და O_2 მონათესავე წერტილებად ჩავთვალოთ. ეს ორი წერტილი, s ღერძთან ერთად, ისეთ ნათესაურ შესაბამისობას განსაზღვრავს, სადაც პერპენდიკულარულ (O_1Q) და



ნახ. 104

ნახ. 103 აფინურად შესაბამისი კვლების მთავარი მიმართულებები

(O_1R) წრფეებს აგრეთვე პერპენდიკულარული (O_2Q) და (O_2R) წრფეები ენათესაება. მაშასადამე, წრფეთა ამ ორ წყვილს ნათესაობის მთავარი მიმართულებები აქვს.

A და C_1 ისეთ A_2 და C_2 წერტილებზე აისახება, რომ ტოლფერდა მართკუთხა $A_2O_2C_2$ სამკუთხედს მივიღებთ.

O_2 წერტილი ცენტრად მივიღოთ და $[O_2A_2]$ რადიუსით ავაგოთ წრეწირი. უკანასკნელი წარმოადგენს იმ ელიფსის მონათესავე წრეწირს, რომელიც თავისი $[A_1B_1]$ და $[C_1D_1]$ ღერძებით არის განსაზღვრული.

ავაგოთ I_1 წრფის მონათესავე I_2 წრფეც. I_1 წრფე (C_1D_1) და (A_1B_1) წრფეებს, შესაბამისად, კვეთს 1_1 და 2_1 წერტილებში, რომელთა მონათესავე 1_2 და 2_2 წერტილები (O_2Q) და (O_2R) წრფეებზე მდებარეობენ. 1_2 და 2_2 წერტილები ეკუთვნიან საძიებელ I_2 წრფეს, რომელიც ელიფსის მონათესავე წრეწირს E_2 და F_2 წერტილებში კვეთს.

ცხადია, რომ ამ ორი წერტილის შესაბამისი E_1 და F_1 წერტილები I_1 წრფისა და $[A_1B_1]$ და $[C_1D_1]$ ღერძებით განსაზღვრული ელიფსისათვის საერთოა.

ნახ.104-ზე ნაჩვენები მოქმედებების ინტუიციურ ალგორითმი

1. $a(A_1C_1)$ A_1 და C_1 წერტილებზე გავატაროთ წრფე;
2. $s \parallel (A_1C_1)$ ავაგოთ (A_1C_1) წრფის პარალელური s ღერძი;
3. $Q = (A_1B_1) \cap s$; განვსაზღვროთ (A_1B_1) წრფისა და s ღერძის თანაკვეთის წერტილი;
4. $R = (C_1D_1) \cap s$; განვსაზღვროთ (C_1D_1) წრფისა და s ღერძის თანაკვეთის წერტილი;
5. $m(Q, r = |QR|),$
 $n(R, r = |RQ|);$ ავაგოთ m და n წრეწირები;
6. $K = m \cap n, T = m \cap n$; განვსაზღვროთ m და n წრეწირების თანაკვეთის წერტილები;
7. $b(K_1T_1)$ K_1 და T_1 წერტილებზე გავატაროთ b წრფე;
8. $G = b(K_1T_1) \cap s$; განვსაზღვროთ b წრფისა და s ღერძის თანაკვეთის წერტილი;
9. $c(G, r_3 = |GQ|);$ ავაგოთ c წრეწირი;
10. $G \in d \perp s$; წერტილზე ავაგოთ s ღერძის მართობული d წრფე;
11. $O_2 = d \cap c$; განვსაზღვროთ d წრფისა და c წრეწირის თანაკვეთის O_2 წერტილი;
12. $e(QO_2);$ Q და O_2 წერტილებზე გავატაროთ e წრფე;
13. $g(RO_2);$ R და O_2 წერტილებზე გავატაროთ g წრფე;
14. $t(O_1O_2);$ O_1 და O_2 წერტილებზე გავატაროთ t წრფე;
15. $A_1 \in (A_1A_2) \parallel t(O_1O_2);$ A_1 -ზე გავატაროთ t წრფის პარალელური (A_1A_2) წრფე;
16. $A_2 = (A_1A_2) \cap e(QO_2);$ განვსაზღვროთ (A_1A_2) და e წრფეების თანაკვეთის A_2 წერტილი;
17. $C_1 \in (C_1C_2) \parallel t(O_1O_2);$ C_1 -ზე გავატაროთ t წრფის პარალელური (C_1C_2) წრფე;
18. $C_2 = (C_1C_2) \cap g(RO_2);$ განვსაზღვროთ (C_1C_2) და g წრფეების თანაკვეთის C_2 წერტილი;
19. $u(A_2C_2);$ A_2 და C_2 წერტილებზე გავატაროთ u წრფე;
20. $w(O_2, r_4 = |O_2A_2|);$ ავაგოთ w წრეწირი;
21. $(1_11_2) \parallel t(O_1O_2);$ გავატაროთ t წრფის პარალელური (1_11_2) წრფე;
22. $1_2 = (1_11_2) \cap (R_2O_2);$ განვსაზღვროთ (1_11_2) და (R_2O_2) წრფეების

23. $(2_1 \ 2_2) \parallel t(O_1 \ O_2);$ თანაკვეთის l_2 წერტილი;
გავატაროთ t წრფის პარალელური $(2_1 \ 2_2)$ წრფე;
24. $2_2 = (2_1 \ 2_2) \cap (R_2 \ O_2);$ განვსაზღვროთ $(2_1 \ 2_2)$ და $(R_2 \ O_2)$ წრფეების
თანაკვეთის 2_2 წერტილი;
25. $l_2 (1_2 \ 2_2);$ l_2 და 2_2 წერტილებზე გავატაროთ l_2 წრფე;
26. $E_2 = l_2 \cap \omega, F_2 = l_2 \cap \omega;$ განვსაზღვროთ l_2 წრფისა და ω წრეწირის
თანაკვეთის E_2 და F_2 წერტილები;
27. $E_2 \in (E_2 \ E_1) \parallel t(O_1 \ O_2);$ E_2 -ზე გავატაროთ t წრფის პარალელური $(E_2 \ E_1)$
წრფე;
28. $E_1 = (E_1 \ E_2) \cap l_1;$ განვსაზღვროთ $(E_1 \ E_2)$ და l_1 წრფეების თანაკვეთის
 E_1 წერტილი;
29. $F_2 \in (F_2 \ F_1) \parallel t(O_1 \ O_2);$ E_2 -ზე გავატაროთ t წრფის პარალელური $(E_2 \ E_1)$
წრფე;
30. $F_1 = (F_1 \ F_2) \cap l_1;$ განვსაზღვროთ $(F_1 \ F_2)$ და l_1 წრფეების თანაკვეთის
 F_1 წერტილი;

