

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

გიორგი ყიფიანი

მშენებლობის ზოგიერთი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნებისთვის
მათემატიკური მოდელების შექმნა სინგულარული ინტეგრალური
განტოლებათა მეთოდით

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად
წარდგენილი დისერტაციის

ავტორეფერატი

სადოქტორო პროგრამა „მშენებლობა“, შიფრი 0406

თბილისი

2019 წელი

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტში

სამშენებლო ფაკულტეტზე

მშენებლობის კომპიუტერული დაპროექტების დეპარტამენტში

ხელმძღვანელი: სრული პროფესორი მურმან კუბლაშვილი

რეცენზენტები: ასოც. პროფესორი ზაზა სანიკიძე

სრული პროფესორი ბიჭიკო სურგულაძე

დაცვა შედგება 2019წლის "-----" -----, ----- საათზე

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო ფაკულტეტის

საუნივერსიტეტო სადისერტაციო საბჭოს სხდომაზე, კორპუსი I,

აუდიტორია -----

მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 77.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ის ბიბლიოთეკაში, ხოლო

ავტორეფერატისა - ფაკულტეტის ვებგვერდზე

საუნივერსიტეტო სადისერტაციო საბჭოს მდივანი პროფ. დემურ ტაბატაძე

ნაშრომის რეზიუმე

ნაშრომი შედგება შესავალისაგან, სამი თავისა და დანართისაგან. შესავალში განხილულია პრობლემა რასაც ეძღვნება ნაშრომი და აღნიშნული პრობლემის ირგვლივ მიძღვნილი ნაშრომების მიმოხილვა.

პირველ თავში განხილულია წონიანი სინგულარული ინტეგრალის ყოფაქცევა გახსნილი კონტურების შემთხვევაში, მისი სტრუქტურა წირის ბოლოებში.

ნებისმიერი გლუვი გახსნილი კონტურების მქონე სინგულარული ინტეგრალისათვის აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის მიახლოება, გამოთვლით სქემები და მიღებულია ამ სქემების თანაბარი შეფასებები მთელ კონტურზე ბოლოების ჩათვლით.

კომის გულიანი სინგულარული ინტეგრალისათვის აგებულია გაუსის ტიპის კვადრატურული ფორმულები და მიღებულია შეფასებები წონიანი სინგულარული ინტეგრალისათვის გახსნილი კონტურების შემთხვევაში.

აგებულია მარკოვის ტიპის მომატებული რიგის სიზუსტის კვადრატურული ფორმულები.

ნაშრომის მეორე თავში ნაჩვენებია პირველ თავში აგებული კვადრატურული ფორმულების გამოყენება პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებისათვის გახსნილი კონტურების შემთხვევაში.

ასეთ განტოლებებზე მიიყვანება სხვადასხვა სახის გამოყენებითი ტიპის სასაზღვრო ამოცანები. მათთვის აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები. შედგენილია შესაბამისი კომპიუტერული პროგრამა “Mathematica” - სიმბოლურ ენაზე. ხდება მათი რეალიზაცია კონტურის დაყოფათა n - სხვადასხვა რიცხვისათვის.

ნაშრომის მესამე თავში განხილულია სხვადასხვა ტიპის ბზარების კონკრეტული ამოცანები. ნაჩვენებია, რომ ეს ამოცანები მიიყვანება კოშის გულიანი პირველი გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებზე გახსნილი კონტურებით. გამოკვლეულია ბზარების ტიპის დეფექტების მქონე მყიდვე სხეულების ზღვრული წონასწორული მდგომარეობა. განისაზღვრება გარე დატვირთვის კრიტიკული მნიშვნელობა, რომლის მიღწევის დროს ბზარები იწყებენ გავრცელებას ე.ი. როცა იწყება სხეულის ლოკალური ან სრული რღვევა. მოყვანილია კონკრეტული ამოცანების კომპიუტერული გამოთვლები და შესაბამისი გამოთვლის ცხრილები.

ნაშრომის დანართში მოყვანილია დისერტაციაში განხილული ყველა კონკრეტული ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის კომპიუტერული პროგრამები.

Resume

The work is composed of three chapters and annex. The introduction examines the problem that is dedicated to the work and review of the works dedicated to this problem.

The first chapter discusses the behaviour of the weighted singular integration in the case of open contours, its structure at the end of the writing.

For the singular integrals with any smooth opening contours, the high order accuracy is approximated, calculating circuits and the equivalent of these schemes are included in the whole contour.

The cauche type of quadratic formulas are built for the hearted singular integration of the tower and the assessments are obtained in case of the contours opened for the weighted singular integration.

The square formulas of Markov's high-speed line accuracy are built.

In the second chapter of the work, the square formulas used in the first chapter are used in the case of the contours opened for the singular integral equation of the first kind.

Such equations will lead to different types of applied types of border types. For them the algorithms of numerical solution of high order accuracy are built. The corresponding computing program "Mathematica" - is a symbolic language. The realization of the contour division n is for different numbers.

The third chapter of the work deals with specific tasks of different types of cracks. It is shown that these tasks are followed by contours opened on the singular integral equations of the first heart of the tooth. The marginal equilibrium status of the fragile body with cracking type defects has been investigated. The critical meaning of external load is determined when the cracks begin to spread. When the body's local or complete rupture begins. The computer computation of the specific tasks and the corresponding calculation tables are presented.

Annex of the work is presented computer programs of numerical solution of all specific tasks discussed in the thesis.

