საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

გიორგი დეკანოიძე

სასაზღვრო ამოცანები მეორე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლურ სისტემათა ზოგიერთი კლასისთვის

დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

წარდგენილი დისერტაციის

ა ვ ტ ო რ ე ფ ე რ ა ტ ი

სადოქტორო პროგრამა „მათემატიკა“ , შიფრი 0501

თბილისი 2018 წ.

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის მათემატიკის დეპარტამენტი

თანახელმძღვანელები: პროფესორი სერგო ხარიბეგაშვილი

პროფესორი გივი ბერიკელაშვილი

რეცენზენტი:————————————

რეცენზენტი:————————————

დაცვა შედგება ------ წლის ------ -----------, -------- საათზე საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის საუნივრსიტეტო სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის სხდომაზე, კორპუსი -----, აუდიტორია ---- მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 77.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ს ბიბლიოთეკაში,
ხოლო ავტორეფერატისა - ფაკულტეტის ვებგვერდზე.

საუნივერსიტეტო სადისერტაციო საბჭოს მდივანი პროფ. თინათინ კაიშაური

ნაშრომის ზოგადი დახასიათება

თემის აქტუალობა

ცნობილია, რომ ფიზიკასა და ტექნიკაში მიმდინარე მრავალი პროცესის მათემატიკური მოდელირებისას მიიღება საწყის-სასაზღვრო ანუ შერეული ამოცანები დასმული ჰიპერბოლური ტიპის კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებებისა და სისტემებისათვის. აღსანიშნავია, რომ შერეული ამოცანები ჰიპერბოლური განტოლებებისა და სისტემებისათვის ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში უფრო სრულად არის შესწავლილი, ვიდრე მრავალგანზომილებიან შემთხვევაში. ეს განპირობებულია იმით, რომ ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში შესაძლებელია ისეთი მძლავრი და ეფექტური მეთოდის გამოყენება, როგორიც კლასიკური მახასიათებელთა მეთოდია.

თუ წრფივ შემთხვევაში გურსასა და დარბუს ტიპის ამოცანები კარგად არის შესწავლილი ერთი სკალარული ჰიპერბოლური განტოლებისათვის, სისტემებზე გადასვლისას წარმოიშვება დამატებითი სირთულეები და ახალი ეფექტები. პირველად ეს შენიშნა ა. ბიწაძემ თავის ნაშრომში, რომელშიც მან ააგო მეორე რიგის ჰიპერბოლური სისტემები, რომლებისათვისაც გურსას შესაბამის ერთგვაროვან ამოცანას სასრული და ზოგიერთ შემთხვევაში უსასრულო რაოდენობა წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებიც კი გააჩნია. ამ მიმართულებით აღსანიშნავია აგრეთვე ა. ბიწაძის ნაშრომი, სადაც ჰიპერბოლურ სისტემათა მარტივ მაგალითებზე ახსნილია უმცროსი წევრების გავლენის ეფექტი გურსას ამოცანის კორექტულობაზე. შემდგომში ეს საკითხები გახდა კვლევის საგანი ს. ხარიბეგაშვილისა და ზ. მელნიკის ნაშრომებში. ამ მიმართულებით მიღებულ შედეგებს განსაკუთრებით არაწრფივი ჰიპერბოლური სისტემებისათვის დიდი მნიშვნელობა ენიჭება ტალღის გავრცელების თეორიაში.

სამუშაოს მიზანი

სადისერტაციო ნაშრომის ძირითადი მიზანია მეორე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლურ სისტემათა ზოგიერთი კლასისათვის გურსას და დარბუს ტიპის ამოცანების გამოკვლევა. ამ ამოცანების გლობალური ამონახსნის არსებობის, არარსებობის, ერთადერთობის და სიგლუვის საკითხების შესწავლა.

კვლევის ობიექტი და მეთოდები

სამეცნიერო კვლევის ძირითადი ობიექტია მეორე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლურ სისტემათა ზოგიერთი კლასისათვის დასმული გურსას და დარბუს ტიპის ამოცანები. შემუშავებულია ახალი მიდგომა, რომელიც რიმანის ფუნქციის გამოყენების გარეშე, ახდენს განხილული ამოცანების ეკვივალენტურ რედუქციას არაწრფივ ვოლტერას ტიპის ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე. ამ ამოცანების შესწავლისას გამოიყენება მახასიათებელთა მეთოდი, ინტეგრალურ და ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემების ამოხსნის მეთოდები, ფუნქციონალური ანალიზის მეთოდები: აპრიორულ შეფასებათა მეთოდი; შაუდერის და ლერე - შაუდერის უძრავი წერტილის პრინციპები; საცდელ ფუნქციათა მეთოდი.

ნაშრომის ძირითადი შედეგები და მეცნიერული სიახლე

შევნიშნოთ, რომ თუ წრფივ შემთხვევაში გურსას და დარბუს ტიპის ამოცანები, კარგად არის შესწავლილი, არაწრფივ შემთხვევაში კი ამ ამოცანების გამოკვლევა აწყდება დიდ სირთულეებს. ზოგ შემთხვევაში ადგილი აქვს ახალ ეფექტებს, განსაკუთრებით, როცა საძიებელი ამონახსნის მიმართ განტოლებაში შემავალი ხარისხოვანი არაწრფივობის რიგი ერთზე მეტია. სიახლე, რაც შეიძლება წარმოიშვას არაწრფივ შემთხვევაში მდგომარეობს, კერძოდ, გლობალური ამოხსნადობის დარღვევაში. სკალარულ შემთხვევაში, როცა განტოლება არ შეიცავს უმცროს წრფივ წევრებს, ხოლო განტოლებას გააჩნია ხარისხოვანი არაწრფივობა,