ზემოთ მოყვანილი ინტუიციური ალგორითმის საფუძველზე შედგენილია პროგრამა, Auto CAD-ის ბაზური პრემიტივების გამოყენებით;

1. $a (A_1 C_1)$ **Line**
specify first point: A_1 ;
Specify next point or [Undo]: C_1 + Enter;
2. $s \parallel (A_1 C_1)$ **Line**
specify first point: ვირჩევთ $A_1 C_1$ წრფიდან ნებისმიერ
მანძილზე დაშორებულ წერტილს;
Shift + მაუსის მარჯვენა კნოპი. პანელზე ავირჩიოთ
Parallel ბრძანება. კურსორი მივიტანოთ $A_1 C_1$ წრფესთან
(რადგან მისი პარალელური უნდა გავატაროთ) და
გავატაროთ s ღერძი;
3. $Q = (A_1 B_1) \cap s;$ $A_1 B_1$ მონაკვეთი დავაგრძელოთ s ღერძთან გადაკვეთამდე;
4. $R = (C_1 D_1) \cap s;$ $C_1 D_1$ მონაკვეთი დავაგრძელოთ s ღერძთან გადაკვეთამდე;
5. $m (Q, r = |QR|);$ Tools – Drafting settings – Object snap ფანჯარაში
6. $n (R, r = |RQ|);$ ჩავრთოთ Midpoint.
7. $K = m \cap n, T = m \cap$ **Draw - Circle**
8. $n;$ circle specify center point: მივუთითოთ ცენტრად QR
9. $b (K_1 T_1)$ მონაკვეთის შუა G წერტილი.
 $G = b(K_1 T_1) \cap s;$ specify radius of circle or < >: კურსორით მივუთითოთ
 $c (G, r_3 = |GQ|);$ $|GQ|$ – რადიუსი.
10. $G \in d \perp s;$ მდგომარეობის სტრიქონში ჩავრთოთ ortho რეჟიმი;
11. $O_2 = d \cap c;$ **Line**
specify first point: G . გავაგრძელოთ ეს მონაკვეთი c
წრეწირის გადაკვეთამდე და აღვნიშნოთ O_2 წერტილი;
12. $e (QO_2);$ **Line**
specify first point: Q ;
Specify next point or [Undo]: O_2 ;

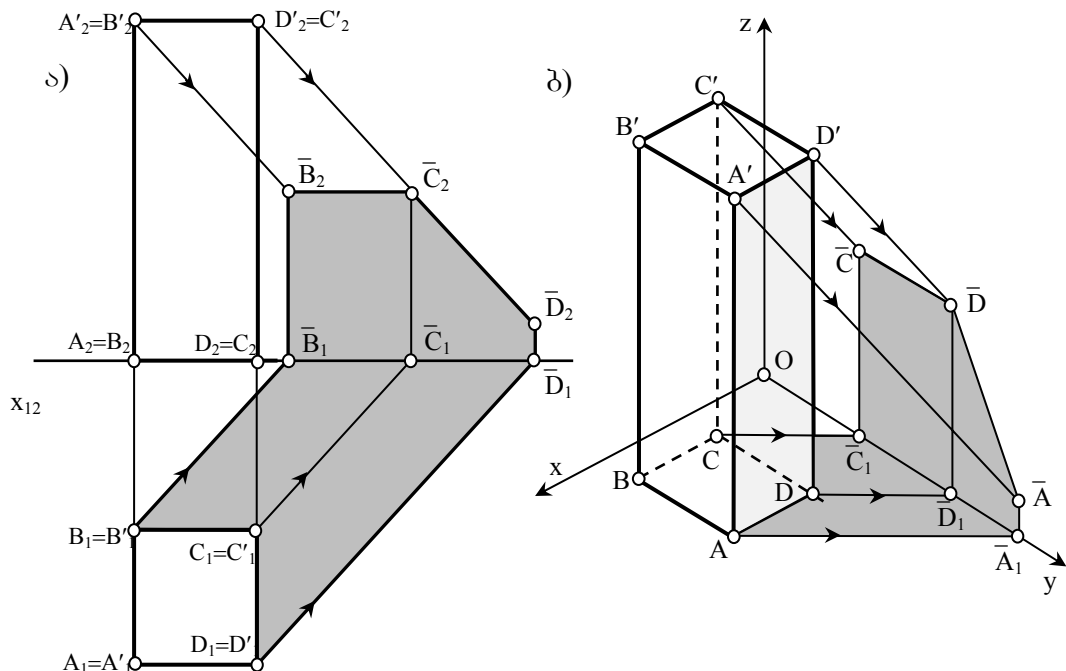
13. $g(RO_2);$ **Line**
specify first point: R;
Specify next point or [Undo]: O_2 ;
14. $t(O_1 O_2);$ **Line**
specify first point: O_1 ;
Specify next point or [Undo]: O_2 ;
15. $A_1 \in (A_1 A_2) \parallel t$ **Line**
specify first point: A_1 ;
16. $(O_1 O_2);$
 $A_2 = (A_1 A_2) \cap e(Q$ Shift + მაუსის მარჯვენა კნოპი. პანელზე ავირჩიოთ
 $O_2);$ Parallel ბრძანება. კურსორი მივიტანოთ t წრფესთან
(რადგან მისი პარალელური უნდა გავატაროთ) და
კურსორი გადავაადგილოთ e წრფესთან A_2 წერტილში
გადაკეთამდე;
17. $C_1 \in (C_1 C_2) \parallel t(O_1$ **Line**
specify first point: C_1 ;
18. $O_2);$
 $C_2 = (C_1 C_2) \cap g(R$ Shift + მაუსის მარჯვენა კნოპი. პანელზე ავირჩიოთ
 $O_2);$ Parallel ბრძანება. კურსორი მივიტანოთ t წრფესთან
(რადგან მისი პარალელური უნდა გავატაროთ) და
კურსორი გადავაადგილოთ g წრფესთან C_2 წერტილში
გადაკეთამდე;
19. $u(A_2 C_2);$ **Line**
specify first point: A_2 ;
Specify next point or [Undo]: C_2 + Enter;
20. $\omega(O_2, r_4 = |O_2 A_2|);$ **Circle**
circle specify center point: მივუთითოთ ცენტრად O_2
წერტილი.
specify radius of circle or კურსორით მივუთითოთ
 $|O_2 A_2|$ -რადიუსი.
21. $(l_1 l_2) \parallel t(O_1 O_2);$ **Line**
specify first point: l_1 ;
22. $l_2 = (l_1 l_2) \cap (R$ Shift + მაუსის მარჯვენა კნოპი. პანელზე ავირჩიოთ
 $O_2);$ Parallel ბრძანება. კურსორი მივიტანოთ t წრფესთან
(რადგან მისი პარალ-ლური უნდა გავატაროთ) და
კურსორი გადავაადგილოთ RO_2 წრფესთან l_2 წერტილში
გადაკეთამდე;
23. $(2_1 2_2) \parallel t(O_1 O_2);$ **Line**
specify first point: 2_1 ;
24. $2_2 = (2_1 2_2) \cap$ Shift + მაუსის მარჯვენა კნოპი. პანელზე ავირჩიოთ
 $(QO_2);$ Parallel ბრძანება. კურსორი მივიტანოთ t წრფესთან
(რადგან მისი პარალ-ლური უნდა გავატაროთ) და
კურსორი გადავაადგილოთ QO_2 წრფესთან 2_2 წერტილში
გადაკეთამდე;
25. $l_2(l_1 2_2);$ **Line**
specify first point: l_2 ;
26. $E_2 = l_2 \cap \omega, F_2 = l_2 \cap$ Specify next point or [Undo]: 2_2 + Enter;
;
აღვნიშნოთ l_2 წრფის ω წრეწირთან გადაკვეთის E_2 და
 F_2 წერ-ტილები;