ნაშრომის საერთო დახასიათება

თემის აქტუალურობა:

ბოლო პერიოდში სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორია სულ უფრო მეტად მნიშვნელოვანი ხდება. მექანიკის (აეროდინამიკის, დრეკადობის თეორიის, რღვევის თეორიის, ელექტროდინამიკის და სხვა) მრავალი გამოყენებითი ტიპის ამოცანების რიცხვითი ამოხსნები მიიყვანება ერთგანზომილებიან სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებზე, რომელთა შესახებაც სხვადასხვა ავტორებს საკმაოდ კარგად დამუშავებული სრული თეორია აქვთ მოცემული თავიანთ

ნაშრომებში. (მუსხელიშვილი, ივანოვი, ბელოცერკოვსკი, გაბდულხაევი, ლიფანოვი).

საყოველთაოდ ცნობილია, რომ სინგულარული ინტეგრალების დათვლა, ან ინტეგრალური განტოლებების ამოხსნა საკმაოდ რთულია, რიგშემთხვევებში შეუძლებელიც კი. ამიტომ ასეთ დროს აუცილებლობა ხდება რიცხვითი მეთოდების გამოყენებისა.

გარკვეულ სირთულეებთან არის დაკავშირებული რიცხვითი ამოხსნებისთვის ალგორითმების დამუშავება. ის მოიცავს რამოდენიმე მნიშვნელოვან ეტაპს. პირველი, უნდა შეიქმნას რიცხვითი ამოხსნის მათემატიკური მოდელი, შემდეგ დამუშავდეს შესაბამისი ალგორითმები და მოხდეს მათი კომპიუტერული რეალიზაცია. ასეთი ალგორითმების დამუშავების დროს გასათვალისწინებელი უნდა იქნას ამოსახსნელი ამოცანების თავისებურებები: 1) ალგორითმი სრულად უნდა აღწერდეს ამოცანის ბუნებას და რაც შეიძლება ზუსტად გადმოცემდეს მის შინაარსს. 2) ალგორითმი უნდა იყოს მაღალი სიზუსტის და გამოთვლითი პროცესებისადმი მდგრადი.

თეორიულ გამოკვლევებზე გაცილებით გვიან დაიწყო სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის მეთოდების განვითარება. ამ მიმართულებით აუცილებლად უნდა აღვნიშოთ ს. ბელოცერკოვსკის შრომები აეროდინამიკაში, რომელიც საფუძველი გახდა დღეისათვის საკმაოდ კარგად ცნობილი სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა რიცხვითი ამოხსნის მეთოდისა - „დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდი“.

აგრეთვე უნდა ვახსენოთ სინგულარული ინტეგრალების მიახლოებითი გამოთვლებისადმი მიძღვნილ შრომებიდან ს, ბელოცერკოვსკის, ი. ლიფანოვის, მუსაევის, ჯ. სანიკიძის, ა. ჯიშკარიანის, მ. კუბლაშვილის, ბ. გაბდულხაევის, ი. ბოიკოვისა და სხვათა შრომები.

აღსანიშნავია, რომ ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის მეთოდების განვითარება დაიწყო მეორე გვარის ფრედგოლმის განტოლებებზე. ასეთი განტოლებებისათვის აგებული იქნა რიცხვითი მეთოდები: ა) მაღალი რიგის სიზუსტის, საკმარისად ვიწრო კლასის, როცა საძებნი ფუნქციები ინტერპოლირდება სპეციალური მრავალწევრებით ან შესაბამისი ოპერატორების საკუთრივი ფუნქციებისგან შედგენილი მწკრივის კერძო ჯამებით. ბ) დაფუძნებული მართკუთხედის ტიპის ან ანალოგიური, საკმარისად ზოგადი, ტიპის ფორმულებზე.

პრობლემები წარმოიშვება სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის რიცხვითი ალგორითმების აგების დროს, რადგანაც სინგულარული ინტეგრალი განშლადია და გაიგება ე.წ. კომის მთავარი მნიშვნელობით.

მაგალითისთვის განვიხილოთ ფრედგოლმის განტოლება: $K\varphi = f$, სადაც K ფრედგოლმის ოპერატორია, f ცნობილი, ხოლო φ საძებნი ფუნქცია. დავუშვათ K ოპერატორისათვის ავაგეთ K_n მიახლოებითი ოპერატორი როდესაც $\|K - K_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, მაშინ როცა $K\varphi = f$ განტოლებას აქვე ერთადერთი ამონახსნი φ , $K_n\varphi_n = f_n$ გარკვეული n_0 -დან დაწყებული მიახლოებით განტოლებასაც ექნება ერთადერთი ამონახსნი φ_n და $\|\varphi - \varphi_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. ხოლო სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლების შემთხვევაში ანალოგიურად არ ხდება: ავიღოთ ზუსტი სინგულარული ინტეგრალური განტოლება $S\varphi = f$, ხოლო აპროქსიმაციის შედეგად მიღებული მიახლოებითი განტოლება იყოს $S_n\varphi_n = f_n$. დავუშვათ, რომ ზუსტ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და $\|S - S_n\| \rightarrow 0$, მაგრამ აქედან არ გამომდინარეობს, რომ $\|\varphi - \varphi_n\| \rightarrow 0$; ანუ კანტოროვიჩის ზოგადი მიახლოების თეორია სამართლიანი არ არის ამ შემთხვევაში და გამომდინარე აქედან სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებში ყოველ

განტოლებას სჭირდება ინდივიდუალური შესწავლა. ამიტომ ასეთ დროს რთული ხდება მიახლოებითი პროცესების დაფუძნება.