შესწავლილია გ.ბერიკელაშვილის, ო.ჯოხაძის, ბ.მიდოდაშვილის და ს.ხარიბეგავილის ნაშრომში. ამ ამოცანისათვის სხვაობიანი სქემის აგება და მისი გამოკვლევა მოყვანილია ამავე ავტორების ნაშრომში, როცა განტოლების არამთავარი ნაწილი შემდეგი სახითაა წარმოდგენილი $m^2u+\lambda u^3$. ამ მიმართულებით აღსანიშნავია აგრეთვე ო.ჯოხაძე, ბ.მიდოდაშვილისა და ო.ჯოხაძე, ს.ხარიბეგაშვილის შრომები. სუსტად არაწრფივობის ზოგადი შემთხვევა, როცა განტოლება არ შეიცავს უმცროს წრფივ წევრებს, გამოკვლეულია ს.ხარიბეგაშვილის მონოგრაფიაში. დარბუს პირველი და მეორე ამოცანის სხვა ვარიანტები არაწრფივი სკალარული განტოლებებისათვის, როცა განტოლება არ შეიცავს უმცროს წრფივ წევრებს, გამოკვლეულია ზემოთხსენებული ავტორების ნაშრომებში. აღსანიშნავია, რომ ამ ნაშრომებში განხილული განტოლებები არ შეიცავენ პირველი რიგის წრფივ წევრებსაც კი, რადგან მათი არსებობა იწვევს არამარტო ტექნიკური ხასიათის სირთულეებს. წარმოდგენილ სადისერტაციო ნაშრომში განხილულია გურსასა და დარბუს ტიპის ამოცანები სუსტად არაწრფივი სისტემებისათვის, რომელიც შეიცავს აგრეთვე პირველი რიგის წარმოებულებსაც. ნაშრომში შესწავლილია გურსას და დარბუს ტიპის სასაზღვრო ამოცანები კუთხოვან არეში, როცა კოორდინატთა სათავიდან გამომავალ კუთხის ერთ გვერდზე, რომელიც წარმოადგენს მახასიათებელს, მოცემულია დირიხლეს პირობა, ხოლო მეორე არამახასიათებელ გვერდზე მოცემულია დირიხლეს, პუანკარეს ან რობინის პირობა. ნაშრომში შემუშავებულია ახალი მიდგომა, რომელიც იძლევა რიმანის ფუნქციის გამოყენების გარეშე უწყვეტ ფუნქციათა კლასში დასმული ამოცანის ეკვივალენტური რედუქციის საშუალებას არაწრფივ ვოლტერას ტიპის ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე, რომელშიც შემავალი ინტეგრალური ოპერატორი კომპაქტურია ამ კლასში, რაც შაუდერის უძრავი წერტილის პრინციპზე დაყრდნობით უზრუნველყოფს სასაზღვრო ამოცანის ლოკალურ ამოხსნადობას. სასაზღვრო ამოცანის მონაცემებზე დადებულ გარკვეულ პირობებში განზოგადებული ამონახსნისათვის

მიღებულია აპრიორული შეფასება, რაც ლერე - შაუდერის უძრავი წერტილის პრინციპზე დაყრდნობით უზრუნველყოფს სასაზღვრო ამოცანის გლობალურ ამოხსნადობას. განხილულია აგრეთვე განზოგადებული ამონახსნის ერთადერთობის და სიგლუვის საკითხი და მოყვანილია გლობალური ამონახსნის აგების სქემა. როცა სისტემაში შემავალი არაწრფივი წევრის რიგი უცნობი ვექტორ - ფუნქციის მიმართ აღემატება ერთს მოყვანილია ის შემთხვევები, როდესაც ლოკალური ამონახსნის არსებობის მიუხედავად არ არსებობს გლობალური ამონახსნი.

შედეგების გამოყენების სფერო

აღსანიშნავია აგრეთვე, რომ სიბრტყეზე ანუ ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში ჰიპერბოლური ტიპის კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა და სისტემათა თეორიაში და მის გამოყენებებში არანაკლები მნიშვნელობა ენიჭება ისეთ სასაზღვრო ამოცანებს, როგორებიცაა გურსას, დარბუსა და ამ ტიპის სხვა ამოცანები. გარკვეული აზრით ეს ამოცანები შეიძლება განვიხილოთ, როგორც შერეული ამოცანების ზღვრული შემთხვევა, როცა საწყის მონაცემთა მზიდი თავს იყრის ერთ წერტილში. ამ მიმართულებით მიღებულ შედეგებს განსაკუთრებით არაწრფივი ჰიპერბოლური სისტემებისათვის დიდი მნიშვნელობა ენიჭება ტალღის გავრცელების თეორიაში. ამ ამოცანებით აღიწერება აირის შთანთქვის პროცესი სორბენტის მიერ, ზებგერით ნაკადში სოლის ჰარმონიული რხევა, სიმის რხევა ბლანტ სითხეში. აქვე შევნიშნოთ, რომ არაერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში შერეული ამოცანის გამოკვლევა ვერ ხერხდება ელიფსურ განტოლებათა სპექტრალური თეორიის გამოყენებით, მაშინ როცა, ეს მახასიათებელთა მეთოდითაა შესაძლებელი, კერძოდ, შერეული ამოცანის ამონახსნის წარმოდგენით განსაზღვრის არის სხვადასხვა ნაწილში კოშის, გურსასა და დარბუს ამოცანების ამოხსნათა საშუალებით.

დისერტაციის მოცულობა და სტრუქტურა

წარმოდგენილი დისერტაცია მოიცავს შესავალს, სამ თავს, ცხრამეტ პარაგრაფს და გამოყენებული ლიტერატურის სიას (44 დასახელებას). დისერტაციის ტექსტი გადმოცემულია 123 გვერდზე.

დისერტაციის შინაარსი

x და t ცვლადების სიბრტყეზე განვიხილოთ შემდეგი სახის მეორე რიგის ჰიპერბოლური სისტემა

$$Lu := u_{tt} - u_{xx} + A(x,t)u_x + B(x,t)u_t + C(x,t)u + f(x,t,u) = F(x,t), \qquad (1)$$

სადაც A, B, C - მოცემული n-ური რიგის კვადრატული მატრიცებია, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ და $F = (F_1, \ldots, F_n)$ მოცემული, ხოლო $u = (u_1, \ldots, u_n)$ უცნობი ვექტორ-ფუნქციებია, $n \geq 2$.

აღვნიშნოთ D_T-თი კუთხოვანი არე, რომელიც მდებარეობს $\{(x,t) \in \mathbf{R}^2 : t > |x|\}$ მახასიათებელი კუთხის შიგნით და შემოსაზღვრულია $\gamma_{1,T} : x = t$, $0 \leq t \leq T$ მახასიათებელი სეგმენტით, $\gamma_{2,T} : x = 0$, $0 \leq t \leq T$ და $\gamma_{3,T} : t = T$, $0 \leq x \leq T$ შესაბამისად დროითი და სივრცითი ორიენტაციის სეგმენტებით.

(1) სისტემისათვის D_T არეში თავების მიხედვით განიხილება შემდეგი ამოცანები:

ვიპოვოთ D_T არეში (1) სისტემის $u = u(x,t)$ ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

პირველ თავში - დირიხლეს პირობებს

$$u|_{\gamma_{i,T}} = \varphi_i, \quad i = 1,2; \qquad (2)$$

მეორე თავში - დირიხლესა და პუანკარეს პირობებს

$$u\big|_{\gamma_{1,T}} = \varphi, \qquad (3)$$

$$(\mu_1 u_x + \mu_2 u_t)\big|_{\gamma_{2,T}} = 0\,; \tag{4}$$

ხოლო მესამე თავში შემდეგი სახის სისტემისათვის

$$Lu := u_{tt} - u_{xx} + A(x,t)u_x + B(x,t)u_t + C(x,t)u \; + f\left(x,t,u, \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u(x,t)dx \right) + \nabla_u g(u) = F(x,t) \tag{5}$$

განიხილება სასაზღვრო ამოცანა დირიხლესა და რობინის პირობებით

$$u\big|_{\gamma_{1,T}} = \varphi\,, \tag{6}$$

$$(u_x - \mu u)\big|_{\gamma_{2,T}} = 0\,, \tag{7}$$

სადაც $\varphi, \varphi_i, i = 1{,}2$, მოცემული ვექტორ-ფუნქციებია, რომლებიც $O = O(0{,}0)$ საერთო წერტილში აკმაყოფილებენ შეთანხმებულობის პირობას $\varphi_1(O) = \varphi_2(O)$, ხოლო μ_1, μ_2, და μ მოცემული n-ური რიგის კვადრატული მატრიცებია; α, β და g მოცემული სკალარული ფუნქციებია. როდესაც $T = \infty$, მაშინ $D_\infty\!: t > |x|,\ x > 0$ და $\gamma_{1,\infty}\!: x = t, 0 \le t < \infty,\ \gamma_{2,\infty}\!: x = 0,\ 0 \le t < \infty$. სკალარულ შემთხვევაში $(n = 1)(1),(2)$ ამოცანას ეწოდება დარბუს პირველი ამოცანა.