27. $E_2 \in (E_2 E_1) \parallel t(O_1$ **Line**
 28. $O_2)$; specify first point: E_2 ;
 $E_1 = (E_1 E_2) \cap \ell_1$; Shift + მაუსის მარჯვენა კნოპი. პანელზე ავირჩიოთ
 Parallel ბრძანება. კურსორი მივიტანოთ t წრფესთან
 (რადგან მისი პარალელ-ლური უნდა გავატაროთ) და
 კურსორი გადავადგილოთ ℓ_1 წრფე-სთან E_1 წერტილში
 გადაკვეთამდე;
29. $F_2 \in (F_2 F_1) \parallel t(O_1$ **Line**
 30. $O_2)$; specify first point: F_2 ;
 $F_1 = (F_1 F_2) \cap \ell_1$; Shift + მაუსის მარჯვენა კნოპი. პანელზე ავირჩიოთ
 Parallel ბრძანება. კურსორი მივიტანოთ t წრფესთან
 (რადგან მისი პარალელ-ლური უნდა გავატაროთ) და
 კურსორი გადავადგილოთ ℓ_1 წრფე-სთან F_1 წერტილში
 გადაკვეთამდე;

მრავალწახნაგას საკუთარი და დაცემული ჩრდილების აგება

აგება დაიყვანება, მისი წახნაგების ანუ ბრტყელი ფიგურების საკუთარი და დაცემული ჩრდილების აგებაზე.

სურ.105-ზე ნაჩვენებია $AA'BB'CC'DD'$ მართი პარალელებიპედიის საკუთარი და დაცემული ჩრდილების აგება, ეპიურზეც და აქსონომეტრიაშიც. საკუთარ ჩრდილში იმყოფება მრავალწახნაგას ორი $AA'DD'$ და $CC'DD'$ წახნაგი, ამიტომ მრავალწახნაგას ჩრდილი წარმოადგენს ამ ორი წახნაგის ჩრდილთა შეერთებას [90].



ნახ. 105 მრავალწახნაგას ჩრდილი
 ნახ.2-ზე ნაჩვენები მოქმედებების ინტუიციურ ალგორითმი

- $B_1 \in a(B_1 B_1')$, $\angle a x_{12} = 45^\circ$; B_1 -ზე გავატაროთ a წრფე x_{12} ღერძთან 45° -ით დახრილი;
- $B_1' = a \cap x_{12}$; განვსაზღვროთ a წრფისა და x_{12} ღერძის თანაკვეთის B_1'

- | | | |
|-----|---|---|
| | | წერტი-ლი; |
| 6. | $D_1' = d \cap x_{12};$ | განვსაზღვროთ d წრფისა და x_{12} ლერძის თანაკვეთის D_1' წერტი-ლი; |
| 7. | $B_2'' \in m (B_2'' B_2'),$
$\angle m x_{12} = 45^0$ | B_2'' -ზე გავატაროთ m წრფე x_{12} ლერძთან 45^0 -ით დახრილი; |
| 8. | $B_1' \in t (B_1' B_2') \perp x_{24}$ | B_1' წერტილზე გავატაროთ t წრფე x_{12} -ის პერ-პენდიკულარულად; |
| 9. | $B_2' = t \cap m;$ | განვსაზღვროთ t და m თანაკვეთის B_2' წერტილი; |
| 10. | $C_2'' = D_2'' \in n (C_2'' =$
$D_2'' D_2'), \angle n x_{12} = 45^0$ | $C_2'' = D_2''$ -ზე გავატაროთ n წრფე x_{12} ლერძთან 45^0 -ით დახრილი; |
| 11. | $D_1' \in (D_1' D_2') \parallel t;$ | D_1' -ზე გავატაროთ t წრფის პარალელური $(D_1' D_2')$ წრფე; |
| 12. | $D_2' = t \cap n$ | განვსაზღვროთ t და n წრფეების თანაკვეთის D_2' წერტილი; |
| 13. | $C_1' \in (C_1' C_2') \parallel t;$ | C_1' -ზე გავატაროთ t წრფის პარალელური $(C_1' C_2')$ წრფე; |
| 14. | $C_2' = t \cap n$ | განვსაზღვროთ t და n წრფეების თანაკვეთის C_2' წერტილი; |
| 3. | $C_1 \in b (C_1 C_1'),$
$\angle b x_{12} = 45^0$ | C_1 -ზე გავატაროთ b წრფე x_{12} ლერძთან 45^0 -ით დახრილი; |
| 4. | $C_1' = b \cap x_{12};$ | განვსაზღვროთ b წრფისა და x_{12} ლერძის თანაკვეთის C_1' წერტი-ლი; |
| 5. | $D_1 \in d (D_1 D_1'),$
$\angle d x_{12} = 45^0$ | D_1 -ზე გავატაროთ d წრფე x_{12} ლერძთან 45^0 -ით დახრილი; |