საქვეყნოდ ცნობილია, რომ ბზარების ამოცანები მიეკუთვნება რთულ ამოცანებს რიცხვითი ამოხსნების გათვალისწინებით. საკმაოდ აქტუალურია ისეთი მეთოდების დამუშავება, რომლის საშუალებითაც ადვილად განისაზღვრება ძაბვების მნიშვნელობები ბზარების ბოლოების რაგინდ მცირე მიდამოში, რომელიც, საშუალებას იძლევა ბზარის შემდგომი გავრცელების მიმართულების პროგნოზირებაში. გამოკვლევების შედეგად გამოჩნდა რომ, ასეთი ტიპის ამოცანებისათვის ეფექტიანი აღმოჩნდა სინგულარული ინტეგრალური განტოლებები.

სწორედ ამ საკითხების შესწავლას შესწავლას ეხება სადისერტაციო ნაშრომი სამშენებლო მექანიკის ზოგიერთი ამოცანისათვის. მოცემულია ბზარების ამოცანებისათვის მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმების დამუშავება და მათი კომპიუტერული რეალიზაცია.

დისერტაციის მიზანი:

სადისერტაციო ნაშრომის მთავარი მიზანია შევიმუშავოთ მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ალგორითმები სამშენებლო მექანიკის ზოგიერთი ამოცანებისათვის და მოვახდინოთ მათი კომპიუტერული რეალიზაცია.

კვლევის მეთოდები:

სადისერტაციო ნაშრომზე მუშაობისას გამოყენებულია სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორია, სამშენებლო, რღვევის მექანიკის და მიახლოებითი მეთოდების ზოგადი თეორიები, კომპლექსური ცვლადის ფუნქციითა თეორია.

მეცნიერული სიახლე:

აგებულია და შესაბამისი კომპიუტერული პროგრამით უზრუნველყოფილია სამშენებლო მექანიკის ზოგიერთი ამიჯანისათვის მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებით.

მიღებული შედეგების პრაქტიკული გამოყენება:

მიღებული შედეგების გამოყენება შესაძლებელია სამშენებლო მექანიკის, ჰიდროდინამიკის, არეოდინამიკის და რღვევის თეორიის ამოცანების გადასაწყვეტად. სადისერტაციო ნაშრომში აგებული მაღალი რიგის სიზუსტის ალგორითმები შესაძლებელია გამოვიყენოთ სამშენებლო მექანიკის ისეთი მნიშვნელოვანი ამოცანების რიცხვითი ამოხსნისათვის, როგორცაა ბზარების ამოცანები.

ნაშრომის აპრობაცია და გამოქვეყნებული პუბლიკაციები:

ნაშრომის, როგორც ცალკეული ისე ძირითადი ნაწილი და შედეგები მოხსენებული იქნა სადისერტაციო პროგრამით გათვალისწინებულ სემინარებზე. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სტუდენტთა ღია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციებზე.

ნაშრომის სტრუქტურა და მოცულობა:

სადისერტაციო ნაშრომი შედგება შესავლის, სამი თავის, დასკვნის, დანართის, გამოყენებული ლიტერატურის 70 დასახელების ნუსხისგან, ტექსტის საერთო მოცულობა 130 გვერდია.

ნაშრომის შინაარსი

შესავალში მოცემულია და განხილულია პრობლემის აქტუალობა რასაც ეძღვნება ნაშრომი, პრობლემის ირგვლივ მიძღვნილი ნაშრომების მიმოხილვა, მეცნიერული სიახლე, პრაქტიკული ღირებულება და შედეგების რეალიზაცია, სამუშაოს აპრობაცია, ნაშრომის სტრუქტურა და მოცულობა.

ნაშრომის პირველთავში საუბარია წონიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის სხვადასხვა ავტორების და დისერტანტის მიერ დამუშავებული რიცხვითი გამოთვლების ალგორითმების შესახებ და მათი კრებადობის რიგის შეფასებებზე.

პირველთავის §1.1-ში განხილულია ხარისხობრივი ტიპის განსაკუთრებულობების მქონე სიმკვრივიანი ინტეგრალის თვისებები.

$$S(\varphi; t_0, \eta) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{(t-c)^\eta (t-t_0)} \quad (t_0 \in L)$$

სადაც $L \equiv ab$ გახსნილ გლუვი კონტურია a და b ბოლოებით, რომლის პარამეტრული განტოლებაა $t = t(s), (s_a \leq s \leq s_b)$. დადებით მიმართულებას ვიღებთ s პერიმეტრის ზრდის მიხედვით. c არის a ან b , $\eta = \lambda + i\beta$, $(0 \leq \lambda < 1)$, $(t-c)^\lambda$ ამ მრავალსახა ფუნქციის ნებისმიერი ფიქსირებული შტოა.

პირველთავის §1.2-ში განხილულია ნებისმიერი გლუვი კონტურების მქონე, გახსნილი სინგულარული ინტეგრალებისთვის ისეთი მაღალი რიგის სიზუსტის მიახლოებითი გამოთვლის სქემის აგება, რომელიც საშუალებას იძლევა ცდომილების თანაბარ შეფასებისას მთელ კონტურზე, ბოლოების ჩათვლით.

განხილულია შემდეგი ინტეგრალი

$$S^{(\alpha, \beta)}(\varphi; t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L (t-a)^\alpha (t-b)^\beta \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0}, \quad t_0 \in L,$$

სადაც, $L = ab$ წარმოადგენს გლუვ, გახსნილკონტურსდაბოლოებით, რომელიცკომპლექსურსიბრტყეზეწარმოადგენილიაპარამეტრულისახით $t = t(s)$ ($s_a \leq s \leq s_b$)

$$\rho(t) = (t-a)^\alpha (t-b)^\beta$$

წონითი მრავალსახა ფუნქციაა. α და β პარამეტრებისერთ-ერთმნიშვნელობაა $\{1/2; -1/2\}$

$\rho(t)$ ამმრავალსახაფუნქციისერთ-ერთფიქსირებულშტოა, ხოლო φ ნებისმიერი ფუნქციაა $H_\alpha^{(r)}(L)$ $r \geq 0, 1/2 < \alpha \leq 1$ კლასიდან.