ზემოთ მოყვანილი არაწრფივი სასაზღვრო ამოცანების გლობალური ამოხსნადობის დადგენაში ძირითად სირთულეებს წარმოადგენენ:

1) ამონახსნისათვის აპრიორული შეფასების მიღება;
2) მოცემული ამოცანის ეკვივალენტური რედუცირება არაწრფივ ვოლტერას ტიპის ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე;
3) არაწრფივობის იმ შემთხვევების გამოყოფა, როცა ამონახსნს გააჩნია ფეთქებადი ბუნება .

სადისერტაციო ნაშრომში განხორციელებული კვლევა მიმდინარეობს შემდეგი სქემით:

ა) სასაზღვრო ამოცანის ძლიერი განზოგადებული ამონახსნის შემოღება უწყვეტ ფუნქციათა კლასში;
ბ) ასეთი ამონახსნებისათვის აპრიორული შეფასების მიღება;
გ) ჰიპერბოლური სისტემის სტრუქტურასთან დაკავშირებული პარამეტრზე დამოკიდებული ორი ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა და მათი საშუალებით სასაზღვრო ამოცანის ეკვივალენტური რედუქცია ვოლტერას ტიპის არაწრფივ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე უწყვეტ ფუნქციათა კლასში. აღსანიშნავია, რომ ზოგად შემთხვევაში ეს მიდგომა ახალია ერთი სკალარული ჰიპერბოლური განტოლებისათვისაც კი და არ მოითხოვს რიმანის ფუნქციის გამოყენებას;
დ) უძრავი წერტილის ლერე-შაუდერის პრინციპის გამოყენებით სასაზღვრო ამოცანის გლობალური ამოხსნადობის დამტკიცება უწყვეტ ფუნქციათა კლასში;
ე) სასაზღვრო ამოცანის მონაცემთა სიგლუვის კავშირი ამონახსნის სიგლუვესთან. კლასიკური ამონახსნის არსებობა;
ვ) ამონახსნის ერთადერთობის დამტკიცება და სასაზღვრო ამოცანის გლობალური ამონახსნის აგება;
ზ) აპრიორული შეფასების მიღების დროს მოთხოვნილი პირობების დარღვევისას იმ შემთხვევების გამოყოფა, როცა სასაზღვრო ამოცანას არ გააჩნია ამონახსნი.

მიმოვიხილოთ მოკლედ დისერტაციაში მიღებული შედეგები თავებისა და პარაგრაფების მიხედვით.

თავი I შედგება შვიდი პარაგრაფისაგან და მასში განხილულია სასაზღვრო ამოცანა დირიხლეს პირობებით.

§1-ში მოყვანილია (1), (2) სასაზღვრო ამოცანის დასმა, შემოღებულია კლასიკური და განზოგადებული ამონახსნის ცნება.

განსაზღვრება 1. ვთქვათ A, B, C, $F \in C(\overline{D}_T)$, $f \in C(\overline{D}_T \times \mathbf{R}^n)$ და $\varphi_i \in C^1(\gamma_{i,T})$, $i = 1,2$. u ვექტორ-ფუნქციას ეწოდება (1), (2) ამოცანის C კლასის განზოგადებული ამონახსნი D_T არეში, თუ $u \in C(\overline{D}_T)$ და არსებობს ვექტორ-

ფუნქციათა $u^m \in C^2(\overline{D}_T)$ მიმდევრობა ისეთი, რომ $u^m \to u$ და $Lu^m \to F$ $C(\overline{D}_T)$ სივრცეში, ხოლო $u^m\big|_{\gamma_{i,T}} \to \varphi_i$ $C^1(\gamma_{1,T})$ სივრცეში, $i=1,2$, როცა $m \to \infty$.

შენიშვნა 2. ცხადია, რომ (1), (2) ამოცანის $C^2(\overline{D}_T)$ კლასის კლასიკური ამონახსნი აგრეთვე წარმოადგენს *C* კლასის განზოგადებულ ამონახსნს D_T არეში. და, პირიქით, თუ *C* კლასის განზოგადებული ამონახსნი D_T არეში ეკუთვნის $C^2(\overline{D}_T)$ კლასს, მაშინ ეს ამონახსნი აგრეთვე იქნება (1), (2) ამოცანის კლასიკური ამონახსნი. ასევე აღვნიშნოთ, რომ (1), (2) ამოცანის *C* კლასის განზოგადებული ამონახსნი აკმაყოფილებს (2) სასაზღვრო პირობებს ჩვეულებრივი კლასიკური აზრით. იმ შემთხვევაში, როცა $\varphi_2 = 0$ განსაზღვრება 1–ში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $u^m \in C_0^2(\overline{D}_T, \gamma_{2,T}) := \left\{ v \in C^2(\overline{D}_T) : v\big|_{\gamma_{2,T}} = 0 \right\}$.

განსაზღვრება 3. ვთქვათ *A*, *B*, *C*, $F \in C(\overline{D}_\infty)$, $f \in C(\overline{D}_\infty \times \mathbf{R}^n)$ და $\varphi_i \in C^1(\gamma_{i,\infty})$, $i=1,2$. ვიტყვით, რომ (1), (2) ამოცანა არის ლოკალურად ამოხსნადი *C* კლასში, თუ არსებობს $T_0 = T_0(F, \varphi_1, \varphi_2) > 0$ ისეთი, რომ ნებისმიერი დადებითი $T < T_0$-სათვის (1), (2) ამოცანას გააჩნია ერთი მაინც *C* კლასის განზოგადებული ამონახსნი D_T არეში.

განსაზღვრება 4. ვთქვათ *A*, *B*, *C*, $F \in C(\overline{D}_\infty)$, $f \in C(\overline{D}_\infty \times \mathbf{R}^n)$ და $\varphi_i \in C^1(\gamma_{i,\infty})$, $i=1,2$. ვიტყვით, რომ (1), (2) ამოცანა არის გლობალურად ამოხსნადი *C* კლასში, თუ ნებისმიერი დადებითი *T*-სათვის ამ ამოცანას გააჩნია ერთი მაინც *C* კლასის განზოგადებული ამონახსნი D_T არეში.