ზემოთ მოყვანილი ინტუიციური ალგორითმის საფუძველზე შედგენილია პროგრამა, Auto CAD– ის ბაზური პრემიტივების გამოყენებით;

- | | |
|--|---|
| <p>1. $B_1 \in a (B_1 B_1'),$
 $\angle a x_{12}=45^0$</p> <p>2. $B_1' = a \cap x_{12};$</p> | <p>Tools – Drafting settings –Polar Tracking ფანჯრის
 Polar Tracking უჯრედში დავაყენოთ ალაბი და
 Increment angle ფანჯარაში შევიყვანოთ 45^0-ი;
 Line
 specify first point: B_1;
 Specify next point or [Undo]: კურსორი
 გადავაადგილოთ x_{12} ღერძთან B_1' წერტილში
 გადაკვეთამდე;</p> |
| <p>3. $C_1 \in b (C_1 C_1'),$
 $\angle b x_{12}=45^0$</p> <p>4. $C_1' = b \cap x_{12};$</p> | <p>Tools – Drafting settings –Polar Tracking ფანჯრის
 Polar Tracking უჯრედში დავაყენოთ ალაბი და
 Increment angle ფანჯარაში შევიყვანოთ 45^0-ი;
 Line
 specify first point: C_1;
 Specify next point or [Undo]: კურსორი
 გადავაადგილოთ x_{12} ღერძთან C_1' წერტილში
 გადაკვეთამდე;</p> |

5. $D_1' \in d(D_1 D_1'),$
 $\angle d x_{12}=45^0$
6. $D_1' = d \cap x_{12};$

Tools – Drafting settings –Polar Tracking ფანჯრის
Polar Tracking უჯრედში დავყენოთ ალაში და
Increment angle ფანჯარაში შევიყვანოთ 45^0 -ი;

Line

specify first point: D_1 ;

Specify next point or [Undo]: კურსორი

გადავადგილოთ x_{12} ღერძთან D_1' წერტილში

გადაკვეთამდე;

7. $B_2'' \in m(B_2'' B_2'),$
 $\angle m x_{12}=45^0$

Tools – Drafting settings –Polar Tracking ფანჯრის
Polar Tracking უჯრედში დავყენოთ ალაში და
Increment angle ფანჯარაში შევიყვანოთ 45^0 -ი;

Line

specify first point: B_2'' ;

Specify next point or [Undo]: კურსორი

გადავადგილოთ გარკვეულ მანძილზე;

8. $B_1' \in t(B_1' B_2') \perp x_{24}$
9. $B_2' = t \cap m;$

Line

Shift + მაუსის მარჯვენა კნოპი. პანელზე ავირჩიოთ
Perpendicular ბრძანება. კურსორი მივიტანოთ x_{12}
ღერძზე (რადგან მისი მართობი უნდა გავატაროთ)
და გავატაროთ t წრფე m_4 -თან გადაკვეთის B_2'
წერტილამდე;

10. $C_2'' = D_2'' \in n(C_2'' = D_2'' D_2'),$
 $\angle n x_{12}=45^0$

Tools – Drafting settings –Polar Tracking ფანჯრის
Polar Tracking უჯრედში დავყენოთ ალაში და
Increment angle ფანჯარაში შევიყვანოთ 45^0 -ი;

Line

specify first point: $C_2'' = D_2''$;

Specify next point or [Undo]: კურსორი

გადავადგილოთ გარკვეულ მანძილზე;

11. $D_1' \in (D_1' D_2') \parallel t;$
12. $D_2' = t \cap n$

Line

specify first point: D_1' ;

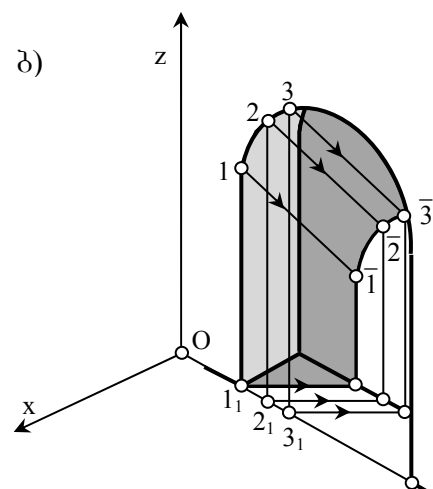
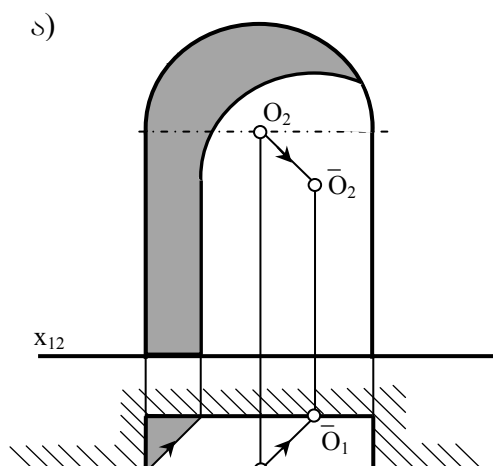
Shift + მაუსის მარჯვენა კნოპი. პანელზე ავირჩიოთ
Parallel ბრძანება. კურსორი მივიტანოთ t წრფესთან
(რადგან მისი პარალელური უნდა გავატაროთ) და
კურსორი გადავადგილოთ $(D_1' D_2')$ წრფესთან D_2'
წერტილში გადაკვეთამდე;

13. $C_1' \in (C_1' C_2') \parallel t;$
14. $C_2' = t \cap n$

Line

specify first point: C_1' ;

Shift + მაუსის მარჯვენა კნოპი. პანელზე ავირჩიოთ
Parallel ბრძანება. კურსორი მივიტანოთ t წრფესთან
(რადგან მისი პარალელური უნდა გავატაროთ) და
კურსორი გადავადგილოთ $(C_1' C_2')$ წრფესთან C_2'
წერტილში გადაკვეთამდე.