დავუშვათ, რომ n ნებისმიერინატურალურირიცხვია, ხოლო m მუდმივადდაფიქსირებული ნატურალურირიცხვია, $S^{(\alpha, \beta)}(\varphi; t_0)$ - ისმიახლოებითიმნიშვნელობისგამოსახულებად მივიღოთ

$$S_n^{(\alpha, \beta)}(\varphi; t_0) = L_v(\varphi; t_0) \cdot \delta^{(\alpha, \beta)}(t_0) + \sum_{\sigma=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{p_{\sigma k}^{(\alpha, \beta)}}{t_0 - t_{\sigma k}} [L_v(\varphi; t_0) - \varphi(t_0)]$$

$$(t_0 \in \tau_\nu, \tau_{\nu+1}; \quad t_0 \neq t_{\sigma k}; \quad \nu = 1, 2, \dots, n),$$

სადაც

$$\delta^{(\alpha, \beta)}(t_0) = \begin{cases} 0, & \alpha = \beta = -1/2 \\ 1, & \alpha = -\beta = 1/2 \\ t_0, & \alpha = \beta = 1/2 \end{cases}$$

$\tau_\sigma, t_{\sigma k}$ ($\sigma = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m$) L წარმოადგენს

წირისკონტურზეკვანძითწერტილების. $L_v(\varphi; t_0) -$

ლაგრანჟისსაინტერპოლაციომრავალწირია, $t_{\nu k} (\nu = \overline{1, n}; k = \overline{1, m})$

კვანძითწერტილებზე.

$$p_{\sigma k}^{(\alpha, \beta)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} (t-a)^\alpha (t-b)^\beta \frac{\omega_\sigma(t) dt}{(t-t_{\sigma k}) \omega' \sigma(t_{\sigma k})}, \quad (\omega_\sigma(t) = \prod_{k=1}^m (t-t_{\sigma k})), \quad (\alpha, \beta = \pm 1/2).$$

$S_n^{(\alpha, \beta)}(\varphi; t_0)$ ჯამი $t_0 = t_{\sigma k}$ -

წერტილებში კომპიუტერზე გამოსათვლელად უფრო მოსახერხებელი ფორმი
 თშეიძლება ჩაიწეროს, რომლის დროსაც შესაძლებელია თავის
 აცილებამცირესი დიდებზე გაყოფისაგან, როცა t_0
 კვანძებთანახლოს არის სპარამეტრის მნიშვნელობა.

$H_\alpha^{(r)}(L)$ ფუნქცია თავსდასში $S^{(\alpha, \beta)}(\varphi; t_0)$ -

ისაპროქსიმაცია შესაძლებელია შესაბამისი კვადრატული $S_n^{(\alpha, \beta)}(\varphi; t_0)$
 ფორმულით, ნებისმიერ $t_0 \in ab$ (t_0 არემთხვევა a და b ბოლოებს)

წერტილში ცდომილების შეფასებამიღებულია $O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-1/2}}\right)$ ($1/2 < \alpha \leq 1, r \geq 0$),

მაგრამ ზოგიერთ შემთხვევაში, (ბზარების,
 გარსდენისა და პროფილის ამოცანებში) საჭირო ხდება ისეთი შეფასებების
 მიღება, რომელიც უფრო ზუსტად ასახავს მიახლოების პროცესს a და b
 ბოლოების მახლობლად.

სინგულარული ინტეგრალის ყოფაქცევიდან გამომდინარე,
 წირის ბოლოების მახლობლად, ნებისმიერი $\varphi \in H_\alpha(L)$; $\alpha > 1/2$ -
 სათვის არსებობს $\lim_{t_0 \rightarrow c} S^{(\alpha, \beta)}(\varphi; t_0)$, სადაც c ემთხვევა a ან b -ს.

ამასთან დაკავშირებით, $S^{(\alpha, \beta)}(\varphi; t_0)$
 ინტეგრალის თანაბარი აპროქსიმაციის შესახებ საკითხის მებამთელ $L = ab$
 წირზე, ბოლოების ჩათვლით.

ყოველი $t_0 \in ab$ -სთვის სამართლიანია შეფასება:

$$\left| S^{(\alpha, \beta)}(\varphi; t_0) - S_n^{(\alpha, \beta)}(\varphi; t_0) \right| \leq (A_1 + A_2 \ln n) \frac{1}{n^{r+\alpha-1/2}} \quad (n > 1, \quad 1/2 < \alpha \leq 1),$$

სადაც A_1, A_2 მუდმივებია, რომლებიც დამოუკიდებელია t_0 -ზე.

პირველი თავის §1.3-ში განხილულია ჯ. სანიკიძის და მ. კუბლაშვილის მიერ
 კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრლებისათვის გაუსის ტიპის
 სიზუსტით მახლობელი კვადრატურული ფორმულები. განხილულია
 კოშის გულიანი ინტეგრალი

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t - x} dt \quad (-1 < x < 1)$$

ინტეგრალისათვის განხილულია გაუსის კვადრატურული ფუნქცია t_k კვანძებით და $\{A_k\}$ კოეფიციენტებით:

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t - x} dt \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\varphi(t_k) - \varphi(x)}{t_k - x} \quad (-1 < x < 1)$$

ნაგულისხმებია, რომ $\varphi(t)$ -ს გააჩნია შესაბამისი სიგლუვე. თუ $x \in (-1 < x < 1)$ მნიშვნელობები შერჩეულია ისე, რომ ამ უკანასკნელისათვის შესრულდეს ტოლობა