განსაზღვრება 5. ვთქვათ *A*, *B*, *C*, $F \in C(\overline{D}_\infty)$, $f \in C(\overline{D}_\infty \times \mathbf{R}^n)$ და $\varphi_i \in C^1(\gamma_{i,\infty})$, $i=1,2$. $u \in C(\overline{D}_\infty)$ ვექტორ-ფუნქციას ეწოდება (1), (2) ამოცანის *C* კლასის გლობალური განზოგადებული ამონახსნი, თუ ნებისიერი

დადებითი T-სათვის $u|_{D_T}$ წარმოადგენს ამ ამოცანის C კლასის განზოგადებულ ამონახსნს D_T არეში.

§2-ში სასაზღვრო ამოცანის C კლასის განზოგადებული ამონახსნისათვის იმ შემთხვევაში, როცა არაწრფივი წევრისთვის მართებულია შემდეგი პირობა

$$\left|f_i(x,t,u)\right| \le M_1 + M_2\|u\|,\ (x,t,u)\in \overline{D}_T \times \mathbf{R}^n,\ i=1,\ldots,n, \tag{8}$$

მიღებულია აპრიორული შეფასება

$$\|u\|_{C(\bar{D}_T)} \le c_1\|F\|_{C(\bar{D}_T)} + c_2\|\varphi_1\|_{C^1(\gamma_{1,T})} + c_3, \tag{9}$$

სადაც $M_j = M_j(T) = const \ge 0$, არაუარყოფითი c_i მუდმივები არ არიან დამოკიდებული F და φ-ზე, ამასთან $c_i > 0,\ i=1,2.$

§3-ში მოტანილია ამოცანის ეკვივალენტური რედუქცია ვოლტერას ტიპის არაწრფივ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე უწყვეტ ფუნქციათა კლასში. ახალი მახასიათებელი ცვლადების შემოღების შედეგად

$$\xi = \frac{1}{2}(t+x), \qquad \eta = \frac{1}{2}(t-x) \tag{10}$$

D_T არე გადავა $O_{\xi\eta}$ სიბრტყის $G_T = OP_1P_2$ სამკუთხედში, სადაც $O = O(0,0)$, $P_1 = P_1(T,0)$, $P_2 = P_2\left(\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T\right)$, ხოლო (1), (2) ამოცანა გადაიწერება შემდეგი სახით

$$L_1 v := v_{\xi\eta} + A_1(\xi,\eta)v_\xi + B_1(\xi,\eta)v_\eta + C_1(\xi,\eta)v + f_1(\xi,\eta,v) = F_1(\xi,\eta),\ (\xi,\eta)\in G_T \tag{11}$$

$$v|_{OP_1:\eta=0,0\le\xi\le T} = \psi_1(\xi), \quad 0\le\xi\le T, \tag{12}$$

$$v|_{OP_2:\xi=\eta,0\le\eta\le\frac{1}{2}T} = \psi_2(\eta), \quad 0\le\eta\le\frac{1}{2}T, \tag{13}$$

$v(\xi,\eta) = u(\xi-\eta, \xi+\eta)$ უცნობი ვექტორ-ფუნქციის მიმართ, სადაც

$$
\begin{cases}
A_1(\xi,\eta) = \dfrac{1}{2}\big(A(\xi-\eta,\xi+\eta) + B(\xi-\eta,\xi+\eta)\big),\\
B_1(\xi,\eta) = \dfrac{1}{2}\big(B(\xi-\eta,\xi+\eta) - A(\xi-\eta,\xi+\eta)\big),\\
C_1(\xi,\eta) = C(\xi-\eta,\xi+\eta),\\
F_1(\xi,\eta) = F(\xi-\eta,\xi+\eta), f_1(\xi,\eta,v) = f(\xi-\eta,\xi+\eta,v),
\end{cases} \tag{14}
$$

$$
\psi_1(\xi) = \varphi_1(\xi), \qquad \psi_2(\eta) = \varphi_2(2\eta). \tag{15}
$$

ჩვენი მიდგომა ეყრდნობა (11) სისტემის წარმოდგენას შემდეგი სახით,

$$
\left(\frac{\partial}{\partial\eta} + A_1\right)\left(\frac{\partial v}{\partial\xi} + B_1 v\right) = (B_{1\eta} + A_1B_1 - C_1)v - f_1 + F_1, \tag{16}
$$

რომლის მარცხენა მხარე წარმოადგენს ორი პირველი რიგის დიფერენციალური ოპერატორთა კომპოზიციას, რაც იძლევა საშუალებას ორი ჩვეულებრივი დიფერენციალური სისტემისათვის დასმული სასაზღვრო ამოცანის ინტეგრების შედეგად (11)-(13) სასაზღვრო ამოცანის ექვივალენტურ რედუცირებას შემდეგი სახის ვოლტერას ტიპის არაწრფივ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე:

$$
v(\xi,\eta) = \int_\eta^\xi\int_0^\eta R(\xi,\eta;\theta,\zeta)\big[(B_{1\eta} + A_1B_1 - C_1)v(\theta,\zeta) - f_1(\theta,\zeta,v)\big]d\zeta d\theta +
$$

$$
+ F_3(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta)\in G_T, \tag{16}
$$

სადაც

$$
F_3(\xi,\eta) = \int_\eta^\xi\int_0^\eta R(\xi,\eta;\theta,\zeta)F_1(\theta,\zeta)d\zeta d\theta + F_2(\xi,\eta). \tag{17}
$$

(16) ტოლობა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ვოლტერას ტიპის არაწრფივ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემა, რომელიც შემდეგი ოპერატორული სახით შეიძლება გადავწეროთ

$$
v = L_2v + L_3F_1 + l_0(\psi_1,\psi_2), \tag{18}
$$

სადაც L_2 , L_3 და l_0 ოპერატორები მოქმედებენ შემდეგი ფორმულების მიხედვით

$$(L_2 v)(\xi,\eta)=\int_{\eta}^{\xi}\int_{0}^{\eta}R(\xi,\eta;\theta,\zeta)\left[\left(B_{1\eta}+A_1B_1-C_1\right)v(\theta,\zeta)-f_1(\theta,\zeta,v)\right]d\zeta\, d\theta,$$

$$(\xi,\eta)\in G_T, \quad (19)$$

$$(L_3F_1)(\xi,\eta)=\int_{\eta}^{\xi}\int_{0}^{\eta}R(\xi,\eta;\theta,\zeta)F_1(\theta,\zeta)\,d\zeta\, d\theta,(\xi,\eta)\in G_T, \quad (20)$$

$$\left(l_0(\psi_1,\psi_2)\right)(\xi,\eta)=\Lambda(\eta,\xi,\eta)\psi_2(\eta)+$$

$$+\int_{\eta}^{\xi}\Lambda(\eta,\xi,\theta)\left[K(\theta,\eta,0)\left(\psi_{1\xi}(\theta)+B_1(\theta,0)\psi_1(\theta)\right)\right]d\theta,$$

$$(\xi,\eta)\in G_T, \quad (21),$$

სადაც $v(\xi,\eta)=u(\xi-\eta,\xi+\eta)$, ხოლო $R(\xi,\eta;\theta,\zeta)$, $\Lambda(\eta,\xi,\eta)$ და $K(\theta,\eta,0)$ (1) სისტემასთან დაკავშირებული კონკრეტული მატრიცებია.