ნახ. 105 წრიულ ნიშაში დაცემული ჩრდილი

წრიული ნიშის ჩრდილებია აგებული ნახ.106-ზე. O წრეწირის დაცემული ჩრდილი ნიშაზე, განისაზღვრება, როგორც წრეწირის ჩრდილი სიბრტყეზე. ორთოგონალურ გეგმილებში საკმარისია O ცენტრის $\bar{O}$ ჩრდილი ავავთ და მასზე ნიშის წრეწირის ტოლი წრეწირი შემოვაგლოთ. აქსონომეტრიაში კი საჭიროა ამ წრეწირის კუთვნილი რამდენიმე წერტილის ჩრდილი ავავთ და მდოვრედ შემოვაგლოთ [90].

ნახ.3-ა-ზე ნაჩვენები მოქმედებების ინტუიციურ ალგორითმი

1. $O_1 \in m (O_1 O_1'), \angle m x_{12} = 45^\circ$ O_1 -ზე გავატაროთ m წრფე x_{12} ღერძთან 45° -ით დახრილი;
2. $O_1' = m \cap \ell$; განვსაზღვროთ ℓ და m წრფეების თანაკვეთის O_1' წერტილი;
3. $O_2 \in n (O_2 O_2'), \angle n x_{12} = 45^\circ$ O_2 -ზე გავატაროთ n წრფე x_{12} ღერძთან 45° -ით დახრილი;
4. $O_1' \in a (O_1' O_2') \parallel t(O_1 O_2)$; O_1' -ზე გავატაროთ t წრფის პარალელური $a (O_1' O_2')$ წრფე;
5. $O_2' = n \cap a$; განვსაზღვროთ n და a წრფეების თანაკვეთის O_2' წერტილი;
6. $O_2' \in b (O_2' 3_2) \parallel (1_2 O_2)$; O_2' -ზე გავატაროთ $(1_2 O_2)$ წრფის პარალელური $b (O_2' 3_2)$ წრფე;
7. $1_1 \in g (1_1 3_1), \angle g x_{12} = 45^\circ$ 1_1 -ზე გავატაროთ g წრფე x_{12} ღერძთან 45° -ით დახრილი;
8. $3_1 = g \cap \ell$; განვსაზღვროთ ℓ და g წრფეების თანაკვეთის 3_1 წერტილი;
9. $3_1 \in d (3_1 3_2) \parallel t(O_1 O_2)$; 3_1 -ზე გავატაროთ t წრფის პარალელური $d(3_1 3_2)$ წრფე;
10. $3_2 = d (3_1 3_2) \cap b$
 $4_2 = d (3_1 3_2) \cap x_{12}$ განვსაზღვროთ d წრფის, b წრფესა და x_{12} ღერძთან თანაკვეთის 3_2 და 4_2 წერტილები;
11. $c (O_2', r = |1_2 O_2|)$; ავავთ c წრეწირის რკალი;

ზემოთ მოყვანილი ინტუიციური ალგორითმის საფუძველზე შედგენილია პროგრამა,

Auto CAD-ის ბაზური პრიმიტივების გამოყენებით;

1. $O_1 \in m (O_1 O_1')$, Tools – Drafting settings –Polar Tracking ფანჯრის Polar
 2. $\angle m x_{12} = 45^\circ$ Tracking უჯრედში დავაყენოთ ალამი და Increment
 - $O_1' = m \cap \ell$; angle ფანჯარაში შევიყვანოთ 45° -ი;
- Line**
specify first point: O_1 ;
Specify next point or [Undo]: კურსორი გადავაადგილოთ

3. $O_2 \in n(O_2 O_2'), \angle n x_{12} = 45^0$
 ღ წრეწესთან O_1' წერტილში გადაკვეთამდე;
 Tools – Drafting settings –Polar Tracking ფანჯრის Polar Tracking უჯრედში დავაყენოთ ალაში და Increment angle ფანჯარაში შევიყვანოთ 45^0 -ი;
Line
 specify first point: O_2 ;
 Specify next point or [Undo]: კურსორი გადავაადგილოთ გარკვეულ მანძილზე;
4. $O_1' \in a(O_1' O_2') \parallel t(O_1 O_2)$;
 5. $O_2' = n \cap a$;
Line
 specify first point: O_1' ;
 Shift + მაუსის მარჯვენა კნოპი. პანელზე ავირჩიოთ Parallel ბრძანება. კურსორი მივიტანოთ t წრეწესთან (რადგან მისი პარალელური უნდა გავატაროთ) და კურსორი გადავაადგილოთ n წრეწესთან O_2' წერტილში გადაკვეთამდე;
6. $O_2' \in b(O_2' 3_2) \parallel (1_2 O_2)$;
Line
 specify first point: O_2' ;
 Shift + მაუსის მარჯვენა კნოპი. პანელზე ავირჩიოთ Parallel ბრძანება. კურსორი მივიტანოთ $(1_2 O_2)$ წრეწესთან (რადგან მისი პარალელური უნდა გავატაროთ) და კურსორი გადავაადგილოთ გარკვეულ მანძილზე;
7. $1_1 \in g(1_1 3_1)$;
 8. $\angle g x_{12} = 45^0$
 $3_1 = g \cap \ell$;
 Tools – Drafting settings –Polar Tracking ფანჯრის Polar Tracking უჯრედში დავაყენოთ ალაში და Increment angle ფანჯარაში შევიყვანოთ 45^0 -ი;
Line
 specify first point: 1_1 ;
 Specify next point or [Undo]: კურსორი გადავაადგილოთ ღ წრეწესთან 3_1 წერტილში გადაკვეთამდე;
9. $3_1 \in d(3_1 3_2) \parallel t(O_1 O_2)$;
 10. $3_2 = d \cap b$; $4_2 = d \cap x_{12}$
Line
 specify first point: 3_1 ;
 Shift + მაუსის მარჯვენა კნოპი. პანელზე ავირჩიოთ Parallel ბრძანება. კურსორი მივიტანოთ t წრეწესთან (რადგან მისი პარალელური უნდა გავატაროთ) და კურსორი გადავაადგილოთ b წრეწესთან 3_2 წერტილში გადაკვეთამდე; იგივე წრეწის x_{12} -თან გადაკვეთა აღვნიშნოთ 4_2 -ით;
11. $c(O_2', r = |1_2 O_2|)$;
Draw – Arc - O_2' წერტილზე, როგორც ცენტრზე შემოვხაზოთ $r = |1_2 O_2|$ რადიუსიანი რკალი.