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{dt}{t - x} - \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{t_k - x} = 0,$$

მაშინ x -ის შესაბამისი მნიშვნელობებისათვის მოცემული პირობის მიხედვით შემდეგი სინგულარული ინტეგრალისათვის

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t)}{t - x} dt \quad (-1 < x < 1):$$

იქნება კვადრატურული ფორმულა

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t)}{t - x} dt \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\varphi(t_k)}{t_k - x} \quad (-1 < x < 1),$$

მსგავსი სტრუქტურის კვადრატურული ფორმულებილიტერატურაში ცნობილია სინგულარული ინტეგრალისათვის გაუსის კვადრატურული ფორმულების სახელით, ერთმნიშვნელოვნად განისაზღვრება მოცემული $\rho(t)$ -სათვის $\{x_k\}_{k=1}^{n-1}$ სინგულარობის წერტილების მნიშვნელობებით.

პირველი თავის §1.4-ში განხილულია ზ. კაპანაძის მიერ კოშის გულიანი ინტეგრალისათვის მარკოვის ტიპის მომატებული რიგის სიზუსტის კვადრატურული ფორმულების აგება $n = 7$ კვანძისათვის. მოყვანილია ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის ფორმულა მარკოვის

კვანძებისათვის $t_k, k = 1, 2, \dots, 12$. მიღებულია 7 სინგულარობის წერტილი მარკოვის 12 კვანძისათვის $t_{0j}, j = 1, 2, \dots, 7$. მიღებულ წერტილებში სინგულარული ინტეგრალის დასათვლელად გამოყენებულია კვადრატურული ფორმულა

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt \approx 2 \left\{ \frac{\varphi(t_1)}{t_1-t_0} + \frac{\varphi(t_2)}{t_2-t_0} + \dots + \frac{\varphi(t_{12})}{t_{12}-t_0} \right\} = 2 \sum_{k=1}^{12} \frac{\varphi(t_k)}{t_k-t_0}$$

საკმაოდ მნიშვნელოვანიაგანხილული საკითხი, რადგან საშუალება იძლევა აღნიშნული ტიპის სინგულარული ინტეგრალებისათვის ერთნაირი რიცხვითი კოეფიციენტებიანი კვადრატურული ფორმულების გამოყენებისა.

პირველი თავის §1.5-ში დისერტანტის მიერ განხილულია, რომ ბევრი გამოყენებითი პრაქტიკული ტიპის ამოცანები (მათ შორის სამშენებლო) მიიყვანება გახსნილი კონტურების შემცველ სინგულარულ ინტეგრარულ განტოლებებზე, რომელიც ინჟინრებისათვის ასეთი განტოლების ზუსტი ამონახსნები ძალიან ძნელია. უპირველესი საკითხია თვითონ ამ განტოლებაში შემავალი სინგულარული ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლა გარკვეული ტიპის კვადრატური ფორმულებით.

განვიხილოთ მარკოვის ტიპის კვადრატური ფორმულა.

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t) - \varphi(x_0)}{t - x_0} dt \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\varphi(t_k) - \varphi(x_0)}{t_k - x_0} \quad (-1 < x_0 < 1)$$

(იგულისხმება, რომ $\rho(t)$ - წონითი ფუნქციაა, აკმაყოფილებს სიგლუვის თვისებას, ამასთან, როცა $x_0 = t_k$, $\frac{\varphi(t_k) - \varphi(x_0)}{t_k - x_0}$ - ში იგულისხმება შესაბამისი ზღვრული მნიშვნელობა)

თუ x_0 - ის მნიშვნელობას $x_0 \in (-1, +1)$ შუალედიდან შევარჩევთ ისე, რომ სრულდებოდეს პირობა

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{dt}{t-x_0} - \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{t_k - x_0} = 0$$

მაშინ x_0 -ის ასეთი მნიშვნელობებისათვის სინგულარული ინტეგრალისთვის $\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t)}{t-x_0} dx$ მივიღებთ შემდეგ კვადრატურულ ფორმულას:

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t) dt}{t-x_0} \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\varphi(t_k)}{t_k - x_0}, \quad (-1 < x_0 < 1)$$

სადაც A_k - მუდმივი რიცხვებია, რომლებიც შეესაბამება მარკოვის ტიპის კვადრატურულ ფორმულას. ასეთი ტიპის კვადრატურული ფორმულების აგებას მოცემულ ნაშრომში აგებულია ახალი მაღალი სიზუსტის მქონე კვადრატურული ფორმულა, რომელიც აუმჯობესებს ყველა ადრე მიღებულ შედეგებს.

ნაშრომის II თავში აჩვენებულია I თავში აგებული მიახლოებითი ფორმულების გამოყენება ერთი კლასის ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნებისათვის. ამ კლასის განტოლებებზე მიიყვანება სხვადასხვა ტიპის გამოყენებითი (მათ შორის სამშენებლო მექანიკის), დირიხლეს (შესაბამისად გრების) და დრეკადობის თეორიის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები, რომელთა შესაბამისი ინტეგრალური განტოლებები იწერება კომის გულიან სინგულარულ ინტეგრალებში.

მეორეთავის §2.1-ში განხილულია

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L K(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0)$$

პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამონახსნა, გახსნილი კონტურების დროს, სადაც $f(t)$, $K(t_0, t)$ $L \equiv ab$ -ზე განსაზღვრული ჰელდერის კლასის ფუნქციებია.