§4-ში აპრიორულ შეფასებაზე დაყრდნობით ლერე-შაუდერის უძრავი წერტილის პრინციპის გამოყენებით დამტკიცებულია (1), (2) სასაზღვრო ამოცანის გლობალური ამოხსნადობა უწყვეტ ფუნქციათა კლასში.

თეორემა 5. ვთქვათ შესრულებულია პირობები: (8), $A,B\in C^2(\overline{D}_T)$, $C\in C^1(\overline{D}_T)$, $f\in C^1(\overline{D}_T\times \mathbb{R}^n)$, $F\in C(\overline{D}_T)$ და $\varphi_1\in C^1(\gamma_{1,T})$, $\varphi_2=0$. მაშინ (1), (2) ამოცანას გააჩნია ერთი მაინც C კლასის განზოგადებული ამონახსნი D_T არეში.

§5 ეძღვნება ამოცანის ამონახსნის სიგლუვისა და ერთადერთობის საკითხს, აგრეთვე გლობალური ამონახსნის არსებობას, კერძოდ, როცა $F\in C^1(\overline{D}_T)$, $\varphi_i\in C^2(\gamma_{i,T}), i=1,2$, მაშინ განზოგადებული ამონახსნი u ეკუთვნის $C^2(\overline{D}_T)$ კლასს და წარმოადგენს (1), (2) ამოცანის კლასიკურ ამონახსნს;

მოცემული (1), (2) ამოცანის C კლასის განზოგადებული ამონახსნი იქნება ერთადერთი, თუ არაწრფივი f ვექტორ-ფუნქცია აკმაყოფილებს ლოკალურ ლიფშიცის პირობას, ხოლო ეს შესრულდება, მაგალითად, როცა $f\in C^1(R^n)$.

თეორემა 6. ვთქვათ შესრულებულია პირობები : (8); $A,B \in C^2\left(\bar{D}_\infty\right)$, $C \in C^1\left(\bar{D}_\infty\right), f \in C^1\left(\bar{D}_\infty \times \mathbb{R}^n\right), F \in C^1\left(\bar{D}_\infty\right)$, $\varphi_1 \in C^2(\gamma_{1,\infty})$, $\varphi_2 = 0$. მაშინ (1), (2) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი გლობალური კლასიკური $u \in C^2(\bar{D}_\infty)$ ამონახსნი D_∞ არეში.

§6-ში მოტანილია ამოცანის ლოკალური და გლობალური ამოხსნადობის სხვა შემთხვევები.

დამტკიცებულია, რომ (8) პირობის დარღვევის შემთხვევაშიც კი, ე. ი., როცა

$$\sup_{(x,t)\in\bar{D}_T} \overline{\lim_{\|u\|\to\infty}} \frac{\|f(x,t,u)\|}{\|u\|} = \infty \qquad \forall T > 0, \tag{22}$$

ლოკალურ ამოხსნადობას ყოველთვის აქვს ადგილი:

თეორემა 7. ვთქვათ შესრულებულია პირობები: $A,B \in C^2\left(\bar{D}_\infty\right), C \in C^1\left(\bar{D}_\infty\right)$, $\phi_i \in C^1(\gamma_{i,\infty}),\quad i=1,2,\quad f \in C^1\left(\bar{D}_\infty \times \mathbb{R}^n\right), F \in C\left(\bar{D}_\infty\right)$. მაშინ (1), (2) ამოცანა ლოკალურად ამოხსნადია *C* კლასში განსაზღვრება 3-ის აზრით.

ხოლო, რაც შეეხება გლობალურ ამოხსნადობას - იგი ყოველთვის არ არის მართებული. ამ პარაგრაფში მოყვანილია შემთხვევა, როცა (8) პირობის დარღვევის მიუხედავად, თუ ადგილი აქვს შემდეგ პირობას

$$f = \left(f_1(u), \ldots, f_n(u)\right),\ f_i(u) = \frac{\partial g(u)}{\partial u_i},\ i=1,\ldots,n,\ g \in C^1(\mathbf{R}^n),\quad g \ge 0, \tag{23}$$

მაშინ (1), (2) ამოცანა გლობალურად არის ამოხსნადი.

თეორემა 8. ვთქვათ შესრულებულია პირობები:(23), $A,B \in C^2(\bar{D}_T)$, $C \in C^1(\bar{D}_T)$, $f \in C^1(\bar{D}_T \times \mathbb{R}^n), \varphi_1 \in C^2(\gamma_{1,\infty})$, $\varphi_2 = 0$ $F \in C(\bar{D}_T)$. მაშინ (1), (2) ამოცანას გააჩნია ერთი მაინც *C* კლასის განზოგადებული ამონახსნი D_T არეში.

თეორემა 9. ვთქვათ შესრულებულია პირობები: (23), $A,B \in C^2\left(\bar{D}_\infty\right)$, $C \in C^1\left(\bar{D}_\infty\right), f \in C^1\left(\bar{D}_\infty \times \mathbb{R}^n\right), F \in C^1\left(\bar{D}_\infty\right)$, $\varphi_1 \in C^2(\gamma_{1,\infty})$, $\varphi_2 = 0$. მაშინ (1), (2)

ამოცანას გააჩნია ერთადერთი გლობალური კლასიკური $u \in C^2(\overline{D}_\infty)$ ამონახანი D_∞ არეში.

მოვიყვანოთ $g = g(u)$ ფუნქციის მარტივი მაგალითი, როდესაც მართებულია (22) და (23) პირობები:

$$g(u) = \exp\left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j^{2kj+1}\right], \quad f_i(u) = \frac{\partial g(u)}{\partial u_i} = \lambda_i (2k_i + 1) u_i^{2k_i} g(u), \quad i = 1, \ldots, n,$$

სადაც $\lambda_j = const$, $\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \neq 0$, $k_j \geq 0 -$მთელი რიცხვებია, $j = 1, \ldots, n$.

§7-ში მოყვანილია ამოცანის გლობალური ამონახსნის არარსებობის შემთხვევები.

თეორემა 10 . ვთქვათ $A = B = C = 0, f = f(u) \in C(\mathbf{R}^n)$, $F \in C(\overline{D}_\infty)$, $\varphi_i = 0$, $i = 1,2$. არსებობს რიცხვები $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \neq 0$, ისეთი, რომ

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(u) \leq c_0 - c_1 \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \right|^{\beta} \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, \quad \beta = const > 1, \tag{24}$$

სადაც c_0, $c_1 = const$, $c_1 > 0$. ფუნქცია $F_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i - c_0$ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს

$$F_0 \geq 0 \;, \quad F_0(x,t)\big|_{t \geq 1} \geq c_2 t^{-k}, \quad c_2 = const, \quad 0 \leq k = const \leq 2, \tag{25}$$

მაშინ მოიძებნება ისეთი სასრული დადებითი რიცხვი $T_0 = T_0(F)$, რომ (1), (2) ამოცანას არ გააჩნია C კლასის განზოგადებული ამონახსნი D_T არეში, როცა $T > T_0$.