ნახ.3-ბ-ზე ნაჩვენები მოქმედებების ინტუიციურ ალგორითმი

1. $1_1 \in a(1_1 1_1'), \angle az = 90^0$ 1_1 -ზე გავატაროთ a წრე z ღერძთან 90^0 -ით დახრილი;
2. $1_1' = a \cap \ell'$; განვსაზღვროთ ℓ' და a წრეების თანაკვეთის $1_1'$ წერტილი;
3. $1 \in b(1 1'), \angle bz = 45^0$ 1 -ზე გავატაროთ b წრე z ღერძთან 45^0 -ით დახრილი;

4. $l_1' \in t(l_1' l_1') \parallel z;$ l_1' -ზე გავატაროთ z ღერძის პარალელური $t(l_1' l_1')$ წრფე;
5. $l' = b \cap t;$ განვსაზღვროთ b და t წრფეების თანაკვეთის l' წერტილი;

ზემოთ მოყვანილი ინტუიციური ალგორითმის საფუძველზე შედგენილია პროგრამა, Auto CAD–ის ბაზური პრიმიტივების გამოყენებით;

1. $l_1 \in a(l_1 l_1'),$ Tools – Drafting settings –Polar Tracking ფანჯრის
2. $\angle a z = 45^\circ$ Polar Tracking უჯრედში დავაყენოთ ალაში და
 $l_1' = a \cap l';$ Increment angle ფანჯარაში შევიყვანოთ 45° -ი;
Line
specify first point: $l_1;$
Specify next point or [Undo]: კურსორი გადავაადგილოთ l' წრფე–თან l_1' წერტილში გადაკვეთამდე;
3. $l \in nb(l l'),$ Tools – Drafting settings –Polar Tracking ფანჯრის
 $\angle b z = 45^\circ$ Polar Tracking უჯრედში დავაყენოთ ალაში და
Increment angle ფანჯარაში შევიყვანოთ 45° -ი;
Line
specify first point: $l;$
Specify next point or [Undo]: კურსორი გადავაადგილოთ გარკვეულ მანძილზე;
4. $l_1' \in t(l_1' l_1') \parallel z;$ **Line**
specify first point: $l_1';$
Shift + მაუსის მარჯვენა კნოპი. პანელზე ავირჩიოთ
Parallel ბრძანება. კურსორი მივიტანოთ z ღერძთან
(რადგან მისი პარალელური უნდა გავატაროთ) და
კურსორი გადავაადგილოთ b წრფესთან l' წერტილში
გადაკვეთამდე;
5. $l' = b \cap t;$

3. დასკვნა

განხილული ამოცანების გადაწყვეტის ჩვენეული ინტერპრეტაცია განსხვავებულია გავრცელებული შემთხვევებისაგან იმით, რომ აქ გამორიცხულია კომპიუტერისათვის დამახასიათებელი მექანიკური აზროვნება და იგი შევსილია ყოველი მოქმედების შინაარსში შიგვდომის საშუალებებით. საქმე ისაა, რომ ჩვენი ვარიანტისათვის მოხმობილი ინტუიციური ალგორითმი ყოველი ბრძანების შინაარსობრივ მხარეს აშუქებს და ამით ყოველ ბრძანებაში წარმოშობილ კითხვაზე – რატომ? – ადეკვატურად პასუხობს.

წინამდებარე ნაშრომში განხილულია საინჟინრო გეომეტრიის გრაფიკული ამოცანები და მათი გადაწყვეტა კომპიუტერის გამოყენებით, მათ შორის ისეთი ცნობილი, როგორიცაა აფინურად შესაბამისი ველების მთავარი მიმართულებანი (თეორია) და მისი გამოყენება ამოცანაში: მოცემულია ელიფსი და წრფე, ავაგოთ ამ ელიფსისა და წრფის თანაკვეთის წერტილები ელიფსის აუგებლად.

განხილულია აგრეთვე, ზოგადად ჩრდილების აგების გეომეტრიული არსი და ნაჩვენებია ორი ამოცანა: 1. მრავალწახნაგას საკუთარი და დაცემული ჩრდილების აგება 2. წრიული ნიშის ჩრდილის აგება (მონჟის ეპიური და აქსონომეტრია).

როგორც თეორიული ნაწილის, ასევე ამოცანებისათვის გამოყენებულია გრაფიკული ინტერპრეტაციის ჩვენეული ვერსიები. შესრულებული ნახაზებისათვის შედგენილია ინტუიციური და მანქანური ალგორითმები. აგების ამოცანებში კომპიუტერული ტექნიკის გამოყენების ჩვენეული ვერსიები შესაძლოა გავრცელდეს საინჟინრო გეომეტრიის ნებისმიერ აგების ამოცანაზე.

ნაშრომში რამდენადმე რეალიზებულია ჩვენი მოკრძალებული მიზანი: საინჟინრო გეომეტრიის მოცემული ხასიათის ამოცანების

გადაწყვეტის მეთოდოლოგიის დახვეწა და ამ საქმეში კომპიუტერული საშუალებების დანერგვა, მექანიკური აზროვნების ინტელექტუალური აზროვნების ფაზაში გადაყვანის თვალსაზრისით.