მოცემულ პარაგრაფში განხილული სქემა გამოიყენება პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნებისათვის, ნებისმიერი გახსნილი კონტურების დროს, იმ დაშვებით, რომ მოცემულ ზუსტ განტოლებას ამონახსნების კლასში აქვს ერთადერთი ამონახსნი. მარჯვენა მხარისა და გულის მიმართ გარკვეულ დაშვებებში შესაძლებელია მიღწეული იქნას კრებადობის საკმარისად მაღალი რიგი.

შესაბამისი გამოთვლითი ალგორითმის აგება დაფუძნებულია §1.1-ში განხილული სინგულარული ინტეგრალური განტოლების აპროქსიმაციაზე.

ამ პარაგრაფში მოყვანილი შედეგის საფუძველზე, სადაც დამტკიცებულია სინგულარული ინტეგრალური განტოლებისათვის გახსნილი კონტურებით კვადრატული პროცესების კრებადობა H_β მეტრიკით, შესაძლებელია შესაბამისი გამოთვლითი პროცესების დაფუძნება. გამოყენებული კვადრატული პროცესები საშუალებას იძლევა საკმარისად ადვილად აიგოს შესაბამისი რეალური გამოთვლითი სქემები. გარდა ამისა, ამ სქემებს აქვს ის მნიშვნელოვანი თვისება, რომ K და f გულის და მარჯვენა მხარის გამოთვლის ცდომილება, როცა $n \rightarrow \infty$ პრაქტიკულად იზრდება ძალიან ნელა.

მეორეთავის §2.2-ში განხილულია

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L K(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0) \quad (t_0 \in L)$$

პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნა იმ შემთხვევაში, როდესაც მისი ამონახსნი ცალსახად არ განისაზღვრება ან განტოლების ამოხსნადობისათვის f მარჯვენა მხარესთვის საჭიროა დამატებითი პირობა. ასეთი განტოლებების რიცხვითი ამოხსნისათვის მოყვანილია მაღალი რიგის სიზუსტის სქემები.

§2.3-ში ანალოგიურად აიგება მიახლოებითი პროცესები სრული სახის პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლებისათვის

მეორეთავის §2.4 შიგანხილულია ზ. კაპანაძის მიერ აგებული მარკოვის ტიპის კვადრატურული ფორმულებით პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალების ამოხსნა.

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L K(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0) \quad (t_0 \in L)$$

$f(t), K(t_0, t) \in H$. ინტეგრალური განტოლებისათვის გამოიყენება კვადრატურული ფორმულა

$$\frac{1}{\pi i} \sum_{k=1}^{12} \frac{\varphi(t_k)}{t_k - t_{0j}} + \frac{1}{\pi i} \sum_{k=1}^{12} K(t_{0j}, t_k) \varphi(t_k) = f(t_{0j})$$

სადაც $j = 1, 2, \dots, 7$. აქ t_k და t_{0j} , $j = 1, 2, \dots, 7$, $k = 1, 2, \dots, 12$ §1.4-ში მოძებნილი კვანძითი და სინგულარობის წერტილებია. მიღებული კვადრატურული ფორმულიდან ჩანს განტოლებათა სისტემა 12 უცნობითა და შვიდი განტოლებით, რომლის ამოხსნაც ცალსახად შეუძლებელია.

მეორეთავის §2.5 შიგანხილული სქემა გამოიყენება პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნებისთვის, ნებისმიერი გახსნილი კონტურის შემთხვევაში, იმ დაშვებით, რომ მოცემულ ზუსტ განტოლებას ამოხსნების განსახილველ კლასში აქვს ერთადერთი ამოხსნა.

მარჯვენა მხარისა და გულის მიმართ გარკვეულ დაშვებებში შესაძლებელია მივაღწიოთ კრებადობის საკმაოდ მაღალ რიგს.

სინგულარული ინტეგრალებისათვის გახსნილი კონტურების შემთხვევაში აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის მარკოვის ტიპის კვადრატული ფორმულა. ამ ფორმულის კოეფიციენტებისა და კვანძების დასადგენად მიიღება საკმაოდ რთული განტოლებათა სისტემა. იხსნება აღნიშნული სისტემა და ვპოულობთ კვადრატული ფორმულის კოეფიციენტებს და კვანძებს. შედგენილია შესაბამისი კომპიუტერული

პროგრამა „Mathematica” - სიმბოლურ ენაზე. ხდება აღნიშნული პროგრამის რეალიზაცია სხვადასხვა n - დაყოფათა რიცხვისთვის.

$$\int_0^1 t P_v(t) dt = (-1)^{z+v} t_v P_v(t_v)$$

$$z = 4$$

$$\int_0^1 t P_v(t) dt = 2 * (-1)^{4+v} t_v P_v(t_v)$$

$$v = 1; \int_0^1 t^2 (t^4 - t_2^4) (t^4 - t_3^4) (t^4 - t_4^4) dt = -2 t_1^2 (t_1^4 - t_2^4) (t_1^4 - t_3^4) (t_1^4 - t_4^4)$$

$$v = 2; \int_0^1 t^2 (t^4 - t_1^4) (t^4 - t_3^4) (t^4 - t_4^4) dt = 2 t_2^2 (t_2^4 - t_1^4) (t_2^4 - t_3^4) (t_2^4 - t_4^4)$$

$$v = 3; \int_0^1 t^2 (t^4 - t_1^4) (t^4 - t_2^4) (t^4 - t_4^4) dt = -2 t_3^2 (t_3^4 - t_1^4) (t_3^4 - t_2^4) (t_3^4 - t_4^4)$$

$$v = 4; \int_0^1 t^2 (t^4 - t_1^4) (t^4 - t_2^4) (t^4 - t_3^4) dt = 2 t_4^2 (t_4^4 - t_1^4) (t_4^4 - t_2^4) (t_4^4 - t_3^4)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$x = t_1^4; \quad y = t_2^4; \quad z = t_3^4; \quad v = t_4^4$$

$$\int_0^1 t^2 (t^4 - y) (t^4 - z) (t^4 - v) dt = -2 * \sqrt{x} (x - y) (x - z) (x - v)$$

$$\int_0^1 t^2 (t^4 - x) (t^4 - z) (t^4 - v) dt = 2 \sqrt{y} (y - x) (y - z) (y - v)$$

$$\int_0^1 t^2 (t^4 - x) (t^4 - y) (t^4 - v) dt = -2 * \sqrt{z} (z - x) (z - y) (z - v)$$

$$\int_0^1 t^2 (t^4 - x) (t^4 - y) (t^4 - z) dt = 2 * \sqrt{v} (v - x) (v - y) (v - z)$$