მოვიყვანოთ $f = f(u)$ არაწრფივ ვექტორ-ფუნქციათა ერთი კლასი, რომელიც აკმაყოფილება (24) პირობას:

$$f_i(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |u_j|^{\beta_{ij}} + b_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

სადაც $a_{ij} = const > 0$, $b_i = const$, $\beta_{ij} = const > 1$; $i, j = 1, \ldots, n$. ამ შემთხვევაში შესაძლებელია ავიღოთ: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = -1$.

თავი II შედგება შვიდი პარაგრაფისაგან და მასში განხილულია სასაზღვრო ამოცანა დირიხლესა და პუანკარეს პირობებით.

§8-ში მოყვანილია (1), (3), (4) სასაზღვრო ამოცანის დასმა, კლასიკური და განზოგადებული ამონახსნის ცნება.

§9-ში განხილულია შემდეგი პირობა დადებული $f = f(x,t,u)$ ვექტორ-ფუნქციაზე

$$\left| f_i(x,t,u) \right| \le M_1 + M_2 \|u\|,\ (x,t,u) \in \overline{D}_T \times \mathbf{R}^n,\ i = 1, \ldots, n, \tag{26}$$

$$M_j = M_j\left(T\right) = const \ge 0,\quad j = 1, 2.$$

μ_i, $i = 1, 2$, მატრიცებზე დადებულ შემდეგ პირობებში

$$\det \mu_1\big|_{\gamma_{2,T}} \ne 0,\ \ (\mu_1^{-1}\mu_2\theta, \theta)\big|_{\gamma_{2,T}} \le 0\quad \forall \theta \in \mathbf{R}^n, \tag{27}$$

(1), (3), (4) სასაზღვრო ამოცანის განზოგადებული ამონახსნისათვის მიღებულია აპრიორული შეფასება

$$\|u\|_{C(\overline{D}_T)} \le c_1 \|F\|_{C(\overline{D}_T)} + c_2 \|\varphi\|_{C^1(\gamma_{1,T})} + c_3, \tag{28}$$

სადაც არაუარყოფითი $c_i = c_i(M_0, M_1, M_2, T)$, $i = 1,2,3$, მუდმივები არ არიან დამოკიდებული u, F და φ-ზე, ამასთან $c_i > 0$, $i = 1,2$.

§10-ში მახასიათებელ ცვლადებზე გადასვლითა და გარკვეულ პარამეტრზე დამოკიდებული ჩვეულებრივ დიფერენციალურ სისტემათა ამოხსნის გამოყენებით, მოყვანილია დასმული ამოცანის ეკვივალენტური რედუქცია ვოლტერას ტიპის არაწრფივ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე უწყვეტ ფუნქციათა კლასში.

§11-ში აპრიორულ შეფასებაზე დაყრდნობით ლერე-შაუდერის უძრავი წერტილის პრინციპის გამოყენებით დამტკიცებულია (1), (3), (4)

სასაზღვრო ამოცანის გლობალური ამოხსნადობა უწყვეტ ფუნქციათა კლასში .

თეორემა 11. ვთქვათ შესრულებულია პირობები: (26), (27), $A,B\in C^2(\overline{D}_T)$, $C\in C^1(\overline{D}_T)$, $f\in C^1(\overline{D}_T\times \mathbf{R}^n)$, $\mu_i\in C^1(\gamma_{2,T})$, $i=1,2$, $\det(\mu_2-\mu_1)\big|_{\gamma_{2,T}}\neq 0$, $F\in C(\overline{D}_T)$ და $\varphi\in C^1(\gamma_{1,T})$. მაშინ (1), (3), (4) ამოცანას გააჩნია ერთი მაინც C კლასის განზოგადებული ამონახსნი D_T არეში.

§12 ეძღვნება ამოცანის ამონახსნის სიგლუვისა და ერთადერთობის საკითხს და გლობალური ამონახსნის არსებობას.

თეორემა 12. ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 11-ის პირობები ნებისმიერი $T>0$-თვის, და ამასთან $F\in C^1(\overline{D}_\infty)$, $\varphi\in C^2(\gamma_{1,\infty})$. მაშინ (1), (3), (4) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი გლობალური კლასიკური $u\in C^2(\overline{D}_\infty)$ ამონახსნი D_∞ არეში.

§13-ში განხილულია სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნადობის საკითხი, როცა სისტემის არაწრფივობის რიგი ერთზე მეტია.

თეორემა 13. ვთქვათ შესრულებულია პირობები: $\det(\mu_2-\mu_1)\big|_{\gamma_{2,T}}\neq 0$, $A,B\in C^2\left(\overline{D}_\infty\right), C\in C^1\left(\overline{D}_\infty\right)$, $\mu_i\in C^1\left(\gamma_{2,\infty}\right)$, $i=1,2$, $\varphi\in C^1(\gamma_{1,\infty})$, $f\in C(\overline{D}_\infty\times ¡^n)$, $F\in C(\overline{D}_\infty)$. მაშინ (1), (3), (4) ამოცანა არის ლოკალურად ამოხსნადი C კლასში.

თუ შესრულებულია თეორემა 13-ის პირობები და ამასთან

$$f=\left(f_1(u),\ldots,f_n(u)\right),\quad f_i(u)=\frac{\partial g(u)}{\partial u_i},\ i=1,\ldots,n,\quad g\in C^1(\mathbf{R}^n)\ ,\quad g(u)\geq 0, \tag{29}$$

მაშინ (1), (3), (4) ამოცანა არის გლობალურად ამოხსნადი უწყვეტ ფუნქციათა კლასში.

მოვიყვანოთ $g = g(u)$ ფუნქციის მარტივი მაგალითი, როდესაც მართებულია (29) პირობები:

$$g(u) = \exp\left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j^{\,2kj+1}\right], \quad f_i(u) = \frac{\partial g(u)}{\partial u_i} = \lambda_i (2k_i + 1) u_i^{2k_i} g(u), \quad i = 1, \ldots, n,$$

სადაც $\lambda_j = const$, $\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \neq 0$, $k_j \geq 0 -$მთელი რიცხვებია, $j = 1, \ldots, n$.

§14-ში, როცა (1) სიტემაში შემავალი არაწრფივი წევრი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x,t,u) \leq c_0 - c_1 \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \right|^{\beta} \qquad \forall (x,t,u) \in \overline{D}_\infty \times \mathbf{R}^n, \tag{30}$$

სადაც $\beta = const > 1$; c_0, $c_1 = const$, $c_1 > 0$. ფუნქცია $F_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i - c_0$ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს

$$F_0 \geq 0, \; F_0(x,t)\big|_{t \geq 1} \geq c_2 t^{-k}, \; 0 \leq k = const \leq 2, \tag{31}$$

დამტკიცებულია (1), (3), (4) ამოცანის ამონახსნის არარსებობა.