ლიტერატურა

1. დ. ლორთქიფანიძე და სხვა, პედაგოგიკა, გამომც. „განათლება“, თბილისი, 1969
2. Н.В. Савин Педагогика. Изд., „Просвещение“, М. -1978
3. СП. Баранов и др., Педагогика. Изд., „Просвещение“, М. - 1981
4. В.С. Лезнев Содержание образования. Из. "ВШ", М., 1989.
5. კ. ბაქრაძე ლოგიკა. საქართველოს პედ. მეც-თა ინსტიტუტის გამომცემლობა. თბ., 1946
6. იან ამოს კომენსკი რჩეული პედაგოგიური თხზულებანი. საქართველოს პედ. მეცნიერებათა ინსტიტუტის გამომცემლობა. თბილისი 1947. ტომი – 1.
7. იან ამოს კომენსკი რჩეული პედაგოგიური თხზულებანი. გამომც. „ცოდნა“, თბ., 1958. ტომი 2.
8. რ. ანთაძე ფსიქოლოგიის მოკლე კურსი. თბილისის უნივერსიტეტის გამ-ბა, თბ., 1983
9. В.А. Крутецкий Психология. Изд. "Просвещение", М., 1980.
10. СИ. Дембинский , В.И. Кузменко
Методика преподавания черчения в средней школе. Изд. "Просвещение", М., 1977.
11. გ. ჯიბლაძე და სხვ. უმაღლესი სკოლის პედაგოგიკის საკითხები. გამ-ბა „განათლება“ თბ., 1981
12. შ. ჩხარტიშვილი არზრდის სოციალური ფსიქოლოგია. თბილისის უნივერსიტეტის გამ-ბა, თ., 1974
13. Л.А. Карленко Психология (словарь). Изд. полит, литературы. М., 1980.
14. С.И. Архангельский Учебный процесс в высшей школе. Изд., "ВШ", М., 1980.
15. გ. ჯიბლაძე პედაგოგიკა და მეთოდოლოგია. გამ-ბა., „განათლება“, თ., 1974
16. კ.დ. უშინსკი რჩეული პედაგოგიური თხზულებანი. თბილისის ინივერსიტეტის გამ-ბა, თბ., 1974
17. ა. პეტროვსკი და სხვა ასაკობრივი და პედაგოგიური ფსიქოლოგია. გამ-ბა „განათლება“, თბ., 1977
18. დ. ლორთქიფანიძე ლექცია უმაღლეს სკოლაში და მისი აგების პრინციპები. თბილისის უნივერსიტეტის გამ-ბა, თბ., 1974

19. ა. შავგულიძე ელემენტარული საინჟინრო გრაფიკა სკოლაში. გამ-ბა „განათლება“ თბ., 1976. პირველი ნაკვეთი.
20. ა. შავგულიძე ელემენტარული საინჟინრო გრაფიკა სკოლაში. გამ-ბა „განათლება“ თბ., 1981. მეორე ნაკვეთი.
21. ა. შავგულიძე და სხვა გეომეტრიული აგებანი სიბრტყეზე. გამ-ბა „ტ.უ“, თბ., 1991
22. ა. შავგულიძე და სხვა სივრცითი ფიგურების სიბრტყეზე ასახვის გეომეტრიული მეთოდები და მათი გამოყენება. გამ-ბა „ტ.უ“, თბ., 1991
23. ა. შავგულიძე ხაზვის ზოგადი კურსი. მე-8 კლასის სახელმძღვანელო. გამ-ბა „განათლება“ თბ., 1996
24. ა. შავგულიძე ხაზვის ზოგადი კურსი. მე-9 კლასის სახელმძღვანელო. გამ-ბა „განათლება“ თბ., 1997
25. ა. შავგულიძე მხაზველობითი გეომეტრია ელექტრონული გამომთვლელი მანქანის ბაზაზე, გამ-ბა „განათლება“, თბ., 1988. სამუშაო პროგრამა და მეთოდური მითითებები
26. ა. შავგულიძე, გ. გარიშვილი შესავალი კომპიუტერულ საინჟინრო გრაფიკაში. გამ-ბა „ტ.უ“, თბ., 1996
27. ა. შავგულიძე, გ. გარიშვილი კომპიუტერული საინჟინრო გრაფიკა. გამ-ბა „ტ.უ“, თბ., 1997
28. ა. შავგულიძე, გ. გარიშვილი საინჟინრო გრაფიკის ამოცანების გადაწყვეტა ავტომატიზირებული დაპროექტების სისტემის თ - ჩ დ -ის საშუალებით. გამ-ბა „ტ.უ“, თბ., 1997.
29. Педагогическая энциклопедия т.т. 1,2,3,4. Изд., "Советская энциклопедия", М. 1978.
30. Б.А.Душков и др. 1964. Основы инженерной психологии. Изд, "ВШ", М. 1977.
31. В.В.Богословский и др. Практикум по общей психологии. Изд. Изд. "Просвещение", М.,1997.
32. Б.М.Теплов Избранные труды, т.1. Изд. "Педагогика", М., 1985.
33. Б.М.Теплов Избранные труды, т.2. Изд. "Педагогика", М., 1985.
34. v. gagua da sxva pedagogikis Sesavali. gam-ba `ganaTleba~ T., 1976
35. И.Л.Маринко и др., Основы методики преподавания общественных наук в высшей школе. Из. Московского университета, М., 1971.
36. А.С.Пчелко и др., Основы методики начального обучения математики. Изд. "Просвещение", М.Д965.
37. В.А.Гусев Преподавание геометрии в 6-8 классах. Изд. "Просвещение", М.Д979.
38. М.Г.Шавлова Педагогическая система А.С. Макаренко и современность. "Высшая школа", М., 1980.
39. ი. ჭკუასელი პედაგოგიკის ზოგადი საფუძვლების ძირითადი საკითხები. თ. , თსუ, 1977
40. Теория и практика педагогического эксперимента "Педагогика", М., 1979.