მიღებული შედეგები აჩვენებს, რომ მარკოვის ტიპის მუდმივკოეფიციენტიანი კვადრატული ფორმულა არის მაღალი რიგის სიზუსტის. გაუმჯობესებულია ზ. კაპანაძის მოყვანილი შედეგები.

მეორე თავის § 2.6-ში განხილულია სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნა გამარტივებული სქემებით.

განხილულია პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლება

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\varphi_0(t) dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} k(t_0; t) \varphi_0(t) dt = f(t_0)$$

აღნიშნული განტოლებისათვის, ნებისმიერი ინდექსის შემთხვევაში, აგებულია საკმაოდ გამარტივებული რიცხვითი ამოხსნის სქემა, რომელიც ინარჩუნებს სიზუსტის მაღალ რიგს.

ნაშრომის

III

თავში მოყვანილია სამშენებლო მექანიკის ძალზე დაქტუალურისაკითხი, ბზარების ზოგიერთი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებით გახსნილი კონტურების შემთხვევაში. დასმულია და განხილულია ამოცანების რიცხვითი ამოხსნა სხვადასხვა შემთხვევებისათვის.

§-3.1-ში განხილულია წრფივი ჭრილის მქონე დრეკადი სიბრტყის დაძაბულ დეფორმირებული მდგომარეობა. კომის ტიპის ინტეგრალების სახით წარმოდგენილია ძაბვის განაწილების და გადაადგილების ფუნქციები. ინტენსივობის კოეფიციენტების სათვლელი ფორმულები ზოგად შემთხვევაში მოცემულია ინტეგრალური სახით. შესწავლილია ზღვრულ-წონასწორული მდგომარეობა ბზარების ტიპის დეფექტების მქონე მყიფე სხეულებში. განსაზღვრულია გარე დატვირთვის კრიტიკული მნიშვნელობა, როდესაც ბზარები იწყებენ გავრცელებას ე.ი. როცა იწყება

სხეულის ლოკალური ან სრული რღვევა. მოცემულია გამოსათვლელი ფორმულები ბზარის განვითარებისსაწყისი კუთხისა და ზღვრული ძაბვების მნიშვნელობების. ზღვრული დაძაბულობის დიაგრამებიძაბვის კომპონენტში.

§-3.2-ში განხილულიაუსასრულო სხეულზე სასრული სიგრძის ზოლის გასწვრივ თერმოიზოლირებული ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა. ცნობილიაბზარის ნაპირების გასწვრივ ტემპერატურის მნიშვნელობის ცვლილება, უნდა განისაზღვროს სხეულის ზედაპირის ნებისმიერ წერტილშიტემპერატურის ცვლილება. ამოცანა მიყვანილია პირველი გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე. მოყვანილია შესაბამისი რიცხვითი გამოთვლის ცხრილები,საიდანაც ჩანს, რომ განსაკუთრებული წერტილებისათვის (ბზარის ბოლოების ძალიან მცირე მიდამოში) აღნიშნული მიახლოებითი გამოთვლის ალგორითმებით მიიღწევა მიახლოების საკმაოდ მაღალი სიზუსტე.

§-3.3-შიგანხილულია დრეკად სხეულზე გრძივი გადაადგილების მქონე ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა. განხილულია უსასრულო სხეული, რომელიც გრძივი ძვრის დეფორმაციის პირობებშია, მოცემულია სასრული სიგრძის წრფივი ჭრილისხეულის ზედაპირზე, თვითგაწონასწორებადი დატვირთვამოქმედებსბზარის ზედაპირზე, ხოლონულის ტოლია ძაბვა უსასრულობაში. საპოვნია სხეულის ზედაპირის ნებისამიერ წერტილშიძაბვების განაწილება, რომელიც გამოისახება წონიანი კოშის ტიპის ინტეგრალებით, მოცემულია მიახლოების დათვლის ალგორითმები, შედგენილია ცხრილები, როდესაც კონკრეტული ფუნქციებითმოცემულიადატვირთვაბზარის ნაპირზე.

§-3.4-შიგანხილულია ბზარის ამოცანა, როდესაცორი თანაბარი სიგრძის სიმეტრიულად განლაგებული ბზარიმოცემულია უსასრულო ფირფიტაზე, მასზე მოცემულია დატვირთვა, რომელიც სიმეტრიის პირობასაკმაყოფილებს. აღნიშნული ამოცანა მიიყვანება პირველი გვარის

სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე და აგრეთვე მოყვანილია შესაბამისი გამოთვლის ცხრილები.

§-3.5-შიგანხილულია უსასრულო ფირფიტაზე ნებისმიერად ორიენტირებული ჭრილები (ბზარები), რომლის ამოხსნაც მიიყვანება პირველი გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებზე და ეს განტოლებები იხსნება მიახლოებით მარკოვის ტიპის კვადრატურული ფორმულებით, მოყვანილი გამარტივებული მაღალი ზისუზტის სქემებით.