თეორემა 14. ვთქვათ $A = B = C = 0$, $f \in C(\overline{D}_\infty \times \mathbb{R}^n)$, $F \in C(\overline{D}_\infty)$, $\varphi = 0$ და შესრულებულია (30), (31) პირობები. მაშინ მოიძებნება ისეთი სასრული დადებითი რიცხვი $T_0 = T_0(F)$, რომ (1), (3), (4) ამოცანას არ გააჩნია *C* კლასის განზოგადებული ამონახსნი D_T არეში, როცა $T > T_0$.

მოვიყვანოთ $f = f(u)$ არაწრფივ ვექტორ-ფუნქციათა ერთი კლასი, რომელიც აკმაყოფილება (30) პირობას:

$$f_i(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, |u_j|^{\beta_{ij}} + b_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

სადაც $a_{ij} = const > 0$, $b_i = const$, $\beta_{ij} = const > 1$; $i, j = 1, \ldots, n$. ამ შემთხვევაში შესაძლებელია ავიღოთ: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = -1$.

თავი III შედგება ხუთი პარაგრაფისაგან და მასში განხილულია სასაზღვრო ამოცანა კუთხოვან არეში დირიხლესა და რობინის ტიპის სასაზღვრო პირობებით ჰიპერბოლურ სისტემათა ერთი კლასისათვის ინტეგრალური არაწრფივობით.

§15-ში მოყვანილია (5), (6), (7) სასაზღვრო ამოცანის დასმა დირიხლესა და რობინის ტიპის სასაზღვრო პირობებით. ანალოგიურად ხდება ამ ამოცანის განზოგადებული და კლასიკური ამონახსნის ცნების შემოღება.

§16-ში (5), (6), (7) სასაზღვრო ამოცანის მონაცემებზე დადებულია შემდეგი პირობები:

$$\left|f_i(x,t,s_1,s_2)\right| \le a + b\|s_1\| + c\|s_2\|,\ i=1,\ldots,n,\quad (x,t,s_1,s_2)\in \bar{D}_T\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n, \tag{32}$$

$$g(s)\ge 0 \quad \forall s\in\mathbb{R}^n, \tag{33}$$

$$\mu\in C^1([0,T]),\ \ \mu^T=\mu,\ \ (\mu\theta,\theta)\big|_{\gamma_{2,T}}\ge 0 \quad \forall\theta\in\mathbb{R}^n, \tag{34}$$

სადაც $a,b,c = const \ge 0,\ i=1,\ldots,n$.

§17-ში მოყვანილია (5), (6), (7) სასაზღვრო ამოცანის რედუქცია ვოლტერას ტიპის არაწრფივ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე უწყვეტ ფუნქციათა კლასში, ხოლო §18-ში განხილულია ამოცანის გლობალური ამოხსნადობა უწყვეტ ფუნქციათა კლასში.

განვიხილოთ შემდეგი პირობები

$$\begin{aligned}&A,B\in C^2(\bar{D}_T),\ \ C\in C^1(\bar{D}_T),\ \ f\in C^1(\bar{D}_T\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n),\\ &\alpha,\beta\in C^1([0,\infty)),\ \ g\in C^1(\mathbb{R}^n),\ \ \mu\in C^1(\gamma_{2,T})\end{aligned} \tag{35}$$

დადებული ამოცანის მონაცემებზე.

თეორემა 15. ვთქვათ შესრულებულია (32) - (35) პირობები, $F\in C(\bar{D}_T)$ და $\varphi\in C^1(\gamma_{1,T})$, მაშინ (5), (6), (7) ამოცანას გააჩნია ერთი მაინც *C* კლასის განზოგადებული ამონახანი D_T არეში.

§19-ში განხილულია სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის და სიგლუვის საკითხები.

თეორემა 16. ვთქვათ შესრულებულია (32) - (35) პირობები ნებისმიერი $T > 0$-თვის, $F \in C^1(\overline{D}_\infty)$, $\varphi \in C^2(\gamma_{1,\infty})$. მაშინ (5), (6), (7) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი კლასიკური $u \in C^2(\overline{D}_\infty)$ ამონახსნი D_∞ არეში.

დასკვნა

აღსანიშნავია, რომ სიბრტყეზე ანუ ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში ჰიპერბოლური ტიპის კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა და სისტემათა თეორიაში და მის გამოყენებებში კოშის და შერეულ ამოცანებთან ერთად დიდი მნიშვნელობა ენიჭება ისეთ სასაზღვრო ამოცანებს, როგორებიცაა გურსას, დარბუსა და ამ ტიპის სხვა ამოცანები. გარკვეული აზრით ეს ამოცანები შეიძლება განვიხილოთ, როგორც შერეული ამოცანების ზღვრული შემთხვევა, როცა საწყის მონაცემთა მზიდი თავს იყრის ერთ წერტილში. ამ ამოცანებით აღიწერება აირის შთანთქმის პროცესი სორბენტის მიერ, ზეზგერით ნაკადში სოლის ჰარმონიული რხევა, სიმის რხევა ბლანტ სითხეში და ზოგადად, რხევითი პროცესები ტალღათა გავრცელების თეორიაში. აქვე შევნიშნოთ, რომ არაერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში შერეული ამოცანის გამოკვლევა ვერ ხერხდება ელიფსურ განტოლებათა სპექტრალური თეორიის გამოყენებით, მაშინ როცა, ეს მახასიათებელთა მეთოდითაა შესაძლებელი, კერძოდ, შერეული ამოცანის ამონახსნის წარმოდგენით განსაზღვრის არის სხვადასხვა ნაწილში კოშის, გურსასა და დარბუს ამოცანების ამოხსნათა საშუალებით.

სადისერტაციო ნაშრომი ეძღვნება მეორე რიგის არაწრფივ ჰიპერბოლურ სისტემათა ზოგიერთი კლასისათვის გურსას და დარბუს ტიპის ამოცანების გამოკვლევას. კერძოდ, ნაშრომის ძირითადი მიზანია ამ სისტემებისათვის სასაზღვრო ამოცანების შესწავლა კუთხოვან არეში, როცა საზღვრის სხვადასხვა ნაწილში მოცემულია დირიხლეს, პუანკარეს ან რობინის პირობები, რაც გულისხმობს ამ ამოცანების გლობალური ამონახსნის არსებობის, არ არსებობის, ერთადერთობის და სიგლუვის საკითხების შესწავლას.