41. რ. ანთაძე გამოცდებისათვის მზადება და მეხსიერების კანონები. თბ. 1974
42. Современные средства обучения в техническом вузе Изд. Львовского у-та. Л., 1969.
43. Б.М.Теплов Психология. Учпедгиз, М., 1951.
44. В.П.Лапчинская Средняя общеобразовательная школа современной Англии. "Педагогика", М., 1977
45. Н.М.Мочалова Методы проблемного обучения и границы их применения. Изд. Казанского у-та. К., 1979.
46. Д. Вулдридж Механизмы мозга. "Мир", М., 1965.
47. У.Росс Эшби Конструкция мозга. ИИЛ, М., 1962.
48. საშუალო სკოლის დიდაქტიკა გამბა „განათლება“ თ., 1981
49. Из опыта преподавания черчения в школе Учпедгиз, М., 1958.
50. А.Д. Ботвинников Современные средства механизации графических работ."Высшая школа", М., 1963.
51. Б.М. Блинов Эффективность обучения. М., 1976.
52. М.Арбуб Мозг, машина и математика. "Наука", М., 1968.
53. "Педагогика" под редакцией С.П.Баранова "Просвещение", М.,1978 "
54. "Педагогика" под редакцией В.В.Белоусова Физкультура и спорт", М.,1978
55. "Педагогика школы" под редакцией Огородникова "Просвещение", М.,1978
56. И.С.Кон. Психология старшеклассника. "Просвещение", М., 1980.
57. Дидактика средней школы "Просвещение", М., 1982.
59. ა. შავგულაძე, თ. თევზაძე, თ. ნოზაძე ტექნიკური საზვის ზოგადი კურსი. თბილისი "განათლება", 1999.
60. Четверухин Н. Ф. Начертательная геометрия. М. Высшая школа 1963
61. Моденов П. С., Пархоменко А.С. Геометрические преобразования. М. МГУ 1961.
62. Четверухин Н. Ф. Проективная геометрия. Уч.-пед. Издательство Министерства просвещения РСФСР 1961.
63. Яглом И. М. Геометрические преобразования. 1-я часть. М. Изд-во технико-теоретической литературы 1955.
64. Яглом И. М. Геометрические преобразования. 2-я часть. М. Изд-во технико-теоретической литературы 1956.
65. Аргунов Б. И., Балк М.Б. Геометрические построения на плоскости. Уч.-пед. Издательство Министерства просвещения РСФСР 1955.
66. Энциклопедия элементарной математики Т.1 Геометрия. М. Гос. Изд. Физико-математической литературы. М. 1963.
67. Энциклопедия элементарной математики Т.5 Геометрия. М. Гос. Изд. Физико-математической литературы. М. 1966.
68. Коктер Х. С. Действительная проективная плоскость. М. Гос. Изд. Физико-математической литературы. 1966.
69. ა. პოგორელაძე სახელმძღვანელო საშუალო სკოლის მე-7 – მე-11 კლასებისათვის. თბილისი "განათლება" 1998.

70. გ. ვაჩნაძე. მხაზველობითი გეომეტრიის კურსი. თბილისი „განათლება“ 1979.
71. Рынин Р. А. Линейная перспектива. Петроград. 1918.
72. Вольберг О. А. Основные идеи проективной геометрии. М. Учпедгиз. 1949.
73. Кирилов А. Ф. Соколовский Черчение ирисование. Изд. Высшая школа. М. 1966.
74. Барышников А. Е. Перспектива. Изд. «Искусство» М. 1955.
75. Владимирский Г. А. Перспектива. Изд. «Просвещение» М. 1969.
76. Тарасов Б. Ф. Методы изображения в транспортном строительстве. Ленинград. 1987.
77. გ. ვაჩნაძე გამოყენებითი პერსპექტივის საფუძვლები. „განათლება“ თბ. 1966.
78. Финкельштейн Э. Auto CAD 2007 и Auto CAD LT 2007. Библия пользователя. «Диалектика» М. 2007.
79. Зоммер В. Auto CAD 2008 Руководство. Изд. «Бином» М. 2008.

ავტორის მიერ გამოქვეყნებული შრომები

80. “საინჟინრო გრაფიკის საწყისები” როგორც სასწავლო დისციპლინა და უმაღლეს სკოლაში მისი სწავლების მეთოდოლოგია “ინტელექტი” 2008. 1(30)
81. კონსტრუქციული გეომეტრიის ძირითადი ცნებები “საინჟინრო გრაფიკის საწყისებში” “ინტელექტი” 2008. 1(30)
82. ავტორის ელემენტარული ამოცანები და მათი გადაწყვეტის მეთოდოლოგია “საინჟინრო გრაფიკის საწყისებში” “ტრანსპორტი” 2007. 4(28)
83. დეზარგის თეორემა და მისი შედეგების სწავლება “საინჟინრო გრაფიკის საწყისების” პროგრამის ფარგლებში “ტრანსპორტი და მანქანათმშენებლობა” 2008. 1(9)
84. გეომეტრიული გარდაქმნები “საინჟინრო გრაფიკის საწყისებში” მათი შეტანის თვალსაზრისით “ტრანსპორტი” 2007 4(28)
85. წერტილთა გეომეტრიული ადგილი და მისი როგორც მეთოდის გამოყენება ავტორის ამოცანებში “შრომები” ჟურნალ “მოამბის” დამატება 2008. 11
86. გეომეტრიული ასახვები “საინჟინრო გრაფიკის საწყისებში” პროგრამაში მისი შეტანის თვალსაზრისით “ტრანსპორტი და მანქანათმშენებლობა” 2008. 1(9)
87. “საინჟინრო გრაფიკის საწყისების,” როგორც პროპედევტიკული კურსის, დანიშნულება გამოყენებითი პერსპექტივის სწავლების მეთოდოლოგიაში “შრომები” ჟურნალ “მოამბის” დამატება 2008. 11
88. ზოგიერთი მოსაზრება გეომეტრიული გარდაქმნების კომპიუტერულ საინჟინრო გრაფიკაში გამოყენების საკითხზე “ტრანსპორტი და მანქანათმშენებლობა” 2008 3(11)

89. საინჟინრო გეომეტრიის გრაფიკული ამოცანები და მათი გადაწყვეტა კომპიუტერის გამოყენებით სტუ. შრომები. „მას“ 2008. 2(5)
90. მონჟის ეპიურზე და აქსონომეტრიაში ჩრდილების აგების ამოცანები და მათი გადაწყვეტა კომპიუტერის გამოყენებით სტუ. შრომები. „მას“ 2008. 2(5)