§-3.6-შიგანხილულია ნახევარსიბრტყის საზღვრის პერპენდიკულარული ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა, სადაც მოცემულია სასრული სიგრძის ბზარიდრეკად ნახევარსიბრტყეში, რომელიც სიბრტყის საზღვრის მართობულია და თვითგაწონასწორებადი დატვირთვამოცემულია ბზარის ნაპირზე. მოცემული ამოცანა მიიყვანება შემდეგი სახის ინტეგრალურ განტოლებაზე:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi_0(\tau) d\tau}{\tau - y} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} K(\tau, y) \varphi_0(\tau) d\tau = f(y), \quad |y| < 1 \quad (0.5)$$

სადაც

$$K(\tau, y) = \frac{y^2 + 6y + 4\tau y + 2\tau - \tau^2 + 4}{(\tau + y + 2)^3}$$

ხოლო $f(y)$ არის ბზარის ნაპირებზე მოდებული დატვირთვა. $K(\tau, y)$ გულის გარდა განსაკუთრებულობისა, $\tau = y = -1$ წერტილში აქვს უძრავი სინგულარობა. გარკვეულ ფუნქციონალურ სივრცეში განტოლების რიცხვითი ამოხსნისათვის დაფუძნებადი ალგორითმი არის აგებული. მოცემულია კომპიუტერული გამოთვლების ცხრილები. ასევე განხილულია ბზარის ამოცანა, როდესაც ბზარის ნაპირზე ფიქსირებულ წერტილში მოდებულია შეყურსულილი ძალა. აღნიშნული ამოცანა მიყვანილია ანალოგიური ტიპის განტოლებაზე, ამიტომ მისი რიცხვითი ამოხსნისათვის შესაძლებელია გამოვიყენოთ იგივე ალგორითმი, რაც წინა შემთხვევაში.

§-3.7-ში განხილულია რამდენიმე მნიშვნელოვანი ბზარის ამოცანა, რომლებიც მიიყვანება პირველი გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებზე.

ყველა ამოცანა მიიყვანება სხადასხვა ტიპის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებზე, რომელთა რიცხვითი ამოხსნისათვის ვიყენებთ წინა თავებში აგებულ მაღალი რიგის რიცხვითიგამოთვლის სქემებს.

დასკვნა

დისერტაციაში მიღებული ძირითადი შედეგები

წონიანი სუნგულარული ინტეგრალებისთვის გახსნილი კონტურების შემთხვევაში აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის მარტივი ტიპის ახალი კვადრატურული ფორმულები.

წონიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის გახსნილი კონტურების შემთხვევაში აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის მარკოვის ტიპის ახალი კვადრატურული ფორმულები

პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის გახსნილი კონტურების შემთხვევაში აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის გამარტივებული ახალი რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმი, რომელიც აუმჯობესებს აკადემიკოსების ბელოცერკოვსკისა და ლიფანოვის ცნობილ რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმს :დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდს“, ასევე ჯ.სანიკიძისა და მ . კუბლაშვილი ცნობილ რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმებს.

პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისთვის გახსნილი კონტურების შემთხვევაში აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის მარკოვის ტიპის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმი.

ბზარების ამოცანებისათვის რთულ შემთხვევებში (როცა ბზარს აქვს ნებისმიერი გლუვი ან უბან-უბან გლუვი წირის ფორმა, თვით უკუქცევის წერტილების ჩათვლით), როცა კლასიკური რიცხვითი ამოხსნის მეთოდები (სასრულ-სხვაობათა, სასრულ ელემენტთა, ფრედგოლმის ინტეგრალურ განტოლებათა, ვარიაციული და ა.შ.) ნ საერთოდ უძლურია ან არ არის ეფექტური. აგებულია ახალი გამარტივებული და მარკოვის ტიპის პირდაპირი მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები.

ზემოთ მოყვანილი შედეგების შესაბამისი ალგორითმებით შექმნილია პაკეტის ტიპის პროგრამები Mathematica სიმბოლურ ენაზე, რომელიც მოყვანილია დიესრტაციის დანართში.

სამუშაოს აპრობაცია

კვლევის შედეგები განხილული იქნა შემდეგ სამეცნიერო კონფერენციებზე და სემინარებზე:

1. სინგულარული ინტეგრალების გამოთვლა მარკოვის ტიპის კვადრატული ფორმულებით. სტუდენტთა 83-ე ღია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, 2016
2. კომის გულიანი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების ზოგიერთი მნიშვნელოვანი თვისებები. სტუდენტთა 82-ე ღია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, 2014

3. სინგულარული ინტეგრალებისათვის მარკოვის ტიპის კვადრატული ფორმულების შესახებ. სტუდენტთა 81-ე ღია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, 2013

დისერტაციის მასალებზე მომზადდა და გამოქვეყნდა შრომები:

1. გ. ყიფიანი., მ. კუბლაშვილი. უსასრულო სიბრტყეზე ორი ნებისმიერად ორიენტირებული ჭრილის (ბზარის) რიცხვითი ამოხსნის შესახებ. სამეცნიერო ტექნიკური ჟურნალი „მშენებლობა“ 1(50),2019
2. გ. ყიფიანი. მაღალი რიგის სიზუსტის კვადრატული ფორმულების შესახებ სინგულარული ინტეგრალებისთვის. სამეცნიერო ტექნიკური ჟურნალი „მშენებლობა“ 1(48),2018
3. გ. ყიფიანი. პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნები გახსნილი კონტურების შემთხვევაში. სამეცნიერო ტექნიკური ჟურნალი „მშენებლობა“ 1(48),2018