სადისერტაციო ნაშრომში არაწრფივ მეორე რიგის ჰიპერბოლურ სისტემათა ზოგიერთი კლასისათვის გამოკვლეულია გურსას და დარბუს ტიპის სასაზღვრო ამოცანები კუთხოვან არეში, როცა კოორდინატთა სათავიდან გამომავალ კუთხის ერთ გვერდზე, რომელიც წარმოადგენს მახასიათებელს, მოცემულია დირიხლეს პირობა, ხოლო მეორე არამახასიათებელ გვერდზე მოცემულია დირიხლეს, პუანკარეს ან რობინის პირობა. ნაშრომში შემუშავებულია ახალი მიდგომა, რომელიც იძლევა რიმანის ფუნქციის გამოყენების გარეშე უწყვეტ ფუნქციათა კლასში დასმული ამოცანის ეკვივალენტური რედუქციის საშუალებას არაწრფივ

ვოლტერას ტიპის ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე, რომელშიც შემავალი ინტეგრალური ოპერატორი კომპაქტურია ამ კლასში, რაც შაუდერის უძრავი წერტილის პრინციპზე დაყრდნობით უზრუნველყოფს სასაზღვრო ამოცანის ლოკალურ ამოხსნადობას. სასაზღვრო ამოცანის მონაცემებზე დადებულ გარკვეულ პირობებში განზოგადებული ამონახსნისათვის მიღებულია აპრიორული შეფასება, რაც ლერე - შაუდერის უძრავი წერტილის პრინციპზე დაყრდნობით უზრუნველყოფს სასაზღვრო ამოცანის გლობალურ ამოხსნადობას. განხილულია აგრეთვე განზოგადებული ამონახსნის ერთადერთობის და სიგლუვის საკითხი და მოყვანილია გლობალური ამონახსნის აგების სქემა. როცა სისტემაში შემავალი არაწრფივი წევრის რიგი უცნობი ვექტორ - ფუნქციის მიმართ აღემატება ერთს მოყვანილია ის შემთხვევები, როდესაც ლოკალური ამონახსნის არსებობის მიუხედავად არ არსებობს გლობალური ამონახსნი.

ნაშრომის აპრობაცია

დისერტაციაში გადმოცემული შედეგები მოხსენებული იყო საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის მათემატიკის დეპარტამენტის სემინარებზე. ამასთნავე, აღნიშნული შედეგები ასახულია ავტორის პუბლიკაციებში და მოხსენებულ იქნა საერთაშორისო კონფერენციებზე, რომელთა ნუსხაც თან ერთვის ავტორეფერატს. გარდა ამისა, სადოქტორო პროგრამის გეგმის შესაბამისად მომზადდა და ჩაბარდა თემატური სემინარები და კოლოკვიუმები დისერტაციის ძირითადი შედეგების შესახებ.

გიორგი დეკანოიძის შრომების სია

1. G. Dekanoidze. On the global solvability of the first Darboux problem for one class of nonlinear second order hyperbolic systems. XXXI International Enlarged Sessions of the Seminar of Ilia Vekua Institute of Applied Mathematics (VIAM) of Ivane Javakhisvili Tbilisi State University (TSU) Dedicated to the 110th Birthday Anniversary of Academician Ilia Vekua , April 19–21, 2017.

   http://www.viam.science.tsu.ge/enlarged/2017
2. G. Dekanoidze, The Boundary Value Problem for Some Class of Second Order Hyperbolic Systems. VIII Annual International Conference of the

Georgian Mathematical Union. Batumi, September 4 – 8, 2017. http://www.gmu.ge/batumi2017

3. G. Dekanoidze. The Darboux type problems for one class of nonlinear second order hyperbolic systems. XXXII International Enlarged Sessions of the Seminar of Ilia Vekua Institute of Applied Mathematics (VIAM) of Ivane Javakhisvili Tbilisi State University (TSU), April 18–20, 2018. http://www.viam.science.tsu.ge/enlarged/2018/
4. G.Dekanoidze and S.Kharibegashvili, On the global solvability of the first Darboux problem for one class of nonlinear second order hyperbolic systems. Mem. Differential Equations Math. Phys. **71** (2017), 51-68.
5. G.Dekanoidze, On the solvability of a boundary value problem with Dirichlet and Poincare conditions in the angular domain for one class of nonlinear second order hyperbolic systems. Mem. Differential Equations. Math. Phys.**71** (2017), 151-154.
6. G.Dekanoidze, On nonexistence of a solution of the Darboux first problem for one class of second order nonlinear hyperbolic systems. Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, **31** (2017), 35-38.

SUMMARY

The Boundary Value Problems for Some Class of Nonlinear Second Order Hyperbolic Systems

The dissertation thesis is dedicated to the research of the Goursat and Darboux type problems for some class of second order nonlinear hyperbolic systems. Particularly, the main purpose of the work is to study boundary value problems for these systems in the angular area, where on different parts of the border are given the Dirichlet, Poincare or Robin conditions, which implies the study of the questions on existence, absence, uniqueness and smoothness of a global solution of these problems.

It is noteworthy that, on a plane, i.e. in the case of two independent variables, in the theory of hyperbolic partial differential equations and systems and their applications, the boundary value problems such as the Goursat, Darboux and

similar type problems acquire a great significance together with the Cauchy and mixed problems. In some sense, these problems can be considered as a limiting case of the mixed problems when the initial data carrier turns into one point. By these problems are described the absorption of gas by sorbent, harmonic oscillation of wedgein the supersonic stream, oscillation of a string in a liquid, and generally,oscillation processes in the wave scattering theory. It should be noted that in the case of nonhomogeneous boundary conditions the mixed problems cannot be investigated by use of spectral theory of elliptic equations, whereas this is possible with the method of characteristics, in particular, by representation of the solution of mixed problem in different parts of the domain by solutions of the Cauchy, Goursat and Darboux problems.

If in the linear case the Goursat and Darboux type problems are well studied for a scalar hyperbolic equation, there are additional technical and theoretical difficulties and new effects when moving to systems.This was first noted by A. Bitsadze in his work where he constructed second order hyperbolic systems for which homogeneous problem, correspondent to the Goursat problem, has finite and in some cases even infinite number of linearly independent solutions, and in his next work, the simple examples of hyperbolic systems explain the impact of lower terms on the correctness of the Goursat problem. The results obtained in this direction are especially important for non-linear hyperbolic systems in the wave scattering theory.

In the dissertation work for some classes of nonlinear second-order hyperbolic systems it is investigated the Goursat and Darboux type boundary value problems in the angular domain, when on one side of the angle coming out from the origin of coordinates, which represents the characteristics, is given the Dirichlet condition, and on the second non-characteristic side is given the Dirichlet, Poincare or Robin condition. In the dissertation, a new approach is elaborated, which without use of the Riemann function allows to reduce equivalently a problem setting in the class of continuous functions to the Volterra type system of nonlinear integral equations. The corresponding integral operator is compact in that class of continuous functions and due to the Schauder'sfixed point principle this provides local solvability of the boundary value problem. In certain conditions imposed on the data of the boundary value problem for generalized solution a priori estimate is obtained and due to the Lerray-Schauder's fixed point principle the global solvability of the boundary value problem is established.The issue of uniqueness and smoothness of a generalized solution is also discussed and the scheme of construction of a global solution is proposed.When the order of nonlinear term of the system with respect to unknown vector-function exceeds one, there are given cases when we have no global solution despite the existence of a local solution.